Irrationale Zahlen

Drei einfache Beweise für die Irrationalität von Zahlen

Übersicht

Nach einer kurzen Überlegung im Abschnitt 1 zur Vollständigkeit von Zahlensystemen und zur Notwendigkeit der irrationalen Zahlen, werden im Abschnitt 2 drei Beweise zur Irrationalität bestimmter Zahlen explizit vorgetragen, nämlich

* im Abschnitt 2.1 der Beweis, dass das Verhältnis der Länge der Diagonale zur Länge der Seite eines Quadrates irrational ist,
* im Abschnitt 2.2 der Beweis der Irrationalität des Goldenen Schnitts Φ,
* und schließlich im Abschnitt 2.3 der Beweis, dass die Wurzeln natürlicher Zahlen entweder ganze Zahlen oder irrationale Zahlen sind.

Inhalt

1. Vollständige Zahlensysteme

Historisch gesehen, waren die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, ... sicherlich die ersten, die von Menschen verwendet wurden. Trotzdem ist der Name unglücklich gewählt. Denn auch diese Zahlen sind ja nicht ohne Zutun des Menschen von selbst in der Natur vorhanden, sondern Setzungen des menschlichen Geistes. Der ist zwar auch Teil der Natur, aber wenn das ein Argument für die „Natürlichkeit“ der natürlichen Zahlen wäre, dann könnten wir mit gleichem Recht auch die imaginären Zahlen als natürliche bezeichnen. Wie auch immer, der Name hat sich eingebürgert. In der modernen Zahlentheorie wird häufig auch noch die Null zu den natürlichen Zahlen gerechnet, also $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Zwei beliebige natürliche Zahlen a und b können im Rahmen der natürlichen Zahlen jederzeit addiert, jedoch nicht immer subtrahiert werden. Beispielsweise gibt es kein $c \in \mathbb{N}$, das die Gleichung $c = 5 - 8$ löst. Dagegen ist die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ hinsichtlich Addition und Subtraktion ein vollständiges Zahlensystem:

$$a + b = c \quad \text{mit } c \in \mathbb{Z} \text{ für beliebige } a, b \in \mathbb{Z} \tag{1a}$$

$$a - b = d \quad \text{mit } d \in \mathbb{Z} \text{ für beliebige } a, b \in \mathbb{Z} \tag{1b}$$

Früher als die negativen Zahlen wurden vermutlich die positiven rationalen Zahlen m/n mit $m, n \in \mathbb{N}$ verwendet. Die Ausweitung des Begriffs auch auf die negativen rationalen Zahlen ist naheliegend. Die rationalen Zahlen p/q mit $p, q \in \mathbb{Z}$ bilden ein vollständiges Zahlensystem nicht nur hinsichtlich Addition und Subtraktion, sondern auch hinsichtlich Multiplikation und Division.

$$p + q = a \quad \text{mit } a \text{ rational für beliebige rationale } p, q \tag{2a}$$

$$p - q = b \quad \text{mit } b \text{ rational für beliebige rationale } p, q \tag{2b}$$

$$p \cdot q = c \quad \text{mit } c \text{ rational für beliebige rationale } p, q \tag{2c}$$

$$p / q = d \quad \text{mit } d \text{ rational für beliebige rationale } p, q \tag{2d}$$

Unvollständig sind die rationalen Zahlen jedoch, wenn man als weitere Rechenoperation das Potenzieren hinzunimmt. Die Unvollständigkeit tritt an zwei Stellen auf: Erstens gibt es keine rationale Zahl a, die beispielsweise die Gleichung $a = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$ löst. Denn $\sqrt{5}$ ist – wie wir in Abschnitt 2.3 beweisen werden – eine[1] irrationale Zahl; sie kann nicht als Quotient p/q zweier ganzer Zahlen $p, q \in \mathbb{Z}$ dargestellt werden. Es gibt unendlich viele irrationale Zahlen. Die Vereinigungsmenge der rationalen und der irrationalen Zahlen wird als Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen bezeichnet.

Aber auch die reellen Zahlen sind hinsichtlich des Potenzierens nicht vollständig. Denn es gibt zweitens keine reelle – also erst recht keine rationale – Zahl b, die beispielsweise die Gleichung $b = (-9)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-9}$ löst. $\sqrt{-9} = \sqrt{9 \cdot (-1)} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{-1} = 3i$ ist eine[1] imaginäre Zahl. Nochmals betonen wir unsere Auffassung, dass imaginäre Zahlen nicht mehr oder weniger „wirklich" sind als natürliche oder irgendwelche anderen Zahlen. Die Vereinigungsmenge der imaginären Zahlen $\mathbb{I}$ und der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Die komplexen Zahlen bilden ein vollständiges Zahlensystem hinsichtlich Addition und Subtraktion, Multiplikation und Division, sowie dem Potenzieren.

$$f + g = h \quad \text{mit } h \in \mathbb{C} \text{ für beliebige } f, g \in \mathbb{C} \tag{3a}$$

$$f - g = h \quad \text{mit } h \in \mathbb{C} \text{ für beliebige } f, g \in \mathbb{C} \tag{3b}$$

$$f \cdot g = h \quad \text{mit } h \in \mathbb{C} \text{ für beliebige } f, g \in \mathbb{C} \tag{3c}$$

$$f / g = h \quad \text{mit } h \in \mathbb{C} \text{ für beliebige } f, g \in \mathbb{C} \tag{3d}$$

$$f^g = h \quad \text{mit } h \in \mathbb{C} \text{ für beliebige } f, g \in \mathbb{C} \tag{3e}$$

2. Gibt es Irrationale Zahlen?

Dass man nicht mit natürlichen Zahlen auskommt sondern auch negative ganze Zahlen braucht, wenn man eine Gleichung wie $a = 9 - 15$ lösen will, ist offensichtlich. Ebenso, dass zur Lösung von

[1] Genau genommen hat natürlich jede Zahl zwei Wurzeln, z.B. $\sqrt{16} = \pm 4$.

Gleichungen der Art $f = \sqrt{-49}$ imaginäre Zahlen erforderlich sind und die reellen Zahlen nicht ausreichen.

Überhaupt nicht unmittelbar einzusehen ist dagegen die Notwendigkeit irrationaler Zahlen. Das liegt daran, dass man in beliebig enger Nachbarschaft jeder irrationalen Zahl eine rationale finden kann. So kommt beispielsweise die offensichtlich rationale Zahl $(1 + \frac{1}{n})^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ für genügend großes n der irrationalen Zahl e beliebig nahe. Aber für kein endlich großes n ist $(1 + \frac{1}{n})^n$ exakt gleich e. Nur bei unendlich großem n gilt:

$$\lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e \tag{4}$$

Für praktische Anwendungen ist es völlig gleichgültig, ob eine Zahl exakt gleich der „wahren und richtigen“ ist, oder ihr nur beliebig nahe kommt. Ingenieure brauchen deshalb keine irrationalen Zahlen, und auch der Computer approximiert π durch eine rationale Zahl, wenn man ihn den Umfang eines Kreises berechnen lässt. Aus dem gleichen Grund bringt es einer Spezies keinerlei Vorteil im Überlebenskampf der Evolution, wenn sie irrationale Zahlen erfinden und diese sogar für notwendig halten kann. Wieso konnten Menschen irrationale Zahlen erdenken? Hat das irgendeinen Sinn? Es kann und sollte uns sehr nachdenklich machen, dass die Fähigkeiten menschlicher Gehirne erstaunlich weit über das hinausgehen, was durch unsere evolutionäre Vergangenheit erklärbar ist.

Woher weiß man eigentlich, dass Zahlen wie $\pi, \sqrt{10}, e, \ldots$ nicht rational sind, also nicht als Quotient m/n zweier ganzer Zahlen $m, n \in \mathbb{Z}$ darstellbar sind? In den nächsten Abschnitten führen wir drei Beweise für die Irrationalität von Zahlen explizit vor.

2.1. Der älteste Beweis

Die Entdeckung der irrationalen Zahlen wird den Pythagoreern zugeschrieben. Nach der nicht ganz eindeutigen Überlieferung war es Hippasos aus Metapontos, der im 5. Jahrhundert v. Chr. die Länge d der Diagonale eines Quadrats mit der Länge a der Seite verglich. Nach dem Satz des Pythagoras gilt für diese Längen:

$$a^2 + a^2 = d^2 \quad , \tag{5}$$

woraus sofort

$$\frac{d}{a} = \sqrt{2} \tag{6}$$

folgt. Dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist, also nicht als Quotient zweier ganzer Zahlen ausgedrückt werden kann, zeigte Hippasos durch einen Widerspruchsbeweis. Er nahm versuchsweise an, $\sqrt{2}$ ließe sich doch als Quotient zweier ganzer Zahlen m und n darstellen. Sein Widerspruchsbeweis verläuft folgendermaßen:

$$\frac{m}{n} = \sqrt{2} \quad \text{mit } m, n \in \mathbb{Z} \tag{7}$$

m, n seien so gewählt, dass (7) nicht weiter gekürzt werden kann. (8)

Wegen $m^2 = 2n^2$ ist m^2 eine gerade Zahl. (9)

Das Quadrat jeder ungeraden ganzen Zahl ist ungerade, (10)

deshalb folgt aus (9): m ist eine gerade Zahl. (11)

Wegen (8) und (11) muss n eine ungerade Zahl sein, (12)

denn sonst könnte man m/n kürzen.

Wegen (11) gibt es ein $p \in \mathbb{Z}$ mit $m = 2p$ (13)

(13) eingesetzt in (9) ergibt $m^2 = 2n^2 = (2p)^2 = 4p^2$. (14)

Aus (14) folgt: $n^2 = 2p^2$, also ist n^2 gerade,

also ist wegen (10) auch n gerade. Widerspruch zu (12) !

Da die Schlussfolgerungen fehlerfrei waren, muss die Annahme (7), $\sqrt{2}$ sei als Quotient zweier ganzer Zahlen darstellbar, falsch gewesen sein. Also ist $\sqrt{2}$ irrational.

2.2. Ein Beweis mithilfe des Goldenen Schnitts

Eine Strecke der Länge a wird so in zwei Teilstrecken b und c geteilt, dass für das Längenverhältnis Φ der Strecken gilt:

$$\Phi \equiv \frac{a}{b} = \frac{b}{c} \quad \text{mit } a = b + c \tag{15}$$

Dieses Verhältnis Φ wird als „Goldener Schnitt“ bezeichnet. Um Φ zu berechnen, schreiben wir (15) in der Form

$$\Phi \equiv \frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}\,, \tag{16}$$

multiplizieren dann mit $(a-b)/b$, und lösen die quadratische Gleichung nach a/b auf:

$$\frac{a^2}{b^2} - \frac{a}{b} - 1 = 0 \tag{17}$$

$$\Phi = \frac{a}{b} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5}) \tag{18}$$

Die Lösung mit der negativen Wurzel ist kleiner als Null, deshalb werden wir sie nicht weiter betrachten (obwohl sie mathematisch auch sehr interessant ist). Mit der positiven Wurzel erhalten wir als Wert von Φ:

$$\Phi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) = 1.6180339887498\ldots \tag{19}$$

Wenn der Rechner diese Zahl für Φ liefert, dann ahnt man schon dass die Kette der Dezimalstellen wohl nie enden wird, dass Φ also eine irrationale Zahl ist. Aber wie kann man es beweisen?

Der Beweis ist sehr einfach als Widerspruchsbeweis zu führen. Dazu nehmen wir an, Φ sei eine rationale Zahl, könne also als Quotient zweier ganzer Zahlen m und n dargestellt werden.

$$\Phi = \frac{m}{n} \quad \text{mit } m, n \in \mathbb{Z} \tag{20}$$

$$\text{Nach (16) gilt: } \Phi = \frac{m}{n} = \frac{n}{m-n} \tag{21}$$

$$\text{Wir definieren: } p \equiv m - n \tag{22}$$

$$p \in \mathbb{Z} \quad \text{,weil Differenz zweier ganzer Zahlen.} \tag{23}$$

$$\text{Es ist } |m| > |n| \quad \text{wegen } \frac{m}{n} \approx 1.6 \quad , \tag{24}$$

$$\text{demnach auch } |n| > |m - n| = |p| \quad \text{wegen (21).} \tag{25}$$

Mit p lässt Φ sich folgendermaßen schreiben:

$$\Phi = \frac{m}{n} = \frac{n}{m-n} = \frac{n}{p} \tag{26}$$

$$\text{wobei} \quad |n| < |m|, \quad |p| < |n|, \quad \text{und} \quad m, n, p \in \mathbb{Z}$$

Wir haben also m/n gekürzt nach n/p. Das Entscheidende bei der Sache: Das Spiel lässt sich unbegrenzt oft wiederholen, wir können mit dergleichen Methode immer weiter kürzen:

$$\Phi = \frac{n}{p} = \frac{p}{n-p} = \frac{p}{q} \tag{27}$$

$$\text{mit} \quad q \equiv n - p \quad \text{wobei} \quad |p| < |n|, \quad |q| < |p|, \quad n, p, q \in \mathbb{Z}$$

$$\Phi = \frac{p}{q} = \frac{q}{p-q} = \frac{q}{r} \tag{28}$$

$$\text{mit} \quad r \equiv p - q \quad \text{wobei} \quad |q| < |p|, \quad |r| < |q|, \quad p, q, r \in \mathbb{Z}$$

$$\Phi = \frac{q}{r} = \frac{r}{q-r} = \frac{r}{s} \tag{29}$$

$$\text{mit} \quad s \equiv q - r \quad \text{wobei} \quad |r| < |q|, \quad |s| < |r|, \quad q, r, s \in \mathbb{Z}$$

$$\Phi = \frac{r}{s} = \frac{s}{r-s} = \ldots$$

… und so weiter ad infinitum. Das kann aber nicht stimmen, denn man kann Brüche ganzer Zahlen nicht unendlich oft kürzen. Irgendwann sind Zähler und Nenner so klein wie überhaupt möglich. Da die Schlussfolgerungen (21) bis (25) fehlerfrei waren, muss schon die ursprüngliche Annahme (20), Φ könne als Quotient zweier ganzer Zahlen m und n dargestellt werden, falsch gewesen sein. Damit ist bewiesen, dass Φ eine irrationale Zahl ist.

2.3. Ein allgemeinerer Beweis

In den Abschnitten 2.1 und 2.2 haben wir uns mit jeweils nur einer einzigen irrationalen Zahl befasst, nämlich $\sqrt{2}$ beziehungsweise Φ. Zum Abschluss wollen wir einen Irrationalitätsbeweis für eine unendlich große Menge von Zahlen vorstellen. Der Beweis findet sich in Dedekinds bekannter Schrift[2] zur arithmetischen Begründung der irrationalen Zahlen. Die Quelle dieses Beweises ist nicht bekannt. Dedekind trägt ihn vor, behauptet aber keineswegs dass der Beweis von ihm selber stamme. Vermutlich war dieser Beweis bereits im Altertum bekannt. Bewiesen wird folgender

Satz: *Die Wurzeln einer natürlichen Zahl $d \in \mathbb{N}$ sind entweder ganze Zahlen oder irrationale Zahlen.*

Beispiele für den ersten Fall sind $\sqrt{1}, \sqrt{4}, \sqrt{9}, \sqrt{16}, \ldots$
Die Wurzeln $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \ldots$ aller anderen natürlichen Zahlen sind, so behauptet der Satz, irrational. Die zweite Gruppe besteht also aus allen Zahlen $\sqrt{d}$ mit der Eigenschaft

$$d \in \mathbb{N}\,, \quad \text{und es gibt kein } r \in \mathbb{Z} \text{ mit } r^2 = d\,. \tag{30}$$

Klarerweise ist die negative Wurzel genau dann irrational, wenn auch die positive Wurzel irrational ist. Wir können die Untersuchung also auf die positive Wurzel beschränken, und tun das im

[2] Richard Dedekind: „Stetigkeit und irrationale Zahlen“ , Verlag Friedrich Vieweg & Sohn, Braunschweig, April 1872

Folgenden auch. Ein Widerspruchsbeweis wird jetzt vorbereitet durch die Annahme, es gebe ganze Zahlen m und n mit der Eigenschaft

$$\sqrt{d} = \frac{m}{n} \quad \text{mit } m, n \in \mathbb{Z} \quad . \tag{31}$$

Da wir nur die positive Wurzel untersuchen, müssen m und n entweder beide positive oder beide negative Zahlen sein. Der mögliche gemeinsame Faktor -1 kann gekürzt werden, wir brauchen uns also nur mit natürlichen Zahlen m und n zu beschäftigen. Die Annahme (31) lässt sich auf diese Weise noch etwas einschränken, was viele Fallunterscheidungen erspart:

$$\sqrt{d} = \frac{m}{n} \quad \text{mit } m, n \in \mathbb{N} \tag{32}$$

Auch dieser Beweis beruht – wie der Beweis in Abschnitt 2.2 – darauf, dass die natürlichen Zahlen nach unten beschränkt sind. Es wird nämlich im Folgenden gezeigt, dass man – wenn (32) korrekt wäre – eine unendliche Folge immer kleinerer natürlicher Zahlen finden könnte, die ebenfalls Gleichung (32) erfüllen.

Die positive Wurzel von d liegt zwischen zwei natürlichen Zahlen s und $s + 1$:

$$s < \sqrt{d} < (s + 1) \quad \text{mit } s \in \mathbb{N} \tag{33}$$

Wir setzen (32) in (33) ein und multiplizieren mit n:

$$s < \frac{m}{n} < (s + 1) \tag{34}$$

$$n \cdot s < m < n \cdot (s + 1) \tag{35}$$

Da n, s und m natürliche Zahlen sind, sind auch das Produkt $n \cdot s$ und – da größer als 0 – die Summe $m - n \cdot s$ natürliche Zahlen.

Wir ziehen $n \cdot s$ von (35) ab, und definieren eine natürliche Zahl q, die kleiner als n ist:

$$0 < q \equiv m - n \cdot s < n \quad , \quad q \in \mathbb{N} \tag{36}$$

Außerdem definieren wir eine natürliche Zahl p folgendermaßen:

$$p \equiv |n \cdot d - s \cdot m| \quad , \quad p \in \mathbb{N} \tag{37}$$

$n \cdot d$ und $s \cdot m$ sind als Produkte natürlicher Zahlen auch wieder natürliche Zahlen. Ihre Differenz p ist auf jeden Fall eine ganze Zahl, der Betrag ihrer Differenz also eine natürliche Zahl. Wir behaupten, dass p/q eine rationale Darstellung von $\sqrt{d}$ ist:

$$\sqrt{d} = \frac{m}{n} \stackrel{?}{=} \frac{p}{q} \tag{38}$$

Das stimmt genau dann, wenn auch

$$p^2 - d \cdot q^2 \stackrel{?}{=} 0 \tag{39}$$

richtig ist. Durch Einsetzen von (37) und (36) erhält man

$$\begin{aligned} (n \cdot d - s \cdot m)^2 - d \cdot (m - n \cdot s)^2 &= \\ &= n^2 d^2 - 2ndsm + s^2 m^2 - d \cdot (m^2 - 2mns + n^2 s^2) \\ &= n^2 d^2 + s^2 m^2 - dm^2 - dn^2 s^2 \\ &= (s^2 - d) \cdot \underbrace{(m^2 - dn^2)}_{=0 \text{ wegen } (32)} = 0 \quad . \end{aligned} \tag{40}$$

(39), und damit auch (38), ist also korrekt. Weil $q < n$ ist, ist also auch $p < m$, das heißt wir haben m/n nach p/q gekürzt. Wir können dies Verfahren unendlich oft wiederholen und immer kleinere natürliche Zahlen finden, deren Quotient wieder gleich $\sqrt{d}$ ist. Wieder ergibt sich ein Widerspruch, weil die natürlichen Zahlen nach unten begrenzt sind. Also war die Annahme (32) falsch. Die Wurzeln jeder Zahl d gemäß (30) sind tatsächlich irrationale Zahlen.