

Wechselwirkung von 2-Niveau-Systemen mit elektromagnetischer Strahlung

Die Wechselwirkung zwischen quantenmechanischen 2-Niveau-Systemen und elektromagnetischer Strahlung wird detailliert entwickelt. Rabi-Oszillationen und die Dynamik des Blochvektors werden für kohärente und für inkohärente Systeme beschrieben. Abschließend befassen wir uns mit Ramsey-Interferenzen und ihrem praktischen Nutzen bei der präzisen Messung der Zeit mit Atom-Uhren.

1. Rabi-Oszillationen des kohärenten 2-Niveau-Systems

Die hauptsächlich von Isidor Rabi (1898–1988) und Felix Bloch (1905–1983) ausgearbeitete Theorie der Wechselwirkung von quantenmechanischen 2-Niveau-Systemen mit elektromagnetischer Strahlung, die wir in diesem Artikel detailliert vorstellen werden, ist eine semiklassische Theorie. Semiklassisch bedeutet in diesem Zusammenhang, dass das 2-Niveau-System quantenmechanisch behandelt wird, das elektromagnetische Feld, mit dem es wechselwirkt, aber klassisch. Das Quantensystem hat im Zustand $|1\rangle$ die Energie ε_1 , im Zustand $|2\rangle$ die Energie $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$. Es wird schmalbandig mit elektromagnetischer Strahlung der Frequenz

$$\omega = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)/\hbar + \delta = \omega_2 - \omega_1 + \delta \quad (1)$$

bestrahlt. Die Verstimmung δ der Strahlung gegenüber der Resonanzfrequenz $\omega_2 - \omega_1$ kann größer, kleiner, oder gleich Null sein. Wir nehmen an, dass alle anderen Anregungszustände des Systems so hohe Energie haben, dass sie im Folgenden ignoriert werden können.

Ohne Strahlung ist der Hamilton-Operator des 2-Niveau-Systems

$$H_0 = |1\rangle\varepsilon_1\langle 1| + |2\rangle\varepsilon_2\langle 2|. \quad (2)$$

Wir beschränken uns auf die elektrische Dipolnäherung, in der das magnetische Feld der elektromagnetischen Strahlung vernachlässigt wird, und die Energie der Wechselwirkung durch

$$H_W \stackrel{\text{Dipolnäherung}}{\approx} -\mathbf{d}\hat{\mathbf{E}} \cos(-\omega t) \quad (3)$$

angenähert wird. \mathbf{d} ist das elektrische Dipolmoment des 2-Niveau-Systems, $\hat{\mathbf{E}}$ ist die Amplitude des Elektrischen Feldes, ω seine Frequenz, und t die Zeit. Man beachte dass in der Dipolnäherung die Ortsabhängigkeit des Elektrischen Feldes ignoriert wird, weil seine Wellenlänge sehr groß gegen die Ausdehnung des 2-Niveau-Systems ist.

Der Hamilton-Operator des wechselwirkenden Systems kann nach den Vektoren $|1\rangle$ und $|2\rangle$ entwickelt werden, die den 2-dimensionalen Hilbertraum des 2-Niveau-Systems aufspannen:

$$\begin{aligned} H \stackrel{(2),(3)}{=} & |1\rangle\varepsilon_1\langle 1| + |2\rangle\varepsilon_2\langle 2| - |1\rangle \underbrace{\langle 1|\mathbf{d}\hat{\mathbf{E}}|1\rangle}_0 \cos(-\omega t)\langle 1| - \\ & - |1\rangle \underbrace{\langle 1|\mathbf{d}\hat{\mathbf{E}}|2\rangle}_{\hbar\Omega_R^* \neq 0} \cos(-\omega t)\langle 2| - |2\rangle \underbrace{\langle 2|\mathbf{d}\hat{\mathbf{E}}|1\rangle}_{\hbar\Omega_R \neq 0} \cos(-\omega t)\langle 1| - \\ & - |2\rangle \underbrace{\langle 2|\mathbf{d}\hat{\mathbf{E}}|2\rangle}_0 \cos(-\omega t)\langle 2|. \end{aligned} \quad (4)$$

Hier wurde die Rabi-Frequenz

$$\Omega_R \equiv \frac{1}{\hbar} \langle 2|\mathbf{d}\hat{\mathbf{E}}|1\rangle = \frac{1}{\hbar} \left(\langle 1|\mathbf{d}\hat{\mathbf{E}}|2\rangle \right)^* \quad (5)$$

definiert, die im allgemeinen komplex ist. Manche Autoren definieren stattdessen die Matrixelemente der Projektion des elektrischen

Dipolmoments \mathbf{d} auf die Polarisationsrichtung der elektromagnetischen Strahlung:

$$d_{12} \equiv \langle 1 | \mathbf{d} \hat{\mathbf{e}} | 2 \rangle = \frac{\hbar \Omega_R^*}{|\hat{\mathbf{E}}|} \quad (6a)$$

$$d_{21} \equiv \langle 2 | \mathbf{d} \hat{\mathbf{e}} | 1 \rangle = \frac{\hbar \Omega_R}{|\hat{\mathbf{E}}|} = d_{12}^* \quad (6b)$$

$$\hat{\mathbf{e}} \equiv \hat{\mathbf{E}} / |\hat{\mathbf{E}}|$$

Die Beträge der Matrixelemente $\langle 2 | \mathbf{d} \hat{\mathbf{E}} | 1 \rangle$ der Absorption und $\langle 1 | \mathbf{d} \hat{\mathbf{E}} | 2 \rangle$ der stimulierten Emission sind gleich groß. Vorläufig setzen wir voraus dass $\hat{\mathbf{E}}$ so groß ist, dass die spontane Emission und andere Relaxationsmechanismen (z. B. Anregung von Vibrationen, oder Stöße mit anderen Systemen) gegenüber der stimulierten Emission vernachlässigt werden können. Erst in Abschnitt 3 werden wir diese Annahme fallen lassen.

Für die allgemeine Zustandsfunktion

$$|\psi\rangle = c_1 e^{-i\omega_1 t} |1\rangle + c_2 e^{-i\omega_2 t} |2\rangle \quad (7)$$

$$c_1(t), c_2(t) \in \mathbb{C} \quad , \quad |c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$$

des 2-Niveau-Systems gilt die Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = H |\psi\rangle \quad (8)$$

$$i\hbar(\dot{c}_1 - i\omega_1 c_1)e^{-i\omega_1 t} |1\rangle + i\hbar(\dot{c}_2 - i\omega_2 c_2)e^{-i\omega_2 t} |2\rangle =$$

$$= \left(\varepsilon_1 c_1 e^{-i\omega_1 t} - \hbar \Omega_R^* \cos(-\omega t) c_2 e^{-i\omega_2 t} \right) |1\rangle +$$

$$+ \left(\varepsilon_2 c_2 e^{-i\omega_2 t} - \hbar \Omega_R \cos(-\omega t) c_1 e^{-i\omega_1 t} \right) |2\rangle$$

Hier wurde $\langle 1|1\rangle = \langle 2|2\rangle = 1$ und $\langle 1|2\rangle = 0$ angewendet. Weil $|1\rangle$ und $|2\rangle$ linear unabhängig sind, folgen die beiden Differentialglei-

chungen

$$\begin{aligned}
 i(\dot{c}_1 - i\omega_1 c_1) &= \omega_1 c_1 - \Omega_R^* \cos(-\omega t) c_2 e^{-i(\omega_2 - \omega_1)t} \\
 \dot{c}_1 &= +i \frac{\Omega_R^* c_2}{2} \left(e^{-i(\omega_2 - \omega_1 + \omega)t} + e^{-i(\omega_2 - \omega_1 - \omega)t} \right) \\
 i(\dot{c}_2 - i\omega_2 c_2) &= \omega_2 c_2 - \Omega_R \cos(-\omega t) c_1 e^{+i(\omega_2 - \omega_1)t} \\
 \dot{c}_2 &= +i \frac{\Omega_R c_1}{2} \left(e^{+i(\omega_2 - \omega_1 - \omega)t} + e^{+i(\omega_2 - \omega_1 + \omega)t} \right)
 \end{aligned}$$

für die Wahrscheinlichkeitsamplituden c_1 und c_2 . Wegen $\omega_2 - \omega_1 \approx \omega$ oszilliert in jeder der beiden Gleichungen eine Exponentialfunktion sehr langsam im Vergleich zu der anderen. Wir vernachlässigen die schnell oszillierenden Terme (das wird in der englisch-sprachigen Literatur als “rotating wave approximation” bezeichnet), und setzen $\delta \underline{\underline{1}} \omega - (\omega_2 - \omega_1)$ ein:

$$\dot{c}_1 = \frac{i\Omega_R^*}{2} e^{+i\delta t} c_2 \quad (10a)$$

$$\dot{c}_2 = \frac{i\Omega_R}{2} e^{-i\delta t} c_1 \quad (10b)$$

Zur Lösung dieses Systems gekoppelter Differentialgleichungen ersten Grades entnehmen wir der Literatur den Ansatz

$$c_1 = \left(a_1 e^{+i\Omega t/2} + b_1 e^{-i\Omega t/2} \right) e^{+i\delta t/2} \quad (11a)$$

$$c_2 = \left(a_2 e^{+i\Omega t/2} + b_2 e^{-i\Omega t/2} \right) e^{-i\delta t/2} \quad (11b)$$

mit den unbestimmten Konstanten $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{C}$ und $\Omega \in \mathbb{R}$. Die Frequenz Ω muss reell sein, weil sonst je eine der Exponentialfunktionen bei $t \rightarrow \infty$ unendlich würde, so dass die Bedingung $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$ nicht erfüllt werden könnte. Einsetzen von (11) in

(10) ergibt

$$\begin{aligned}
 \dot{c}_1 &= +\frac{i\delta}{2} \left(a_1 e^{+i\Omega t/2} + b_1 e^{-i\Omega t/2} \right) e^{+i\delta t/2} + \frac{i\Omega}{2} a_1 e^{+i\Omega t/2} e^{+i\delta t/2} - \\
 &\quad - \frac{i\Omega}{2} b_1 e^{-i\Omega t/2} e^{+i\delta t/2} \\
 &= i \left(\frac{\Omega + \delta}{2} a_1 e^{+i\Omega t/2} - \frac{\Omega - \delta}{2} b_1 e^{-i\Omega t/2} \right) e^{+i\delta t/2} \\
 &= \frac{i\Omega_R^*}{2} e^{+i\delta t} \left(a_2 e^{+i\Omega t/2} + b_2 e^{-i\Omega t/2} \right) e^{-i\delta t/2} \tag{12a}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{c}_2 &= -\frac{i\delta}{2} \left(a_2 e^{+i\Omega t/2} + b_2 e^{-i\Omega t/2} \right) e^{-i\delta t/2} + \frac{i\Omega}{2} a_2 e^{+i\Omega t/2} e^{-i\delta t/2} - \\
 &\quad - \frac{i\Omega}{2} b_2 e^{-i\Omega t/2} e^{-i\delta t/2} \\
 &= i \left(\frac{\Omega - \delta}{2} a_2 e^{+i\Omega t/2} - \frac{\Omega + \delta}{2} b_2 e^{-i\Omega t/2} \right) e^{-i\delta t/2} \\
 &= \frac{i\Omega_R}{2} e^{-i\delta t} \left(a_1 e^{+i\Omega t/2} + b_1 e^{-i\Omega t/2} \right) e^{+i\delta t/2} . \tag{12b}
 \end{aligned}$$

(11) ist also tatsächlich eine Lösung des Gleichungssystems (10), wenn die Bedingungen

$$\begin{aligned}
 \frac{\Omega + \delta}{2} a_1 e^{+i\Omega t/2} - \frac{\Omega - \delta}{2} b_1 e^{-i\Omega t/2} &= \frac{\Omega_R^*}{2} \left(a_2 e^{+i\Omega t/2} + b_2 e^{-i\Omega t/2} \right) \\
 \frac{\Omega - \delta}{2} a_2 e^{+i\Omega t/2} - \frac{\Omega + \delta}{2} b_2 e^{-i\Omega t/2} &= \frac{\Omega_R}{2} \left(a_1 e^{+i\Omega t/2} + b_1 e^{-i\Omega t/2} \right)
 \end{aligned}$$

erfüllt werden, und zwar auch zur Zeit $t = 0$:

$$\frac{\Omega + \delta}{2} a_1 - \frac{\Omega - \delta}{2} b_1 = \frac{\Omega_R^*}{2} (a_2 + b_2) \tag{14a}$$

$$\frac{\Omega - \delta}{2} a_2 - \frac{\Omega + \delta}{2} b_2 = \frac{\Omega_R}{2} (a_1 + b_1) \tag{14b}$$

Mit

$$c_1(t=0) = a_1 + b_1 \quad (15a)$$

$$c_2(t=0) = a_2 + b_2 \quad (15b)$$

folgt aus (14)

$$a_1 = \frac{\Omega - \delta}{2\Omega} c_1(t=0) + \frac{\Omega_R^*}{2\Omega} c_2(t=0) \quad (16a)$$

$$b_1 = \frac{\Omega + \delta}{2\Omega} c_1(t=0) - \frac{\Omega_R^*}{2\Omega} c_2(t=0) \quad (16b)$$

$$a_2 = \frac{\Omega + \delta}{2\Omega} c_2(t=0) + \frac{\Omega_R}{2\Omega} c_1(t=0) \quad (16c)$$

$$b_2 = \frac{\Omega - \delta}{2\Omega} c_2(t=0) - \frac{\Omega_R}{2\Omega} c_1(t=0) . \quad (16d)$$

Jetzt legen wir als Randbedingung fest, dass das System zur Zeit $t = 0$ im Zustand $|1\rangle$ präpariert wird:

$$|c_1(t=0)|^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad c_1(t=0) = e^{i\zeta} , \quad \zeta \in \mathbb{R} \quad (17a)$$

$$|c_2(t=0)|^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad c_2(t=0) = 0 \quad (17b)$$

Mit dieser Randbedingung vereinfacht sich (16) zu

$$a_1 = + \frac{\Omega - \delta}{2\Omega} e^{i\zeta} \quad (18a)$$

$$b_1 = + \frac{\Omega + \delta}{2\Omega} e^{i\zeta} \quad (18b)$$

$$a_2 = + \frac{\Omega_R}{2\Omega} e^{i\zeta} \quad (18c)$$

$$b_2 = - \frac{\Omega_R}{2\Omega} e^{i\zeta} , \quad (18d)$$

und die Lösung (11) wird zu

$$\begin{aligned} c_1 &= \left(+ \frac{\Omega - \delta}{2\Omega} e^{+i\Omega t/2} + \frac{\Omega + \delta}{2\Omega} e^{-i\Omega t/2} \right) e^{i\zeta + i\delta t/2} \\ &= \left(\cos(\Omega t/2) - \frac{i\delta}{\Omega} \sin(\Omega t/2) \right) e^{i\zeta + i\delta t/2} \end{aligned} \quad (19a)$$

$$\begin{aligned} c_2 &= \left(+ \frac{\Omega_R}{2\Omega} e^{+i\Omega t/2} - \frac{\Omega_R}{2\Omega} e^{-i\Omega t/2} \right) e^{i\zeta - i\delta t/2} \\ &= \frac{i\Omega_R}{\Omega} \sin(\Omega t/2) e^{i\zeta - i\delta t/2} . \end{aligned} \quad (19b)$$

Der konstante Phasenwinkel ζ ist irrelevant, und bleibt unbestimmt. Um die unbekannte Frequenz Ω zu bestimmen, nutzen wir die Bedingung

$$|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1 . \quad (20)$$

Einsetzen von (19) in (20) ergibt

$$\cos^2(\Omega t/2) + \frac{\delta^2}{\Omega^2} \sin^2(\Omega t/2) + \frac{|\Omega_R|^2}{\Omega^2} \sin^2(\Omega t/2) = 1 ,$$

woraus

$$\frac{\delta^2}{\Omega^2} + \frac{|\Omega_R|^2}{\Omega^2} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \Omega = \pm \sqrt{|\Omega_R|^2 + \delta^2}$$

folgt. Aus (19) erkennt man, dass das Vorzeichen von Ω beliebig gewählt werden kann. Wir entscheiden uns für

$$\Omega = + \sqrt{|\Omega_R|^2 + \delta^2} . \quad (21)$$

Ω wird als verallgemeinerte Rabi-Frequenz bezeichnet.

Die Besetzungswahrscheinlichkeiten der beiden Zustände sind also

$$|c_1(t)|^2 = \cos^2(\Omega t/2) + \frac{\delta^2}{\Omega^2} \sin^2(\Omega t/2) \quad (22a)$$

$$|c_2(t)|^2 = \frac{|\Omega_R|^2}{\Omega^2} \sin^2(\Omega t/2) . \quad (22b)$$

Die Funktion $\sin^2(\Omega t/2)$ oszilliert doppelt so schnell wie die Funktion $\sin(\Omega t/2)$. Die Besetzungswahrscheinlichkeiten $|c_1(t)|^2$ und $|c_2(t)|^2$ oszillieren mit der Frequenz Ω zwischen ihren Minimal- und Maximalwerten. Bei exakter Abstimmung $\delta = \omega - (\omega_2 - \omega_1) = 0$ der Strahlung auf das 2-Niveau-System oszilliert das System mit der Rabi-Frequenz $|\Omega_R|$, bei schlechterer Abstimmung mit der verallgemeinerten Rabi-Frequenz $\Omega = (21) > |\Omega_R|$.

Zur Zeit

$$T_\pi \equiv \frac{\pi}{\Omega} = \frac{\pi}{\sqrt{|\Omega_R|^2 + \delta^2}} \quad (23)$$

erreicht $|c_2(t)|^2$ erstmals seinen Maximalwert

$$|c_2(T_\pi)|^2 = |c_2(t)|_{\max}^2 = \frac{|\Omega_R|^2}{\Omega^2} = \frac{|\Omega_R|^2}{|\Omega_R|^2 + \delta^2}. \quad (24)$$

Nur im Fall $\delta = \omega - (\omega_2 - \omega_1) = 0$ erreicht $|c_2(t)|^2$ den Wert 1 und $|c_1(t)|^2$ den Wert 0, bei $\delta \neq 0$ ist $|c_2(t)|_{\max}^2 < 1$ und $|c_1(t)|_{\min}^2 > 0$.

Zusammenfassung: Wenn das System sich zur Zeit $t = 0$ im Zustand $|1\rangle$ befindet, dann befindet es sich durch Wechselwirkung mit dem Strahlungsfeld zur Zeit $t > 0$ im Zustand

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &\stackrel{(7)}{=} c_1 e^{-i\omega_1 t} |1\rangle + c_2 e^{-i\omega_2 t} |2\rangle \quad (25) \\ c_1 &\stackrel{(19)}{=} \left(\cos(\Omega t/2) - \frac{i\delta}{\Omega} \sin(\Omega t/2) \right) e^{i(\zeta + \delta t/2)} \\ c_2 &\stackrel{(19)}{=} \frac{i\Omega_R}{\Omega} \sin(\Omega t/2) e^{i(\zeta - \delta t/2)} \\ \Omega &\stackrel{(21)}{=} +\sqrt{|\Omega_R|^2 + \delta^2}. \end{aligned}$$

Am Ende eines Strahlungspulses der Dauer $T_\pi = (23)$, der abkürzend einfach als π -Puls bezeichnet wird, ist der Zustand des Systems

$$|\psi\rangle \stackrel{(25)}{=} -\frac{i\delta}{\Omega} e^{i(\zeta - \omega_1 t + \delta T_\pi/2)} |1\rangle + \frac{i\Omega_R}{\Omega} e^{i(\zeta - \omega_2 t - \delta T_\pi/2)} |2\rangle, \quad (26a)$$

bzw. bei exakter Abstimmung $\delta = \omega - (\omega_2 - \omega_1) = 0$ der elektromagnetischen Welle auf das 2-Niveau-System im Zustand

$$|\psi\rangle = e^{i(\zeta - \omega_2 t)} |2\rangle, \quad (26b)$$

und bleibt (abgesehen von einer Phasenänderung) in diesem Zustand solange kein weiteres Licht eingestrahlt wird. Ein unmittelbar folgender¹ weiterer π -Puls treibt das System zurück in den Zustand

$$|\psi\rangle \stackrel{(25)}{=} -e^{i(\zeta - \omega_1 t + \delta T_\pi)} |1\rangle,$$

der sich nur durch einen Phasenfaktor vom Ausgangszustand unterscheidet. Wenn das System sich zur Zeit $t = 0$ im Zustand $|1\rangle$ befindet, dann treibt es ein $\pi/2$ -Puls, also ein Strahlungspuls der Dauer

$$T_{\pi/2} \equiv \frac{\pi/2}{\Omega} = \frac{\pi/2}{\sqrt{|\Omega_R|^2 + \delta^2}} \quad (27)$$

in den Zustand

$$|\psi\rangle \stackrel{(25)}{=} \sqrt{\frac{1}{2}} \left[\left(1 - \frac{i\delta}{\Omega} \right) e^{i(\zeta - \omega_1 t + \delta T_{\pi/2}/2)} |1\rangle + \frac{i\Omega_R}{\Omega} e^{i(\zeta - \omega_2 t - \delta T_{\pi/2}/2)} |2\rangle \right], \quad (28a)$$

bzw. bei exakter Abstimmung $\delta = \omega - (\omega_2 - \omega_1) = 0$ der elektromagnetischen Welle auf das 2-Niveau-System in den Zustand

$$|\psi\rangle \stackrel{(25)}{=} \sqrt{\frac{1}{2}} \left(e^{i(\zeta - \omega_1 t)} |1\rangle + i e^{i(\zeta - \omega_2 t)} |2\rangle \right). \quad (28b)$$

Wenn man das System im Zustand (28b) untersucht, findet man es mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ im Zustand $|1\rangle$ und mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ im Zustand $|2\rangle$ vor.

¹ In Abschnitt 4 werden wir untersuchen, welche Wirkung Pausen zwischen den Pulsen haben.

Wir betonen nochmals, dass alle Ergebnisse dieses Abschnitts und des folgenden Abschnitts nur unter der Voraussetzung gelten, dass der Übergang $|2\rangle \rightarrow |1\rangle$ ausschließlich durch stimulierte Emission von Strahlung erfolgt, dass also spontane Emission und andere Relaxationsmechanismen vernachlässigbar sind. Erst in Abschnitt 3 werden wir uns von dieser Voraussetzung lösen.

2. Dichtematrix und Bloch-Vektor

Der Zustand (25) ist ein „reiner“ Zustand, d. h. zwischen den beiden Termen von (25) besteht eine wohldefinierte Phasenbeziehung.

Der Erwartungswert einer Messgröße des 2-Niveau-Systems, die durch den Operator A repräsentiert wird, ist

$$\langle A \rangle_\psi = \langle \psi | A | \psi \rangle \quad \text{mit } \psi = (25) . \quad (29)$$

Alternativ und gleichwertig kann man diesen Erwartungswert auch mithilfe des Dichteoperators ρ berechnen:

$$\langle A \rangle_\psi = \text{Sp}(\rho A) \quad (30a)$$

$$\rho \equiv |\psi\rangle\langle\psi| \quad (30b)$$

$\text{Sp}(\rho A)$ ist die Spur des Operatorprodukts ρA . Die Formulierung mit dem Dichteoperator hat den Vorteil dass sie – anders als (29) – auch dann anwendbar bleibt, wenn ψ kein reiner Zustand sondern ein Gemisch ist, wenn also der relative Phasenwinkel zwischen den beiden Termen von (25) unregelmäßig fluktuiert. Diesen Fall werden wir in Abschnitt 3 untersuchen.

An die Stelle der Schrödinger-Gleichung tritt im Dichtematrix-

Formalismus die von Neumann-Liouville'sche Gleichung

$$\begin{aligned}
 \dot{\rho} &\stackrel{(30b)}{=} |\dot{\psi}\rangle\langle\psi| + |\psi\rangle\langle\dot{\psi}| \\
 &\stackrel{(8)}{=} -\frac{i}{\hbar} \left(H|\psi\rangle\langle\psi| - |\psi\rangle\langle\psi|H \right) \\
 &\stackrel{(30b)}{=} -\frac{i}{\hbar} [H, \rho] .
 \end{aligned} \tag{31}$$

Der Dichteoperator des 2-Niveau-Systems ist

$$\begin{aligned}
 \rho &\stackrel{(30b)}{=} |\psi\rangle\langle\psi| \stackrel{(25)}{=} c_1c_1^*|1\rangle\langle 1| + c_2c_2^*|2\rangle\langle 2| + \\
 &\quad + c_1c_2^*e^{+i(\omega_2-\omega_1)t}|1\rangle\langle 2| + c_2c_1^*e^{-i(\omega_2-\omega_1)t}|2\rangle\langle 1| .
 \end{aligned} \tag{32}$$

Für die Dichtematrix verwenden wir – wie in der Literatur üblich – das gleiche Zeichen ρ wie für den Dichteoperator. Es ist der Aufmerksamkeit des Lesers anvertraut, zu erkennen was jeweils gemeint ist. Die Dichtematrix des 2-Niveau-Systems ist definiert durch

$$\begin{aligned}
 \rho &\equiv \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \langle 1|\rho|1\rangle & \langle 1|\rho|2\rangle \\ \langle 2|\rho|1\rangle & \langle 2|\rho|2\rangle \end{pmatrix} = \\
 &\stackrel{(32)}{=} \begin{pmatrix} c_1c_1^* & c_1c_2^*e^{+i(\omega_2-\omega_1)t} \\ c_2c_1^*e^{-i(\omega_2-\omega_1)t} & c_2c_2^* \end{pmatrix} .
 \end{aligned} \tag{33}$$

Einsetzen von (25) ergibt:

$$\rho_{11} = \cos^2(\Omega t/2) + \frac{\delta^2}{\Omega^2} \sin^2(\Omega t/2) \tag{34a}$$

$$\rho_{22} = \frac{|\Omega_R|^2}{\Omega^2} \sin^2(\Omega t/2) \tag{34b}$$

$$\rho_{21} = \rho_{12}^* \tag{34c}$$

$$\begin{aligned}
 \rho_{12} &= -\frac{\Omega_R^*}{\Omega} \sin(\Omega t/2) \left(\frac{\delta}{\Omega} \sin(\Omega t/2) + i \cos(\Omega t/2) \right) \cdot \\
 &\quad \cdot e^{i(\zeta-\zeta+\omega t)}
 \end{aligned} \tag{34d}$$

Wäre (25) kein reiner Zustand sondern ein Gemisch, in dem der Phasenwinkel ζ_1 des ersten Summanden gegenüber dem Phasenwinkel ζ_2 des zweiten Summanden unregelmäßig variiert, dann würden die Nicht-Diagonalelemente der Dichtematrix anstelle von $e^{i(\zeta-\zeta)} = 1$ den Faktor

$$\text{Mittelwert}\left(e^{\pm i(\zeta_1-\zeta_2)}\right) = 0$$

enthalten, und deshalb verschwinden.

Der Bloch-Vektor $\mathbf{V} \equiv (V_x, V_y, V_z)$ wird definiert durch

$$V_x \equiv \rho_{21}e^{i\omega t} + \rho_{12}e^{-i\omega t} \quad (35a)$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{(34)}{=} -\frac{(\Omega_R + \Omega_R^*)\delta}{\Omega^2} \sin^2(\Omega t/2) + i\frac{\Omega_R - \Omega_R^*}{\Omega} \sin(\Omega t/2) \cos(\Omega t/2) \\ &\stackrel{\text{falls } \Omega_R \in \mathbb{R}}{=} -\frac{2\Omega_R\delta}{\Omega^2} \sin^2(\Omega t/2) \end{aligned}$$

$$V_y \equiv i\rho_{21}e^{i\omega t} - i\rho_{12}e^{-i\omega t} \quad (35b)$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{(34)}{=} -i\frac{(\Omega_R - \Omega_R^*)\delta}{\Omega^2} \sin^2(\Omega t/2) - \frac{\Omega_R + \Omega_R^*}{\Omega} \sin(\Omega t/2) \cos(\Omega t/2) \\ &\stackrel{\text{falls } \Omega_R \in \mathbb{R}}{=} -\frac{2\Omega_R}{\Omega} \sin(\Omega t/2) \cos(\Omega t/2) \end{aligned}$$

$$V_z \equiv \rho_{22} - \rho_{11} \quad (35c)$$

$$\stackrel{(34)}{=} \frac{|\Omega_R|^2 - \delta^2}{\Omega^2} \sin^2(\Omega t/2) - \cos^2(\Omega t/2) .$$

Ab sofort und bis zum Ende dieses Artikels nehmen wir an, dass tatsächlich

$$\Omega_R \in \mathbb{R} \quad (36)$$

gilt. Dann haben die Zeitableitungen der Komponenten des Bloch-Vektors die einfache Form

$$\dot{V}_x = -\frac{2\Omega_R\delta}{\Omega} \sin(\Omega t/2) \cos(\Omega t/2) = \delta V_y \quad (37a)$$

$$\dot{V}_y = -\Omega_R \left(\cos^2(\Omega t/2) - \sin^2(\Omega t/2) \right) = \Omega_R V_z - \delta V_x \quad (37b)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_z &= \frac{\Omega_R^2 - \delta^2}{\Omega} \sin(\Omega t/2) \cos(\Omega t/2) + \Omega \cos(\Omega t/2) \sin(\Omega t/2) = \\ &= \frac{2\Omega_R^2}{\Omega} \cos(\Omega t/2) \sin(\Omega t/2) = -\Omega_R V_y . \end{aligned} \quad (37c)$$

Mit der Definition des Frequenzvektors

$$\mathbf{F} \equiv (F_x, F_y, F_z) \equiv (-\Omega_R, 0, -\delta) \quad (38)$$

können die Relationen (37) kompakt als Kreuzprodukt

$$\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{F} \times \mathbf{V} \quad (39)$$

geschrieben werden. Diese Gleichung ähnelt der Bewegungsgleichung

$$\dot{\mathbf{M}} = \gamma \mathbf{B} \times \mathbf{M}$$

eines magnetischen Moments \mathbf{M} mit dem gyromagnetischen Verhältnis γ in einem konstanten Magnetfeld \mathbf{B} . Eingeführt wurden die Gleichungen (39) bzw. (37) 1946 von Felix Bloch [1].

Aus (35) und aus (39) erkennt man

- * dass $\mathbf{V}(t = 0) = (0, 0, -1)$ ist. Das spiegelt unsere stets angenommene Randbedingung (17) wieder, nach der sich das 2-Niveau-System zur Zeit $t = 0$ im Zustand $|1\rangle$ befindet.
- * dass der Betrag des Blochvektors \mathbf{V} konstant ist, und stets auf der Oberfläche einer Kugel mit Radius $|\mathbf{V}| = 1$ liegt, die als Blochkugel bezeichnet wird. Das gilt allerdings nur unter der Voraussetzung, dass Übergänge $|2\rangle \rightarrow |1\rangle$ ausschließlich durch stimulierte Emission zustande kommen, aber nicht durch spontane Emission oder durch strahlungslose Relaxations-Mechanismen. In Abschnitt 3 werden wir uns von dieser

Voraussetzung lösen.

- * dass der Blochvektor \mathbf{V} mit der Frequenz $|\mathbf{F}|$ auf einem Konus um den Vektor \mathbf{F} oszilliert.

Entsprechend (23) und (27) definieren wir

$$T_a \equiv \frac{a}{\Omega} = \frac{a}{\sqrt{|\Omega_R|^2 + \delta^2}} \quad , \quad a \in \mathbb{R} . \quad (40)$$

In Abbildung 1 wird die Position des Blochvektors auf der Blochkugel zu verschiedenen Zeiten gezeigt. Links ist das Koordinatensystem skizziert.

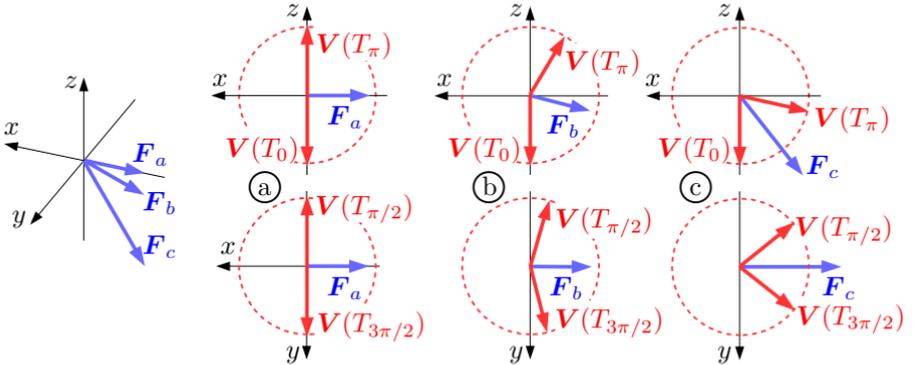


Abb. 1: Die Blochkugel

Der Frequenzvektor $\mathbf{F} \stackrel{(38)}{=} (-\Omega_R, 0, -\delta)$ liegt stets in der xz -Ebene. Die x -Komponenten der drei Beispiel-Vektoren $\mathbf{F}_a, \mathbf{F}_b, \mathbf{F}_c$ sind identisch, nämlich gleich $-\Omega_R$. Im Fall von \mathbf{F}_a ist die Verstimmung $\delta \stackrel{(1)}{=} \omega - (\omega_2 - \omega_1)$ des anregenden Feldes gegenüber der Resonanzfrequenz Null, im Fall von \mathbf{F}_b klein, und im Fall von \mathbf{F}_c groß. Aufgrund unserer Randbedingung (17) ist in jedem Fall $\mathbf{V}(T_0) = (0, 0, -1)$.

Wenn Licht eingestrahlt wird, dreht \mathbf{V} sich auf einem Konus, dessen Achse durch \mathbf{F} definiert wird. Im Fall (a) ist der Öffnungs-

winkel des Konus 180° , d. h. der Konus ist zur Ebene entartet. In den Fällen (b) und (c) ist $\delta > 0$, und der Öffnungswinkel des Konus ist kleiner als 180° . Wenn $\delta < 0$ ist (dafür enthält Abb. 1 kein Beispiel), dann ist der Öffnungswinkel des Konus größer als 180° .

Zur Zeit $t = T_{\pi/2}$ liegt \mathbf{V} in der Ebene, die von der y -Achse und dem Vektor \mathbf{F} aufgespannt wird, siehe die drei unteren Skizzen. Nur im Fall $\delta = 0$ ist diese Ebene mit der xy -Ebene identisch. Zur Zeit $t = T_\pi$ liegt \mathbf{V} wieder in der xz -Ebene, und V_z erreicht seinen maximalen Wert, der bei $|\delta| < \Omega_R$ größer als Null, bei $|\delta| > \Omega_R$ aber kleiner als Null ist. Nur wenn $V_z > 0$ ist, ist die Amplitude von $|2\rangle$ größer als die Amplitude von $|1\rangle$.

Zur Zeit $t = T_{3\pi/2}$ liegt \mathbf{V} wieder in der von der y -Achse und dem Vektor \mathbf{F} aufgespannten Ebene. Zur Zeit $t = T_{2\pi}$ schließlich ist der Anfangszustand wieder erreicht, $\mathbf{V}(T_{2\pi}) = \mathbf{V}(T_0)$, die Amplitude von $|2\rangle$ ist Null, und der nächste Zyklus beginnt.

3. Das inkohärente 2-Niveau-System

Bisher haben wir angenommen, dass Übergänge $|2\rangle \rightarrow |1\rangle$ ausschließlich durch stimulierte Emission von Strahlung zustande kommen. Die Energie des angeregten Zustands $|2\rangle$ kann aber auch durch spontane Emission von Strahlung, oder durch die Anregung von Vibrationen, oder durch Stöße mit anderen Systemen, usw. abgebaut werden. Wir führen diese zusätzlichen Relaxationskanäle phänomenologisch dadurch in unser Modell ein, dass wir Relaxationszeiten $0 < T_i < \infty$ mit $i = 1$ oder $i = 2$ folgendermaßen in die Bewegungsgleichung der Dichtematrix einfügen:

$$\dot{\rho}_{11} = (34a) + \frac{\rho_{22}}{T_1} \quad (41a)$$

$$\dot{\rho}_{22} = (34b) - \frac{\rho_{22}}{T_1} \quad (41b)$$

$$\dot{\rho}_{21} = (34c) - \frac{\rho_{21}}{T_2} \quad (41c)$$

$$\dot{\rho}_{12} = (34d) - \frac{\rho_{12}}{T_2} \quad (41d)$$

Die Relaxationszeit T_1 beschreibt, wie schnell der Zustand $|2\rangle$ (zusätzlich zur stimulierten Emission, die durch (34b) beschrieben wird) durch spontane Emission und andere Mechanismen zerfällt. Die Relaxationszeit T_2 beschreibt, wie schnell durch spontane Emission und andere Mechanismen die Kohärenz des Systems verloren geht und der reine Zustand zum Gemisch wird. Wenn man das Modell an Experimente fittet, findet man typischerweise $T_2 \gtrsim 2T_1$.

Mit (41) werden die Bewegungsgleichungen des Blochvektors

$$\dot{V}_x \stackrel{(37a)}{=} \delta V_y - \frac{\rho_{21}}{T_2} e^{i\omega t} - \frac{\rho_{12}}{T_2} e^{-i\omega t} \stackrel{(35)}{=} \delta V_y - \frac{V_x}{T_2} \quad (42a)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_y \stackrel{(37b)}{=} \Omega_R V_z - \delta V_x + i \frac{\rho_{21}}{T_2} e^{i\omega t} - i \frac{\rho_{12}}{T_2} e^{-i\omega t} = \\ \stackrel{(35)}{=} \Omega_R V_z - \delta V_x - \frac{V_y}{T_2} \end{aligned} \quad (42b)$$

$$\dot{V}_z \stackrel{(37c)}{=} -\Omega_R V_y - \frac{2\rho_{22}}{T_1} \stackrel{(35)}{=} -\Omega_R V_y - \frac{V_z + 1}{T_1}. \quad (42c)$$

Wegen der gegenüber (37) hinzugekommenen Terme kann $\dot{\mathbf{V}}$ nicht mehr wie in (39) durch ein Kreuzprodukt dargestellt werden. Und wir werden nun zeigen, dass der Blochvektor nicht mehr dauerhaft oszilliert, sondern auf einen Wert mit konstanten Komponenten und Betrag $0 < |\mathbf{V}| < 1$ konvergiert. Mit der Definition

$$\tilde{V}_i(t) \equiv \int_{\tau=0}^t d\tau V_i(\tau) \quad \text{mit } i = x, y, z \quad (43)$$

ergibt die Integration von (42)

$$V_x(t) - \underbrace{V_x(t=0)}_0 = \delta \tilde{V}_y(t) - \frac{\tilde{V}_x(t)}{T_2} \quad (44a)$$

$$V_y(t) - \underbrace{V_y(t=0)}_0 = \Omega_R \tilde{V}_z(t) - \delta \tilde{V}_x(t) - \frac{\tilde{V}_y(t)}{T_2} \quad (44b)$$

$$V_z(t) - \underbrace{V_z(t=0)}_{-1} = -\Omega_R \tilde{V}_y(t) - \frac{\tilde{V}_z(t) + t}{T_1} . \quad (44c)$$

Aus den beiden ersten Gleichungen folgt

$$\tilde{V}_x = -V_x T_2 + \delta T_2 \tilde{V}_y \quad (45a)$$

$$\tilde{V}_x = -\frac{V_y}{\delta} + \frac{\Omega_R}{\delta} \tilde{V}_z - \frac{\tilde{V}_y}{\delta T_2} \quad (45b)$$

$$\tilde{V}_y = \frac{\delta T_2^2 V_x}{\delta^2 T_2^2 + 1} - \frac{T_2 V_y}{\delta^2 T_2^2 + 1} + \frac{\Omega_R T_2}{\delta^2 T_2^2 + 1} \tilde{V}_z . \quad (45c)$$

Einsetzen von (45c) in (44c) ergibt

$$\begin{aligned} V_z &= -1 - \frac{\delta \Omega_R T_2^2 V_x}{\delta^2 T_2^2 + 1} + \frac{\Omega_R T_2 V_y}{\delta^2 T_2^2 + 1} - \\ &\quad - \frac{\Omega_R^2 T_2}{\delta^2 T_2^2 + 1} \tilde{V}_z - \frac{\tilde{V}_z}{T_1} - \frac{t}{T_1} \\ \tilde{V}_z &= -\frac{\delta^2 T_1 T_2^2 + T_1}{\Omega_R^2 T_1 T_2 + \delta^2 T_2^2 + 1} V_z - \frac{\delta^2 T_1 T_2^2 + T_1}{\Omega_R^2 T_1 T_2 + \delta^2 T_2^2 + 1} - \\ &\quad - \frac{\delta^2 T_1 T_2^2 + T_1}{\Omega_R^2 T_1 T_2 + \delta^2 T_2^2 + 1} \frac{\delta \Omega_R T_2^2 V_x}{\delta^2 T_2^2 + 1} + \\ &\quad + \frac{\delta^2 T_1 T_2^2 + T_1}{\Omega_R^2 T_1 T_2 + \delta^2 T_2^2 + 1} \frac{\Omega_R T_2 V_y}{\delta^2 T_2^2 + 1} - \frac{\delta^2 T_2^2 + 1}{\Omega_R^2 T_1 T_2 + \delta^2 T_2^2 + 1} t . \end{aligned}$$

Bei sehr großer Zeit t können alle anderen Terme gegenüber dem letzten vernachlässigt werden:

$$\tilde{V}_z(t \rightarrow \infty) = -\frac{\delta^2 T_2^2 + 1}{\Omega_R^2 T_1 T_2 + \delta^2 T_2^2 + 1} t \quad (46a)$$

Das wird in (45c) eingesetzt:

$$\tilde{V}_y(t \rightarrow \infty) = -\frac{\Omega_R T_2}{\Omega_R^2 T_1 T_2 + \delta^2 T_2^2 + 1} t \quad (46b)$$

Einsetzen in (45a) ergibt schließlich

$$\tilde{V}_x(t \rightarrow \infty) = -\frac{\delta \Omega_R T_2^2}{\Omega_R^2 T_1 T_2 + \delta^2 T_2^2 + 1} t. \quad (46c)$$

Also oszilliert der Blochvektor für großes t nicht mehr, sondern konvergiert auf den stationären Zustand

$$V_x(t \rightarrow \infty) = -\frac{\delta \Omega_R T_2^2}{\Omega_R^2 T_1 T_2 + \delta^2 T_2^2 + 1} \quad (47a)$$

$$V_y(t \rightarrow \infty) = -\frac{\Omega_R T_2}{\Omega_R^2 T_1 T_2 + \delta^2 T_2^2 + 1} \quad (47b)$$

$$V_z(t \rightarrow \infty) = -\frac{\delta^2 T_2^2 + 1}{\Omega_R^2 T_1 T_2 + \delta^2 T_2^2 + 1}. \quad (47c)$$

Zufolge der letzten Gleichung ist $-1 < V_z(t \rightarrow \infty) < 0$. Demnach ist die Besetzungswahrscheinlichkeit des Zustands $|2\rangle$ im eingeschwungenen Zustand ($t \rightarrow \infty$) stets kleiner als 0.5, auch im Fall $\delta = 0$, egal wie groß die Leistung des eingestrahlten elektromagnetischen Feldes ist. Der Betrag des Blochvektors im eingeschwungenen Zustand ist

$$\begin{aligned} |\mathbf{V}|(t \rightarrow \infty) &= \\ &= \sqrt{\frac{T_2 \Omega_R^2 T_2 (\delta^2 T_2^2 + 1) + (\delta^2 T_2^2 + 1)^2}{\Omega_R^4 T_1^2 T_2^2 + 2 T_1 \Omega_R^2 T_2 (\delta^2 T_2^2 + 1) + (\delta^2 T_2^2 + 1)^2}} < 1. \quad (48) \end{aligned}$$

Mit der üblichen Abschätzung $T_2 \gtrsim 2T_1$ erkennt man, dass $|\mathbf{V}|(t \rightarrow \infty) < 1$ ist, und dass der Wert von δ nur einen marginalen Einfluss auf den Wert von $|\mathbf{V}|(t \rightarrow \infty)$ hat.

4. Ramsey-Interferenzstreifen

„Die Sekunde ist die Dauer von 9 192 631 770 Perioden der Strahlung, die dem Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstruktur-niveaus des Grundzustandes von ^{133}Cs Atomen entsprechen.“ So lautet die seit 1967 international vereinbarte Definition der Sekunde. In Deutschland hat die Physikalisch-Technische Bundesanstalt in Braunschweig die Aufgabe, die Sekunde gemäß dieser Definition zu messen und der Öffentlichkeit zur Verfügung zu stellen.

Zu diesem Zweck lässt die PTB einen Strahl von ^{133}Cs -Atomen mit einem Mikrowellenfeld wechselwirken, dessen Frequenz durch einen spannungsgesteuerten Oszillator geregelt wird und anfangs auf etwa 9.192 631 GHz eingestellt ist. Die Atome oszillieren dann zwischen dem Zustand $|1\rangle$ (das ist das Niveau $F_g = 3$ des Grundzustands) und dem Zustand $|2\rangle$ (das ist das Niveau $F_g = 4$ des Grundzustands). Die Besetzungszahlen der beiden Zustände sind

$$\rho_{11} \stackrel{(34a)}{=} \cos^2(\Omega t/2) + \frac{\delta^2}{|\Omega_R|^2 + \delta^2} \sin^2(\Omega t/2) \quad (49a)$$

$$\rho_{22} \stackrel{(34b)}{=} \frac{|\Omega_R|^2}{|\Omega_R|^2 + \delta^2} \sin^2(\Omega t/2) . \quad (49b)$$

Nur wenn $\delta = 0$ ist, erreicht ρ_{11} den Wert 0 und ρ_{22} den Wert 1, bei $\delta \neq 0$ ist ρ_{11} stets > 0 und ρ_{22} stets < 1 . Man bräuchte also „nur“ die Amplitude der Rabi-Oszillationen (49) zu messen und den spannungsgesteuerten Oszillator so nachzuregeln, dass sie maximal wird. Dann ist $\delta = 0$, man multipliziert den Kehrwert der Frequenz des Oszillators mit 9 192 631 770, und die Sekunde ist realisiert. Im Prinzip.

Der Nachteil dieses Vorgehens besteht darin, dass man kleine Abweichungen vom Maximalwert der Amplitude nur sehr ungenau detektieren kann, die Frequenz des Maximums also nur ziemlich ungenau bestimmen kann. Norman Ramsey (1915 – 2011) schlug deshalb 1949 ein besseres Verfahren vor [2]. Die Atomuhr „CS2“ der PTB wurde gemäß Ramseys Vorschlag so gebaut, wie in Abb. 2 skizziert:

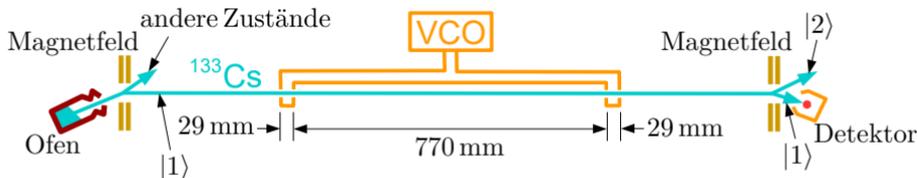


Abb. 2: Die Uhr „CS2“ der PTB

In einer evakuierten und gegen äußere Magnetfelder abgeschirmten Kammer wird aus einem Ofen isotopenreines ^{133}Cs verdampft. Durch ein inhomogenes Magnetfeld werden die Atome selektiert, die sich im Zustand $|1\rangle$ (das ist das Niveau $F_g = 3$ des Grundzustands) befinden.

Der Strahl enthält etwa $1.3 \cdot 10^7$ Atome pro Sekunde, die sich mit einer Geschwindigkeit von etwa 95 m/s durch die Apparatur bewegen. Sie durchqueren einen 29 mm breiten Hohlleiter, in dem sie mit einem Mikrowellenfeld von etwa 9.192 631 GHz angeregt werden. Die Frequenz der Mikrowellen wird mithilfe eines spannungsgesteuerten Oszillators (voltage controlled oscillator = VCO) geregelt und variiert. Die Intensität des Mikrowellenfeldes ist so eingestellt, dass die Atome beim Durchqueren des Wellenleiters gerade einem $\pi/2$ -Puls ausgesetzt sind.

Anschließend fliegen die Atome während einer Zeit

$$T = \frac{770 \text{ mm}}{95 \text{ m/s}} \approx 8.1 \cdot 10^{-3} \text{ s} \quad (50)$$

ohne äußeres Feld durch die Apparatur. Dann durchqueren sie den Wellenleiter erneut, sind also zum zweiten Mal einem $\pi/2$ -Puls ausgesetzt.

Schließlich werden durch ein weiteres inhomogenes Magnetfeld die angeregten Atome (die sich im Zustand $|2\rangle$ befinden) und die Atome im Zustand $|1\rangle$ voneinander getrennt. Die Atome im Zustand $|1\rangle$ werden durch einen Hitzdraht ionisiert, so dass die Ionisationsprodukte leicht elektrisch detektiert werden können.

Naiv könnte man vermuten, dass die beiden $\pi/2$ -Pulse zusammengekommen die gleiche Wirkung haben wie ein π -Puls. Das ist aber nicht der Fall, denn die feldfreie Flugzeit $T = (50)$ zwischen den beiden $\pi/2$ -Pulsen verändert die Situation grundlegend. Um den Vorgang detailliert zu analysieren, gehen wir aus von den Bewegungsgleichungen

$$\dot{V}_x \stackrel{(42)}{=} \delta V_y - \frac{V_x}{T_2} \quad (51a)$$

$$\dot{V}_y \stackrel{(42)}{=} \Omega_R V_z - \delta V_x - \frac{V_y}{T_2} \quad (51b)$$

$$\dot{V}_z \stackrel{(42)}{=} -\Omega_R V_y - \frac{V_z + 1}{T_1} . \quad (51c)$$

Die Apparatur ist so dimensioniert, dass

$$T = (50) \ll T_1 \quad T \ll T_2 \quad (52a)$$

und deshalb erst recht

$$T_{\pi/2} \ll T_1 \quad T_{\pi/2} \ll T_2 \quad (52b)$$

gilt. Die jeweils letzten Summanden in den drei Zeilen von (51) sind deshalb in guter Näherung vernachlässigbar. Außerdem sind die $\pi/2$ -Pulse

$$T_{\pi/2} \stackrel{(23)}{=} \frac{\pi/2}{\sqrt{|\Omega_R|^2 + \delta^2}}$$

so stark, dass

$$|\Omega_R|^2 \gg \delta^2 \quad (52c)$$

gilt.

Wir definieren für jedes einzelne Atom eine eigene Zeitskala folgendermaßen: Zur Zeit $t = -T_{\pi/2}$ tritt das Atom erstmals in den Wellenleiter ein, und verlässt ihn wieder zur Zeit $t = T_0 = 0$. Der Blochvektor dieses Atoms ist beim Eintritt in den Wellenleiter

$$\mathbf{V}(-T_{\pi/2}) = (0, 0, -1) , \quad (53)$$

und beim Austritt aus dem Wellenleiter ist er unter den drei Voraussetzungen (51) in guter Näherung

$$\mathbf{V}(T_0) \approx (0, -1, 0) , \quad (54)$$

wie in Abb. 3(a) und 3(b) auf Seite 24 skizziert. Anschließend (im Zeitraum von $t = T_0 = 0$ bis $t = T$) entwickelt sich der Blochvektor gemäß den Bewegungsgleichungen (51) folgendermaßen:

$$\dot{V}_x = \delta V_y - \frac{V_x}{T_2} \stackrel{(52)}{\approx} \delta V_y \quad (55a)$$

$$\dot{V}_y = -\delta V_x - \frac{V_y}{T_2} \stackrel{(52)}{\approx} -\delta V_x \quad (55b)$$

$$\dot{V}_z = -\frac{V_z + 1}{T_1} \stackrel{(52)}{\approx} 0 . \quad (55c)$$

Es ist sicher plausibel, dass außerhalb des Strahlungsfeldes alle Terme $\sim \Omega_R$ aus der Bewegungsgleichung des Blochvektors gestrichen werden. Aber es könnte irritierend sein, dass die Terme $\sim \delta$ beibehalten werden. Kann man vernünftig von der Verstimmung δ sprechen, wenn gar keine Strahlung vorhanden ist, die gegenüber der Resonanzfrequenz $\omega_2 - \omega_1$ verstimmt ist?

An dieser Stelle muss man sich die Definition (35) des Blochvektors in Erinnerung rufen:

$$V_x \equiv \rho_{21}e^{i\omega t} + \rho_{12}e^{-i\omega t} \quad (56a)$$

$$V_y \equiv i\rho_{21}e^{i\omega t} - i\rho_{12}e^{-i\omega t} \quad (56b)$$

$$V_z \equiv \rho_{22} - \rho_{11} \quad (56c)$$

$$\omega \equiv \omega_2 - \omega_1 + \delta$$

Durch die Faktoren $e^{\pm i\omega t}$ enthalten V_x und V_y eine implizite Abhängigkeit von δ , egal ob das Atom bestrahlt wird oder nicht. Der Blochvektor beschreibt also nicht die Cäsium-Atome allein, sondern das Gesamtsystem Atome & Strahlung. Würden wir die Atome und die Strahlung quantentheoretisch beschreiben, dann würde der $\pi/2$ -Puls zu einer verschränkten Zustandsfunktion von Atomen & Strahlung führen. Die Verschränkung besteht weiter, wenn die Atome den Wellenleiter verlassen, und wird erst dann aufgehoben, wenn eine Messung am verschränkten System durchgeführt wird. In Blochs semiklassischem Formalismus wird die Verschränkung dadurch repräsentiert, dass \mathbf{V} implizit von ω abhängt. Also ist es vernünftig und konsistent mit unserem Modell, den Faktor δ in (55) auch dann beizubehalten, wenn die Atome zeitweilig nicht mit dem Strahlungsfeld wechselwirken. Dagegen ist die Rabi-Frequenz

$$\Omega_R \stackrel{(5)}{=} \frac{1}{\hbar} \langle 2 | \mathbf{d}\hat{\mathbf{E}} | 1 \rangle = \frac{1}{\hbar} \left(\langle 1 | \mathbf{d}\hat{\mathbf{E}} | 2 \rangle \right)^* \quad (57)$$

klarerweise Null, wenn das Feld \mathbf{E} am Ort des 2-Niveau-Systems Null ist, und ist deshalb zu Recht aus (55) verschwunden.

Wegen (52) ist $|\mathbf{V}|$ während des gesamten Versuchs in sehr guter Näherung Eins, und \mathbf{V} rotiert im Zeitraum $0 \leq t \leq T$ in der xy -

Ebene mit der Frequenz δ um die z -Achse.

$$0 \leq t \leq T :$$

$$V_x(t) \approx -\sin(\delta t) \quad V_x(t=0) = 0 \quad (58a)$$

$$V_y(t) \approx -\cos(\delta t) \quad V_y(t=0) \approx -1 \quad (58b)$$

$$V_z(t) \approx 0 \quad (58c)$$

In Abb. 3(c) und 3(e) sind zwei beliebig herausgegriffene Möglichkeiten für unterschiedlich großes $\delta > 0$ skizziert. Bei $\delta < 0$ (dafür enthält Abb. 3 kein Beispiel) rotiert der Blochvektor in umgekehrter Richtung um die z -Achse, und im Fall $\delta = 0$ ist er bei $\mathbf{V} \approx (0, -1, 0)$ konstant.

Insgesamt dreht sich \mathbf{V} im Zeitraum T zwischen den beiden Pulsen um den Winkel

$$-\delta T = -\alpha - n \cdot 2\pi \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (59)$$

$$0 \leq \alpha < 2\pi \quad .$$

Im Zeitraum $T \leq t \leq T + T_{\pi/2}$ ist das Cäsium-Atom zum zweiten Mal einem $\pi/2$ -Puls ausgesetzt. Dieser Puls dreht \mathbf{V} aus der xy -

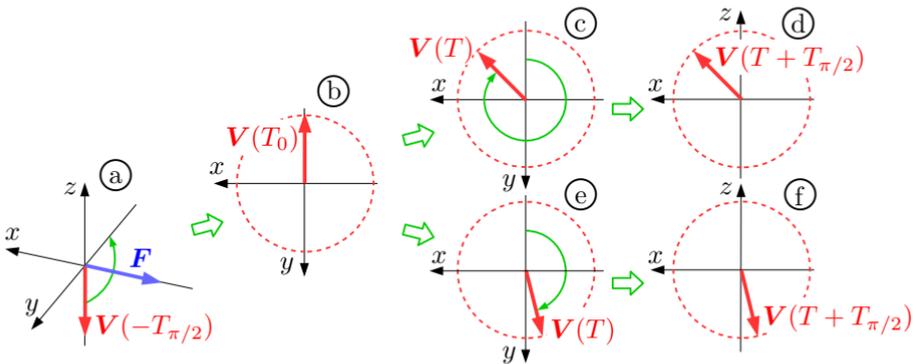


Abb. 3: Der Blochvektor beim Ramsey-Verfahren

Ebene in die xz -Ebene, siehe Abb. 3(d) und 3(f). (Beides gilt nur näherungsweise. Falls $\delta \neq 0$ ist, liegt \mathbf{V} vor dem Puls nicht genau, aber fast, in der xy -Ebene, und nach dem Puls nicht genau, aber fast, in der xz -Ebene.) Nach diesem Puls ist in guter Näherung

$$V_z \stackrel{(35)}{=} \rho_{22} - \rho_{11} \approx \cos(\alpha) . \quad (60)$$

Im Fall $\alpha = 0$ ist also die Besetzungswahrscheinlichkeit des Zustands $|2\rangle$ gleich Eins, und die Besetzungswahrscheinlichkeit des Zustands $|1\rangle$ ist gleich Null. Im Fall $\alpha = \pi$ ist die Besetzungswahrscheinlichkeit des Zustands $|2\rangle$ Null, und die Besetzungswahrscheinlichkeit des Zustands $|1\rangle$ ist gleich Eins.

Im Zeitraum zwischen $t = T + T_{\pi/2}$ und der Detektion ändern sich V_x und V_y , aber $V_z \stackrel{(35)}{=} \rho_{22} - \rho_{11}$ ändert sich nicht mehr. Für das Messergebnis ist es deshalb unerheblich wieviel Zeit zwischen $t = T + T_{\pi/2}$ und der Detektion vergeht, vorausgesetzt dieser Zeitraum ist sehr klein gegen T_1 und T_2 .

In Abb. 4 auf der nächsten Seite, die aus [3] entnommen wurde, werden die Messergebnisse als Funktion von δ dargestellt. Im Insert sind die zentralen Interferenzstreifen mit gespreizter Frequenzachse abgebildet. Weil bei der Uhr „CS2“ der PTB ρ_{11} (nicht ρ_{22}) gemessen wird, zeigt die Messkurve bei perfekter Resonanz ($\delta = 0$) ein Minimum.

Man erkennt aus der Graphik deutlich den Vorteil von Ramsey’s Methode: Aus der Graphik lässt sich der Punkt $\delta = 0$ ohne weiteres mit einer Genauigkeit von etwa ± 10 Hz ablesen. Würde man anstelle der zwei $\pi/2$ -Pulse einen einzigen π -Puls anwenden (d. h. wäre $T = 0$), dann würde man die grün eingezeichnete Kurve erhalten, aus der die Position von $\delta = 0$ nur mit einer Genauigkeit von etwa ± 100 Hz erkennbar ist. Ramsey’s Methode steigert also die Genauigkeit der Uhr etwa um den Faktor 10.

Unter den Interferenzexperimenten spielen die Ramsey-Interferenzen eine bemerkenswerte Sonderrolle. In anderen Interferenzex-

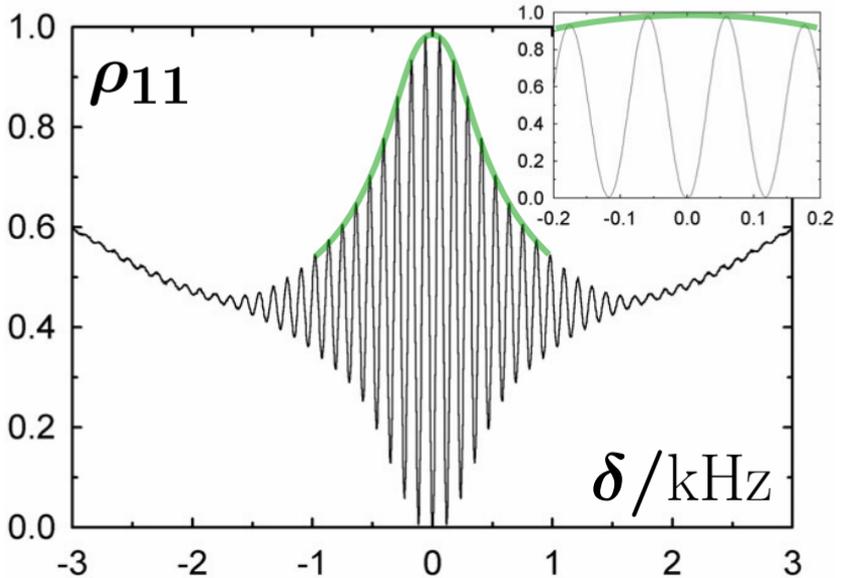


Abb. 4: Ramsey-Interferenzen, gemessen mit der Uhr „CS2“ der PTB (Graphik aus [3])

perimenten bringt man Lichtwellen mit Lichtwellen zur Interferenz (bzw. ein Photon mit sich selbst), oder Elektronenwellen mit Elektronenwellen (bzw. ein Elektron mit sich selbst), oder Molekülwellen mit Molekülwellen (bzw. ein Molekül mit sich selbst). Dagegen zeigt Abb. 4 die Interferenz zwischen einem Materiefeld (den Cäsium-Atomen) und dem elektromagnetischen Strahlungsfeld. Beim ersten $\pi/2$ -Puls wird eine wohldefinierte Phasenbeziehung zwischen jedem Cäsium-Atom und dem Strahlungsfeld hergestellt. Anschließend

entwickelt sich die Phase der Cäsium-Atome gemäß

$$\begin{aligned}
 |\psi\rangle &\stackrel{(28a)}{=} \sqrt{\frac{1}{2}} \left[\left(C_1 e^{-i\omega_1 t} |1\rangle + C_2 e^{-i\omega_2 t} |2\rangle \right) \right] \\
 &= \sqrt{\frac{1}{2}} \left[\left(C_1 e^{+i(\omega_2 - 2\omega_1)t} |1\rangle + C_2 e^{+i\omega_1 t} |2\rangle \right) \right] \cdot e^{-i(\omega_2 - \omega_1)t} \quad (61) \\
 C_1 &\equiv \left(1 - \frac{i\delta}{\Omega} \right) e^{i(\zeta + \delta T_{\pi/2}/2)} \\
 C_2 &\equiv \frac{i\Omega_R}{\Omega} e^{i(\zeta - \delta T_{\pi/2}/2)} .
 \end{aligned}$$

Man beachte dass C_1 und C_2 Konstanten sind. Die Exponentialfunktionen innerhalb der eckigen Klammern oszillieren sehr schnell im Vergleich zu $e^{-i(\omega_2 - \omega_1)t}$. Deshalb sind sie hinsichtlich der Interferenz mit der elektromagnetischen Strahlung der Frequenz $\omega \approx \omega_2 - \omega_1$ lediglich „Rauschen“.

Gleichzeitig entwickelt sich die Phase des Strahlungsfeldes gemäß

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{E}} &\stackrel{(3)}{=} \hat{\mathbf{E}} \cos(-\omega t) \quad (62) \\
 \omega &\stackrel{(1)}{=} \omega_2 - \omega_1 + \delta .
 \end{aligned}$$

Nach der Zeit T , wenn Atome und Strahlung wieder zusammengeführt werden, hat sich zwischen (61) und (62) eine Phasendifferenz von $-\delta T$ aufgebaut, abgesehen vom „Rauschen“ innerhalb der eckigen Klammern von (61). Diese Phasendifferenz ist dafür verantwortlich, dass man in Abb. 4 nicht die breite grüne Kurve, sondern die feinen Interferenzstreifen sieht. In der englischsprachigen Literatur werden diese Streifen als „Ramsey fringes“ bezeichnet.

Literatur

- [1] F. Bloch: *Nuclear Induction*,
Phys. Rev. **70**, 460–474 (1946), <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRev.70.460> or: [http://baldwinlab.cem.ox.ac.uk/resources/bloch original paper.pdf](http://baldwinlab.cem.ox.ac.uk/resources/bloch_original_paper.pdf)
- [2] N. F. Ramsey: *A Molecular Beam Resonance Method with Separated Oscillating Fields*, Phys. Rev. **78**, 695 (1950)
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRev.78.695> or:
http://www2.mpg.mpg.de/~rnp/download/l1415/papers/Ramsey_1950.pdf
- [3] A. Bauch: *Caesium Atomic Clocks: Function, Performance and Applications*, (Physikalisch-Technische Bundesanstalt, Braunschweig, 2011)
https://www.ptb.de/cms/fileadmin/internet/fachabteilungen/abteilung_4/4.4_zeit_und_frequenz/pdf/2003_Bauch_MST_CAC_VF_author_version.pdf