Die Partielle Ableitung

Eine irreführende Verwendung dieses Begriffs, die von der in der Mathematik üblichen abweicht, ist in der Physik weit verbreitet

Inhalt

1. Übersicht 1

2. Die Regeln der Ableitung 2
   2.1. Konvention M 2
   2.2. Konvention M+ 7
   2.3. Konvention P 8

3. Warnung vor Missbrauch 10

Literatur 13

1. Übersicht

Man begegnet in der physikalischen Praxis sehr häufig Funktionen der Form $L\big(t, q(t), \dot{q}(t)\big)$. Charakteristisch für diese Art von Funktionen ist es, dass Variable (in diesem Beispiel t) sowohl explizit als auch implizit (in diesem Beispiel als Variable von q und $\dot{q}$) vorkommen. Solche gemischten Funktionen sind nach der „reinen Lehre“ der Mathematiker nicht zulässig, weil sie unverträglich mit den mathematischen Regeln der Differentialrechnung sind. Da viele Physiker aber nur ungern auf gemischte Funktionen verzichten würden, haben sie die Regeln der Differentialrechnung so erweitert, dass die Unverträglichkeit von gemischten Funktionen und

Differentialrechnung behoben wird.

Dazu unterschieden Physiker zwischen einer „totalen Ableitung"

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial q}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\mathrm{d}\dot{q}}{\mathrm{d}t} \,, \tag{1}$$

bei der die Kettenregel anzuwenden ist, und einer „expliziten Ableitung"

$$\frac{\partial L}{\partial t} \,, \tag{2}$$

bei der die Kettenregel *nicht* anzuwenden, sondern nur nach der expliziten Variablen abzuleiten ist. Irreführenderweise wird die explizite Ableitung als „partielle Ableitung" bezeichnet.

Wir werden die Methode der Physiker im Folgenden Konvention P nennen. Die „reine Lehre" der Mathematiker werden wir in diesem Artikel als Konvention M bezeichnen. Außerdem definieren wir, um den Unterschied zwischen den Konventionen P und M klarer darstellen zu können, eine Konvention M+ , die in der Nomenklatur Konvention M ähnlich ist, inhaltlich jedoch Konvention P entspricht.

Im folgenden Abschnitt fassen wir zunächst die Regeln der Ableitung gemäß Konvention M kurz zusammen, und stellen dann die abweichenden Regeln nach Konvention M+ und Konvention P vor. Insbesondere stellen wir den Begriff „partielle Ableitung" klar, den Konvention P in irreführender Weise verwendet. Im letzten Abschnitt geben wir noch einen Hinweis zur korrekten Anwendung von Konvention P.

2. Die Regeln der Ableitung

2.1. Konvention M

Unter Konvention M verstehen wir die Regeln der Ableitung, wie sie in der mathematischen Literatur üblich sind.

Definitionen:

Wir bezeichnen f als explizite, x als implizite Variable der Funktion $j(f(x))$. Die Funktion $m(n(x), f(x), y)$ hat die expliziten Variablen n, f, y, und die implizite Variable x. x ist eine explizite Variable von n und von f.

Die Ableitung einer Funktion f, die von genau einer expliziten Variablen x abhängt (wobei x von weiteren Variablen abhängen kann, aber nicht muss), ist definiert durch

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad . \tag{3a}$$

Wenn eine Funktion $g(x, y)$ von mehreren expliziten Variablen abhängt (die ihrerseits von weiteren Variablen abhängen können, aber nicht müssen), so wird ihre partielle Ableitung nach x definiert durch

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x, y) - g(x,y)}{\Delta x} \quad . \tag{3b}$$

Das partielle Differential nach x einer Funktion wird durch

$$\mathrm{d}_x f(x) \equiv \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x \tag{4a}$$

$$\mathrm{d}_x g(x,y) \equiv \frac{\partial g}{\partial x}\,\mathrm{d}x \tag{4b}$$

definiert. Das totale Differential einer Funktion wird definiert als die Summe der partiellen Differentiale nach allen ihren expliziten Variablen:

$$\mathrm{d}f(x) \equiv \mathrm{d}_x f = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x \tag{5a}$$

$$\mathrm{d}g(x,y) \equiv \mathrm{d}_x g + \mathrm{d}_y g = \frac{\partial g}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial g}{\partial y}\,\mathrm{d}y \tag{5b}$$

„Das Differential $\mathrm{d}x$ einer unabhängigen Variablen x ist gleich ihrem Zuwachs, dem man einen beliebigen Wert beimessen kann.“ [1]

Eine partielle Ableitung einer Funktion, die von nur einer expliziten Variablen abhängt, wird nicht definiert.

Eine Ableitung (ohne das Wort „partiell“ und mit dem Buchstaben d gekennzeichnet) einer Funktion mehrerer expliziter Veränderlicher nach einer dieser Veränderlichen (also ein Ausdruck der Art $\frac{\mathrm{d}g(x,y)}{\mathrm{d}x}$) wird nicht definiert.

Konvention M verwendet also das Zeichen ∂ und bezeichnet es als partielle Ableitung, wenn eine Ableitung einer Funktion gebildet wird, die von mehreren expliziten Variablen abhängt. Dagegen spricht Konvention M von Ableitung und benutzt das Zeichen d, wenn die Ableitung einer Funktion gebildet wird, die nur von einer einzigen expliziten Variablen abhängt.

Irgendwelche Folgen hat die nominelle Unterscheidung von Ableitung und partieller Ableitung nach Konvention M nicht. Insbesondere ist sowohl bei partieller Ableitung wie bei Ableitung die Kettenregel (siehe unten) anzuwenden. Differentiale sind dagegen immer mit dem Buchstaben d zu schreiben, und ein partielles Differential einer Funktion mehrerer Veränderlicher ist etwas anderes als ihr totales Differential.

Kettenregel:
Die Ableitung bzw. partielle Ableitung einer Funktion nach einer Variablen x ist gleich der Summe der Ableitungen bzw. partiellen Ableitungen der Funktion nach jeder ihrer expliziten Variablen, wobei jeder Summand multipliziert wird mit der Ableitung bzw. partiellen Ableitung dieser expliziten Variablen nach x:

$$\frac{\partial m(n(x),f(h(x)),y)}{\partial x} = \frac{\partial m}{\partial n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial m}{\partial f}\underbrace{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}}_{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}h}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}} + \frac{\partial m}{\partial y}\underbrace{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}_{=0} \tag{6}$$

Das partielle Differential einer Funktion nach einer Variablen x ist gleich der Summe der partiellen Ableitungen bzw. der Ableitung der Funktion nach jeder ihrer expliziten Variablen, wobei jeder Summand multipliziert wird mit der Ableitung bzw. partiellen Ableitung dieser expliziten Variablen nach x, und multipliziert wird mit dem Differential $\mathrm{d}x$:

$$\mathrm{d}_x p(f(x), g(x,y)) = \frac{\partial p}{\partial f}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial p}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial x}\,\mathrm{d}x \tag{7}$$

Das totale Differential einer Funktion ist gleich der Summe ihrer partiellen Differentiale nach den expliziten Variablen:

$$\mathrm{d}p(f(x), g(x,y)) = \mathrm{d}_f p + \mathrm{d}_g p \tag{8}$$

Gemischte Funktionen:
Als gemischte Funktionen bezeichnen wir Funktionen der Art $q(f(x), x, y)$, in denen mindestens eine Variable sowohl explizit als auch implizit vorkommt.

Wir bilden die partielle Ableitung von q nach x:

$$\frac{\partial q(f(x), x, y)}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial f}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial q}{\partial x}\underbrace{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}}_{=1} + \frac{\partial q}{\partial y}\underbrace{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}_{=0} \qquad \text{ist falsch!} \tag{9}$$

Hier steht links und rechts vom Gleichheitszeichen $\frac{\partial q}{\partial x}$, obwohl $\frac{\partial q}{\partial f}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ im allgemeinen verschieden von Null ist. Das gleiche Problem taucht auf, wenn man das partielle Differential einer gemischten Funktion nach der explizit und implizit vorkommenden Variablen bilden will (und der Fehler pflanzt sich dann natürlich ins totale Differential fort):

$$\mathrm{d}_x q(f(x), x, y) = \frac{\partial q}{\partial f}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial q}{\partial x}\underbrace{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}}_{=1}\mathrm{d}x + \frac{\partial q}{\partial y}\underbrace{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}_{=0}\mathrm{d}x \tag{10}$$

Wieder taucht das ominöse $\frac{\partial q}{\partial x}$ auf, das nach (9) Unsinn ergibt, weil es mehrdeutig ist. Aus diesem Grund sind gemischte Funktionen nach Konvention M *nicht zulässig*. Nach Konvention M darf jede Variable in einer Funktion entweder nur explizit oder nur implizit vorkommen.

Diese Forderung von Konvention M lässt sich einfach erfüllen durch die Definition von Hilfsfunktionen der Art

$$X(x) \equiv x \tag{11}$$

und die Ersetzung

$$q(f(x), x, y) \longrightarrow Q(f(x), X(x), y)\ . \tag{12}$$

X kommt in Q nur explizit vor, x nur implizit. Die partielle Ableitung von Q nach x wird damit

$$\frac{\partial Q(f(x), X(x), y)}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial f}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial Q}{\partial X}\underbrace{\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}}_{=1} \quad , \tag{13}$$

und das partielle Differential ergibt sich zu

$$\mathrm{d}_x Q(f(x), X(x), y) = \frac{\partial Q}{\partial f}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial Q}{\partial X}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x \quad . \tag{14}$$

Nicht alle Physiker waren damit zufrieden, gemischte Funktionen mithilfe geeigneter Hilfsfunktionen aus der Welt zu schaffen. Deshalb erfanden sie eine alternative Methode um auch gemischte Funktionen zulassen zu können, die wir als „Konvention P“ bezeichnen. Als Zwischenschritt beschreiben wir im folgenden Abschnitt „Konvention M+“. M+ und P unterscheiden sich nur in der Nomenklatur, aber es gibt keinen inhaltlichen Unterschied.

2.2. Konvention M+

Die unsinnige Gleichung (9) konnte mit der Hilfsfunktion $X(x) \equiv x$ und der Ersetzung $q(f(x), x, y) \to Q(f(x), X(x), y)$ in die korrekte Gleichung (13) umgewandelt werden. Jetzt wandeln wir X nach x und Q nach q zurück. Selbstverständlich darf dabei nicht kurzerhand X durch x und Q durch q ersetzt werden, denn das würde sofort wieder zur falschen Gleichung (9) zurückführen. Der entscheidende Punkt in (13) ist, dass durch $\frac{\partial Q}{\partial X}$ eindeutig klargestellt wird, dass die Ableitung nach dem expliziten X, aber nicht nach dem impliziten, in f versteckten x gemeint ist. Diese Klarstellung dürfen wir bei der Rückwandlung nicht verlieren. Die korrekt rückgewandelte Gleichung (13) lautet deshalb

$$\frac{\partial q(f(x), x, y)}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial f} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + \left.\frac{\partial q}{\partial x}\right|_e \tag{15}$$

$$\Big|_e \equiv \text{Ableitung nur nach der expliziten Variablen}$$

Die Rückwandlung des korrekten partiellen Differentials (14) ergibt

$$\mathrm{d}_x q(f(x), x, y) = \frac{\partial q}{\partial f} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \mathrm{d}x + \left.\frac{\partial q}{\partial x}\right|_e \mathrm{d}x \quad . \tag{16}$$

Um hieraus eine einfache Regel formulieren zu können, bringen wir das Zeichen $|_e$ *immer* an, wenn bei Anwendung der Kettenregel nach einer expliziten Variablen abgeleitet wird, nicht nur dort wo es zur Unterscheidung von der Ableitung bzw. partiellen Ableitung gemischter Funktionen nach einer impliziten Variablen erforderlich ist:

$$\frac{\partial q(f(h(x)), x, y)}{\partial x} = \left.\frac{\partial q}{\partial f}\right|_e \underbrace{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}}_{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}h}\big|_e \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}} + \left.\frac{\partial q}{\partial x}\right|_e \tag{17}$$

$$\mathrm{d}_x q(f(x), x, y) = \left.\frac{\partial q}{\partial f}\right|_e \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \mathrm{d}x + \left.\frac{\partial q}{\partial x}\right|_e \mathrm{d}x \tag{18}$$

Das ist bereits alles. Offensichtlich ergibt folgende Neuformulierung der Regeln für die Bildung von Ableitungen bzw. partiellen Ableitungen und partiellen Differentialen immer das korrekte Ergebnis, auch im Fall gemischter Funktionen:

Die Ableitung bzw. partielle Ableitung einer Funktion nach einer Variablen x ist gleich der Summe der mit dem Zeichen $|_e$ zu kennzeichnenden Ableitungen bzw. partiellen Ableitungen der Funktion nach jeder ihrer expliziten Variablen, wobei jeder Summand multipliziert wird mit der Ableitung bzw. partiellen Ableitung dieser expliziten Variablen nach x. Das Zeichen $|_e$ bedeutet, dass nur nach der expliziten Variablen abzuleiten ist, die Kettenregel also nicht angewendet wird.

Das partielle Differential einer Funktion nach einer Variablen x ist gleich der Summe der mit dem Zeichen $|_e$ zu kennzeichnenden Ableitungen bzw. partiellen Ableitungen der Funktion nach jeder ihrer expliziten Variablen, wobei jeder Summand multipliziert wird mit der Ableitung bzw. partiellen Ableitung dieser expliziten Variablen nach x, und multipliziert wird mit dem Differential $\mathrm{d}x$. Das Zeichen $|_e$ bedeutet, dass nur nach der expliziten Variablen abzuleiten ist, die Kettenregel also nicht angewendet wird.

Diese Erweiterung der Regeln ist der einzige Unterschied zwischen Konvention M+ und Konvention M.

2.3. Konvention P

Konvention P unterscheidet sich von Konvention M+ nur durch die Nomenklatur und die Schreibweise. Einen inhaltlichen Unterschied gibt es nicht.

Zunächst beseitigt Konvention P die ebenso lästige wie nutzlose

Unterscheidung zwischen „Ableitung“ mit dem Zeichen d und „partieller Ableitung“ mit dem Zeichen ∂. Beides wird laut Konvention P als totale Ableitung bezeichnet, und mit dem Buchstaben d gekennzeichnet. Genau wie bei der Ableitung und partiellen Ableitung von Konvention M, wird bei der totalen Ableitung von Konvention P die Kettenregel angewendet.

Dadurch wird der Buchstabe ∂ frei. Konvention P verwendet ihn, um die explizite Ableitung bzw. explizite partielle Ableitung zu kennzeichnen, bei der die Kettenregel *nicht* angewendet wird. Das Zeichen $|_e$ ersetzt also das Zeichen $|_e$ von Konvention M+.

Die Ableitung nach x und das partielle Differential nach x der gemischten Funktion q werden demnach gemäß Konvention P folgendermaßen geschrieben:

$$\frac{\mathrm{d}q(f(h(x)),x,y)}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial q}{\partial f}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial q}{\partial x} \tag{19}$$

$$\mathrm{d}_x q(f(h(x)),x,y) = \frac{\partial q}{\partial f}\underbrace{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}}_{\frac{\partial f}{\partial h}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}}\mathrm{d}x + \frac{\partial q}{\partial x}\,\mathrm{d}x \tag{20}$$

Falls beide Arten der Ableitung zum gleichen Ergebnis führen, bleibt es dem Geschmack des Anwenders überlassen, welche er bevorzugt. Beispielsweise gilt

$$\frac{\mathrm{d}q(f(h(x)),x,y)}{\mathrm{d}y} = \frac{\partial q}{\partial y}\ , \tag{21}$$

so dass es egal ist, welche Form man verwendet.

Soweit ist Konvention P logisch und praktisch. Leider behielt Konvention P aber, als sie das Zeichen ∂ der partiellen Ableitung von Konvention M zur Markierung der expliziten Ableitung umwidmete, unsinnigerweise den Namen „partielle Ableitung“ bei. An der expliziten Ableitung $\frac{\partial m}{\partial f}$ ist absolut nichts „partieller“ als an der totalen Ableitung $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}f}$. Leider ist aber der irreführende Name in Konvention P fest verwurzelt, und man wird ihn wohl nicht mehr los werden. Also werden sich auch künftige Generationen von Physikstudenten über den Namen „partielle Ableitung“ den Kopf zerbrechen und vergeblich versuchen, irgendeinen begreifbaren Sinn hinter dieser Bezeichnung zu entdecken.

In der folgenden Tabelle stellen wir Konvention M+ und Konvention P vergleichend nebeneinander:

	Konvention M+		Konvention P	
Ableitung	Zeichen	Name	Zeichen	Name
mit Kettenregel	d	Ableitung	d	totale Abl.
mit Kettenregel	∂	partielle Abl.	d	totale Abl.
ohne Kettenregel	$\vert_e$	explizite Abl.	∂	partielle Abl.

3. Warnung vor Missbrauch

Die irreführenderweise „partielle“ Ableitung genannte Ableitung von Konvention P ist nichts anderes als die explizite Ableitung von Konvention M+ . Ihre Verwendung ist nur sinnvoll (a) in Faktoren von Produkten, die gemäß der Kettenregel gebildet werden, oder (b) wenn beide Arten der Ableitung ohnehin zum gleichen Ergebnis führen. Missbräuchliche Anwendung an anderen Stellen kann mehrdeutige Ergebnisse nach sich ziehen. Wir erläutern diesen Hinweis anhand einiger Beispielfunktionen:

$$\begin{aligned} a(x,y) &\equiv x+y \\ b\big(a(x),x\big) &\equiv a\cdot x \qquad (22a) \\ X(x) &\equiv x \\ B\big(a(x),X(x)\big) &\equiv a\cdot X \qquad (22b) \\ \beta(x) &\equiv (x+y)\cdot x = x^2+xy \qquad (22c) \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt

$$b = B = \beta \quad \text{für beliebige } x, y \ .$$

Nach Konvention P werden bei der partiellen (d. h. also expliziten) Ableitung nur explizite Variable beachtet, die Kettenregel wird *nicht* angewendet:

$$\frac{\partial b}{\partial x} = a = x + y \tag{23a}$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} = 0 \tag{23b}$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} = 2x + y \tag{23c}$$

Nach Konvention P ist also $\frac{\partial b}{\partial x} \neq \frac{\partial B}{\partial x} \neq \frac{\partial \beta}{\partial x}$, obwohl $b = B = \beta$ für beliebige x, y gilt.

Tatsächlich gibt es aber bei Konvention P nie einen Anlass, die partielle Ableitung mit derart widersprüchlichen Resultaten zu verwenden. Regelmäßig ist es die totale Ableitung, die den physikalisch gemeinten Sachverhalt trifft. Betrachten wir dazu eine typische Anwendung: Wenn B irgendeine Messgröße darstellt, die von mehreren Messgrößen x,y,z,... abhängt, dann möchte man häufig wissen wie B sich ändert, wenn sich beispielsweise x um einen gewissen Betrag verändert, während y,z,... unverändert bleiben. Wer Konvention M oder M+ verwendet, findet das mithilfe der partiellen Ableitung $\frac{\partial B}{\partial x}$ heraus. Bei Verwendung von Konvention P kommt man zum gleichen Resultat mit der totalen Ableitung $\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}x}$, dagegen mit der partiellen Ableitung $\frac{\partial B}{\partial x}$ nur dann, wenn die Abhängigkeit von x ausschließlich explizit ist (so wie oben bei der Funktion $\beta(x, y)$).

Die Vektoroperatoren grad, div, rot werden für Funktionen definiert, die ausschließlich explizit von den Raum-Zeit-Koordinaten abhängen. Es ist auch nach Konvention P üblich (nach den Konvention M und M+ sowieso), sie mit partiellen Ableitungen zu definieren:

* Kartesische Koordinaten mit Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$:

$$\operatorname{grad} f \equiv \frac{\partial f}{\partial x}\,\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\boldsymbol{e}_z \tag{24a}$$

$$\operatorname{div} g \equiv \frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} + \frac{\partial g_z}{\partial z} \tag{24b}$$

$$\operatorname{rot} h \equiv \Big(\frac{\partial h_z}{\partial y} - \frac{\partial h_y}{\partial z}\Big)\,\boldsymbol{e}_x + \Big(\frac{\partial h_x}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial x}\Big)\,\boldsymbol{e}_y + + \Big(\frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y}\Big)\,\boldsymbol{e}_z \tag{24c}$$

* Zylinderkoordinaten mit Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_\rho$, $\boldsymbol{e}_\varphi$, $\boldsymbol{e}_z$:

$$\operatorname{grad} f \equiv \frac{\partial f}{\partial \rho}\,\boldsymbol{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\,\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\,\boldsymbol{e}_z \tag{25a}$$

$$\operatorname{div} g \equiv \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho\, g_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial g_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial g_z}{\partial z} \tag{25b}$$

$$\operatorname{rot} h \equiv \Big(\frac{1}{\rho}\frac{\partial h_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial h_\varphi}{\partial z}\Big)\,\boldsymbol{e}_\rho + \Big(\frac{\partial h_\rho}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial \rho}\Big)\,\boldsymbol{e}_\varphi + + \Big(\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho\, h_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial h_\rho}{\partial \varphi}\Big)\,\boldsymbol{e}_z \tag{25c}$$

* Kugelkoordinaten mit Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\varphi$, $\boldsymbol{e}_\vartheta$:

$$\operatorname{grad} f \equiv \frac{\partial f}{\partial r}\,\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\,\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \vartheta}\,\boldsymbol{e}_\vartheta \tag{26a}$$

$$\operatorname{div} g \equiv \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 g_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial g_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial(\sin\vartheta\, g_\vartheta)}{\partial \vartheta} \tag{26b}$$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rot} h \equiv \frac{1}{r\sin\vartheta}\Big(\frac{\partial(\sin\vartheta\, h_\varphi)}{\partial\vartheta} - \frac{\partial h_\vartheta}{\partial\varphi}\Big)\,\boldsymbol{e}_r\, + \\
+\, \frac{1}{r}\Big(\frac{\partial(r\, h_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial h_r}{\partial\vartheta}\Big)\,\boldsymbol{e}_\varphi\, + \\
+\, \Big(\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial h_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(r\, h_\varphi)}{\partial r}\Big)\,\boldsymbol{e}_\vartheta
\end{aligned}
\tag{26c}
$$

Die Verwendung totaler Ableitungen würde zum gleichen Ergebnis führen, ist aber unüblich.

Partielle Ableitungen, die nach Konvention P zu Mehrdeutigkeiten führen könnten, sind überflüssig. Mit Konvention P sollte die partielle Ableitung bei Anwendung der Kettenregel verwendet werden, in anderen Fällen aber nur dann, wenn die Variablen, nach denen abgeleitet wird, ohnehin explizit sind (wie beim erwähnten Beispiel der Vektor-Operatoren). Wer diese Regel beachtet, erhält auch mit Konvention P immer vernünftige und korrekte Resultate.

Literatur

[1] I. N. Bronstein , K. A. Semendjajew :
Taschenbuch der Mathematik
(Verlag Harry Deutsch, Zürich und Frankfurt/Main, 1973)