## Fourier-Reihen

Dies ist eine Formelsammlung mit nur wenigem erklärenden Text, zur Unterstützung bei der Anwendung der komplexen Fourier-Reihe, der reellen Fourier-Reihe, und der diskreten Fourier-Reihe.

## 1. Die komplexe Fourier-Reihe

Jede stückweise stetig integrierbare<sup>1</sup> komplexwertige Funktion  $A(t) \in \mathbb{C}$  kann in eine Fourier-Reihe zerlegt werden, wenn sie periodisch mit der Periode T ist, oder wenn sie nur auf dem endlichen Intervall  $[t_0, t_0 + T] \in \mathbb{R}$  definiert ist:

$$A(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{+ik\frac{2\pi}{T} \cdot t} \quad \text{mit } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$
 (1a)

Die komplexen Fourier-Koeffizienten  $c_k \in \mathbb{C}$  sind

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} dt \ A(t)e^{-ik\frac{2\pi}{T} \cdot t} \quad . \tag{1b}$$

Mit der Umbenennung  $c_{-k} \leftrightarrow c_k$  entsteht aus diesen Formeln

$$A(t) \stackrel{\text{(1a)}}{=} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{-ik\frac{2\pi}{T}\cdot t} \quad \text{mit } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$c_k \stackrel{\text{(1b)}}{=} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} dt \ A(t) e^{+ik\frac{2\pi}{T}\cdot t} \quad .$$

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> sämtliche Funktionen, die in der Physik vorkommen, erfüllen dies Kriterium.

2 Fourier-Reihen

Es ist also egal, ob man im ersten Exponenten +i und im zweiten Exponenten -i schreibt, oder umgekehrt. Beide Konventionen tauchen in der Literatur vielfach auf. Man muss halt nur darauf achten, dass man stets konsistent bei einer Konvention bleibt.

## 2. Die reelle Fourier-Reihe

Wenn A(t) reellwertig ist, dann ist

$$c_0 \stackrel{\text{(1b)}}{=} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} dt \ A(t)$$

offensichtlich reell. Aber alle anderen Fourier-Koeffizienten  $c_k = (1b)$  sind im Allgemeinen auch bei  $A(t) \in \mathbb{R}$  komplex. Um in diesem Fall die Reihenentwicklung mit reellen Fourier-Koeffizienten zu formulieren, nutzt man dass der Fourier-Koeffizient  $c_k$  im Fall  $A(t) \in \mathbb{R}$  offensichtlich konjugiert komplex zum Koeffizienten  $c_{-k}$  ist:

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} dt \ A(t)e^{-ik\frac{2\pi}{T}\cdot t} \stackrel{\text{(1b)}}{=} c_k = \overline{c_{-k}} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} dt \ A(t)e^{+ik\frac{2\pi}{T}\cdot t}$$
 (2)

Also kann man im Fall  $A(t) \in \mathbb{R}$  die Reihe (1a) folgendermaßen schreiben:

$$A(t) \stackrel{\text{(1a)}}{=} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{+ik\frac{2\pi}{T}\cdot t} \quad \text{mit } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$= c_0 + \sum_{k=+1}^{+\infty} \left( c_k e^{+ik\frac{2\pi}{T}\cdot t} + \overline{c_{-k}} e^{-ik\frac{2\pi}{T}\cdot t} \right) \quad \text{mit } k = 1, 2, 3, \dots$$
 (3)

Mit den Definitionen

$$\frac{a_k - ib_k}{2} := c_k \quad \text{mit } a_k, \, b_k \in \mathbb{R}$$
 (4a)

$$x := k \frac{2\pi}{T} \cdot t \tag{4b}$$

und der Euler'schen Formel

$$e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x \tag{4c}$$

ergibt sich für die Fourier-Reihe

$$A(t) \stackrel{(3)}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[ \frac{a_k - ib_k}{2} (\cos x + i\sin x) + \frac{a_k + ib_k}{2} (\cos x - i\sin x) \right]$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[ a_k \cos(k\frac{2\pi}{T} \cdot t) + b_k \sin(k\frac{2\pi}{T} \cdot t) \right]$$
 (5a)

Die Fourier-Koeffizienten sind

$$\frac{a_k - ib_k}{2} \stackrel{\text{(4a)}}{=} c_k \stackrel{\text{(1b)}}{=} \frac{1}{T} \int_{1}^{t_0 + T} dt \ A(t) e^{-ik\frac{2\pi}{T} \cdot t} \quad .$$

Mit (4c) folgen daraus die reellen Fourier-Koeffizienten

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} dt \ A(t) \cos(k\frac{2\pi}{T} \cdot t)$$
 (5b)

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} dt \ A(t) \sin(k\frac{2\pi}{T} \cdot t) \quad . \tag{5c}$$

4 FOURIER-REIHEN

## 3. Die diskrete Fourier-Reihe

In vielen technischen Anwendungen liegt A(t) nicht als kontinuierliche Funktion vor, sondern als Folge von N diskreten Werte  $A_n$  mit n = 0, 1, 2, ..., (N-1). Dann werden die Fourier-Koeffizienten nicht durch das Integral (1b) bestimmt, sondern durch die Summe

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} A_n e^{-ik\frac{2\pi}{N} \cdot n} \quad , \tag{6a}$$

und die Fourier-Reihe (1a) wird zu

$$A_n = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{+ik\frac{2\pi}{N} \cdot n} \quad . \tag{6b}$$

Bei den kontinuierlichen Reihen (1) und (5) muss man unendlich viele Fourier-Koeffizienten berechnen (sprich: die Folgen analytisch, aber nicht numerisch berechnen) um die Funktion exakt darzustellen. Für eine exakte Darstellung der N Elemente der Folge  $\{A_n\}$  benötigt man dagegen genau N Fourier-Koeffizienten. Das ist vernünftig, weil die Folgen  $\{A_n\}$  und  $\{c_k\}$  genau gleich viel Information enthalten, nämlich jeweils 2N reelle Zahlen, N für die Realteile und N für die Imaginärteile jeder Folge.

Falls alle  $A_n \in \mathbb{R}$  reell sind, besteht der Informationsinhalt der Folge  $\{A_n\}$  aus nur N reellen Zahlen, und in der Folge der Fourier-Koeffizienten  $\{c_k\}$  entfallen wegen

$$c_0 \stackrel{\text{(6a)}}{=} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} A_n \in \mathbb{R} \quad ; \quad c_{N/2} \stackrel{\text{(6a)}}{=} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} A_n \cdot (-1)^n \in \mathbb{R} \quad (7)$$

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Das ist offensichtlich immer der Fall, wenn man die Reihe nicht analytisch sondern mit endlich vielen Stützstellen am PC berechnet.

2 Imaginärteile. Die Imaginärteile aller anderen N-2 Fourier-Koeffizienten sind aber im Allgemeinen auch im Fall reeller  $A_n$  von Null verschieden. Diese N-2 Koeffizienten enthalten jedoch nur N/2-1 unabhängige Realteile und N/2-1 unabhängige Imaginärteile, weil  $c_{N-k}=\overline{c_k}$  gilt:

$$c_{N-k} \stackrel{\text{(6a)}}{=} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} A_n e^{-i(N-k)\frac{2\pi}{N} \cdot n}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} A_n \underbrace{e^{-iN\frac{2\pi}{N} \cdot n}}_{=1} e^{+ik\frac{2\pi}{N} \cdot n} = \overline{c_k}$$
(8)

Man braucht demnach im Fall reeller  $A_n$  zusätzlich zu  $c_0$  und  $c_{N/2}$  nur N/2-1 weitere Fourier-Koeffizienten  $c_k$  zu berechnen, der Rest ergibt sich aus (8).

Der Informationsgehalt der Folge  $\{c_k\}$  im Fall einer rein reellen Folge  $\{A_n\}$  ist 2 Realteile gemäß (7) plus N/2-1 Realteile plus N/2-1 Imaginärteile gemäß (8), macht insgesamt N reelle Zahlen. Die Folgen  $\{c_k\}$  und  $\{A_n\}$  haben also auch in diesem Fall den gleichen Informationsgehalt.