

**Gerold Gründler**

# **Quantenphänomene und ihre Deutung**

*Astrophysikalisches Institut Neunhof, Nürnberg*

[www.astrophys-neunhof.de](http://www.astrophys-neunhof.de)

*Version 5.3 , 27. August 2024*

Dies elektronische Buch unterliegt – genauso wie gedruckte Medien – dem Urheberrecht. Sie dürfen diesen File zum eigenen Gebrauch speichern. Sie dürfen das Buch auch zum eigenen Gebrauch drucken, der Autor empfiehlt jedoch (siehe Seite 5), dies nicht zu tun. Sie dürfen das Buch anderen Personen zugänglich machen, bitte geben Sie dazu nicht den File, sondern den Link auf die oben genannte website weiter, damit jedem Leser stets die aktuelle Version des Buches zur Verfügung steht. Es ist verboten, dieses Buch oder Teile dieses Buches zu verkaufen oder gegen Bezahlung zu verleihen, egal ob in elektronischer oder gedruckter Form. Es ist verboten, dieses Buch oder Teile dieses Buches in andere Bücher oder sonstige Veröffentlichungen zu integrieren, egal ob in elektronischer oder gedruckter Form. Es ist verboten, dieses Buch in veränderter oder gekürzter Form an andere Personen weiterzugeben oder anderen Personen zugänglich zu machen, egal ob in elektronischer oder gedruckter Form, egal ob entgeltlich oder unentgeltlich.

# Inhalt

Wie liest man dies e-Buch?	5
1 Klassische Physik und Quantenphysik	8
2 Licht-Wellen	24
2.1 Interferenz . . . . .	24
2.2 Polarisation . . . . .	32
2.3 Das Experiment von Thomas Young . . . . .	39
3 Photonen	43
3.1 Der Lichtelektrische Effekt . . . . .	43
3.2 Die Lichtquanten-Hypothese . . . . .	48
3.3 Compton-Streuung . . . . .	54
3.4 Taylor's Doppelspalt-Experiment . . . . .	59
3.5 Einzelne Photonen am Strahlteiler . . . . .	61
3.6 Einzelne Photonen im Interferometer . . . . .	67
3.7 Der Ort eines Teilchens . . . . .	70
3.8 Relationale Eigenschaften . . . . .	73
4 Materie-Wellen	76
4.1 Die Hypothese von de Broglie . . . . .	76
4.2 Beugung von Materiewellen an Kristallen . . . . .	78
4.3 Neutronenbeugung am Doppel- und Einfachspalt . . . . .	81
4.4 Elektronenbeugung am Doppel- und Einfachspalt . . . . .	89
4.5 Beugung von Atomen und Molekülen am Doppelspalt . . . . .	94



---

5	Vektoren und Projektionsamplituden	104
5.1	Einheitsvektoren . . . . .	105
5.2	Zwei Beispiele . . . . .	113
5.3	Messungen in der Quantentheorie . . . . .	121
5.4	Wie die Quantentheorie entdeckt wurde . . . . .	122
6	Verschrankung	129
6.1	Richtungs-Quantelung des Drehimpulses . . . . .	130
6.2	Messung und Realität . . . . .	137
6.3	EPR = Einstein, Podolski, Rosen . . . . .	142
6.4	Die Bell'sche Ungleichung . . . . .	155
7	Experimente zur Bell'schen Ungleichung	163
7.1	Verschrankte Ca-Lumineszenz-Photonen . . . . .	164
7.2	Verschrankte $\text{Be}^+$ Ionen . . . . .	176
7.3	Verschrankte SPDC-Photonen . . . . .	188
7.4	Raumartig getrennte Detektoren . . . . .	196
7.5	Schlussfolgerungen . . . . .	201
8	Welcher Weg?	208
8.1	Die Heisenberg'sche Unbestimmtheits-Relation . . . . .	208
8.2	Der Weg durchs Interferometer . . . . .	213
8.3	Ein Quantenradierer . . . . .	227
8.4	Die wechselwirkungsfreie Lichtschranke . . . . .	246
9	Deutungen	259
9.1	Die Kopenhagener Deutung . . . . .	259
9.2	John v. Neumanns Kollaps . . . . .	269
9.3	Viele Welten . . . . .	276
9.4	Dekohärenz . . . . .	285
9.5	Viele Interpretationen . . . . .	297

10	Quantensysteme mit großer Teilchenzahl	299
10.1	Dinge, Bosonen, Fermionen . . . . .	299
10.2	Halbleiter-Elektronik . . . . .	307
10.3	Der Laser . . . . .	320
	Literatur	376

## Wie liest man dies e-Buch?

Dies elektronische Buch sollte aus mehreren Gründen nicht gedruckt, sondern am Bildschirm<sup>1</sup> gelesen werden:

- \* Hin und wieder werden verbesserte Ausgaben ins Netz gestellt, ein Papier-Ausdruck könnte deshalb bald veraltet sein.
- \* Das Buch enthält unzählige<sup>2</sup> Links, die durch blaue Schriftfarbe gekennzeichnet sind. Per Mausklick kann man die Ziele blitzschnell anspringen und anschließend (mit dem Werkzeugbutton „vorige Ansicht“ des Readers, oder mithilfe der Tastenkombination  ) genauso schnell wieder zurückspringen, statt umständlich blättern zu müssen.
- \* Zuweilen ist es nützlich, mehrere Abbildungen, die sich auf verschiedenen Seiten des Buches befinden, gleichzeitig zu betrachten. Während man den file problemlos in mehreren Fenstern des Readers gleichzeitig auf den Bildschirm bringen kann, wäre ein mehrfacher Ausdruck des Buches doch recht aufwändig.
- \* Man spart Tinte und Papier, und vermeidet eine unnötige Belastung der Umwelt.

Das Lesen eines Buches am Bildschirm ist unübersichtlich und schnell ermüdend, wenn man unstrukturiert auf den Seiten herumscored, bzw. wegen ungeeigneter Einstellungen des Readers herumscoren muss. Achten Sie deshalb auf folgende Einstellungen

---



<sup>1</sup> natürlich am Bildschirm eines PCs oder Tablets, nicht am Display eines Smartphones

<sup>2</sup> das ist übertrieben, man könnte sie zählen...

des pdf-Readers:

Aktivieren Sie im Menü Anzeige/Seitenanzeige die Option

- ✓ Einzelne Seite (jedoch nicht „Einzelne Seite fortlaufend“, oder „Bildlauf aktivieren“ oder dergleichen, was *völlig ungeeignet* wäre! Es ist sehr wichtig, dass sich beim Blättern der obere oder untere Rand einer Seite am oberen oder unteren Rand des Fensters befindet, aber nicht irgendwo in der Mitte. Sonst bekommen Sie schnell tränende Augen und verlieren die Übersicht.)

Stellen Sie den Zoomfaktor 100 % ein, und ziehen Sie das Fenster des Readers so weit auf, dass eine Seite in voller Breite und in mindestens 2/3 ihrer Höhe sichtbar ist. Mit den Tasten  und  der Tastatur können Sie dann mit je 2 Klicks eine Seite vorwärts oder zurück blättern. Von jeder Seite sehen sie einmal den oberen und einmal den unteren Teil, mit etwa 1/3 Seitenhöhe Überlappung. Diese Textansicht wird Ihnen verblüffend gewohnt vorkommen, denn tatsächlich betrachten Sie unbewusst auch die Seiten eines gedruckten Buches nicht wesentlich anders.

Falls Sie über einen sehr großen Bildschirm verfügen, und ohne Scrollen eine ganze Seite (bei Zoom 100 %) in voller Höhe anzeigen können, dann können Sie wahrscheinlich auch zwei Seiten gleichzeitig anzeigen. Wählen Sie dazu im Menü Anzeige/Seitenanzeige Ihres pdf-Readers die beiden Optionen

- ✓ Zwei-Seiten-Ansicht (jedoch nicht „Zwei Seiten fortlaufend“ oder „Bildlauf aktivieren“ oder dergleichen, was *völlig ungeeignet* wäre!)
- ✓ Deckblatt bei "Zwei Seiten" einblenden

In manchen Readern sind diese Optionen als

## ✓ Buchansicht verwenden

oder ähnlich zusammengefasst. Wählen Sie auf keinen Fall Anzeige-Einstellungen, bei denen sie horizontal scrollen müssen, oder bei denen sich der obere oder untere Seitenrand mitten im Fenster befindet!

Vielleicht empfinden Sie den „Lesemodus“ des Readers als angenehm, in dem Ihnen ein etwas größeres Fenster dadurch zur Verfügung steht, dass die Werkzeugleiste ausgeblendet wird. Um in diesem Modus zur vorherigen Ansicht zurückzukehren, nachdem man einem Link gefolgt ist, drückt man gleichzeitig die Tasten



# 1 Klassische Physik und Quantenphysik

Seit wann wird auf der Erde nachgedacht? Das weiß natürlich niemand genau, aber eine grobe Abschätzung ist doch möglich. Steine, Salatköpfe, Wasserpflanzen können nicht nachdenken, denn zum Nachdenken braucht man ein Gehirn. Seit wann gibt es auf der Erde Gehirne? Fangen wir mit einfacheren Strukturen an: Seit wann gibt es auf der Erde Moleküle, die sich vervielfältigen können, also durch Replikation<sup>1</sup> Erbinformation weitergeben können? Solche Moleküle, Vorläufer der Gene heutiger Lebewesen, gibt es auf der Erde vermutlich seit etwa 3,8 Milliarden Jahren.

Aus der Zeit vor etwa 3,8 bis 3,5 Milliarden Jahren stammen indirekte Hinweise auf frühes Leben, wie z. B. bestimmte Kohlenstoff-Verbindungen, die wahrscheinlich von Lebewesen synthetisiert wurden, oder Stromatolithen (das sind haufenartige Ablagerungen von Sedimentpartikeln), die als Hinterlassenschaft von Mikroben-Populationen gedeutet werden.

Einzellige Lebewesen mit einem Zellkern (sogenannte Eukaryoten) gibt es seit etwa 2 Milliarden Jahren. Mehrzeller schließlich treten seit etwa 1,2 Milliarden Jahren auf. Vor dem Erscheinen von Mehrzellern gab es auf der Erde mit Sicherheit keine Gehirne, also konnte auch niemand nachdenken.

Erst vor etwa 420 Millionen Jahren besiedelten Pflanzen die Kontinente, dicht gefolgt von Tieren. Bis dahin hatte alles Leben im Wasser stattgefunden. Die Kiemen unserer Vorfahren, die damals

---

<sup>1</sup> Replikation = Re-Duplikation = Verdoppelung ohne Veränderung

das Wasser verließen, verschwanden nicht völlig, sondern fanden als Gehörorgane eine neue Nutzung. Als weniger erfreulicher Nebeneffekt dieses Organ-Recyclings sind unserer Ohren – aufgrund ihrer engen Verbindung mit unseren Atmungsorganen – ziemlich anfällig gegen Erkältungskrankheiten.

Im langen Zeitraum von vor 230 Millionen Jahren bis vor 65 Millionen Jahren wurden die Landflächen der Erde von Dinosauriern beherrscht. Vor etwa 65 Millionen Jahren starben sie innerhalb kurzer Zeit weitgehend<sup>2</sup> aus, vermutlich aufgrund einer plötzlichen Klimaänderung, bewirkt vielleicht durch den Einschlag eines großen Meteoriten, oder durch gewaltige Vulkanausbrüche.

Die heutigen Nagetiere, Hasenartigen, Spitzhörnchen, und Primaten (zu denen auch die Menschen gehören), hatten im Zeitalter der Dinosaurier gemeinsame Vorfahren, die von den Paläontologen als Euarchontoglires bezeichnet werden. Erst am Ende des Dinosaurier-Zeitalters spaltete sich die Entwicklungslinie der Primaten von den Entwicklungslinien der anderen Arten ab. Zweifellos hatten die Euarchontoglires Gehirne. Haben sie nachgedacht? Worüber? Vermutlich weder über Physik noch über den Sinn des Lebens; eher über den nächsten Schritt: Wo finde ich Nahrung? Wo kann ich mich verstecken, um nicht von anderen Tieren gefressen zu werden? Was könnte das sein, was sich da im Gebüsch bewegt? Wie weit muss ich springen, und wohin muss ich greifen, um nicht vom Baum zu fallen?

Im Zeitraum von vor etwa 20 Millionen Jahren bis vor etwa 5 Millionen Jahren trennte sich die Entwicklungslinie der Menschen von den Entwicklungslinien der verschiedenen Affen-Arten, zuletzt von der Entwicklungslinie der Schimpansen. Unsere Vorfahren, die vor etwa 4 Millionen Jahren in Afrika lebten, werden von den Paläontologen als erste Menschen eingestuft. Vor etwa 200 000

---

<sup>2</sup> unter den heute lebenden Tieren gelten nur die Vögel als Nachkommen der Dinosaurier

Jahren erscheint mit dem Homo Sapiens<sup>3</sup> die moderne (und einzige bis heute überlebende) Art des Menschen, zu der auch wir heutigen Menschen gehören.

Das Gehirn der Menschen war seit den Tagen ihrer Vorfahren im Zeitalter der Dinosaurier beträchtlich gewachsen. Dementsprechend wurde auch mehr nachgedacht. Es entstanden Wissenschaften. Wissenschaft bedeutet nicht nur, dass jemand durch Beobachtungen und kluges Nachdenken zu wichtigen Einsichten gelangt, sondern dass er seine Einsichten auch an Andere weitergeben und mit Anderen diskutieren kann. Dafür ist neben Gehirnen auch Sprache erforderlich. Und zwar eine ziemlich differenzierte Sprache. So etwas wie das gag-gag-gag der Hühner reicht nicht aus.

Dagegen ist die Fähigkeit, Erkenntnisse schriftlich fixieren und weitergeben zu können zwar sehr nützlich; eine unabdingbare Voraussetzung der Wissenschaft ist sie aber nicht. Erst vor weniger als zehntausend Jahren begannen Menschen damit, schriftliche Dokumente anzufertigen. Aber schon davor haben sie über viele zehntausende von Jahren hinweg erforscht und ihren Mitmenschen erklärt, wie man Werkzeuge baut, wie man Feuer entfacht und löscht, was man wann in welchen Boden säen muss, wenn man Monate später ernten will, mit welchen Kräutern man welche Krankheiten wie behandeln kann, wie man Boote bauen kann die für den Fischfang auf dem Meer geeignet sind, wie man mithilfe von Hebeln schwere Lasten bewegen kann. All das war zweifellos Wissenschaft.

Voraussetzung jeder Wissenschaft ist eine gewisse Verlässlichkeit und Vorhersehbarkeit von Abläufen und Ereignissen. Wenn ich heute feststelle, dass trockenes Holz sich besser als nasses Holz zum Entfachen eines Feuers eignet, dann wird sich nicht morgen herausstellen dass trockenes Holz erst einmal ins Wasser getaucht werden muss, damit man es anzünden kann. Wenn ein Boot so

---

<sup>3</sup> (lateinisch) homo sapiens = der verständige Mensch

gebaut ist, dass es den Fischer heute mitsamt den gefangenen Fischen sicher zum Ufer zurück getragen hat, dann wird es das morgen auch wieder tun, und nicht auf einmal wegen unzulänglicher Tragkraft absaufen.

Die Geschehnisse in der Welt ereignen sich offenbar nicht völlig zufällig und chaotisch, sondern folgen Regeln, die als Naturgesetze bezeichnet werden. Wenn man diese Regeln kennt, dann kann man aus dem gegenwärtigen Zustand der Welt Rückschlüsse auf den vergangenen und den zukünftigen Zustand der Welt ziehen. So erkannten beispielsweise die Menschen schon im Altertum die Gesetzmäßigkeiten, nach denen sich die Himmelskörper mit bestimmten Geschwindigkeiten auf bestimmten Bahnen bewegen (ein bis heute erhaltenes Dokument der antiken Astronomie ist der *Almagest* [1] des Ptolemaios, der etwa 150 geschrieben wurde), und konnten mithilfe dieser Regeln aus den gegenwärtigen Positionen von Sonne und Mond den Zeitpunkt der nächsten Mondfinsternis berechnen.

In seinem 1687 veröffentlichten Buch „*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*“ [2] beschrieb Isaac Newton (1643–1727) mit dem Bewegungsgesetz und dem Gravitationsgesetz zwei Naturgesetze, die durch ihre Einfachheit und allgemeine Anwendbarkeit über alle bis dahin entdeckten Naturgesetze weit hinaus gingen. Mithilfe dieser beiden Gesetzen konnte man nicht nur die Bahnen der Himmelskörper berechnen, sondern auch alle mechanischen Vorgänge auf der Erde.

Warum hält die Natur sich an Regeln? Könnte sie nicht mal – einfach so, ohne Grund – dem Mond einen kleinen Schubs verpassen und eine Mondfinsternis zu einem Zeitpunkt veranstalten, den kein Astronom vorhergesehen hat? Newton war nicht nur ein genialer Wissenschaftler, er war auch ein frommer Christ. Die Welt war nach seiner Überzeugung Gottes Schöpfung. Deshalb fragte er nicht, ob und warum die Natur sich an Regeln hält. Das tat sie

selbstverständlich, denn Gott hat nicht nur die Welt geschaffen sondern zugleich auch die Naturgesetze, die in ihr gelten. Aber war auch Gott selbst den von ihm erschaffenen Naturgesetzen unterworfen? Newtons Antwort war ein klares Nein. Nach seiner Ansicht konnte sich Gott nicht nur über Naturgesetze hinwegsetzen, sondern er musste das sogar tun, um seine Schöpfung zu erhalten.

Aus der Kombination von Bewegungsgesetz und Gravitationsgesetz konnte Newton ableiten, dass Sonne und Erde sich auf stabilen elliptischen Bahnen um ihren gemeinsamen Schwerpunkt bewegen. Aber die Berechnung gelang ihm nur unter der vereinfachenden Voraussetzung, dass keine anderen Himmelskörper dies System durch gravitative Einwirkung stören. Tatsächlich gibt es aber mit den anderen Planeten und den Kometen zahlreiche Störfaktoren. Deshalb vermutete Newton, dass das Sonnensystem instabil sei, und dass Gott ständig ins Geschehen eingreifen und nachjustieren müsse, um seine Schöpfung im Lot halten – unter souveräner Missachtung der von Newton entdeckten Naturgesetze der Bewegung und der Gravitation!

Zwischen 1799 und 1823 veröffentlichte Pierre Simon Laplace (1749–1827) die fünf Bände seines „*Traité de Mécanique Céleste*“ (Abhandlung über die Himmelsmechanik). Dank der beträchtlichen Fortschritte der Mathematik seit Newtons Tagen konnte Laplace in seinem *Traité* beweisen, dass Newtons Befürchtungen unbegründet waren, dass die Störung der Bahnkurven der Planeten durch andere Planeten keineswegs das Gesamtsystem destabilisiert, und dass deshalb auch kein göttliches Eingreifen erforderlich ist.<sup>4</sup>

---

<sup>4</sup> Zumindest nicht in dem kurzen Zeitraum, den man damals für das Alter der Welt annahm. Der irische Bischof James Ussher (1581–1656) hatte aus den ihm zugänglichen Daten, insbesondere dem Alten Testament, berechnet, dass Gott die Welt im Jahr 4004 vor Christi Geburt erschaffen hat. Newton kontrollierte Usshers Berechnung sorgfältig nach, und korrigierte das Alter der Welt um 534 Jahre nach unten. Laplace ließ sich von solchen Berechnungen nicht beeindrucken. Aber auch die atheistische Wissenschaft des 19.

Auf die Frage Napoleons, wo denn dann in seinem System noch Platz für Gott bleibe, soll Laplace stolz und selbstbewusst geantwortet haben: „Diese Hypothese brauche ich nicht mehr.“ Diese Anekdote ist nicht historisch zuverlässig verbürgt; *si non è vero, è ben trovato*.<sup>5</sup> 1814 formulierte Laplace die Schlussfolgerung, die sich aus seinen physikalischen Forschungen zwingend ergab, folgendermaßen:

„Eine Intelligenz, welche für einen gegebenen Augenblick alle in der Natur wirkenden Kräfte sowie die gegenseitige Lage der sie zusammensetzenden Elemente kannte und überdies umfassend genug wäre, um diese gegebenen Größen der Analysis zu unterwerfen, würde in derselben Formel die Bewegungen der größten Weltkörper wie des leichtesten Atoms umschließen; nichts würde ihr ungewiss sein, und Zukunft wie Vergangenheit würden ihr offen vor Augen liegen. [...] Die Regelmäßigkeit, welche uns die Astronomie in der Bewegung der Kometen zeigt, ist ohne Zweifel bei allen Erscheinungen vorhanden. Die von einem einfachen Luft- oder Gasmolekül<sup>6</sup> beschriebene Kurve ist in eben so sicherer Weise geregelt wie die Planetenbahnen.“ [3]

Das war nicht nur Laplace's Privatmeinung. Seine Worte geben korrekt und präzise das Ergebnis wieder, zu dem die neuzeitliche

---

Jahrhunderts dachte, wenn sie das Weltalter abzuschätzen versuchte, eher an einige Millionen Jahre, aber nicht an die 13,7 Milliarden Jahre, die laut heutiger Ansicht der Kosmologen seit dem Urknall vergangen sind. Auf einer Zeitskala von Milliarden von Jahren ist das Sonnensystem *nicht* stabil.

<sup>5</sup> (italienisch:) Wenn es nicht wahr ist, dann ist es doch gut erfunden.

<sup>6</sup> Man kann Laplace keinen Vorwurf daraus machen, dass er nicht die verblüffenden Erkenntnisse der Quantenphysik des zwanzigsten Jahrhunderts vorhergesehen hat. Aber man kann von einem intelligenten Menschen, zumal von einem Naturwissenschaftler, durchaus verlangen dass er selbstkritisch überlegt was er weiß und was er nicht weiß. Wenn Laplace das getan hätte, dann hätte er beim Thema „Atome und Moleküle“ wohlweislich geschwiegen, statt derartig hanebüchenen Unsinn zu Papier zu bringen.

Physik gelangt war: Das, was heute geschieht, ist bis in alle Einzelheiten **determiniert** durch Ursachen, die in der Vergangenheit liegen. Zwar kennt kein Mensch den Zustand der Welt zu irgend einem Zeitpunkt in allen atomaren Details, und deshalb kann auch kein Mensch den Zustand der Welt zu einem anderen Zeitpunkt in allen Details berechnen. Aber das ist ein rein praktisches Problem und ändert nichts an der Tatsache, dass – falls die zu Laplace's Zeit bekannte Physik richtig sein sollte – der tatsächliche (wenn auch keinem Menschen vollständig bekannte) Zustand der Welt zu einem Zeitpunkt ihren Zustand zu jedem anderen Zeitpunkt vollständig determiniert.

Folglich stand auch schon zu Zeiten der Dinosaurier jeder Satz fest, den Laplace im frühen neunzehnten Jahrhundert in seinem *Traité de Mécanique Céleste* schreiben würde, und ebenso jedes Wort seiner Antwort auf Napoleons Frage nach Gottes Platz in der Welt. Hat Laplace wirklich allen Ernstes das geglaubt, was er da schrieb? Die meisten Menschen sind überzeugt, einen freien Willen zu haben, an jedem Tag unzählige mehr oder weniger bedeutsame Entscheidungen zu treffen, die sie auch anders hätten treffen können. Ist das alles nur Einbildung? Treffen wir in Wahrheit nach umständlicher Abwägung aller Möglichkeiten am Ende doch nur die Entscheidungen, die ohnehin schon seit Urzeiten feststehen?

Laplace's „umfassende Intelligenz“ könnte unmöglich den Ablauf der Weltgeschichte berechnen, wenn Menschen durch freie Willensentscheidungen ständig alles durcheinander bringen könnten. Wenn die Berechnung der „umfassenden Intelligenz“ ergeben hat, dass ich heute nicht zu Fuß zum Bäcker gehen werde, sondern ausnahmsweise mit dem Fahrrad dorthin fahren werde, dann kann ich nicht – nach Abwägung der Vor- und Nachteile des Fahrradfahrens – kraft freien Willens beschließen doch zu Fuß zu gehen.

Freier Wille und deterministische Physik sind miteinander un-

vereinbar.<sup>7</sup> Entweder ist freier Wille eine Illusion, oder in der deterministischen Physik, die Laplace so wortgewandt beschrieben hat, muss ein grundlegender Fehler stecken. Für die meisten Menschen, die nicht durch ein Physikstudium verbildet sind, ist der Fall vermutlich klar: Mit dem Determinismus haben die Physiker offenbar einen Bock geschossen; sollen sie doch zusehen, wie sie von dem Quatsch wieder runterkommen.

Und ich vermute dass zu jeder Zeit tatsächlich auch nur wenige Physiker Laplace's Überzeugung einer deterministischen Welt teilten. Dennoch trugen sie während einer dreihundert Jahre lang – vom frühen 17. bis zum frühen 20. Jahrhundert – andauernden Periode eine eindrucksvolle Menge von Beweismaterial dafür zusammen, dass sich das Weltgeschehen gemäß deterministischer Naturgesetze entwickelt, dass das was jetzt geschieht eindeutig determiniert ist durch das, was in der Vergangenheit geschah.

Das Kartenhaus der deterministischen Physik, die heute als Klassische Physik bezeichnet wird, brach im frühen zwanzigsten Jahrhundert zusammen. Die Physik ist ja eine empirische Wissenschaft. Täglich überprüfen Experimentatoren die physikalischen Theorien bis in die entlegensten Details, und versuchen irgendwelche Unstimmigkeiten zwischen Theorie und beobachteter Realität aufzudecken. Tatsächlich wurde am Beginn des zwanzigsten Jahrhunderts eine sprunghaft zunehmende Zahl von Phänomenen beobachtet, die eindeutig den Rahmen der Klassischen Physik sprengen. Diese Phänomene wurden als Quantenphänomene bezeichnet, und die neuartige Physik, die sich zu ihrer Beschreibung eignet, als Quan-

---

<sup>7</sup> Das hängt natürlich davon ab, wie man „freien Willen“ genau definiert. Das Thema ist keineswegs einfach, und hat zahlreiche Philosophen seit Jahrhunderten beschäftigt. Abhängig von ihrem Verständnis des „freien Willens“ sind viele von ihnen der Meinung, dass freier Wille und deterministische Physik doch miteinander kompatibel seien. Der Philosoph Ansgar Beckermann (\*1945) hat über dieses Thema eine Untersuchung für philosophische Laien geschrieben, die man hier findet: [4]

tenphysik. Wenn man besonders die mathematische Formalisierung der Physik betonen möchte, dann spricht man auch von Klassischer Theorie und Quantentheorie.

Im Rückblick kann man feststellen, dass der Zusammenbruch der Klassischen Physik im Jahr 1896 begann, als Antoine-Henri Becquerel (1852–1908) entdeckte dass Uransalze eine unsichtbare Strahlung **emittieren**, die durch lichtdichtes Papier hindurch Photoplaten schwärzt. Das Phänomen wurde als **Radioaktivität** bezeichnet. Später verstand man, dass die Atomkerne von Uran-239 in die Atomkerne von Thorium-235 und Helium-4 zerfallen. Die aus Helium-4-Kernen bestehenden Strahlen werden als  $\alpha$ -Strahlen (sprich: alpha-Strahlen) bezeichnet, sie bewirken die Schwärzung der Photoplaten.

Aus folgendem Grund ließ sich die Radioaktivität überhaupt nicht ins Bild der Klassischen Physik einfügen: Man kann zwar sehr genau die Halbwertszeit eines radioaktiven Materials bestimmen. Wenn die Halbwertszeit eines Materials z. B. zehn Tage beträgt, dann wird von einem Gramm dieses Materials nach zehn Tagen nur noch ein halbes Gramm vorhanden sein, der Rest ist inzwischen zerfallen. Schaut man nach weiteren zehn Tagen erneut nach, dann findet man nur noch ein viertel Gramm des Materials unzerfallen vor, und nach weiteren zehn Tagen nur noch ein achtel Gramm.

Das ist genau so wie beim Würfeln. Wie oft muss man würfeln, bis man das Ergebnis  $\boxtimes$  erhält? Wenn der Würfel sechs Seiten hat, nur eine davon 3 Augen hat, und jede der sechs Seiten nach dem Wurf mit gleicher **Wahrscheinlichkeit** oben liegt, dann ist die Wahrscheinlichkeit für  $\boxtimes$  bei einem Wurf  $1/6$ . Die Wahrscheinlichkeit dafür dass bei einem bestimmten Wurf *nicht*  $\boxtimes$  fällt ist  $5/6$ . Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Wurf ein beliebiges Ergebnis hat ist Eins. Also kann man die Wahrscheinlichkeit für das Ergebnis  $\boxtimes$  als  $\frac{1}{6}$  oder als  $1 - \frac{5}{6}$  schreiben. Die Wahrscheinlichkeit dafür dass bei zwei Würfeln keimale  $\boxtimes$  fällt ist  $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}$ . Also ist die

Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei zwei Würfeln mindestens einmal  $\boxtimes$  vorkommt gleich  $1 - \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}$ .

Bei  $n$  Würfeln ist die Wahrscheinlichkeit von mindestens einmal  $\boxtimes$  gleich

$$1 - \underbrace{\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots}_{n \text{ mal}} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n .$$

Die Wahrscheinlichkeit für mindestens einmal  $\boxtimes$  kommt bei großem  $n$  der 1 immer näher. Aber egal wie oft man würfelt (d. h. egal wie groß  $n$  ist), die Wahrscheinlichkeit für mindestens einmal  $\boxtimes$  bleibt immer ein kleines bisschen kleiner als Eins, d. h. es ist auch bei einer beliebig großen Anzahl von Würfeln nicht völlig sicher, dass mindestens einmal  $\boxtimes$  vorkommt. Andererseits kann  $\boxtimes$  auch schon beim ersten Wurf fallen, die Wahrscheinlichkeit dafür ist  $1/6$ . Über eine sehr große Gesamtheit von Würfeln ist eine präzise Aussage möglich: Wenn man sehr oft würfelt, dann wird bei ziemlich genau einem sechstel der Würfe das Ergebnis  $\boxtimes$  sein. Aber das Ergebnis eines einzelnen Wurfs kann unmöglich vorhergesagt werden.

Genauso ist es bei radioaktiven Atomkernen. Für eine große Zahl von Kernen kann man präzise die Halbwertszeit bestimmen. Aber ein einzelner dieser Atomkerne kann sofort zerfallen, obwohl die Halbwertszeit noch längst nicht erreicht ist, oder er kann beliebig lange überleben. Über die tatsächliche Lebensdauer eines einzelnen Atomkerns kann man nur Wahrscheinlichkeitsaussagen machen, genau so wie über einzelne Ergebnisse beim Würfeln.

Der radioaktive Zerfall verpasst der deterministischen Physik den Knock-Out. Wenn Laplace's „umfassende Intelligenz“ nicht berechnen kann wann ein einzelnes radioaktives Atom zerfallen wird, dann kann sie auch nicht berechnen wann das beim Zerfall **emittierte**  $\alpha$ -Teilchen auf welche Moleküle treffen und diese ionisieren oder sonstwie beschädigen wird, und welche weiteren Folgen dies Ereignis haben wird.

Diese Konsequenz von Becquerels Entdeckung war zunächst noch niemandem klar. Aber der Zufall trat schon bald erneut – und jetzt unübersehbar – ins Blickfeld der Physiker, als die Experimentatoren damit begannen, systematisch die **Absorption** von Licht durch Gase zu untersuchen. Starke Absorption kann z. B. bedeuten, dass eins von tausend Molekülen in einem Gas, das mit einem Lichtblitz angeleuchtet wird, Licht absorbiert, 999 aber nicht. Schwache Absorption kann z. B. bedeuten, dass eins von einer Million Molekülen Licht absorbiert, 999 999 aber nicht. Warum absorbieren einige der Moleküle des Gases Licht, andere aber nicht, obwohl doch alle Moleküle genau gleich gebaut und genau dem gleichen Lichtblitz ausgesetzt sind? Dafür kennt die Physik keinen Grund, das ist Zufall.

Nach mehr oder weniger kurzer Zeit strahlen die Gase das absorbierte Licht wieder ab, oft mit veränderter Farbe. Das wird als Lumineszenz bezeichnet. Was heißt „nach mehr oder weniger kurzer Zeit“? Es heißt genau das gleiche wie beim radioaktiven Zerfall von Atomkernen. Wenn ein Molekül Licht absorbiert hat, dann ist es in einem angeregten Zustand. Irgend wann zerfällt das angeregte Molekül in ein nicht angeregtes Molekül und das emittierte Lumineszenzlicht. Die Halbwertszeit des angeregten Zustands kann zum Beispiel eine **Nanosekunde** sein. Das bedeutet: Wenn dies Gas mit einem Lichtblitz angeregt wird, dann sind nach einer Nanosekunde die Hälfte der angeregten Moleküle noch im angeregten Zustand, die andere Hälfte hat die absorbierte Energie bereits wieder als Lumineszenzlicht abgegeben. Nach einer weiteren Nanosekunde ist noch  $1/4$  der ursprünglich angeregten Moleküle im angeregten Zustand,  $3/4$  der ursprünglich angeregten Moleküle haben die absorbierte Energie als Lumineszenzlicht wieder abgegeben. Nach einer weiteren Nanosekunde ist nur noch  $1/8$  der ursprünglich angeregten Moleküle im angeregten Zustand. Und so weiter. Es ist genau wie beim radioaktiven Zerfall: Man kann

die durchschnittliche Lebensdauer des angeregten Zustands exakt angeben. Aber wie viel Zeit ein einzelnes Molekül sich lassen wird, bis es die absorbierte Energie als Lumineszenzlicht wieder abgibt, das ist Zufall, darüber kann man nur Wahrscheinlichkeitsaussagen machen.

Nicht anders ist es bei chemischen Reaktionen. Chemiker können präzise bestimmen, mit welcher Geschwindigkeit Atome der Sorten A und B sich bei gegebener Temperatur und gegebenem Druck im statistischen Mittel zu Molekülen der Sorte AB verbinden. Aber wie oft ein bestimmtes einzelnes Atom der Sorte A mit Atomen der Sorte B zusammenstoßen muss bis es sich endlich einmal zu einem AB-Molekül verbindet, das ist Zufall. Es kann im Einzelfall blitzschnell gehen, oder es kann sehr, sehr lange dauern. Über die Geschwindigkeit einer chemischen Reaktion einzelner Atome kann man nur Wahrscheinlichkeitsaussagen machen.

Jedes mal, wenn irgendwo in der Welt irgend ein Atom Energie absorbiert oder emittiert, jedes mal wenn irgendwo in der Welt irgend ein Atom mit irgend einem anderen Atom chemisch reagiert oder nicht reagiert, dann hat Newtons Gott Gelegenheit steuernd ins Geschehen einzugreifen und den Vorgang zu beschleunigen, oder abzubremsen, oder komplett zu verhindern, ohne mit einem Naturgesetz in Konflikt zu geraten. Die Naturwissenschaft möchte weltanschaulich neutral sein, und spricht statt von Gott lieber vom Zufall. Der allgegenwärtige Zufall macht der deterministischen Physik den Garaus, er eröffnet einen gewaltigen Spielraum den jeder Mensch nach Belieben mit weltanschaulichen und religiösen Inhalten füllen kann,<sup>8</sup> und er lässt genügend Platz für den freien Willen der Menschen.

Die Physik beweist nicht, dass Menschen einen freien Willen haben. Sie hat sich lediglich im frühen zwanzigsten Jahrhundert

---

<sup>8</sup> Albert Schweitzer (1875–1965): „Zufall ist das Pseudonym, das Gott wählt wenn er inkognito bleiben will.“

zu der Einsicht bekehrt, dass der freie Wille nicht unmöglich ist. Wie ein menschliches Gehirn im Detail vorgeht, wenn es die Vor- und Nachteile verschiedener Handlungsoptionen gegeneinander abwägt, sich dann für eine Option entscheidet, und schließlich diese Entscheidung in die Tat umsetzt, darüber weiß die Hirnforschung bis heute (2017) nahezu nichts.

Aber könnte es nicht sein dass dort, wo wir den Zufall am Werk zu sehen glauben, tatsächlich doch Regeln gelten? Regeln, die bis heute noch nicht entdeckt wurden, die eine weiter entwickelte Wissenschaft aber vielleicht in künftigen Jahrhunderten aufdecken wird? Im Jahr 1964 wurde entdeckt, auf welche Weise man in aller wissenschaftlichen Strenge beweisen kann, dass solche Regeln nicht existieren. Zu beweisen dass solche Regeln „nicht existieren“ bedeutet etwas wesentlich anderes und wesentlich mehr als festzustellen, dass solche Regeln „derzeit (noch) nicht bekannt“ sind. Es bedeutet zu beweisen, dass die Welt, in der wir leben, tatsächlich *nicht* deterministisch vorherbestimmt ist, dass die Realität nicht in allen Details durch Naturgesetze geregelt wird, sondern einen wesentlichen Zug von [Irrationalität](#) aufweist.

Der Beweis, der auf einer bestimmten Art von Experimenten beruht, wurde seit den achtziger Jahren vielfach erbracht. Man könnte sich mit der Feststellung zufrieden geben: „Die Physiker haben bewiesen, dass der Ablauf des Weltgeschehens nicht deterministisch festgelegt ist.“ Aber ich denke dass viele Leute, auch wenn sie keine Physiker sind, es doch gerne etwas genauer wissen wollen. Es ist ein zentrales Anliegen dieses Buches, den Lesern diesen Beweis zu erklären.

Der Beweis ist schwierig, deshalb wird die Lektüre dieses Buches anstrengend sein. Die Anstrengung lohnt sich: Immerhin geht es dabei um nicht weniger als darum, ein zentrales Charakteristikum der Welt, in der wir leben, wirklich zu verstehen.

Während die Abschaffung des Determinismus allgemein begrüßt

wurde, ergab sich aus der Analyse der Quantenphänomene eine zweite Schlussfolgerung, die den Physikern überhaupt nicht behagte: Es hatte nämlich den Anschein, dass möglicherweise viele Quantenphänomene schlichtweg nicht in menschliche Gehirne passen.

Damit ist etwas anderes gemeint, als dass Quantenphänomene lediglich mit überkommenen Denkgewohnheiten (dem vermeintlich „gesunden“ Menschenverstand) kollidieren. Verblüffende Erkenntnisse der Wissenschaft, die die Menschen zwangen ihre gewohnten Begriffe zu präzisieren oder zu modifizieren, hat es seit Jahrtausenden unzählige male gegeben. Schon die alten Griechen wussten beispielsweise, dass die Erde die Gestalt einer Kugel hat: Eratosthenes, Direktor der Universität von Alexandria, hat sogar schon im dritten vorchristlichen Jahrhundert mithilfe einer trigonometrischen Methode die Größe der Erdkugel ziemlich präzise vermessen. Das zwang die Menschen zu einer Revision der Begriffe „oben“ und „unten“, weil unsere Antipoden mit „nach unten“ offenbar eine andere (nämlich genau die entgegengesetzte) Richtung meinen wie wir. Im Almagest [1, Buch 1 Kap. 7] macht Ptolemaios sich über Zeitgenossen lustig, die daran zweifelten dass die Erde im Zentrum des Universums ruhen könne, weil sie dann doch aufgrund ihres ungeheuren Gewichts in die Tiefe stürzen und das Himmelsgewölbe durchschlagen müsse. Ein moderneres Beispiel: Wenn ein Beobachter feststellt dass ein Ereignis A an einem Ort und ein anderes Ereignis B an einem anderen Ort *gleichzeitig* stattfinden, dann wird ein zweiter Beobachter, der sich relativ zum ersten Beobachter in bestimmter Weise bewegt, feststellen dass A *früher* als B stattfindet. Und ein dritter Beobachter, der sich relativ zum ersten in bestimmter anderer Weise bewegt, wird feststellen dass A *später* als B stattfindet. Die Relativitätstheorie bekam diesen Namen, weil Einstein nachwies dass eine Revision der Begriffe „gleichzeitig“, „früher“, „später“ notwendig war, und dass diese Begriffe nur rela-

tiv zu genau spezifizierten Beobachtern widerspruchsfrei verwendet werden können.

Dagegen schien es vielen Physikern zunehmend zweifelhaft, ob man den paradoxen Quantenphänomenen, die im zwanzigsten Jahrhundert entdeckt wurden, mit einigen Begriffsrevisionen beikommen könnte. Das griechische Wort paradox ist zusammengesetzt aus para = daneben, vorbei, und dem Wort doxa = Meinung, Ansicht, Vorstellung. Wenn uns ein Sachverhalt paradox erscheint, dann liegt das in der Regel daran, dass unsere Informationen über diesen Sachverhalt unvollständig oder fehlerhaft sind, oder dass wir den Sachverhalt aus einem falschen gedanklichen Zusammenhang heraus betrachten. In jedem Fall lassen sich solche Paradoxa dadurch auflösen, dass wir uns die fehlenden Informationen beschaffen, oder zu einer besser angepassten Betrachtungsweise wechseln.

Aber könnte es nicht sein, dass wir die Paradoxa, die uns in vielen Quantenphänomenen begegnen, prinzipiell nicht auflösen können, weil wir dazu nicht nur den Inhalt unseres Denkens, sondern auch unsere Art zu denken verändern müssten? Die Art unseres Denkens wird durch die Struktur unserer Gehirne festgelegt, und diese Struktur ist wiederum ein Ergebnis von hunderten Millionen von Jahren unserer Evolution, von der (aus genau diesem Grund) zuvor die Rede war. In der Sprache der Computertechnik gesagt: Wir können die Software ändern, die in unseren Gehirnen abläuft, aber wir können nicht die Hardware ändern. Die Hardware – sprich die Struktur unsere Gehirne – hat sich so entwickelt, dass unsere Vorfahren in jedem Stadium der Evolution in der Lage waren, ökologische Nischen zu finden und zu nutzen, in denen sie überleben und sich fortentwickeln konnten. Die Fähigkeit, Quantenphänomene verstehen zu können, wäre in all diesen Jahrmillionen ein völlig überflüssiger Luxus gewesen.

Eigentlich ist es also nicht überraschend dass die Evolution keinerlei Anstrengungen darauf verwendet hat, die Physiker, die im

zwanzigsten Jahrhundert damit begannen die Quantenphänomene zu erforschen, mit einer für dieses Vorhaben geeigneten Gehirn-Hardware auszustatten. Im Gegensatz zu den lediglich scheinbaren Paradoxa, die sich mithilfe angepasster Begriffe und Betrachtungsweisen auflösen lassen, könnte man ein Paradox, das Menschen aufgrund ihrer ererbten Gehirnstruktur prinzipiell nicht auflösen können, als *objektives Paradox* bezeichnen. Wenn man das Paradox der Quantenphänomene als objektives Paradox betrachtet, dann wird man nicht dagegen ankämpfen wie Don Quichote gegen Windmühlenflügel, sondern man wird versuchen sich in möglichst intelligenter und erträglicher Weise mit dem unvermeidlichen Paradox zu arrangieren. Oder handelt es sich doch „nur“ um ein Software-Problem? Haben wir uns einfach bisher noch nicht genügend angestrengt? Lassen sich die Paradoxa der Quantenphänomene doch noch auflösen, wenn wir uns nur mit genügend Intelligenz und Ausdauer darum bemühen? In diesem Punkt sind die Physiker sich nicht einig, und auch der Autor dieses Buches ist sich da nicht sicher.

Eines der erstaunlichsten Paradoxa, das uns in diesem Buch vielfach begegnen wird, ist die Ein-Teilchen-Interferenz. Um zu verstehen was es damit auf sich hat, muss man zuerst einmal wissen, was Interferenz ist. Das erkläre ich im folgenden Kapitel.

## 2 Licht-Wellen

### 2.1 Interferenz

In Abbildung 2.1 ist links ein Glasprisma dargestellt, wie es in optischen Geräten häufig verwendet wird. Die obere Skizze zeigt das Prisma senkrecht von oben, die untere Skizze beim Blick von schräg oben. Der rote Lichtstrahl tritt senkrecht durch eine Seitenfläche des Prismas ein, wird an der Rückseite **reflektiert**, und tritt durch die andere Seitenfläche senkrecht wieder aus.

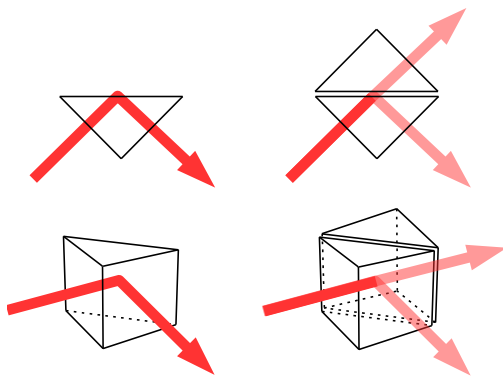


Abb. 2.1 : Prisma (links) und Strahlteiler (rechts)

Wenn der Lichtstrahl, von außen kommend, auf die Eintrittsfläche des Glasprismas trifft, dann werden einige Prozent des Lichts reflektiert. Das wird als „äußere Reflexion“ bezeichnet. Mithilfe geeigneter Beschichtungen kann man die äußere Reflexion nahezu auf Null senken.

Die Reflektion an der Rückseite des Prismas ist total: Das Licht wird zu 100 % reflektiert. Diese Reflektion wird als „innere Reflektion“ bezeichnet, weil das Licht aus dem Inneren des Glases auf die reflektierende Fläche trifft. Der Name ist allerdings etwas irreführend, denn die Reflektion findet nicht im Inneren des Glases statt; vielmehr tritt das Licht bis zu etwa einem Mikrometer weit aus dem Glas heraus, und kehrt erst dann wieder ins Glas zurück. Das erkennt man, wenn man zwei Prismen mit den Rückseiten aufeinander legt. Je nachdem wie eben die Rückseiten geschliffen sind, kehrt dann ein mehr oder weniger großer Teil des Lichtes nicht mehr ins erste Prisma zurück, sondern tritt ins zweite Prisma ein und bewegt sich gradlinig weiter. Dies ist die „frustrierte totale innere Reflektion“.<sup>1</sup> Sie wird zur Herstellung von Strahlteilern genutzt.

Rechts in Abbildung 2.1 ist ein Strahlteiler dargestellt. Die obere Skizze zeigt den Strahlteiler senkrecht von oben, die untere Skizze beim Blick von schräg oben. Meist baut man Strahlteiler so, dass 50 % des einfallenden Lichtes reflektiert und 50 % transmittiert wird. Dazu klebt man die beiden Prismen mit einem geeigneten Harz so aufeinander, dass der Abstand zwischen den Rückseiten etwa  $1\ \mu\text{m}$  beträgt. In der Skizze wird der Abstand stark übertrieben. Einen  $1\ \mu\text{m}$  breiten Spalt kann man mit bloßem Auge nur als Sprung im Glaswürfel wahrnehmen, und selbst mit einem guten optischen Mikroskop ist er kaum erkennbar. Im Elektronenmikroskop sieht man ihn aber deutlich.

Mithilfe von Prismen und Strahlteilern kann das Interferometer aufgebaut werden, das in Abbildung 2.2 auf der nächsten Seite skizziert ist. Ein Interferometer ist ein Messgerät zur Beobachtung von Interferenzen. Was Interferenz ist, werden wir gleich klären.

Der rote Lichtstrahl trifft, von links kommend, auf den Strahl-

---

<sup>1</sup> Physiker finden eine ausführliche Darstellung evaneszenter Elektromagnetischer Felder und der frustrierten totalen inneren Reflektion in [5].

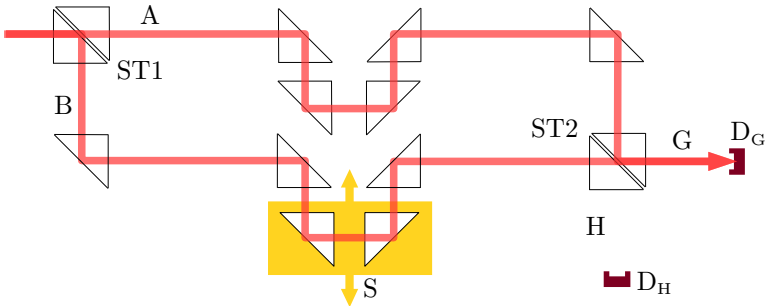
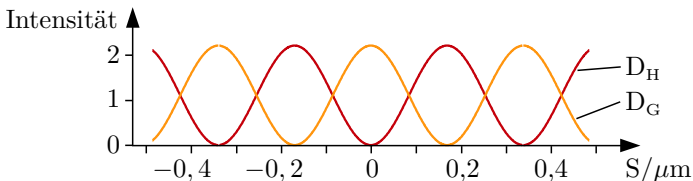


Abb. 2.2: Ein Interferometer

teiler ST1, und wird dort in die Teilstrahlen A und B aufgespalten. Jeder der beiden Teilstrahlen wird von 5 Prismen total reflektiert, und trifft dann auf den Strahlteiler ST2. Falls die Lichtwege beider Teilstrahlen exakt gleich lang sind, dann tritt – wie in der Skizze gezeichnet – das gesamte Licht am Ausgang G dieses Strahlteilers aus, und erreicht den Detektor  $D_G$ . Warum das so ist, wird gleich erklärt.

Zwei der Prismen sind auf einen gelb skizzierten Schlitten S montiert. Durch Verschiebung des Schlittens S kann der Lichtweg B verkürzt oder verlängert werden. Wie sich die von den Detektoren  $D_G$  und  $D_H$  registrierte Lichtintensität verändert, wenn der Schlitten verschoben wird, sieht man in Abbildung 2.3. Bei Veränderung des Lichtwegs B wird ein immer größerer Anteil der Lichtintensi-

Abb. 2.3: Intensität des Lichts bei  $D_G$  und  $D_H$

tät am Detektor  $D_H$  registriert, und ein dementsprechend immer kleinerer Anteil am Detektor  $D_G$ . Wenn der Schlitten um plus oder minus  $0,17 \mu\text{m}$  verschoben, der Lichtweg B also um plus oder minus  $0,34 \mu\text{m}$  verändert wurde, dann kommt alles Licht am Detektor  $D_H$  an, und gar kein Licht mehr am Detektor  $D_G$ . Verschiebt man den Schlitten noch weiter, dann kommt wieder mehr Licht zum Detektor  $D_G$ , und weniger Licht zum Detektor  $D_H$ . Wenn der Lichtweg B um plus oder minus  $2 \cdot 0,34 \mu\text{m} = 0,68 \mu\text{m}$  verändert wurde, dann ist der Anfangszustand wieder erreicht: Alles Licht kommt beim Detektor  $D_G$  an, und gar kein Licht am Detektor  $D_H$ .

Warum ist das so? An den Strahlteilern ST1 und ST2 wird jeweils die Hälfte des einfallenden Lichts **transmittiert**, und die Hälfte **reflektiert**. Insgesamt läuft also  $1/4$  des Lichts über den Weg A in den Weg G,  $1/4$  des Lichts läuft über den Weg B in den Weg G,  $1/4$  des Lichts läuft über den Weg A in den Weg H, und  $1/4$  des Lichts läuft über den Weg B in den Weg H. Offenbar ergibt Licht plus Licht nicht in jedem Fall mehr Licht, sondern manchmal auch weniger Licht oder sogar Dunkelheit. Dafür ist den Physikern nur eine einzige Erklärung eingefallen: Licht muss eine Welle sein. (Die weitere Untersuchung ergab, dass Licht eine elektromagnetische Welle ist; worauf diese Schlussfolgerung im Einzelnen beruht, werden wir hier nicht diskutieren.)

Wieso die Wellennatur des Lichts dazu führt, dass Licht plus Licht manchmal Dunkelheit ergeben kann, lässt sich aus Abbildung 2.4 auf der nächsten Seite ablesen. In jedem der drei Diagramme werden die elektrischen Feldstärken  $E$  der beiden Lichtwellen Welle<sub>A</sub> (die zuvor den Weg A zurückgelegt hat) und Welle<sub>B</sub> (die zuvor den Weg B zurückgelegt hat) zu einem bestimmten Zeitpunkt entlang des Weges G oder H gezeigt.<sup>2</sup> Ebenfalls eingetragen ist

---

<sup>2</sup> genauer gesagt: Es wird die elektrische Feldstärke geteilt durch Volt dargestellt. Der Buchstabe  $V$  bedeutet Volt. Elektrische Feldstärken werden – genau wie die Spannung im Stromnetz – in Volt gemessen. Die Feldstärke von Welle<sub>A</sub> und Welle<sub>B</sub> oszilliert also zwischen ungefähr  $+2V$  und  $-2V$ .

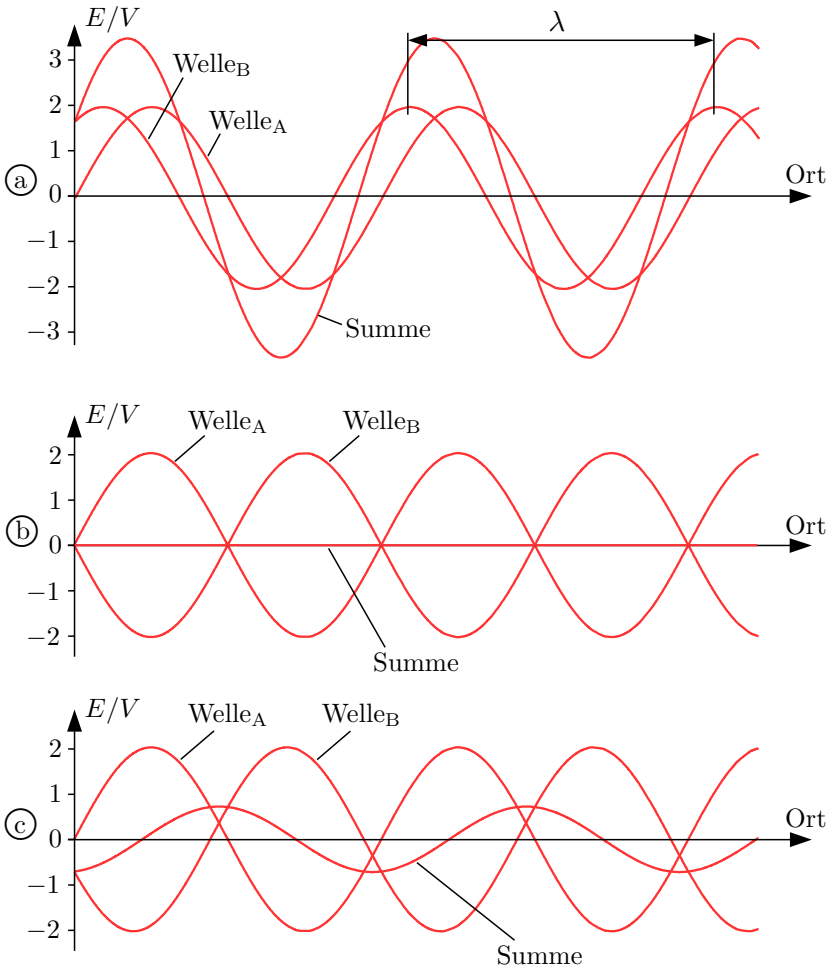


Abb. 2.4: Die Interferenz zweier Wellen

die Welle, die sich als Summe der Überlagerung von Welle<sub>A</sub> und Welle<sub>B</sub> ergibt.

Als Wellenlänge bezeichnet man den Abstand zwischen zwei Punkten gleicher „Phase“, zum Beispiel den Abstand zwischen zwei Maxima oder zwischen zwei Minima einer Welle. In 2.4(a) wird die Wellenlänge mit dem Buchstaben  $\lambda$  bezeichnet. Weil sie aus der Aufspaltung der gleichen Welle am Strahlteiler ST1 hervorgegangen sind, haben Welle<sub>A</sub> und Welle<sub>B</sub> (und auch ihre Summe) die gleiche Wellenlänge. Welle<sub>A</sub> und Welle<sub>B</sub> haben auch die gleiche Amplitude, nämlich etwa 2 Volt, weil die Strahlteiler jeweils die Hälfte des Lichts transmittieren und reflektieren. Aber sie haben, wenn sie auf den Wegen G und H wieder überlagert werden, im allgemeinen nicht mehr die gleiche Phase, d. h. die Maxima und Minima von Welle<sub>A</sub> und Welle<sub>B</sub> sind gegeneinander verschoben.

Die Verschiebung der Phasen kann zwei verschiedene Ursachen haben: Entweder haben Welle<sub>A</sub> und Welle<sub>B</sub> – weil der Schlitten verschoben wurde – unterschiedlich weite Wege durchlaufen, und/oder Welle<sub>A</sub> und Welle<sub>B</sub> wurden unterschiedlich oft reflektiert.

Wenn Wellenberge und Wellentäler der beiden Teilwellen fast an den gleichen Stellen liegen, dann addieren sie sich zu einer Welle mit großer Amplitude, wie in 2.4(a) dargestellt. Das wird als „konstruktive Interferenz“ bezeichnet. Wenn dagegen die Phasendifferenz wie in 2.4(c) ungefähr eine halbe Wellenlänge beträgt, dann interferieren Welle<sub>A</sub> und Welle<sub>B</sub> destruktiv, d. h. die Amplitude ihrer Summe ist sehr klein. Im Extremfall einer Phasenverschiebung von genau einer halben Wellenlänge löschen sich Welle<sub>A</sub> und Welle<sub>B</sub> vollständig aus, ihre Summe ergibt Dunkelheit, siehe 2.4(b).

Die jeweils 5 Totalreflektionen an den Rückseiten der Prismen ergeben die gleiche Phasenverschiebung für jeden Teilstrahl, führen also insgesamt nicht zu einer Phasendifferenz zwischen den Teilstrahlen. Aber zusätzlich gibt es an jedem Strahlteiler eine Phasenverschiebung von einer viertel Wellenlänge zwischen der

transmittierten und der reflektierten Welle. Worauf diese Phasenverschiebung beruht, ist für unsere Überlegungen unwichtig.<sup>3</sup> Licht, das über den Weg A in den Weg G gelangt, wurde am ersten Strahlteiler transmittiert und am zweiten Strahlteiler reflektiert. Licht, das über den Weg B in den Weg G gelangt, wurde am ersten Strahlteiler reflektiert und am zweiten Strahlteiler transmittiert. Insgesamt gibt es also im Weg G keine Phasenverschiebung aufgrund der Strahlteiler. Also interferieren die Teilwellen im Weg G konstruktiv, wenn die Wege A und B genau gleich lang sind.

Anders ist es im Weg H: Licht, das über den Weg A in den Weg H gelangt, wurde an beiden Strahlteilern transmittiert. Licht, das über den Weg B in den Weg H gelangt, wurde an beiden Strahlteilern reflektiert. Insgesamt gibt es demnach im Weg H zwischen den Teilstrahlen aufgrund der beiden Strahlteiler eine Phasenverschiebung von einer halben Wellenlänge, und demzufolge destruktive Interferenz. Das ist der Grund, warum alles Licht am Detektor  $D_G$  ankommt und am Detektor  $D_H$  Dunkelheit herrscht, wenn die Wege A und B genau gleich lang sind.

Das in Abbildung 2.2 auf Seite 26 dargestellte Gerät heißt Interferometer, weil man damit die Interferenz von Lichtwellen ausmessen kann. Von Diagramm 2.3 kann man ablesen, dass der Schlitten um  $0,34 \mu\text{m}$  verschoben werden muss, damit man von einer Stellung mit maximal konstruktiver Interferenz zur nächsten Stellung mit maximal konstruktiver Interferenz am gleichen Detektor gelangt. Dabei ändert sich der Lichtweg B um  $0,68 \mu\text{m}$ . Also hat das hier verwendete rote Licht die Wellenlänge  $\lambda = 0,68 \mu\text{m}$ .

Menschen können elektromagnetische Strahlung mit Wellenlängen zwischen etwa  $\lambda = 0,38 \mu\text{m}$  und  $\lambda = 0,78 \mu\text{m}$  als sichtbares Licht wahrnehmen. Interferenz-Experimente kann man aber (mit anders konstruierten Apparaturen) auch mit unsichtbarer elektromagnetischer Strahlung in einem Wellenlängen-Bereich von etwa

---

<sup>3</sup> Physiker finden eine interessante Untersuchung in [6].

$10^{-10}$  m bis etwa 10 km durchführen. In Tabelle 2.1 sind die verschiedenen Arten der elektromagnetischen Strahlung aufgelistet.

	Wellenlänge in Luft bzw. Vakuum	Frequenz
Gammastrahlung	$< 10^{-12}$ m	$> 3 \cdot 10^{20}$ Hz
Röntgenstrahlung	$10^{-12}$ m ... $10^{-8}$ m	$3 \cdot 10^{20}$ Hz ... $3 \cdot 10^{16}$ Hz
Ultraviolett	$10^{-8}$ m ... $0,38 \mu\text{m}$	$3 \cdot 10^{16}$ Hz ... $7,9 \cdot 10^{14}$ Hz
Violett	$0,38 \mu\text{m}$ ... $0,42 \mu\text{m}$	$7,9 \cdot 10^{14}$ Hz ... $7,1 \cdot 10^{14}$ Hz
Blau	$0,42 \mu\text{m}$ ... $0,49 \mu\text{m}$	$7,1 \cdot 10^{14}$ Hz ... $6,1 \cdot 10^{14}$ Hz
Grün	$0,49 \mu\text{m}$ ... $0,57 \mu\text{m}$	$6,1 \cdot 10^{14}$ Hz ... $5,3 \cdot 10^{14}$ Hz
Gelb	$0,57 \mu\text{m}$ ... $0,59 \mu\text{m}$	$5,3 \cdot 10^{14}$ Hz ... $5,1 \cdot 10^{14}$ Hz
Orange	$0,59 \mu\text{m}$ ... $0,65 \mu\text{m}$	$5,1 \cdot 10^{14}$ Hz ... $4,6 \cdot 10^{14}$ Hz
Rot	$0,65 \mu\text{m}$ ... $0,75 \mu\text{m}$	$4,6 \cdot 10^{14}$ Hz ... $4 \cdot 10^{14}$ Hz
Infrarot	$0,75 \mu\text{m}$ ... 1 mm	$4 \cdot 10^{14}$ Hz ... $3 \cdot 10^{11}$ Hz
Mikrowellen	1 mm ... 1 m	$3 \cdot 10^{11}$ Hz ... $3 \cdot 10^8$ Hz
Radiowellen	1 m ... 10 km	$3 \cdot 10^8$ Hz ... 30 kHz
Niederfrequenz	$> 10$ km	$< 30$ kHz

Tab. 2.1: Elektromagnetische Wellen

Die Frequenz einer Welle ist die Anzahl der Wellenberge (oder der Wellentäler), die pro Zeit an einer bestimmten Stelle im Raum vorbeikommen. Meist wird die Frequenz mit dem Buchstaben  $\nu$  bezeichnet. Die Frequenz hängt mit der Wellenlänge folgendermaßen zusammen:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{\text{Geschwindigkeit der Welle}}{\text{Wellenlänge}} \quad (2.1)$$

$c \approx 3 \cdot 10^8$  Meter/Sekunde ist die Geschwindigkeit von Licht im Vakuum und in Luft. Auch die Frequenzen der elektromagnetischen Wellen sind in Tabelle 2.1 eingetragen. Die Einheit Hz = s<sup>-1</sup> = (pro Sekunde) wird „Hertz“ gesprochen.

## 2.2 Polarisation

Wir benötigen noch eine weitere Information über Lichtwellen: Sind Lichtwellen longitudinale oder transversale Wellen? Was damit gemeint ist, kann man aus Abbildung 2.5 auf der nächsten Seite ablesen. In den Skizzen 2.5(a) und 2.5(b) sieht man ein Seil, dessen linkes Ende in  $x$ -Richtung so schnell auf- und abwärts bewegt wird, dass sich eine Welle entlang des Seils in  $z$ -Richtung ausbreitet. In Skizze 2.5(c) wird am linken Ende eines Rohrs die gelbe Scheibe so schnell in  $z$ -Richtung hin- und her bewegt, dass sich im Rohr eine Schallwelle in  $z$ -Richtung ausbreitet.

In allen drei Skizzen pflanzen sich die Wellen in  $z$ -Richtung fort. Die Teile des Seils bewegen sich in  $x$ -Richtung – also **transversal** zur Ausbreitungsrichtung der Welle – auf und ab. Solche Wellen werden als *transversale* Wellen bezeichnet. Die Luftmoleküle der Schallwelle bewegen sich in  $z$ -Richtung – also entlang der Ausbreitungsrichtung der Welle – vor und zurück. Solche Wellen werden als *longitudinale* Wellen bezeichnet.

Charakteristisch für transversale Wellen ist, dass man sie unterschiedlich stark dämpfen kann, indem man Polarisationsfilter in unterschiedliche Richtungen dreht. Ein Polarisationsfilter für die Seilwelle ist einfach ein Gitter, wie es in Abb. 2.5(a) und 2.5(b) blau eingezeichnet ist. Die Teile des Seils schwingen in  $x$ -Richtung auf und ab. Man sagt, dass die Seilwelle in  $x$ -Richtung *polarisiert* ist. In Skizze 2.5(a) ist das Gitter des Polarisationsfilters in  $x$ -Richtung ausgerichtet, so dass die Welle ungehindert passieren kann. Wenn man den Polarisationsfilter um  $90^\circ$  dreht, dann wird die Seilwelle fast vollständig unterdrückt, siehe 2.5(b). Dagegen gibt es keinen Filter für die longitudinale Welle 2.5(c), dessen Drehung irgend einen Einfluss auf die Stärke der Dämpfung hätte.

Lichtwellen (bzw. elektromagnetische Wellen mit beliebiger Wellenlänge) sind transversale Wellen, denn man kann sie durch die

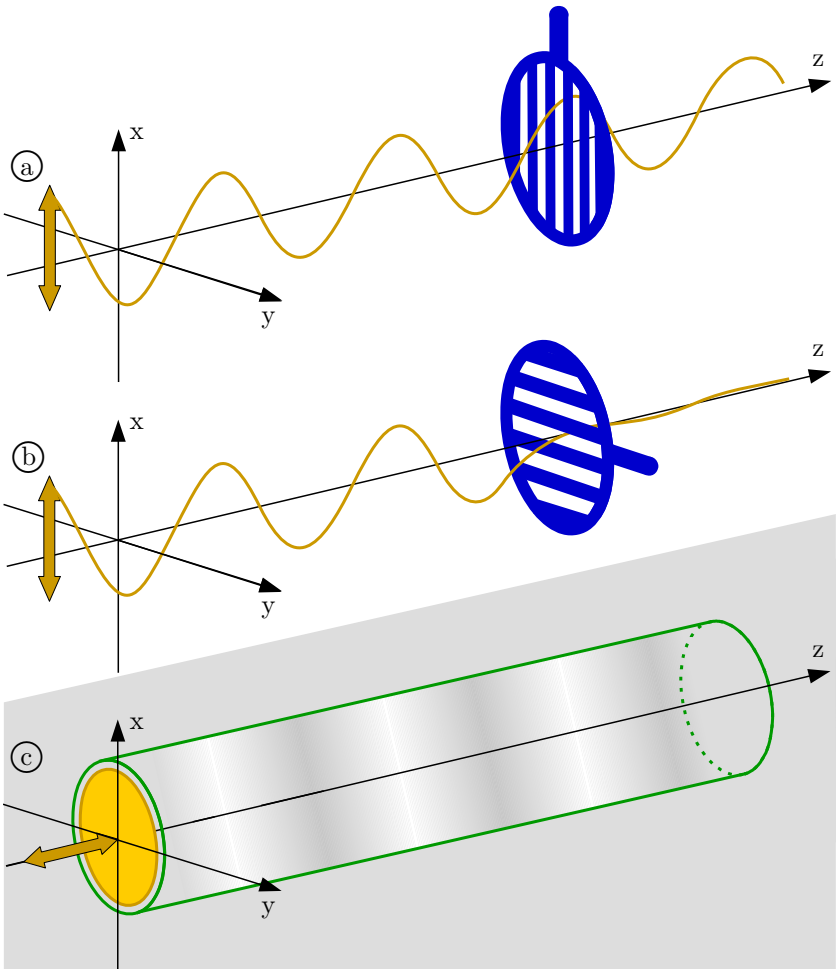


Abb. 2.5: Transversale und longitudinale Wellen

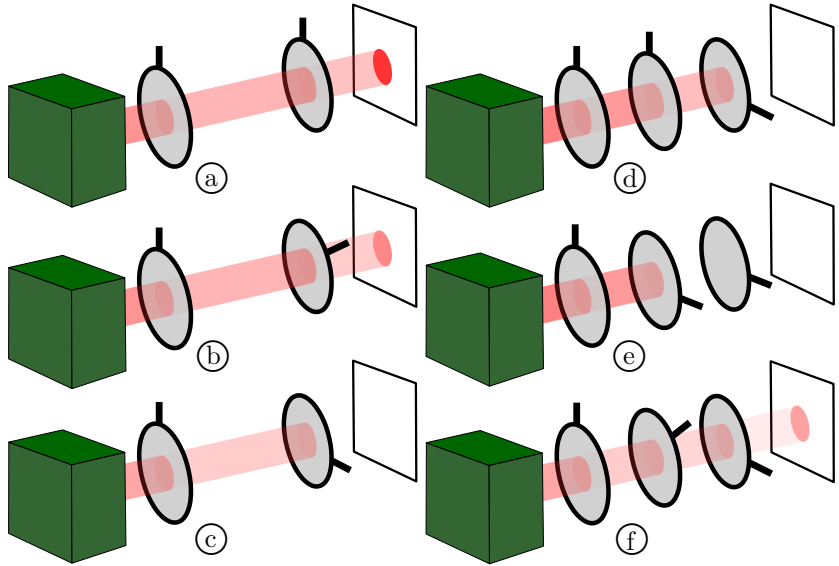


Abb. 2.6 : Polarisations-Filter

Drehung von Polarisationsfiltern unterschiedlich stark dämpfen.<sup>4</sup> In Abbildung 2.6 ist der rote Lichtstrahl einer Lampe durch zwei oder drei Polarisations-Filter auf eine weiße Leinwand gerichtet. In allen sechs Skizzen ist der erste Filter nahe der Lampe senkrecht gedreht, er lässt also senkrecht polarisiertes Licht passieren. Wenn wie in Skizze 2.6(a) der zweite Filter ebenfalls senkrecht eingestellt ist, dann wird maximal viel Licht bis zur Leinwand durchgelassen. Wenn dagegen der zweite Filter waagrecht eingestellt ist wie in Skizze 2.6(c), dann gelangt kein Licht bis zur Leinwand. Die Skiz-

<sup>4</sup> Viele handelsübliche Sonnenbrillen sind Polarisationsfilter. Wer solche Sonnenbrillen zur Hand hat, sollte unbedingt die verblüffenden Beobachtungen von Abbildung 2.6 nachvollziehen! Eine Lampe ist nicht erforderlich, es genügt, eine helle Fläche durch zwei oder drei gegeneinander verdrehte Brillen zu betrachten.

zen 2.6(a) und 2.6(c) entsprechen offenbar den Skizzen 2.5(a) und 2.5(b).

In Skizze 2.6(b) ist der zweite Filter um  $45^\circ$  relativ zum ersten Filter gedreht. In diesem Fall erreicht halb so viel Licht die Leinwand wie im Fall 2.6(a). Das einfache mechanische Modell von Seil und Gitter in Abb. 2.5 scheint für dieses Ergebnis, und deutlicher noch für die in Skizze 2.6(f) dargestellte Beobachtung, nicht wirklich zu passen.

Was geschieht im Fall 2.6(f)? Von 2.6(c) unterscheidet sich 2.6(f) nur dadurch, dass zwischen die beiden äußeren Filter mit den Stellungen  $90^\circ$  und  $0^\circ$  zusätzlich ein Filter mit Stellung  $45^\circ$  geschoben wurde. Die Filter wirken in der Weise, dass sie einen Teil des einfallenden Lichts passieren lassen, und den Rest absorbieren, d. h. in Wärme umwandeln. Unter keinen Umständen kann ein Filter zusätzliches Licht erzeugen. Und doch bewirkt der zusätzliche Filter in 2.6(f) verblüffenderweise, dass mehr Licht die Leinwand erreicht als in 2.6(c). Wie ist das möglich?

Das hängt damit zusammen, dass eine beliebig polarisierte Lichtwelle immer als Summe von zwei senkrecht zueinander polarisierten Teilwellen betrachtet werden kann, wie in Abbildung 2.7 dargestellt. In 2.7(a) schaut man entgegen der  $y$ -Achse auf eine elektromagne-

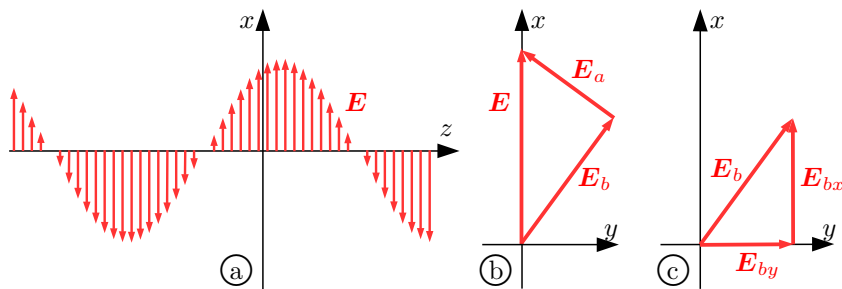


Abb. 2.7:  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_a + \mathbf{E}_b$  ,  $\mathbf{E}_b = \mathbf{E}_{by} + \mathbf{E}_{bx}$

tische Welle, die sich in  $z$ -Richtung ausbreitet und in  $x$ -Richtung polarisiert ist. Die roten Pfeile symbolisieren den Betrag und die Richtung der elektrischen Feldstärke  $\mathbf{E}$  zu einem bestimmten Zeitpunkt an verschiedenen Punkten im Raum. In 2.7(b) und 2.7(c) schaut man in  $z$ -Richtung auf die  $xy$ -Ebene.

In 2.7(b) wird eine der unendlich vielen Möglichkeiten abgebildet, die Feldstärke  $\mathbf{E}$  als Summe von zwei zueinander senkrechten Feldstärken  $\mathbf{E}_a$  und  $\mathbf{E}_b$  darzustellen. Es ist

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_a + \mathbf{E}_b ,$$

weil man vom Ende des Pfeils, der die Feldstärke  $\mathbf{E}$  darstellt, zu seiner Spitze gelangt, egal ob man entlang es Pfeils  $\mathbf{E}$  wandert, oder nacheinander entlang der Pfeile  $\mathbf{E}_b$  und  $\mathbf{E}_a$ .

Wenn die in  $x$ -Richtung polarisierte elektromagnetische Welle  $\mathbf{E}$  auf einen Polarisationsfilter trifft, dessen Durchlassrichtung in Richtung von  $\mathbf{E}_b$  eingestellt ist, dann wird die Teilwelle  $\mathbf{E}_a$  größtenteils vom Filter absorbiert (in Wärme umgewandelt), während die Teilwelle  $\mathbf{E}_b$  wesentlich weniger geschwächt wird. Und wenn anschließend die Welle  $\mathbf{E}_b$  auf einen weiteren Polarisationsfilter trifft, dessen Durchlassrichtung in  $y$ -Richtung eingestellt ist, dann wird die Teilwelle  $\mathbf{E}_{bx}$  weitgehend absorbiert, während die Teilwelle  $\mathbf{E}_{by}$  wesentlich weniger geschwächt wird.

Polarisationsfilter, wie sie in Sonnenbrillen verwendet werden, sind zwar leicht verfügbar und relativ billig; es ist bei unseren Untersuchungen aber störend, dass sie einen erheblichen Teil des Lichts bei beliebiger Polarisationsrichtung absorbieren, die Absorption lediglich bei Polarisation in einer Richtung besonders stark, und bei dazu senkrechter Polarisation viel schwächer ist. Es gibt weitaus bessere Polarisationsfilter, die nahezu verlustfrei wirken. Sie werden aus geeignet geschnittenen und orientierten [anisotropen](#) Kristallen hergestellt, z. B. dem Kalkspat ( $\text{CaCO}_3$ ). In anisotropen Kristallen breitet Licht sich in unterschiedlichen Richtungen mit

unterschiedlicher Geschwindigkeit aus, und diese Geschwindigkeit hängt zudem von der Polarisation des Lichts ab.

Man kann aus anisotropen Kristallen polarisierende Strahlteiler herstellen, die Licht mit einer bestimmten Polarisationsrichtung zu mehr als 99 % transmittieren, die Licht mit der dazu senkrechten Polarisationsrichtung zu mehr als 99 % reflektieren, und die nur weit weniger als 1 % des einfallenden Lichts absorbieren. Vereinfachend nehmen wir im Folgenden an, dass wir mit idealen polarisierenden Strahlteilern arbeiten, die Licht einer Polarisationsrichtung zu 100 % transmittieren, die Licht mit der dazu senkrechten Polarisationsrichtung zu 100 % reflektieren, und die überhaupt kein Licht absorbieren.

In Abbildung 2.8 wird nochmal die Zerlegung von  $\mathbf{E}_b$  in die zueinander senkrechten Teile  $\mathbf{E}_{by}$  und  $\mathbf{E}_{bx}$  von Abb. 2.7© wiederholt. Im linken Diagramm blickt man in  $z$ -Richtung auf die  $xy$ -Ebene, rechts daneben wird das Gleiche in einer perspektivischen Darstellung gezeigt. Wenn Licht, das in Richtung von  $\mathbf{E}_b$  polarisiert

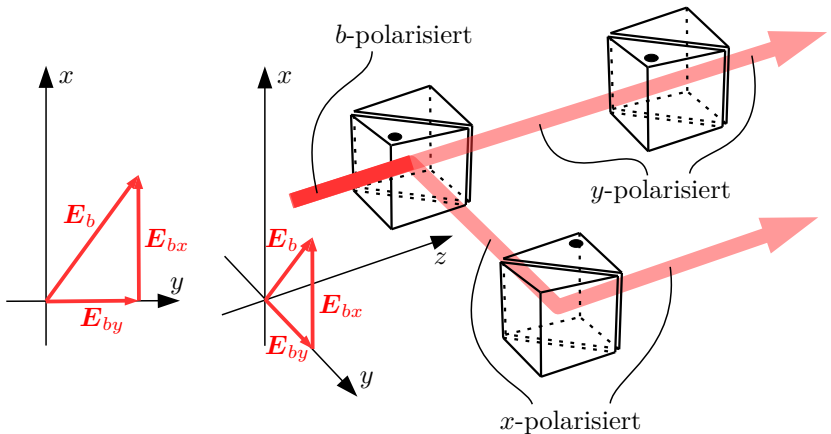


Abb. 2.8: Polarisierende Strahlteiler

ist, auf den ersten polarisierenden Strahlteiler trifft, dann wird die Teilwelle  $\mathbf{E}_{by}$  transmittiert, und die Teilwelle  $\mathbf{E}_{bx}$  reflektiert. Polarisierende Strahlteiler funktionieren also ganz anders als die einfachen, aus Glas gefertigten Strahlteiler, die im Interferometer von Abb. 2.2 auf Seite 26 verwendet wurden. Einfache Strahlteiler transmittieren und reflektieren jeweils 50 % des einfallenden Lichts, unabhängig von der Polarisation des Lichts. Dagegen transmittieren die polarisierenden Strahlteiler von Abb. 2.8 sämtliches Licht, das in  $y$ -Richtung polarisiert ist, und reflektieren sämtliches Licht, das in  $x$ -Richtung polarisiert ist.

Von der Wirkung des polarisierenden Strahlteilers kann man sich dadurch überzeugen, dass man – wie in Abb. 2.8 gezeichnet – die Polarisation des transmittierten und des reflektierten Lichts durch zwei weitere Strahlteiler noch einmal überprüft.

Wenn die Sonnenbrillen-Polarisationsfilter von Abb. 2.6 durch polarisierende Strahlteiler ersetzt werden, dann gelten die Diagramme von Abb. 2.7(b) und 2.7(c) auch quantitative genau. In 2.7(c) ist die Feldstärke  $\mathbf{E}_{by}$  von Null verschieden. Damit wird verständlich, warum im Fall 2.6(f) Licht an der Leinwand ankommt, im Fall 2.6(c) dagegen nicht.

Aber könnte man die elektrische Feldstärke  $\mathbf{E}$  nicht auch als Summe von drei statt nur zwei Teil-Feldstärken betrachten, nämlich als  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{by} + \mathbf{E}_{bx} + \mathbf{E}_a$ , wie in Abb. 2.9(a) auf der nächsten Seite skizziert? In diesem Diagramm ist  $\mathbf{E}_{by}$  von Null verschieden. Wieso erreicht trotzdem im Fall 2.6(c) kein Licht die Leinwand?

Nun, man darf nicht vergessen dass auch  $\mathbf{E}_a$  eine Summe von Teilwellen ist, die in  $x$ - und  $y$ -Richtung polarisiert sind, wie in 2.9(b) gezeigt.

Anmerkung: Man darf die Pfeile auf der Zeichenebene beliebig verschieben, dadurch werden sie nicht verändert. Man muss nur darauf achten, dass ihre Richtung und ihre Länge unverändert bleiben. Deshalb handelt es sich bei  $\mathbf{E}_a$  in 2.9(a) und in 2.9(b) um

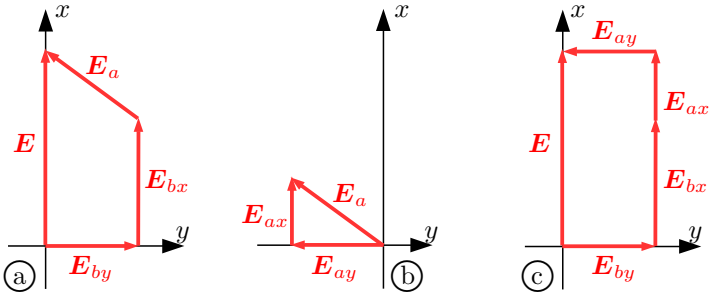


Abb. 2.9: Zerlegung in Teilwellen

den gleichen, unveränderten Pfeil.

In 2.9© wird die Summe

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{by} + \mathbf{E}_{bx} + \mathbf{E}_{ax} + \underbrace{\mathbf{E}_{ay}}_{=-\mathbf{E}_{by}} = \mathbf{E}_{bx} + \mathbf{E}_{ax}$$

dargestellt. Wegen  $\mathbf{E}_{by} + \mathbf{E}_{ay} = 0$  löschen sich die beiden Teilwellen  $\mathbf{E}_{by}$  und  $\mathbf{E}_{ay}$  wechselseitig aus (sie interferieren destruktiv), so dass  $\mathbf{E}$  insgesamt keine Teilwelle enthält, die den zweiten Polarisationsfilter von 2.6© passieren kann. Wenn aber im Fall 2.6f) der zusätzlich eingeschobene Filter die Teilwelle  $\mathbf{E}_a$  herausfiltert, dann wird  $\mathbf{E}_{by}$  nicht mehr durch  $\mathbf{E}_{ay}$  ausgelöscht. Das erklärt, warum ein zusätzlicher Filter manchmal mehr Licht auf der Leinwand bewirken kann.

## 2.3 Das Experiment von Thomas Young

Seit dem 17. Jahrhundert gab es zwei unterschiedliche Lehrmeinungen über die Natur des Lichts. Die eine, deren wichtigster Vertreter Christiaan Huygens (1629–1695) war, favorisierte die Wellentheorie des Lichts. Die andere, angeführt von Isaac Newton (1643–1727), betrachtete das Licht als einen Strom winziger

Teilchen. Obwohl Huygens viele gute Argumente für seine Sichtweise anführen konnte, blieb der Streit wegen der großen Autorität Newtons für mehr als hundert Jahre unentschieden.<sup>5</sup>

Erst als Thomas Young (1773–1829) am 24. November 1803 vor der Royal Society in London über seine optischen Experimente berichtete [7], setzte sich die Wellentheorie durch.

Young war ein außerordentlich vielseitiger Forscher. Er praktizierte in London als Augenarzt, begründete die drei-Farben-Theorie des menschlichen Sehens, leistete wichtige Beiträge zur Entzifferung der ägyptischen Hieroglyphen, und erforschte die Wellennatur von Schall und von Licht.

Von der Wellennatur des Lichts überzeugte Young seine Zeitgenossen dadurch, dass er in Experimenten demonstrierte dass die Summe von Licht plus Licht Dunkelheit ergeben kann. Das wäre vollkommen unmöglich, wenn Licht ein Strom von Teilchen wäre; aber als Interferenz von Wellen kann die Beobachtung leicht erklärt werden.

Eines seiner Experimente, das sogenannte Doppelspalt-Experiment, spielte später bei der Erforschung von Quantenphänomenen im 20. Jahrhundert eine wichtige Rolle, deshalb muss es hier vorgestellt werden. In Abbildung 2.10 auf der nächsten Seite ist es skizziert. Eine Lichtwelle trifft, von links kommend, auf einen schwarzen Karton, in den Young mit einer Nadel zwei kleine Löcher gestochen hatte. In den modernen Quanten-Experimenten verwendet man

---

<sup>5</sup> Newton hatte ein gutes Argument für seine Teilchen-Hypothese. Wellen brauchen ein Träger-Medium: Wasserwellen gibt es nur, wo Wasser ist, Schallwellen gibt es nur, wo Luft ist, die Seilwelle von Abb. 2.5 kann nur dort existieren wo ein Seil ist. Dagegen breiten Lichtwellen sich ungehindert auch dort aus, wo es kein Trägermedium gibt, sprich im Vakuum, sogar noch besser als in transparenten Gläsern und Kristallen. Das ist leicht zu erklären, wenn Licht ein Strom von Teilchen ist. Als die Physiker sich am Beginn des 19. Jahrhunderts für die Wellentheorie des Lichts entschieden, konnten sie damit zwar Youngs Beobachtungen erklären, aber zugleich wurde es damit unmöglich zu verstehen, wieso Licht sich im Vakuum ausbreiten kann.

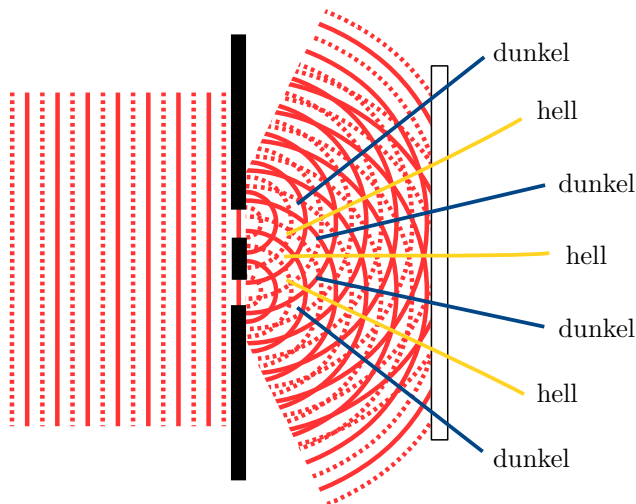


Abb. 2.10: Das Doppelspalt-Experiment von Thomas Young

anstelle der Löcher schmale Spalte, daher der Name „Doppelspalt-Experiment“.

Die durchgezogenen roten Linien symbolisieren die Wellenberge des Lichts, die gepunkteten Linien symbolisieren die Wellentäler. Hinter jedem Loch im schwarzen Karton breitet sich eine Welle nach allen Richtungen aus, und überlagert sich mit der Welle die vom anderen Loch her kommt. Mit gelben Strichen sind die Bereiche markiert, wo sich – wie in 2.4(a) – Wellenberge mit Wellenbergen und Wellentäler mit Wellentälern konstruktiv überlagern, so dass helles Licht auf den weißen Karton fällt. Mit dunkelblauen Strichen sind die Bereiche markiert, wo sich – wie in 2.4(b) und 2.4(c) – Wellenberge mit Wellentälern destruktive überlagern, und zusammen Dunkelheit ergeben.

Tatsächlich war die Sache etwas komplizierter, denn Young benutzte nicht einfarbiges Licht, sondern das weiße Licht der Sonne,

das bekanntlich in alle Farben des Regenbogens zerlegt werden kann. Und Lichtwellen verschiedener Farbe haben unterschiedliche Wellenlängen, siehe Tabelle 2.1 auf Seite 31. Young sah auf dem weißen Karton also nicht einfach hellgraue und dunkelgraue Strukturen, sondern gegeneinander versetzte Strukturen in allen Farben des Regenbogens. Die hellen und dunklen Bereiche des roten Lichts fielen auf andere Stellen des weißen Kartons als die hellen und dunklen Bereiche des grünen Lichts, und diese wiederum auf andere Stellen als die hellen und dunklen Bereiche des blauen Lichts.

Das änderte nichts daran, dass Youngs Beobachtungen nur durch die Wellentheorie des Lichts erklärt werden konnten. Die Teilchentheorie des Lichts galt damit als eindeutig widerlegt. Deshalb war es eine große Überraschung, als sie hundert Jahre später auf einmal doch wieder auftauchte.

## 3 Photonen

### 3.1 Der Lichtelektrische Effekt

Im Jahr 1902 veröffentlichte Philipp Lenard (1862–1947), damals Professor für Physik an der Universität Kiel, die Ergebnisse seiner Untersuchungen des Lichtelektrischen Effekts [8]. Wie in Abb. 3.1

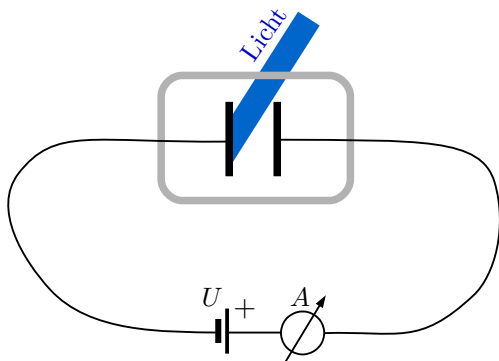


Abb. 3.1: Messung des Lichtelektrischen Effekts

skizziert hatte er in einem evakuierten Gefäß zwei Metallplatten parallel gegenüber gestellt, und eine von ihnen durch ein Fenster des Gefäßes mit Licht bestrahlt. Lenard benutzte weißes Licht mit einem starken UV-Anteil. An die Metallplatten legte er die elektrische Gleichspannung  $U$  an, und maß mit dem Amperemeter<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Tatsächlich benutzte Lenard ein Elektrometer, weil es zu der Zeit noch keine hinreichend präzisen Amperemeter gab. Dies Detail ist für unsere Überlegungen unwichtig.

A den Strom, der durch das Vakuum-Gefäß floss.

Wieso konnte da überhaupt ein Strom fließen? Vakuum ist doch bekanntlich ein exzellenter elektrischer Isolator. Lenard hatte aber bereits zuvor bewiesen, dass durch die Bestrahlung mit Licht Elektronen aus der Metallplatte herausgelöst werden, und sich dann durchs Vakuum zur anderen Metallplatte bewegen. Lenard stellte fest:

- \* Der Strom ist auch dann von Null verschieden, wenn die außen angelegte Spannung  $U=0$  ist.
- \* Man kann den Strom auf Null drücken, indem man eine negative äußere Spannung anlegt. Bei  $U \lesssim -2\text{ V}$  gelangen keine Elektronen mehr von der beleuchteten zur unbeleuchteten Platte.

Zusammen genommen bedeuten diese beiden Beobachtungen offenbar, dass die Elektronen eine Bewegungsenergie von bis zu zwei eV haben, wenn sie durch das Licht aus der Metallplatte herausgelöst werden.<sup>2</sup> Denn um alle Elektronen abzubremsen und zur beleuchteten Metallplatte zurück zu lenken, bevor sie die unbeleuchtete Platte erreicht haben, ist eine Gegenspannung von etwa 2 V erforderlich. Lenard stellte außerdem fest:

- \* Wenn man eine positive äußere Spannung anlegt, dann steigt der Strom zunächst an, ändert sich dann aber im Bereich von  $U = 100\text{ V}$  bis  $U = 40\text{ kV}$  nicht mehr.<sup>3</sup>

Auch das war leicht erklärbar: Das Licht löst eine bestimmte Anzahl von Elektronen aus dem Metall, die bei  $U = 0$  ungeordnet im Vakuumgefäß herumdifundieren und nur teilweise zufällig die

---

<sup>2</sup> Offenbar können Elektronen nicht nur durch eine elektrische Spannung, sondern auch durch die Energie des Lichts beschleunigt werden.

<sup>3</sup> 1 kV = 1 Kilovolt = 1000 Volt

andere Metallplatte erreichen. Wenn eine hohe positive Spannung anliegt, dann werden praktisch sämtliche Elektronen zur unbeleuchteten Platte hin beschleunigt und dort aufgesammelt. Egal wie weit die Spannung erhöht wird, es können nicht mehr Elektronen an der unbeleuchteten Platte eingesammelt werden als vom Licht aus der beleuchteten Platte herausgelöst werden, deshalb ergibt weitere Erhöhung der Spannung keine Vergrößerung des Stroms. Ebenfalls plausibel und leicht verständlich ist diese Beobachtung:

- \* Die Stromstärke, d. h. also die Anzahl der Elektronen die pro Zeit aus der Metallplatte herausgelöst werden, ist **proportional** zur Intensität des Lichts.

Die Intensität des Lichts ist die Menge der Energie, die das Licht pro Zeit zur Metallplatte transportiert. Um ein Elektron aus der Metallplatte herauszulösen ist eine gewisse Energiemenge erforderlich. Je mehr Energie pro Zeit durch das eingestrahlte Licht zur Verfügung steht, um so mehr Elektronen können pro Zeit das Metall verlassen.

Es gab aber einige Details, die völlig rätselhaft waren:

- \* Die Stromstärke ist auch bei beliebig kleiner Intensität des Lichts proportional zur Intensität des Lichts. Es gibt keinen Schwellwert, unter dem überhaupt keine Elektronen aus dem Metall gelöst werden.
- \* Der Strom setzt auch bei geringer Lichtintensität sofort beim Einschalten des Lichts ein, ohne irgend eine Verzögerung.
- \* Lenard verwendete weißes Licht mit einem starken UV-Anteil. Wenn er zwischen die Lichtquelle und die Metallplatte einen Glasfilter schob, der den ultravioletten Anteil des Lichts absorbierte und nur den sichtbaren Anteil des Lichts durchließ, dann verschwand der Strom vollständig, auch wenn die Intensität des sichtbaren Lichts beliebig groß und die äußerer Spannung

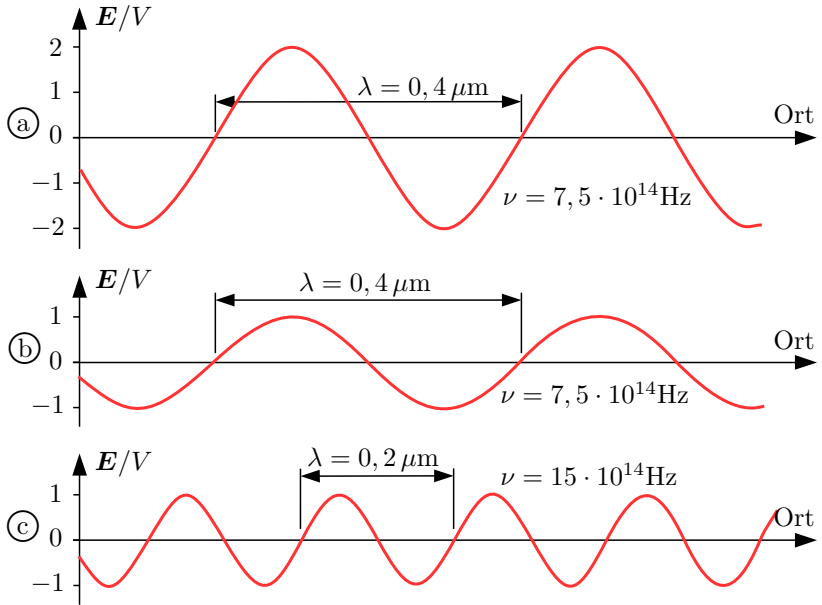


Abb. 3.2: Lichtwellen

$U$  beliebig hoch war.

- \* Die maximale Bewegungsenergie von etwa 2 eV, mit der Elektronen aus dem Metall austreten, ist unabhängig von der Intensität des Lichts.

Warum diese Beobachtungen so verblüffend sind, erkennt man aus Abbildung 3.2. Dort ist die elektrische Feldstärke  $\mathbf{E}$  der Lichtwelle aufgetragen, die auf die Metallplatte trifft. Die Wellenlänge  $\lambda$  der Wellen 3.2(a) und 3.2(b) ist  $0,4 \mu\text{m}$  (violetttes Licht), die Wellenlänge von 3.2(c) ist  $0,2 \mu\text{m}$  (nahes UV). Ebenfalls in die Diagramme eingetragen ist die Frequenz  $\nu = c/\lambda$ , wobei  $c$  die Lichtgeschwindigkeit ist.

Die Welle 3.2(a) hat eine Amplitude von 2 V, die Wellen 3.2(b)

und 3.2(c) haben die Amplitude 1 V.

Die Leistung der Lichtwelle ist die Menge der Energie, die das Licht pro Zeit zur Metallplatte transportiert. Die Leistung ist **proportional** zum Quadrat der Amplitude der Welle:

$$(\text{Leistung der Lichtwelle}) \sim (\text{Amplitude der Lichtwelle})^2 \quad (3.1)$$

Das Zeichen  $\sim$  bedeutet „ist proportional zu“, und die hochgestellte 2 bedeutet „zum Quadrat“. Damit kann man das Verhältnis der Leistungen der drei Lichtwellen leicht berechnen:

$$\begin{aligned} \frac{(\text{Leistung von 3.2(a)})}{(\text{Leistung von 3.2(b)})} &= \frac{(\text{Leistung von 3.2(a)})}{(\text{Leistung von 3.2(c)})} = \\ &= \frac{(2 \text{ V})^2}{(1 \text{ V})^2} = 4 \end{aligned} \quad (3.2a)$$

$$\frac{(\text{Leistung von 3.2(b)})}{(\text{Leistung von 3.2(c)})} = \frac{(1 \text{ V})^2}{(1 \text{ V})^2} = 1 \quad (3.2b)$$

Die Welle 3.2(a) transportiert pro Zeit 4 mal so viel Energie zur Metallplatte wie die Welle 3.2(c). Trotzdem kann die Welle 3.2(c) Elektronen aus der beleuchteten Metallplatte herauslösen, die Welle 3.2(a) aber nicht.

Eigentlich hätte man erwartet, dass ein Elektron um so leichter aus dem Metall gelöst werden kann, je mehr Lichtleistung dafür zur Verfügung steht. Wie in (3.1) angegeben hängt die Leistung einer Welle allein von der Amplitude ab, die Frequenz spielt keine Rolle. Lenards Experiment hatte dagegen das Ergebnis: Die Frequenz der Lichtwelle ist entscheidend, nur bei genügend hoher Frequenz werden Elektronen aus der Metallplatte gelöst. Und man würde eigentlich auch erwarten, dass das Elektron bei niedriger Lichtintensität erst einmal einige Zeit lang Energie ansammeln muss, bevor es das Metall verlassen kann. Aber tatsächlich setzt der Strom sofort ein, auch bei beliebig kleiner Lichtintensität, wenn nur die Frequenz des Lichts hoch genug ist.

## 3.2 Die Lichtquanten-Hypothese

Ein erstaunlicher Vorschlag zur Erklärung dieses rätselhaften Sachverhalts kam 1905 von Albert Einstein (1879–1955). Einstein war damals als „technischer Experte 3. Klasse“ beim Schweizer Patentamt in Bern angestellt. Offenbar ließ im diese Arbeit genügend Zeit und Kraft, um sich nebenher mit wissenschaftlichen Fragestellungen auseinander zu setzen. Jedenfalls veröffentlichte er im Jahr 1905 gleich drei außerordentlich bedeutende Artikel: Im März 1905 die „Lichtquanten-Hypothese“ [9], die Lenards Beobachtungen beim Lichtelektrischen Effekt erklärte, und für die Einstein später mit dem Nobelpreis geehrt wurde; im Mai 1905 den Beweis, dass man mithilfe der Brown'schen Bewegung experimentell prüfen kann ob Atome wirklich existieren [10]; und schließlich im Juni des gleichen Jahres seine Spezielle Relativitätstheorie [11].

Die Erklärung, die Einstein für Lenards Ergebnisse vorschlug, war ebenso einfach wie verblüffend: Sie lief darauf hinaus, dass das Wellenbild die Eigenschaften des Lichts nicht vollständig richtig beschreibt. Natürlich kannte Einstein die Interferenzexperimente, die zeigen dass Licht plus Licht Dunkelheit ergeben kann. Und er wusste, dass diese Experimente eindeutig beweisen, dass Licht die Eigenschaften von Wellen haben muss. Aber zugleich war ihm klar, dass die Menge der Energie, die eine Welle pro Zeit transportiert, ausschließlich von der Amplitude der Welle abhängt, aber keinesfalls von ihrer Frequenz. In der Einleitung seines Artikels [9] schrieb Einstein:

„Die [...] Undulationstheorie<sup>4</sup> des Lichts hat sich zur Darstellung der rein optischen Phänomene vortrefflich bewährt und wird wohl nie durch eine andere Theorie ersetzt werden. Es ist jedoch im Auge zu behalten, daß sich die optischen Beobachtungen auf zeitliche Mittelwerte, aber nicht auf

---

<sup>4</sup> Undulationstheorie = Wellentheorie

Momentanwerte beziehen, und es ist trotz vollständiger Bestätigung der Theorie der Beugung, Reflexion, Brechung, Dispersion etc. durch das Experiment wohl denkbar, daß die [... Wellentheorie] des Lichts zu Widersprüchen mit der Erfahrung führt, wenn man sie auf die Erscheinungen der Lichterzeugung und Lichtverwandlung anwendet.

Es scheint mir nun in der Tat, daß die Beobachtungen über die ‚schwarze Strahlung‘, Photolumineszenz, die Erzeugung von Kathodenstrahlen<sup>5</sup> durch ultraviolettes Licht und andere die Erzeugung bez. Verwandlung des Lichtes betreffende Erscheinungen besser verständlich erscheinen unter der Annahme, daß die Energie des Lichts diskontinuierlich im Raume verteilt sei. Nach der hier ins Auge zu fassenden Annahme ist [... die Energie eines Lichtstrahls] nicht kontinuierlich [...] verteilt, sondern es besteht dieselbe aus einer endlichen Zahl von in Raumpunkten lokalisierten Energiequanten, welche sich bewegen, ohne sich zu teilen und nur als Ganze absorbiert und erzeugt werden können.“

Das ist also Einsteins Lichtquanten-Hypothese: Man soll sich Licht, solange es um rein optische Phänomene geht, weiterhin als Welle vorstellen; sobald es aber um die Erzeugung oder Absorption von Licht geht, soll man sich das Licht als einen Strom von Energiekörnern vorstellen, die „nur als Ganze absorbiert und erzeugt werden können.“

Dass die Bilder von Welle und Teilchen vollkommen unvereinbar sind war Einstein durchaus bewusst. Licht plus Licht kann nur deshalb Dunkelheit ergeben, weil die elektrische Feldstärke einer Welle positiv oder negativ sein kann, siehe Abb. 2.4 auf Seite 28. Dagegen ist die Energie eines Lichtquants immer positiv. Wenn zwei Lichtquanten gleichzeitig den gleichen Detektor erreichen,

---

<sup>5</sup> Kathodenstrahlen = Elektronenstrahlen. Hier bezieht Einstein sich auf Lenards Untersuchungen.

dann wird der Detektor doppelt soviel Energie registrieren wie bei einem einzelnen Lichtquant. Zwei Lichtquanten können sich niemals gegenseitig auslöschen. Aber Einstein erkannte klarer als die meisten seiner Zeitgenossen, dass es hoffnungslos war, die experimentellen Tatsachen im Rahmen der etablierten physikalischen Theorien widerspruchsfrei interpretieren zu wollen.

Einstein befasste sich in seinem Artikel [9] auf 11 Seiten mit der Schwarzen Strahlung, auf knapp 1 Seite mit der Photolumineszenz, und auf 3 Seiten mit Lenards Untersuchungen der Elektronenemission durch ultraviolettes Licht. Die Schwarze Strahlung war also bei weitem sein wichtigstes Thema. Als Schwarze Strahlung wird das (infrarote, sichtbare, und ultraviolette) Licht im Inneren eines Ofens bezeichnet.<sup>6</sup> Ihr Spektrum (die Verteilung der Energie auf die verschiedenen Frequenzen der Lichtwellen) wird durch die Temperatur des Ofens bestimmt, und durch nichts anderes. Bei relativ niedriger Temperatur ist keine Strahlung sichtbar, aber man kann die infrarote Strahlung auf der Haut spüren. Bei höherer Temperatur beginnt der Ofen rot zu glühen, und bei noch höherer Temperatur kommt er zur Weißglut, die einen hohen UV-Anteil hat. Die Theorie der Schwarzen Strahlung ist für Physiker ein faszinierendes Thema, für dieses Buch aber viel zu schwierig.

Im Jahr 1900 hatte Max Planck (1858–1947) – als „glücklich erratene Interpolationsformel“, wie er bei Entgegennahme des Nobelpreises freimütig bekannte [12] – folgenden Zusammenhang zwischen der Temperatur des Ofens und dem Spektrum der Schwarzen Strahlung gefunden:

---

<sup>6</sup> Einstein benutzte den Begriff „Schwarze Strahlung“, obwohl er ungenau ist. Gemeint ist: die elektromagnetische Strahlung im Inneren eines Schwarzen Ofens. Die Wände des Ofens müssen schwarz sein, d. h. sie müssen elektromagnetische Strahlung beliebiger Frequenz absorbieren und emittieren. Wenn die Wände des Ofens nicht schwarz sondern verspiegelt wären, dann würde sich kein thermodynamisches Gleichgewicht zwischen der Strahlung und den Wänden des Ofens einstellen, und Plancks Formel (3.3a) wäre nicht gültig.

$$\text{Energiedichte der Schwarzen Strahlung} = \frac{8\pi h\nu^3/c^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (3.3a)$$

$$h = 6,63 \cdot 10^{-34} \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}} = 4,14 \cdot 10^{-15} \text{eV s} \quad (3.3b)$$

Kein Leser sollte sich von dieser komplizierten Formel erschrecken lassen. Wir können sie gleich wieder vergessen, sie wird hier nur abgedruckt damit man den Faktor  $h\nu$  sieht, der im [Exponenten](#) der Zahl  $e$  auftaucht.

$h$  ist eine von Planck entdeckte Naturkonstante, das sogenannte Wirkungsquantum. Es hat die Dimension Kilogramm mal Quadratmeter durch Sekunde beziehungsweise [Elektronenvolt](#) mal Sekunde. (Achtung: Das  $e$  von Elektronenvolt hat nichts mit der Zahl<sup>7</sup>  $e$  zu tun.<sup>8</sup>) Die Formel (3.3a) beschreibt einen eindeutigen Zusammenhang zwischen der Temperatur  $T$  des Ofens und der in ihm enthaltenen elektromagnetischen Strahlung mit der Frequenz  $\nu$ . Alle anderen Faktoren in dieser Formel sind Konstanten.

Einstein setzte sich 11 Seiten lang mit dieser Formel auseinander um zu zeigen, dass seine Lichtquanten-Hypothese genau dann mit Plancks Formel verträglich ist, wenn jedes Lichtquant gerade die Energie<sup>9</sup>

$$E = h\nu \quad (3.4)$$

hat. Das ist der entscheidende Punkt: Die Leistung (d. h. die pro Zeit transportierte Energie) einer Welle hängt allein von der Amplitude der Welle ab, und hat mit der Frequenz der Welle nichts

<sup>7</sup>  $e$  und  $\pi$  sind sogenannte irrationale Zahlen:

$e = 2,718281\dots$ ,  $\pi = 3,141592\dots$ . Wer wissen will was irrationale Zahlen sind, sollte [13] lesen.

<sup>8</sup> Es gibt einfach zu wenig Zeichen...

<sup>9</sup> Es ist üblich, für die Energie und für die elektrische Feldstärke den gleichen Buchstaben  $E$  zu verwenden, obwohl dies zwei völlig verschiedene Größen sind.<sup>8</sup>

zu tun, siehe (3.1). Aber die Energie  $h\nu$  von Einsteins Lichtquanten hängt von der Frequenz  $\nu$  des Lichts ab. Daraus ergab sich eine Möglichkeit, Lenards Beobachtungen zu erklären. Einstein überlegte sich dazu folgendes:

Ein Elektron in der Metallplatte kann die Energie eines Lichtquants vollständig oder teilweise absorbieren. Es ist aber äußerst unwahrscheinlich, dass ein Elektron gleichzeitig die Energie von zwei (oder noch mehr) Lichtquanten absorbiert. Wenn die Metallplatte mit Licht der Frequenz  $\nu$  bestrahlt wird, ist also

$$E_{\max} = h\nu$$

die Energie, die ein Elektron maximal absorbieren kann. Die Energie  $W$ , die erforderlich ist um das Elektron aus dem Metall herauszulösen, wird als Austrittsarbeit bezeichnet. Die Austrittsarbeit beträgt einige Elektronenvolt, ihr genauer Wert hängt von der Art des Metalls ab. Im Fall

$$E_{\max} = h\nu < W$$

kann überhaupt kein Elektron das Metall verlassen, weil die **absorbierte** Energie kleiner als die Austrittsarbeit ist. Damit wird verständlich, warum der Lichtelektrische Effekt nur auftritt, wenn die Frequenz  $\nu$  des Lichts ausreichend groß ist. Im Fall

$$E_{\max} = h\nu > W$$

wird die überschüssige Energie des Elektrons als Bewegungsenergie beobachtet, d. h. die maximale Bewegungsenergie der aus der Metallplatte herausgelösten Elektronen ist

$$\text{maximale Bewegungsenergie} = h\nu - W . \quad (3.5)$$

Einstein zeigte, dass seine Gleichung (3.5) „der Größenordnung nach“ mit Lenards Beobachtungen übereinstimmt. Eine genaue

Prüfung war nicht möglich, weil Lenard ja mit weißem Licht gearbeitet hatte, dessen Frequenzverteilung nur sehr ungenau bekannt war. Erst elf Jahre später veröffentlichte Robert Andrews Millikan (1868 – 1953) die Ergebnisse präziser Messungen des Lichtelektrischen Effekts mit **monochromatischer** UV-Strahlung [14], die Einsteins Gleichung (3.5) vollständig bestätigten.

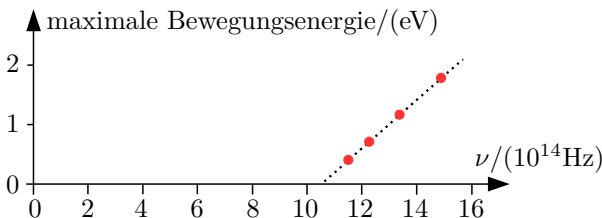


Abb. 3.3: Bewegungsenergie der Elektronen

Abbildung 3.3 zeigt das Ergebnis einer modernen Wiederholung<sup>10</sup> von Millikans Experiment. Eine Zink-Platte wurde mit vier verschiedenen Frequenzen angestrahlt, und bei jeder Frequenz mit Lenards Gegenspannungs-Methode die maximale Bewegungsenergie der Elektronen gemessen. Die Ergebnisse sind als rote Punkte ins Diagramm eingetragen. Die durch die Messpunkte gelegte gestrichelte Gerade hat die Steigung

$$\frac{2 \text{ eV}}{4,8 \cdot 10^{14} \text{ Hz}} = 0,417 \cdot 10^{-14} \text{ eV s} \stackrel{(3.3b)}{\approx} h ,$$

was – im Rahmen der Messgenauigkeit – mit der Planckschen Konstante identisch ist. Die gestrichelte Gerade schneidet die Achse bei  $10,4 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ . Demnach ist die

$$\text{Austrittsarbeit von Zink} = h \cdot 10,4 \cdot 10^{14} \text{ Hz} = 4,3 \text{ eV} .$$

<sup>10</sup> Die Daten stammen aus einem Diagramm, das von Klaus-Dieter Keller ins Netz gestellt wurde,

<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=24751457>

Einsteins Gleichung (3.5) – und damit die Lichtquanten-Hypothese – wird also durch die Messergebnisse von Abb. 3.3 bestätigt.

Erst ein viertel Jahrhundert später bürgerte sich für Einsteins Lichtquanten der Name *Photonen* ein, den wir in diesem Buch durchwegs verwenden werden.

### 3.3 Compton-Streuung

In den Jahren 1922–1923 veröffentlichte Arthur Holly Compton (1892–1962) die Ergebnisse [15] von Experimenten, die als starkes Indiz für die Realität der Photonen anerkannt wurden. Compton richtete die Strahlung einer Röntgenröhre auf eine Probe aus Graphit, und untersuchte die Wellenlänge der **gestreuten** Röntgenstrahlung.

Dabei stellte er fest, dass die Wellenlänge der Röntgenstrahlen nach der **Streuung** größer ist als vorher. Es ist plausibel, dass die Röntgenstrahlung bei der Streuung einen Teil ihrer Energie auf das Graphit überträgt, und deshalb nach der Streuung eine geringere Energie hat als vorher. Aber geringere Energie bedeutet nach der Wellentheorie der elektromagnetischen Strahlung eine geringere Amplitude. Auf die Wellenlänge hat der Energieverlust einer Welle keinen Einfluss.

Dagegen bedeutet nach Einsteins Lichtquantenhypothese wegen

$$\text{Energie eines Photons} = E \stackrel{(3.4)}{=} h\nu \stackrel{(2.1)}{=} \frac{hc}{\lambda} \quad (3.6)$$

mit  $\nu$  = Frequenz ,  $\lambda$  = Wellenlänge

Verminderung der Energie eines Photons auch Verminderung seiner Frequenz und Vergrößerung der Wellenlänge. Durch die Kombination des Wellenbilds und des Teilchenbilds der Röntgenstrahlung konnte Compton seine Beobachtungen auch quantitativ genau erklären:

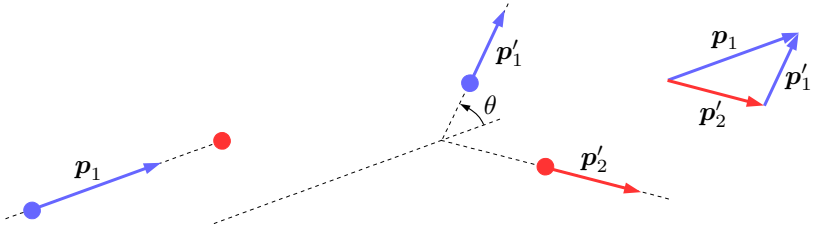


Abb. 3.4: Streuung an einem anfangs ruhenden Teilchen

Wenn ein Teilchen **elastisch** an einem anfangs ruhenden anderen Teilchen gestreut wird, wie in Abb. 3.4 skizziert, dann bleiben Energie und **Impuls** erhalten. Damit ist gemeint: Die Summe der Energie der beiden Teilchen vor dem Stoß ist gleich der Summe der Energie der beiden Teilchen nach dem Stoß, und die Summe der Impulse der beiden Teilchen vor dem Stoß ist gleich der Summe der Impulse der beiden Teilchen nach dem Stoß. Zur Unterscheidung kennzeichnen wir die Größen nach dem Stoß mit einem Strich'. Das ruhende Teilchen kennzeichnen wir mit dem Index 2, das stoßende Teilchen mit dem Index 1.

$$\text{Energieerhaltung:} \quad E_1 + E_2 = E'_1 + E'_2 \quad (3.7a)$$

$$\text{Impulserhaltung:} \quad \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 \quad (3.7b)$$

Der **Impuls**  $\mathbf{p}_2$  des ruhenden Teilchens vor dem Stoß ist Null.

Bei der Erhaltung der Impulse muss man nicht nur ihren Betrag (dargestellt durch die Länge der Pfeile), sondern auch ihre Richtungen beachten, d. h. die Pfeile müssen geometrisch addiert werden wie in Abb. 3.4 rechts gezeigt. Zur Erinnerung daran sind die Impulse  $\mathbf{p}$  in (3.7) fett gedruckt. Wenn der Betrag (d. h. die Länge der Pfeile) gemeint ist, verwenden wir normal gedrucktes  $p$  oder Betragstriche:  $|\mathbf{p}| = p$

Aus der Speziellen Relativitätstheorie [11], die Einstein wenige Monate nach der Lichtquanten-Hypothese veröffentlichte, ergibt

sich folgender Zusammenhang zwischen der Energie  $E$  und dem Betrag  $p$  des Impulses eines Teilchens:

$$E = +\sqrt{c^2 p^2 + m_0^2 c^4} \quad (3.8a)$$

In dieser Gleichung ist  $c$  die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum, und  $m_0$  ist die Masse des Teilchens, wenn es in Ruhe ist. (Nach der Relativitätstheorie wird die Masse eines Teilchens um so größer, je schneller es sich bewegt.) Das Pluszeichen vor der Wurzel besagt, dass die positive Wurzel gemeint ist.

Photonen unterscheiden sich von den meisten<sup>11</sup> anderen Teilchen dadurch, dass ihre Ruhemasse  $m_0$  Null ist. Deshalb vereinfacht sich (3.8a) für

$$\text{Photonen:} \quad E \stackrel{(3.8a)}{=} cp \quad (3.8b)$$

Mithilfe von (3.8) kann man<sup>12</sup> ohne weitere Schwierigkeiten aus (3.7) folgende Gleichung für die Streuung eines Photons an einem anfangs ruhenden Teilchen mit Ruhemasse  $m_0 \neq 0$  ableiten:

$$\frac{1}{p'_1} - \frac{1}{p_1} = \frac{1}{m_0 c} (1 - \cos \theta) \quad (3.9a)$$

Wer die Kosinusfunktion nicht kennt, braucht nicht beunruhigt zu sein. Freundlicherweise macht Compton es nämlich uns (und sich selbst) leicht: Er konzentrierte seine Untersuchung auf Röntgenphotonen, deren Streuwinkel  $\theta = 90^\circ$  war. Bei diesem Winkel ist  $\cos 90^\circ = 0$ , so dass sich die Gleichung zu

$$\frac{1}{p'_1} - \frac{1}{p_1} = \frac{1}{m_0 c} \quad \text{falls } \theta = 90^\circ \quad (3.9b)$$

<sup>11</sup> Die Physik kennt heute nur eine einzige weitere Art von Elementarteilchen mit  $m_0 = 0$ , nämlich die Gluonen, die für die Starke Wechselwirkung der Quarks in Atomkernen verantwortlich sind.

<sup>12</sup> eine nützliche Übungsaufgabe für Physikstudenten. Alle anderen Leser sollten das Ergebnis einfach glauben.

vereinfacht. Mit dieser Gleichung kann man den Betrag  $p'_1$  des Impulses des gestreuten Photons leicht berechnen, wenn man den Betrag  $p_1$  des Impulses des einlaufenden Photons kennt.

Um zu überprüfen, ob seine Messungen mit (3.9b) übereinstimmen, musste Compton den Impuls der Röntgenstrahlung im Teilchenbild wieder in die Wellenlänge des Wellenbilds der Röntgenstrahlung zurück übersetzen:

$$\text{Impuls eines Photons} = p \stackrel{(3.8b)}{=} \frac{E}{c} \stackrel{(3.6)}{=} \frac{h\nu}{c} \stackrel{(3.6)}{=} \frac{h}{\lambda} \quad (3.10)$$

Mit  $p_1 = h/\lambda_0$  und  $p'_1 = h/\lambda_\theta$  wird (3.9b) zu

$$\lambda_\theta - \lambda_0 = \frac{h}{m_0 c} \quad \text{falls } \theta = 90^\circ . \quad (3.11)$$

Abb. 3.5 auf der nächsten Seite zeigt das von Compton veröffentlichte Ergebnis. In der vorletzten Zeile der Legende erkennt man unsere Gleichung (3.11) wieder. Die Messwerte der Intensität der Strahlung vor der Streuung trug Compton als Kreise ein, und verband sie mit der gestrichelten Linie. Die verschiedenen Peaks sind charakteristisch für das Material der Anode der Röntgenröhre. Compton verwendete eine Anode aus Molybdän, deren markante  $K_\alpha$ -Linie bei  $0,708 \text{ \AA} = 0,0708 \text{ nm}$  liegt. Die gemessene Intensität der unter  $90^\circ$  gestreuten Strahlung trug Compton als Kreuze ins Diagramm ein, und verband sie mit der durchgezogenen Linie.

Für  $m_0$  setzte er in (3.11) die Ruhemasse des Elektrons ein, und berechnete damit einen Wert für  $\lambda_\theta - \lambda_0$ , der um 10% über dem gemessenen Wert liegt. Der Fehler resultiert nicht daraus, dass Compton annahm dass die Elektronen vor dem Stoß im Graphit in Ruhe sind (was natürlich nicht genau stimmt), und auch nicht daraus dass er die Bindungsenergie der Elektronen im Graphit ignorierte. Diese beiden Ungenauigkeiten sind vernachlässigbar klein gegenüber der Energie der Röntgenphotonen.

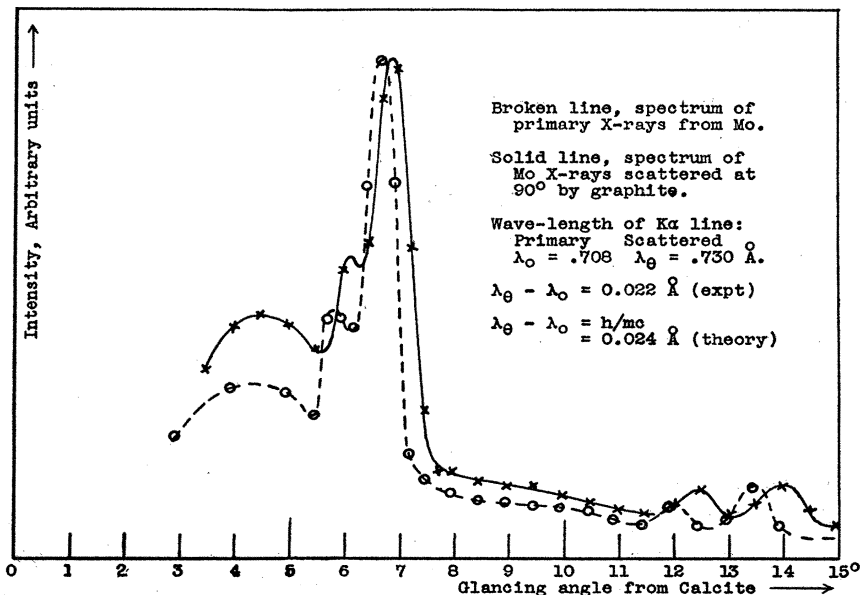


Abb. 3.5: Comptons Ergebnis [15]

Der wesentliche Fehler stammt vielmehr aus der Ungenauigkeit bei der Umrechnung des "Glancing angle from Calcite" in die Wellenlänge der Röntgenstrahlung. Um die Wellenlänge der Röntgenstrahlung zu bestimmen, maß Compton den Winkel, unter dem sie bei streifendem Einfall von einer Kalzit-Oberfläche reflektiert wird. Die Reflexion kommt zustande durch konstruktive Interferenz der Strahlung die an verschiedenen Gitterebenen des Kristalls gestreut wird. Um den Streuwinkel in die Wellenlänge der Strahlung umrechnen zu können, muss man den Abstand der Gitterebenen im Kristall kennen. Wie findet man den Abstand von Gitterebenen eines Kristalls heraus? Durch die Streuung von Röntgenstrahlung!

Da beißt sich die Katze in den Schwanz, das ist ein typisches Hen-

ne-Ei-Problem. Um die Wellenlänge von Röntgenstrahlung genau messen zu können, muss man die Kristallgeometrie genau kennen. Um die Kristallgeometrie genau messen zu können, muss man die Wellenlänge der Röntgenstrahlung genau kennen. In Comptons Tagen steckte die Röntgen-Kristallographie noch in den Kinderschuhen. Gemessen an diesen Problemen ist die Genauigkeit seines Ergebnisses beeindruckend.

### 3.4 Taylor's Doppelspalt-Experiment

In seinem Artikel [9] von 1905 hatte Einstein geschrieben, dass Lichtquanten „sich bewegen, ohne sich zu teilen und nur als Ganze absorbiert und erzeugt werden können.“ Was die Erzeugung und Absorption von Lichtquanten „nur als Ganze“ angeht, hatte Einstein starke Argumente für seine Hypothese angeführt. Aber konnte man auch sicher sein, dass sie „sich bewegen, ohne sich zu teilen“? Was wird geschehen, wenn ein einzelnes Photon auf einen Strahlteiler trifft? Wird am Strahlteiler ein halbes Photon transmittiert und ein halbes Photon reflektiert, so dass es sich also doch teilt? Oder wird es sich ungeteilt für den einen oder den anderen Weg entscheiden? Das würde dann allerdings bedeuten, dass alle Interferenzerscheinungen verschwinden müssten, wenn man mit einzelnen Photonen experimentiert. Denn die Interferenz kommt ja durch die Überlagerung von Teilwellen zustande, die verschiedene Wege zurückgelegt haben.

Schon bald begannen Experimentatoren mit der Untersuchung dieser Frage. Geoffrey Ingram Taylor (1886–1975) berichtete 1909 [16] über ein Interferenzexperiment, das dem auf Seite 41 skizzierten Experiment von Young sehr ähnlich war. Als Lichtquelle verwendete Taylor ein Gaslicht, und anstelle von Youngs weißem Karton photographische Platten. Zunächst photographierte er das Interferenzmuster, dann schwächte er das Licht durch unterschiedlich

stark geschwärzte Glasfilter, und photographierte das Interferenzmuster erneut. Dabei verlängerte er die Belichtungszeit jeweils so, dass bei jedem Photo insgesamt etwa gleich viel Licht die Platte erreichte. Beim Experiment mit maximal abgeschwächtem Licht war eine Belichtungszeit von etwa zweitausend Stunden (also fast drei Monaten!) erforderlich.

Die Überlegung war: Je stärker das Licht abgeschwächt wird, desto öfter wird es vorkommen dass nur ein einziges Photon gleichzeitig den Doppelspalt durchquert. Wenn es sich dabei *nicht* aufspaltet, dann wird es auch nicht zur Entstehung des Interferenzmusters beitragen, sondern völlig zufällig an irgend einer beliebigen Stelle auf die Platte treffen. Also sollte das Interferenzmuster um so blasser und verwaschener werden, je schwächer die Lichtintensität und dementsprechend länger die Belichtungszeit war. Das war aber nicht der Fall: Taylor berichtete, dass alle seine Aufnahmen – unabhängig von der Lichtintensität – das Interferenzmuster mit gleicher Schärfe und Deutlichkeit zeigten.

War damit bewiesen, dass Photonen sich doch aufspalten und dadurch mit sich selbst interferieren können? Es dauerte Jahrzehnte bis die Physiker verstanden, dass und warum dieser Beweis nicht wirklich stichhaltig war. Lichtquellen wie Taylors Gaslicht, aber auch die Sonne, Glühbirnen, oder Laser emittieren Photonen nicht gleichmäßig sondern in Gruppen von unterschiedlich vielen Photonen, und mit unterschiedlich langen Abständen zwischen den Gruppen. Man konnte also nicht mit Sicherheit ausschließen, dass – auch bei extremer Abschwächung des Lichts – meistens mehrere Photonen gleichzeitig in Taylors Apparatur waren, und dass durch die Abschwächung des Lichts nur die Pausen zwischen den Photonen-Gruppen verlängert wurden.

Man konnte sogar noch weiter gehen, und das Konzept der Photonen grundsätzlich anzweifeln. Gewiss, Einsteins Lichtquantenhypothese bot eine einleuchtende Erklärung für den Lichtelektrischen

Effekt, für das Spektrum des Schwarzen Strahlung, und für die Compton-Streuung. Aber war nicht andererseits die Tatsache, dass offenbar auch bei beliebig abgeschwächter Strahlung Interferenz auftritt, ein Hinweis darauf dass es überhaupt keine Photonen gibt? Dass elektromagnetische Felder – wie in der Klassischen Physik angenommen – stets kontinuierliche Wellenfelder sind, und die unstetigen und teilchenartigen Phänomene, die bei der Wechselwirkung von elektromagnetischer Strahlung und Materie beobachtet werden, allein auf bis dahin unverstandene Eigenschaften der Materie zurückzuführen waren?

### 3.5 Einzelne Photonen am Strahlteiler

Wenn stark abgeschwächtes Licht mit modernen Detektoren beobachtet wird, dann registrieren die Detektoren eine Abfolge unregelmäßiger, punktförmiger Ereignisse, die üblicherweise als Photonen interpretiert werden. Aber könnte es vielleicht sein, dass bei den Detektoren in Wahrheit nicht Teilchen sondern Wellenpakete ankommen, also elektromagnetische Pulse die so kurz sind, dass sie mit den Detektoren wechselwirken als wären sie echte Teilchen?

Es gibt ein klares Unterscheidungskriterium zwischen – egal wie kurzen – Wellenpaketen und Photonen: Wellenpakete werden von Strahlteilern aufgeteilt und teilweise transmittiert, teilweise reflektiert. Photonen werden dagegen entweder ungeteilt transmittiert, oder ungeteilt reflektiert. Das sollte sich doch mit moderner Detektortechnik leicht klären lassen: Wir stellen hinter jeden Ausgang eines Strahlteilers einen Detektor, lassen einen stark abgeschwächten Lichtstrahl in den Strahlteiler laufen, und beobachten wie oft beide Detektoren gleichzeitig ansprechen, und wie oft nur einer der beiden Detektoren anspricht.

Statt umständlich zu erklären warum es sinnvoll und sogar notwendig ist etwas mehr Aufwand zu betreiben, beschreibe ich

einfach einmal ein Strahlteiler-Experiment, das J. J. Thorn et. al. 2003 durchführten [17]. Als Lichtquelle benutzten sie ein Verfahren, das erst in den neunziger Jahren entwickelt wurde, und unter dem **Akronym** SPDC (englisch: spontaneous parametric down conversion = spontane parametrische abwärts-Umwandlung) bekannt ist. Das Verfahren beruht darauf, dass in manchen Kristallen (besonders oft wird  $\beta$ -Bariumborat  $\beta$ -Ba(BO<sub>2</sub>)<sub>2</sub> verwendet, kurz BBO genannt) hin und wieder („spontan“) ein Photon, das sich in bestimmter Richtung durch den Kristall bewegt, in zwei Photonen umgewandelt wird, die zusammengenommen die gleiche Energie und den gleichen Impuls haben wie das ursprüngliche Photon. Das geschieht bei einem von ungefähr  $10^{10}$  bis  $10^{12}$  Photonen. Die Methode ist also nicht sehr effizient, und man braucht einen kraftvollen Laser, um nennenswerte Mengen von Tochter-Photonenpaaren zu produzieren.

Bei den meisten (aber nicht allen) Experimenten wird der Kristall so justiert, dass beide Tochterphotonen jeweils genau halb so viel Energie haben wie das ursprüngliche Photon, das als Pump-photon bezeichnet wird. Damit der Impuls erhalten werden kann, müssen sich das Pumpphoton und die beiden Tochterphotonen in der gleichen Ebene bewegen. Diese Ebene braucht aber für verschiedene Paare von Tochterphotonen nicht die gleiche zu sein. Bei SPDC Typ I liegen die Trajektorien der Tochterphotonen auf einem Kegelmantel, dessen Achse durch den Pumpstrahl definiert wird, siehe Abb. 3.6 auf der nächsten Seite. Bei SPDC Typ II liegen die Trajektorien der Tochterphotonen auf unterschiedlichen Kegelmänteln. Ob SPDC Typ I oder SPDC Typ II auftritt hängt von der Justierung des Kristalls ab. In diesem Kapitel befassen wir uns ausschließlich mit SPDC Typ I.

Durch Lochblenden werden in den Experimenten Paare von Tochterphotonen ausgewählt, die sich in bestimmten Richtungen bewegen. Die beiden Tochterphotonen, die wir Photon<sub>1</sub> und Photon<sub>2</sub>

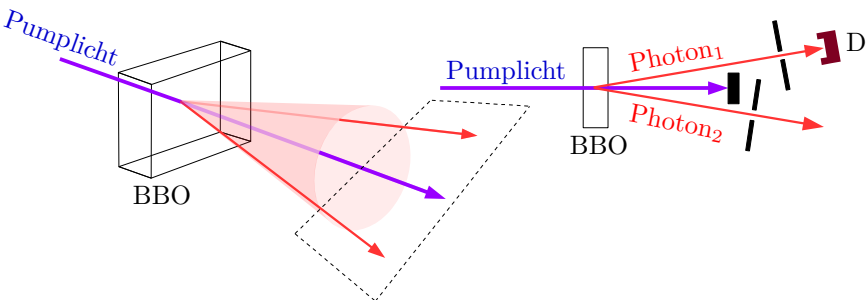


Abb. 3.6: SPDC = spontaneous parametric down conversion. Bei SPDC Typ I liegen die Trajektorien der Tochterphotonen (rote Pfeile) auf einem Kegelmantel, dessen Achse der Pumpstrahl bildet. Die Trajektorien der beiden gleichzeitig erzeugten Tochterphotonen und der Pumpstrahl liegen stets in einer Ebene, angedeutet durch die gestrichelten Linien.

nennen, haben bei SPDC Typ I die gleiche Polarisation, und zwar senkrecht zur Polarisation des Pump-Photons.

Der BBO-Kristall ist typisch 3 mm dick. Im Kristall bewegen sich Photonen etwa halb so schnell wie in Luft, also mit etwa  $1,5 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ . Das Pumpphoton braucht demnach

$$\frac{3 \text{ mm}}{1,5 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 2 \cdot 10^{-11} \text{ s} ,$$

um den Kristall zu durchqueren. Innerhalb dieses Zeitintervalls müssen beide Tochterphotonen entstehen. Man weiß also: Wenn der Detektor D (siehe Abb. 3.6) zu einer bestimmten Zeit ein Photon registriert, dann muss sich gleichzeitig das Partnerphoton etwa an der Spitze des unteren roten Pfeils in der rechten Skizze von Abb. 3.6 befinden, und sich mit Lichtgeschwindigkeit in der Richtung dieses Pfeils bewegen.

Wenn man mit Photon<sub>2</sub> ein Experiment durchführt, dann kann man sich demnach genau ausrechnen, wann es wo sein wird, und

wann es einen bestimmten Detektor erreichen wird. Wenn es nicht zur vorgesehenen Zeit von seinem Detektor registriert wird, dann ist es entweder irgendwo verloren gegangen (z. B. von der Oberfläche einer Linse reflektiert worden, oder von einem Spiegel nicht reflektiert worden), oder der Detektor hat es schlichtweg übersehen. Das passiert sehr häufig, denn Photonen-Detektoren sind ziemlich ineffizient, besonders wenn sie schnell sein sollen. In den optischen Experimenten, die in diesem Buch vorgestellt werden, haben die Detektoren eine Effizienz von typisch 10 %, d. h. durchschnittlich wird nur eines von zehn Photonen, die den Detektor erreichen, tatsächlich registriert.

Mit SPDC Typ I erzeugten Thorn et. al. [17] Photonenpaare um genau zu untersuchen, was denn nun wirklich an einem Strahlteiler geschieht. Der Aufbau ihres Experiments wird in Abb. 3.7 gezeigt. Bei dem Strahlteiler handelte es sich um einen polarisierenden

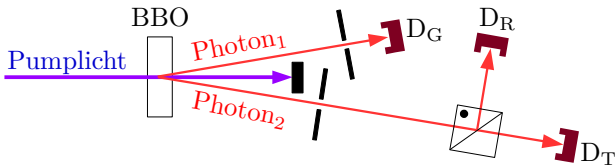


Abb. 3.7: Einzelne Photonen am Strahlteiler

Strahlteiler, der unter  $45^\circ$  relativ zur Polarisation von  $\text{Photon}_2$  einjustiert war, so dass die Wahrscheinlichkeit für Transmission des Photons gleich groß war wie die Wahrscheinlichkeit für Reflektion.

Mit diesem Aufbau führten Thorn et. al. genau 100 mal folgenden Versuch durch: 23,4 Sekunden lang wurde jedes Mal wenn der Detektor  $D_G$  (der Index  $G$  steht für gate) ansprach geprüft, ob innerhalb von 2,5 ns der Detektor  $D_T$ , oder der Detektor  $D_R$ , oder beide, ebenfalls ansprachen.  $N_{GT}$  ist die Anzahl der während dieser 23,4 Sekunden beobachteten **Koinzidenzen** von  $D_G$  und  $D_T$ .  $N_{GR}$  ist die Anzahl der Koinzidenzen von  $D_G$  und  $D_R$ .  $N_{GTR}$  ist die

Anzahl der Koinzidenzen aller drei Detektoren, d. h. die Anzahl der in 23,4 Sekunden registrierten Ereignisse, bei denen sowohl  $D_T$  als auch  $D_R$  innerhalb von 2,5 ns ansprachen, nachdem  $D_G$  angesprochen hatte. Der Detektor  $D_G$  sprach während der 23,4 Sekunden insgesamt  $N_G$  mal an.

Aus den in 23,4 Sekunden gezählten Ereignissen wurde folgende Größe<sup>13</sup> berechnet:

$$\frac{N_{GTR}/N_G}{(N_{GT}/N_G)(N_{GR}/N_G)} = \frac{N_{GTR}N_G}{N_{GT}N_{GR}} \quad (3.12)$$

Diese Größe erscheint zunächst ziemlich unanschaulich, sie hat aber zwei wichtige Vorteile. Erstens ist sie unabhängig von der Effizienz der Photonen-Detektoren. Wenn die Detektoren beispielsweise eine Effizienz von 10 % haben, dann wäre bei perfekten Detektoren (Effizienz 100 %) die Zahl  $N_G$  10 mal größer, die Zahlen  $N_{GT}$  und  $N_{GR}$  wären 100 mal größer (weil eine zweifach-Koinzidenz nur mit  $10\% \cdot 10\% = 1\%$ iger Wahrscheinlichkeit detektiert wird), und  $N_{GTR}$  wären 1000 mal größer (weil eine dreifach-Koinzidenz nur mit  $10\% \cdot 10\% \cdot 10\% = 0,1\%$ iger Wahrscheinlichkeit detektiert wird). In (3.12) kürzen sich diese Korrekturfaktoren heraus, so dass man sich keine Gedanken über die Effizienz der Detektoren zu machen braucht.

Zweitens wird in Anhang A.1 bewiesen<sup>14</sup>, dass (3.12) zwingend  $\geq 1$  sein muss, falls es sich bei den Energiepaketen, die die Detektoren registrieren, um kurze Wellenpakete handeln sollte, die vom Strahlteiler aufgespalten werden, und nicht um unteilbare Photonen.

<sup>13</sup> für Physiker: Es handelt sich um die  $g^{(2)}(0)$ -Korrelation. Genaueres in [17].

<sup>14</sup> Ich verschiebe hier, und auch mehrfach in den folgenden Kapiteln, solche mathematischen und technischen Details in den Anhang, die man – zumindest beim ersten Lesen des Buchs – ohne Schaden für das physikalische Verständnis des Sachverhalts überspringen kann.

Nach insgesamt 100 Durchläufen des Experiments von je 23,4 Sekunden wurde aus den Ergebnissen der Mittelwert und die Standard-Abweichung berechnet:

$$\frac{N_{GTR}/N_G}{(N_{GT}/N_G)(N_{GR}/N_G)} = \frac{N_{GTR}N_G}{N_{GT}N_{GR}} = 0,0177 \pm 0,0026 \quad (3.13)$$

Die Standard-Abweichung von 0,0026 ist ein Maß dafür, wie stark die hundert einzelnen Ergebnisse um den Mittelwert streuen. Bei „normalverteilten“ Messwerten liegt der Mittelwert einer gigantisch großen Anzahl von Versuchsdurchläufen (der „wahre“ Wert) mit einer Wahrscheinlichkeit von 68 % weniger als 1 Standardabweichung, und mit einer Wahrscheinlichkeit von 99,7 % weniger als 3 Standardabweichungen neben dem Mittelwert 0,0177 der tatsächlich durchgeführten 100 Versuchsdurchläufe. Der Wert  $\geq 1$ , der laut Anhang A.1 für Wellenpakete zu erwarten ist, liegt

$$\frac{1 - 0,0177}{0,0026} \approx 378$$

Standard-Abweichungen neben dem gemessenen Mittelwert. Die Hypothese teilbarer Wellenpakete ist damit experimentell definitiv widerlegt.

Aber wieso gibt es überhaupt dreifach-Koinzidenzen? Wenn Licht aus unteilbaren Photonen besteht, dann kann Photon<sub>2</sub> doch immer nur bei *einem* Detektor ankommen, aber niemals bei D<sub>T</sub> und D<sub>R</sub>. Offenbar kommen jedoch hin und wieder dreifach-Koinzidenzen vor, denn wenn  $N_{GTR} = 0$  wäre, dann wäre auch (3.13) = 0. Um das zu klären schätzen wir ab, wie oft es vorkommen wird dass Photonen von zwei unterschiedlichen Photonenpaaren zufällig ins gleiche 2,5 ns-Fenster rutschen. Typischerweise war  $N_G \approx 2,5 \cdot 10^6$ , d. h. bei einer Detektor-Effizienz von 10 % kann man annehmen, dass tatsächlich im Zeitraum von 23,4 Sekunden etwa  $2,5 \cdot 10^7$  Photonenpaare die Detektoren erreichten.  $N_{GT} + N_{GR}$  war ungefähr  $2 \cdot 10^5$ . Folglich dürfte es etwa

$$2,5 \cdot 10^7 \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 2,5 \text{ ns}}{23,4 \text{ s}} \approx 5 \cdot 10^2$$

mal vorkommen, dass zufällig ein „falsches“ Photon<sub>2</sub> ins Zeitfenster rutscht. Mit Wahrscheinlichkeit 1/2 erreicht es den Detektor, den das „richtige“ Photon<sub>2</sub> bereits ausgelöst hat. Dann ist es wirkungslos. Mit Wahrscheinlichkeit 1/2 erreicht es jedoch den noch nicht ausgelösten Detektor, und mit 10%iger Wahrscheinlichkeit wird dieser ansprechen. Also sind in jedem Lauf des Experiments etwa

$$5 \cdot 10^2 \cdot (1/2) \cdot 10 \% \approx 25 \quad (3.14)$$

dreifach-Koinzidenzen aufgrund von zufällig ins Zeitfenster gerutschten Photonen zu erwarten. Das ergibt für die Messgröße (3.13)

$$\frac{N_{\text{GTR}} N_{\text{G}}}{N_{\text{GT}} N_{\text{GR}}} \approx \frac{25 \cdot 2,5 \cdot 10^6}{10^5 \cdot 10^5} \approx 0,006 . \quad (3.15)$$

Das ist zwar nur ein Drittel des gemessenen Werts (3.13) = 0,0177, die Größenordnung stimmt aber, und (3.14) ist ja nur eine grobe, größenordnungsmäßige Abschätzung. Deshalb ist die Schlussfolgerung von Thorn et. al. plausibel, dass (3.13) nur aufgrund zufällig ins Zeitfenster gerutschter Photonen von Null verschieden ist, und dass die Annahme unteilbarer Photonen mit diesem Ergebnis verträglich ist.

### 3.6 Einzelne Photonen im Interferometer

Wenn einzelne Photonen am Strahlteiler stets entweder vollständig transmittiert oder vollständig reflektiert werden, aber niemals aufgespalten werden, dann kann beim Interferometer von Abb. 3.8 auf der nächsten Seite keine Interferenz auftreten. Denn dann nimmt jedes Photon<sub>2</sub> am ersten Strahlteiler entweder den Weg A oder

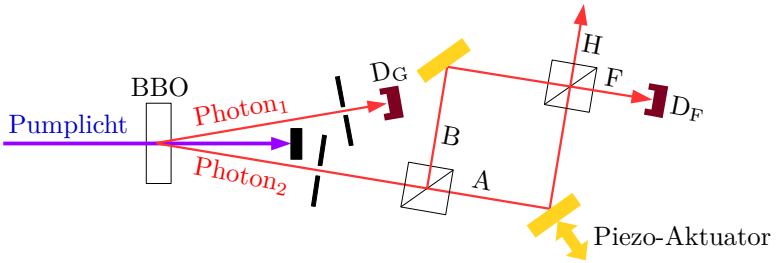


Abb. 3.8: Einzelne Photonen im Interferometer

den Weg B, aber nicht beide Wege. Ob das Photon anschließend am zweiten Strahlteiler den Weg F oder den Weg H einschlägt, das kann dann nicht von der Differenz der Weglängen A und B abhängen.

Das Experiment, das 2004 von E. J. Galvez et. al. durchgeführt wurde [18], ergab jedoch ein völlig anderes Ergebnis. In diesem Experiment wurden korrelierte Paare von Photonen, die wir Photon<sub>1</sub> und Photon<sub>2</sub> nennen, durch SPDC Typ I in einem etwa 6 mm dicken BBO-Kristall ( $\beta$ -Bariumborat) erzeugt.

Photon<sub>1</sub> wurde vom Detektor D<sub>G</sub> registriert. Photon<sub>2</sub> lief durch ein Interferometer, das aus zwei normalen (nicht polarisierenden) Strahlteilern und zwei Spiegeln bestand. Einer der Spiegel konnte durch einen **piezoelektrischen Aktuator** spannungsgesteuert um einige Mikrometer verschoben werden. Zwar wird durch die Verschiebung des Spiegels der Strahl von diesem Spiegel zum zweiten Strahlteiler um wenige Mikrometer seitlich versetzt, aber das ist weit weniger als 1 % des Strahldurchmessers, und hat deshalb keinen merklichen Effekt auf die Interferenz (falls es sie geben sollte) am zweiten Strahlteiler. Wenn das Photon am zweiten Strahlteiler den Weg F einschlug, konnte es vom Detektor D<sub>F</sub> registriert werden. Am Ausgang H befand sich kein Detektor. Wenn das Photon diesen Weg einschlug, ging es unregistriert verloren.

Das Experiment von Galvez et. al. lief folgendermaßen ab: Die Spannung am Piezo-Aktuator, der einen der beiden Spiegel bewegte, wurde in 40 gleich großen Schritten von 15 V bis 45 V erhöht. Bei jeder der 41 Stellungen des Spiegels wurde 20 s lang gezählt, wie oft der Detektor  $D_G$  und dann innerhalb von 4 ns auch der Detektor  $D_F$  ansprach. Die Anzahl  $N_{GF}$  dieser Koinzidenzen wird im Diagramm von Abb. 3.9 als Funktion der Piezospannung durch rote Punkte dargestellt.

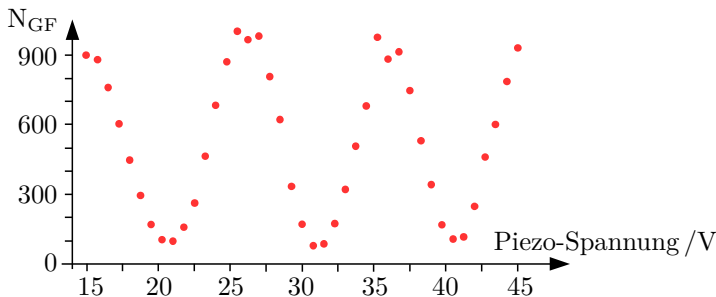


Abb. 3.9: Selbstinterferenz einzelner Photonen

Die Interferenzstruktur ist unübersehbar. Offenbar wurde die Länge des Weges A insgesamt um knapp drei Wellenlängen verändert, während die Länge des Weges B unverändert blieb. Bei genauerem Hinsehen bemerkt man, dass die Strukturen im linken Teil des Diagramms etwas weiter gespreizt sind als im rechten Teil, weil der Piezo-Aktuator bei höheren Spannungen nicht mehr so sensitiv auf kleine Spannungsänderungen reagiert wie bei niedrigen Spannungen.

Im Vergleich zu Abb. 2.3 auf Seite 26 fällt auf, dass  $N_{GF}$  bei den Interferenz-Minima nicht auf 0 zurückgeht sondern nur auf knapp 100. Aber 2.3 war ja lediglich eine idealisierte theoretische Kurve, während 3.9 ein ungeschöntes Messresultat mit allen experimentellen Unvollkommenheiten ist. An der Realität der Interferenzen kann man trotzdem nicht zweifeln.

Und damit stehen wir vor einem Problem: Das Diagramm 3.9 zeigt die Interferenz von Photonen, die – abgesehen von wenigen zufälligen Koinzidenzen – nachweislich einzeln und allein das Interferometer durchlaufen haben. Trotzdem haben alle diese Photonen offenbar beide Wege – sowohl den Weg A als auch den Weg B – erforscht, denn sonst könnten sie ihr Verhalten am zweiten Strahlteiler nicht von der Längendifferenz dieser Wege abhängig machen. Andererseits haben wir im vorigen Abschnitt gesehen, dass einzelne Photonen am Strahlteiler immer nur einen Weg nehmen, aber nicht beide Wege. Ist das Magie, oder gibt es eine vernünftige Erklärung?

### 3.7 Der Ort eines Teilchens

Man ist versucht zu sagen, dass die Photonen auf irgend eine geheimnisvolle Weise darüber informiert werden, ob ihnen hinter einem Strahlteiler Detektoren auflauern oder nicht, und sich dann aufgrund dieser Information für einen der Wege entscheiden, oder sich auf beide Wege aufspalten. Wir werden aber in den folgenden Kapiteln sehen, dass diese Sichtweise dem Sachverhalt nicht gerecht wird.

Betrachten wir zunächst noch einmal den Aufbau des Experiments von Thorn et. al. in Abb. 3.10 auf der nächsten Seite. Die roten Pfeile in der oberen Skizze symbolisieren die Trajektorien von  $\text{Photon}_1$  und  $\text{Photon}_2$ . Eine Trajektorie ist die Menge der Punkte, an denen sich ein Teilchen im Lauf der Zeit nacheinander befindet. Den Ort eines Teilchens zu einem bestimmten Zeitpunkt würden wir demnach durch einen roten Punkt symbolisieren, der auf der Stelle der Trajektorie liegt, an dem sich das Teilchen zu dem Zeitpunkt (vermutlich) befindet. Laut Klassischer Physik wäre das richtig, aber laut Quantentheorie wäre das falsch.

Wir werden in den folgenden Kapiteln gute Gründe für die Annahme kennenlernen, dass ein Teilchen einen Ort nicht einfach

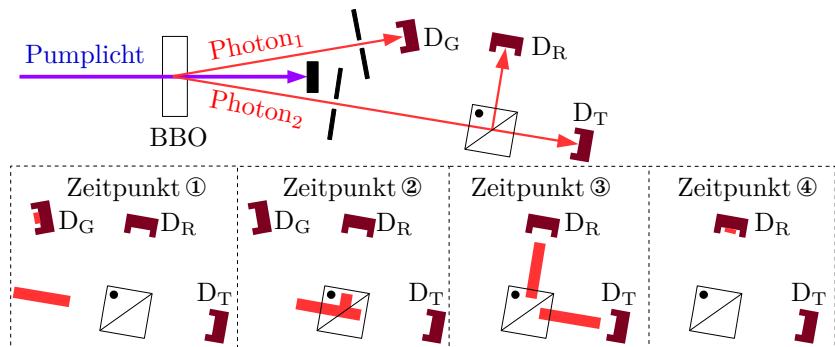


Abb. 3.10: Der Ort von Photon<sub>2</sub> zu verschiedenen Zeitpunkten

„hat“, sondern dass der Ort eines Teilchens durch die Wechselwirkung dieses Teilchens mit geeigneten Messgeräten *erschaffen* wird, und dass die Ausdehnung des Ortes des Teilchens deshalb von der Bauweise und Anordnung der Messgeräte abhängt. Die vier unteren Skizzen in Abb. 3.10 sollen diesen Gedanken veranschaulichen.

Die linke, Zeitpunkt ① genannte Skizze zeigt die rot gemalten Orte von Photon<sub>1</sub> und Photon<sub>2</sub> in dem Moment, wo der Detektor D<sub>G</sub> anspricht. Photon<sub>1</sub> wird dabei von der aktiven Fläche des Detektors absorbiert; sein Ort wurde nur deshalb so dick gemalt, damit man ihn deutlich sehen kann. Es wurde angenommen dass die aktive Fläche des Detektors größer ist als die Blende, durch die Photon<sub>1</sub> sich auf dem Weg vom BBO-Kristall zum Detektor gezwängt hat. Deshalb ist der Ort von Photon<sub>1</sub> so breit wie die Blende.

Gleichzeitig erschafft der Detektor D<sub>G</sub> dadurch, dass er anspricht, in Zusammenarbeit mit dem SPDC-Prozess und der Blende, durch die Photon<sub>2</sub> sich zwingen musste, auch den Ort von Photon<sub>2</sub>. Die Breite dieses Ortes wird durch die Blende bestimmt, seine Länge durch die Zeitauflösung von D<sub>G</sub>. Die Zeitauflösung eines Photonen-Detektors ist selten besser als etwa 100 Pikosekunden. In dieser

Zeit bewegt sich ein Photon etwa 3 cm weit, also ist das die Länge des Orts von  $\text{Photon}_2$ .

Mit unserm Klassisch geschulten Denken neigen wir zu der Annahme: Der etwa 3 cm lange Schlauch ist der Raumbereich, innerhalb dessen sich  $\text{Photon}_2$  an irgend einer – uns zwar unbekannt, aber „in Wirklichkeit“ genau definierten – Stelle befindet. Das ist jedoch ein Missverständnis, so ist die Zeichnung nicht gemeint. Sondern der Ort des Teilchens hat – laut Quantentheorie – wirklich eine überraschend große Ausdehnung. Wenn die Blende doppelt so groß wäre, dann wäre auch der Ort von  $\text{Photon}_2$  doppelt so groß. Es ist nicht so, dass das Photon einen bestimmten Ort hat, der dann mithilfe von mehr oder weniger genauen Messgeräten mehr oder weniger genau festgestellt wird. Sondern der Ort des Photons wird – laut Quantentheorie – durch das Zusammenwirken von Photon und Messgeräten erschaffen, und die Ausdehnung des Orts hängt von der Bauart der Messgeräte ab.

In der Skizze „Zeitpunkt ②“ wird der Ort von  $\text{Photon}_2$  zu der Zeit dargestellt, wo er sich zum Teil bereits im Strahlteiler, zum Teil aber noch davor befindet. In der Skizze „Zeitpunkt ③“ befindet sich der Ort von  $\text{Photon}_2$  teilweise noch im Strahlteiler, zum Teil aber bereits dahinter. Und er hat sich aufgespalten!  $\text{Photon}_2$  hat sich nicht aufgespalten, sein Ort aber schon.

In der Skizze „Zeitpunkt ④“ hat der Detektor  $D_R$  angesprochen. Dadurch ist der Ort von  $\text{Photon}_2$ , der unmittelbar zuvor noch auf zwei Wege verteilt war, schlagartig auf die aktive Fläche von  $D_R$  zusammengeschrunpft.

Ich wäre *sehr* überrascht, wenn Leser, die in diesem Buch zum ersten Mal mit Quantenphänomenen konfrontiert werden, auf diese „Zeitpunkt“-Skizzen anders als mit allergrößter Skepsis reagieren würden. Sehr schade wäre es allerdings, wenn irgendjemand das Buch jetzt als „offensichtlichen Unsinn“ enttäuscht zur Seite legen würde. Denn ich werde in den folgenden Kapiteln nicht nur plausible

Gründe, sondern hieb- und stichfeste experimentelle Beweise dafür präsentieren, dass die Betrachtungsweise von Quantenphänomenen, die in diesen Skizzen angedeutet wird, dem Sachverhalt tatsächlich angemessen ist. Zur zusätzlichen Motivation werde ich jetzt noch ein paar Gedanken über

### 3.8 Relationale Eigenschaften

niederschreiben. Relationale Eigenschaften sind Eigenschaften, die ein Objekt nicht „an sich“ hat, sondern in Bezug auf andere Objekte. Jeder versteht sofort dass es nicht sinnvoll ist zu sagen dass ein Objekt A die Eigenschaft „größer“ hat. Diese Eigenschaft kann A nur haben in Relation zu einem anderen Objekt B, das kleiner ist als A.

Ungewohnt ist uns dagegen die im vorigen Abschnitt diskutierte Vorstellung, dass ein Photon einen Ort nur in Relation zu Messgeräten hat. Viele Eigenschaften, die ein Objekt laut Klassischer Physik „an sich“ haben kann, werden in der Quantentheorie als relationale Eigenschaften behandelt, die ein Objekt nur in Bezug auf Messgeräte haben kann. Der „Ort“ eines Teilchens ist ein besonders seltsames Beispiel, wir werden aber noch etliche andere kennen lernen.

Der Gedanke wird uns weniger fremdartig erscheinen wenn wir einmal überlegen, ob beispielsweise Farbe eine relationale oder absolute Eigenschaft ist. Es kann passieren dass jemand im Geschäft die Farben mehrerer Hemden sorgfältig vergleicht, sich dann für das Hemd entscheidet dessen Farbe ihm am besten gefällt, – und eine Enttäuschung erlebt wenn er das Hemd zum ersten mal im Freien trägt und bemerkt, dass der Farbton im Sonnenlicht ganz anders wirkt als im Kunstlicht des Geschäfts, und nochmals ganz anders bei bunter Disko-Beleuchtung.

Gewohnheitsmäßig neigen wir zu der Ansicht, dass die Farbe im Sonnenlicht die „wahre“ Farbe ist, und die Farbeindrücke bei ande-

rer Beleuchtung Täuschungen sind. Aber bei genauerer Überlegung macht man sich schnell klar, dass das eine ziemlich willkürliche Vereinfachung ist. Der objektive Sachverhalt ist folgender:

Der Hersteller hat den Stoff des Hemdes mit bestimmten Molekülen getränkt, die zahlreiche konjugierte Doppel- und dreifach-Bindungen enthalten. Diese Farbstoff-Moleküle absorbieren und reflektieren Licht mit unterschiedlicher Wellenlänge unterschiedlich stark, und das Spektrum des reflektierten Lichts ruft dann beim Betrachter einen bestimmten Farbeindruck hervor.

Selbstverständlich hängt das Spektrum des reflektierten Lichts nicht nur von den Farbstoff-Molekülen ab, sondern auch vom Spektrum des Lichts, mit dem das Hemd angeleuchtet wird. Wenn das Licht sehr viele Photonen mit einer bestimmten Wellenlänge  $\lambda_1$  und nur sehr wenige Photonen mit Wellenlänge  $\lambda_2$  enthält, dann wird das vom Hemd reflektierte Licht selbst dann mehr  $\lambda_1$ -Photonen als  $\lambda_2$ -Photonen enthalten, wenn die Farbstoff-Moleküle  $\lambda_2$ -Photonen geringfügig stärker reflektieren als  $\lambda_1$ -Photonen. Die Beleuchtung und die Farbstoffmoleküle erzeugen gemeinsam die Farbe des Hemdes. Ohne Farbstoffmoleküle hat das Hemd keine Farbe, ohne Beleuchtung auch nicht. Nur im Zusammenwirken von Farbstoffmolekülen und Beleuchtung kann die Farbe des Hemdes entstehen, genau so wie der Ort eines Photons nur im Zusammenwirken von Photon und geeigneten Messgeräten entstehen kann. Es hängt vom Spektrum der Beleuchtung UND von der chemischen Konstitution der Farbstoff-Moleküle ab, welcher Farbton des Hemdes erzeugt wird, so wie es von der Bauart und Anordnung der Messgeräte UND vom Photon abhängt, wie ausgedehnt (und möglicherweise sogar aufgespalten) der Ort des Photons ist.

Die Vorstellung, dass der Ort eines Objekts eine relationale Eigenschaft ist, ist keineswegs eine neuartige Erfindung der Quantentheorie. Im Gegenteil. Diese Vorstellung war über Jahrtausende, von der Antike bis in die frühe Neuzeit, die vorherrschende. In einer auf Aristoteles (384–322) zurückgehenden Tradition wurde der



## 4 Materie-Wellen

### 4.1 Die Hypothese von de Broglie

In seiner Lichtquanten-Hypothese hatte Einstein vorgeschlagen, eine Lichtwelle mit Frequenz  $\nu$  und Wellenlänge  $\lambda$  zugleich auch als einen Strom von Teilchen mit der Energie

$$\text{Photon: } E \stackrel{(3.4)}{=} h\nu \stackrel{(2.1)}{=} \frac{hc}{\lambda} \quad (4.1a)$$

und dem **Impuls**

$$\text{Photon: } p \stackrel{(3.8b)}{=} \frac{E}{c} \stackrel{(4.1a)}{=} \frac{h}{\lambda} \quad (4.1b)$$

zu betrachten. Im Jahr 1924 verblüffte Louis de Broglie<sup>1</sup> (1892–1987) die Fachwelt mit dem Vorschlag, umgekehrt materiellen Teilchen – wie zum Beispiel Elektronen – mit der Energie  $E$  und dem Impuls  $p$  eine Frequenz

$$\text{Materiewelle: } \nu \stackrel{(4.1a)}{=} \frac{E}{h} \stackrel{(3.8a)}{=} \frac{1}{h} \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} \quad (4.2a)$$

und eine Wellenlänge

$$\text{Materiewelle: } \lambda \stackrel{(4.1b)}{=} \frac{h}{p} \quad (4.2b)$$

<sup>1</sup> spricht „de Bröj“. Louis de Broglie war ein leibhaftiger Prinz aus einem alten Adelsgeschlecht in der Normandie.

zuzuordnen. Damit wurde zwar die Symmetrie zwischen Wellen und Teilchen in gewisser Weise wiederhergestellt, es handelte sich aber 1924 um eine völlig wilde Spekulation. Denn damals gab es nicht den geringsten experimentellen Hinweis auf Welleneigenschaften materieller Teilchen.

Trotzdem fand de Broglie's Hypothese Interesse, weil viele Physiker hofften mit ihr zu einem besseren Verständnis der eigenartigen Doppelrolle der Photonen als Welle und Teilchen gelangen zu können. Also überlegten sie sich, wie de Broglie's Hypothese experimentell überprüft werden könnte. Das Markenzeichen von Wellen ist Interferenz. Um Wellen zur Interferenz zu bringen, muss man sie irgendwie aufspalten und dann die Teilwellen, nachdem sie unterschiedlich weite Wege zurückgelegt haben, wieder überlagern.

Ein ruhendes Teilchen hat den **Impuls**  $p = 0$ , so dass seine Wellenlänge laut de Broglie's Hypothese (4.2b) unendlich ist. Endliche Wellenlängen bekommt man, wenn das Teilchen sich bewegt. Wenn man ein Elektron mit der Spannung  $U$  beschleunigt, dann ist seine relativistische Energie

$$E = eU + m_0c^2, \quad (4.3)$$

wobei  $e$  die elektrische Ladung des Elektrons,  $m_0$  seine Ruhemasse, und  $c$  die Geschwindigkeit des Lichts im Vakuum ist. Weil man diese drei Konstanten kennt, kann man aus (4.3) die Energie  $E$  eines Elektrons berechnen, das mit der Spannung  $U$  beschleunigt wurde, damit dann aus (4.2a) seinen Impuls  $p$ , und damit schließlich aus (4.2b) seine Wellenlänge  $\lambda$ . Das Ergebnis der Rechnung ist in Abb. 4.1 auf der nächsten Seite eingetragen. Mit einer Beschleunigungsspannung von weniger als 1 Volt wäre ein Experiment mit Elektronen sehr schwierig. Bei Beschleunigung im Bereich von 1 V bis 100 kV haben Elektronen die Wellenlänge von Röntgenstrahlung, siehe Tabelle 2.1 auf Seite 31. Also sollte es möglich sein, Interferenzexperimente mit Elektronen auf die gleiche Weise durchzuführen wie Interferenzexperimente mit Röntgenstrahlen, nämlich

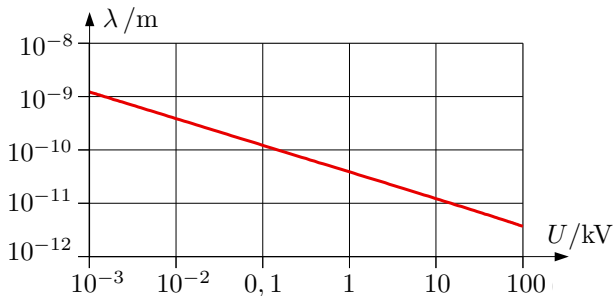


Abb. 4.1: Die Wellenlänge  $\lambda$  von Elektronen als Funktion der Beschleunigungsspannung  $U$

durch **Beugung** der Wellen (wenn denn Elektronen tatsächlich Wellen sein sollten) an Kristallen.

## 4.2 Beugung von Materiewellen an Kristallen

In Abb. 4.2 ist das Prinzip skizziert. Von links oben läuft eine Röntgenwelle oder eine Materiewelle auf einen **Einkristall** zu, der in der Skizze aus nur neun rot angedeuteten Atomen besteht. Die durchgezogenen blauen Linien deuten die Wellenberge, die gestrichelten blauen Linien die Wellentäler an. Die Welle wird an den Atomen gestreut, und verlässt den Kristall nach rechts oben.

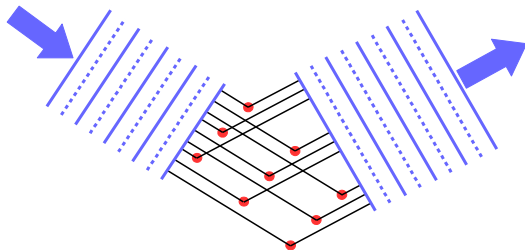


Abb. 4.2: Beugung einer Welle an einem Einkristall

Das ist nur möglich, wenn jeder der als schwarze Linien skizzierten Wege ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge ist; nur dann interferieren die Teilwellen, die verschiedene Wege durch den Kristall nehmen, konstruktiv.

In einem realen Kristall hat man es nicht mit 9 Atomen zu tun, sondern mit zum Beispiel  $10^{20}$  Atomen, die in einem mehr oder weniger komplizierten dreidimensionalen Kristallgitter angeordnet sind. Konstruktive Interferenz gibt es nur unter wenigen, ganz bestimmten Winkeln. Damit man überhaupt etwas sieht, arbeitet man in der Kristallographie oft mit „weißer“ Röntgenstrahlung, die eine große Bandbreite von Wellenlängen enthält.

In Abb. 4.3 ist der Versuchsaufbau skizziert. Vor und hinter

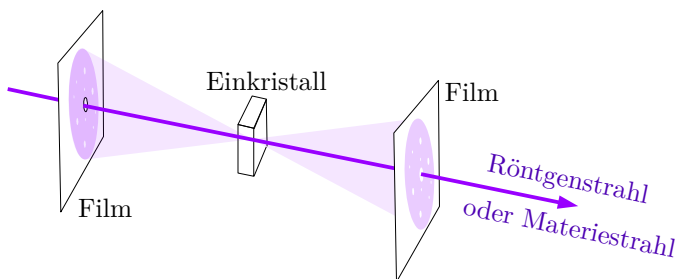


Abb. 4.3: Beugung von Röntgenstrahlung an einem Einkristall

dem Kristall (und oft auch seitlich) sind photographische Filme angeordnet, mit denen die gestreute Strahlung dokumentiert wird. Heutzutage werden anstelle der Filme oft elektronische Detektoren eingesetzt.

In Abb. 4.4 auf der nächsten Seite werden Beugungsbilder gezeigt, die mit Elektronen, Röntgenstrahlung, und Neutronen an

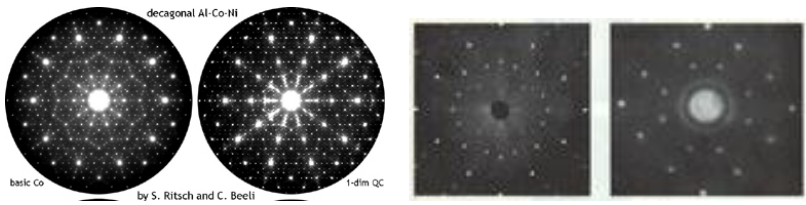


Abb. 4.4: Interferenz von Elektronen an einer Al-Co-Ni Legierung (2 Bilder links). Interferenz von Röntgenstrahlung (3. Bild) und Neutronen (4. Bild) an gleich orientiertem NaCl. Im Zentrum, wo der Materie- oder Röntgenstrahl hindurchgetreten ist (siehe Abb. 4.3), enthält jede Photographie ein Loch.

Einkristallen aufgenommen wurden.<sup>2</sup> Durch diese Ergebnisse wird de Broglie's Hypothese (4.2) qualitativ und quantitativ bestätigt.

In der mit Röntgenstrahlung erzeugten Aufnahme sieht man die gleichen Beugungsreflexe wie bei der Neutronenbeugung, aber noch etliche weitere Reflexe. Das könnte daran liegen, dass ein **monochromatischer** Neutronenstrahl verwendet wurde, während für die Röntgenbeugung oft „weiße“ Strahlung verwendet wird, die eine große Bandbreite verschiedener Wellenlängen enthält.

Intensive Neutronenstrahlen bekommen die Kristallographen aus Kernspaltungs-Reaktoren, die speziell für die Forschung mit Neutronen errichtet wurden, zum Beispiel das ILL in Grenoble.<sup>3</sup> Es ist bemerkenswert, dass de Broglie's Gleichungen (4.2) auch für Neutronen gelten. Denn anders als Elektronen und Photonen sind Neutronen keine elementaren Teilchen, sondern haben eine komplizierte Substruktur: Jedes Neutron besteht aus drei Quarks,

<sup>2</sup> Die Aufnahme der Al-Co-Ni-Legierung stammt von dieser Website:

<http://allfreepatterns.ludug.com/diffraction-pattern-electron/>

Die Aufnahme von NaCl stammt von dieser Website:

<http://www.public.asu.edu/~gbadams/spr13/xrayvneutronrot.jpg>

<sup>3</sup> <https://www.ill.eu/>

die durch den Austausch von Gluonen aneinander gebunden sind.

Wenn man mit Neutronen Interferenzexperimente durchführen kann, dann sollte es auch mit anderen zusammengesetzten Teilchen gehen, z. B. mit Atomen oder gar Molekülen. Das ist tatsächlich der Fall, aber es gelang erst in den neunziger Jahren. Interferenzexperimente mit Atomen und Molekülen sind deshalb so schwierig, weil sie – anders als Röntgenphotonen, Elektronen, und Neutronen – nicht das Gitter eines Kristalls durchdringen können.

### 4.3 Neutronenbeugung am Doppel- und Einfachspalt

Eine Möglichkeit, größere Objekte zur Interferenz zu bringen, bietet der Aufbau von Young's Doppelspalt-Experiment, der in Abb. 2.10 auf Seite 41 dargestellt ist. Doppelspalte sind jedoch im Verhältnis zu den typischen Wellenlängen von Materiewellen ziemlich grobschlächtige Konstruktionen. Die Breite der beiden Spalte, und der Abstand zwischen ihnen, ist auch mit moderner Technik wesentlich größer als die deBroglie-Wellenlänge materieller Teilchen. Deshalb können die Versuche nur mit einer hoch entwickelten experimentellen Technik gelingen.

Der prinzipielle Aufbau eines Doppelspalt-Experiments, der sich in der Regel im Inneren einer evakuierten Kammer befindet, wird in Abb. 4.5 auf der nächsten Seite gezeigt. Der türkise Pfeil symbolisiert einen Strahl von Teilchen, die durch den Eintrittsspalt S1 einlaufen. Nach der Wegstrecke L1 trifft der Strahl auf den Doppelspalt S2, und nach einer weiteren Strecke L2 auf den Eintrittsspalt S3 eines Detektors, der in  $x$ -Richtung verschoben werden kann, um die Intensität des Interferenzmusters abzutasten.

Alternativ werden auch Detektoren verwendet, die – ähnlich wie der Sensor-Chip einer Kamera – das Intensitätsprofil des Teilchenstrahls in der Detektorebene registrieren können, ohne dass ein Spalt verschoben werden muss. Und anstelle des Doppelspalts

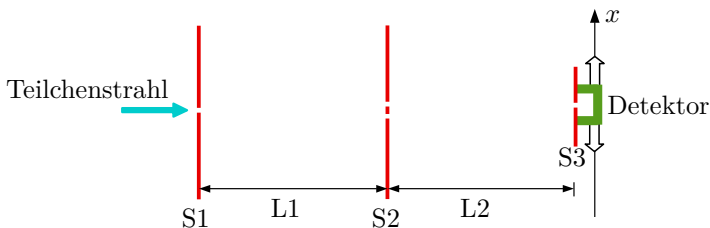


Abb. 4.5: Untersuchung der Interferenz am Doppelspalt

S2 wird manchmal ein gleichmäßiges Gitter von vielen parallelen Spalten verwendet.<sup>4</sup>

1988 konnten Zeilinger et. al. [20] die Interferenz von Neutronen an einem Doppelspalt nachweisen. Sie verwendeten einen Neutronenstrahl mit einer Wellenlänge von  $1,85 \text{ nm} \pm 0,14 \text{ nm}$ . Diese Wellenlänge wurde mithilfe der de Broglie-Relation (4.2b) aus der gemessenen Geschwindigkeit der Neutronen berechnet. Die Spalte S1 und S3 (siehe Abb. 4.5) waren je  $20 \mu\text{m}$  breit. Der Doppelspalt S2 wurde dadurch realisiert, dass durch die Mitte eines  $150 \mu\text{m}$  breiten Einfach-Spalt es ein Draht gespannt wurde. Der am Mikroskop gemessene Durchmesser des Drahts war  $104,1 \mu\text{m}$ , die gemessene freie Breite links vom Draht war  $21,9 \mu\text{m}$ , und die gemessene freie Breite rechts vom Draht war  $22,3 \mu\text{m}$ . Die Abstände L1 und L2 betragen je  $5 \text{ m}$ .<sup>5</sup>

Die roten Punkte im Diagramm 4.6 auf der nächsten Seite zeigen das Messergebnis. Jeder einzelne Punkt repräsentiert die Anzahl der

<sup>4</sup> Die Maxima der Interferenzstreifen sind bei einem aus vielen parallelen Spalten gebildeten Gitter schärfer ausgeprägt als bei einem Doppelspalt, ihre Position in der Ebene des Detektors ist aber die gleiche wie bei einem Doppelspalt mit gleichem Mitte-zu-Mitte Abstand.

<sup>5</sup> Wer jetzt noch nicht in Ehrfurcht erstarrt ist sollte sich einmal überlegen, wie schwierig es ist dieses Mikrometer-Gefitzel bei 5m-Abständen zu justieren, und über die vielen, vielen Stunden, die die Messungen dauerten, justiert zu halten.

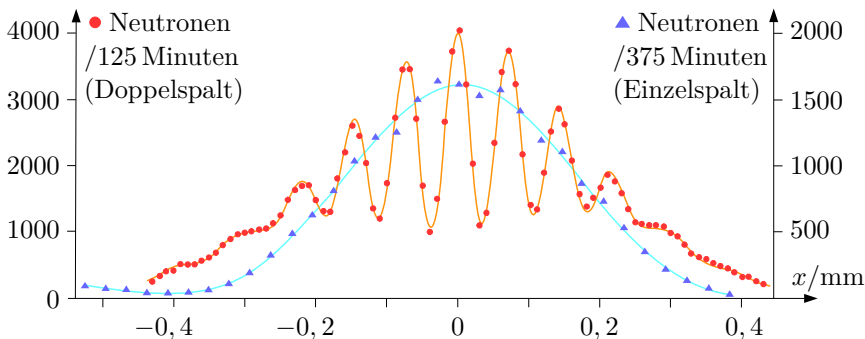


Abb. 4.6 : Interferenz von Neutronen

Neutronen, die in 125 Minuten an dieser  $x$ -Position des Detektors beobachtet wurden. Die durchgezogene orangene Linie zeigt die erwartete Interferenzstruktur, die aus der bekannten Geometrie der Apparatur und de Broglie's Gleichung (4.2b) berechnet wurde. Man erkennt, dass die leichte Asymmetrie der beiden Spaltbreiten in der Rechnung berücksichtigt wurde, und durch die Messpunkte genau bestätigt wird. Rechts vom zentralen Maximum erkennt man vier Nebenmaxima, auf der linken Seite mit etwas Wohlwollen sogar fünf.

Die blauen Dreiecke zeigen das Ergebnis einer anderen Messung: Als S2 (siehe Abb. 4.5) wurde anstelle des Doppelspalts ein Einfachspalt mit  $23 \mu\text{m}$  Breite verwendet, der Spalt S3 hatte eine Breite von  $60 \mu\text{m}$ , und die Neutronen-Wellenlänge betrug  $1,93 \text{ nm} \pm 0,07 \text{ nm}$ . Die engere Toleranz der Wellenlänge wurde damit erkauft, dass der Neutronenfluß (die Anzahl der Neutronen pro Zeit im Strahl) viel geringer war als im Doppelspalt-Experiment.<sup>6</sup> Im Übrigen sind die Parameter aber so ähnlich, dass man ziemlich genau das gleiche

<sup>6</sup> Man beachte, dass die Experimentatoren um jedes einzelne der kleinen blauen Dreiecke mehr als sechs Stunden lang gekämpft haben. Diese Messung war ein unglaublicher Kraftakt!

Ergebnis erhalten hätte, wenn man beim Doppelspalt-Experiment einfach einen der beiden Spalte zugedeckt hätte. Die durchgezogene türkise Linie zeigt die für diesen Versuchsaufbau berechnete **Beugungsstruktur**.

Die Maxima und Minima der Interferenzstruktur beim Doppelspalt-Experiment fehlen beim Einzelspalt-Experiment; sie sind also eindeutig darauf zurückzuführen, dass die Neutronenwelle *beide* Spalte durchquert hat, nicht nur einen. Aber auch bei der Neutronen**beugung** am Einzelspalt erkennt man in Abb. 4.6 bei  $-0,4$  mm ein Minimum; links davon deutet sich ein erstes Nebenmaximum an.

Zeilinger et. al. [20] untersuchten die Beugung von Neutronen am Einfachspalt genauer mit einem Einfachspalt von  $90 \mu\text{m}$  Breite. Auch in diesem Experiment hatten die Neutronen eine Wellenlänge von  $1,93 \text{ nm} \pm 0,07 \text{ nm}$ , und der Detektorspalt S3 hatte wie beim Doppelspalt-Experiment eine Breite von  $20 \mu\text{m}$ .

Das Ergebnis dieser Messung ist in Abb. 4.7 dargestellt. Jeder Messpunkt ist einmal als grünes Dreieck (dafür gilt die linke vertikale Achse des Diagramms) und einmal als blaues Dreieck (dafür gilt die rechte vertikale Achse des Diagramms) eingetragen. Durch

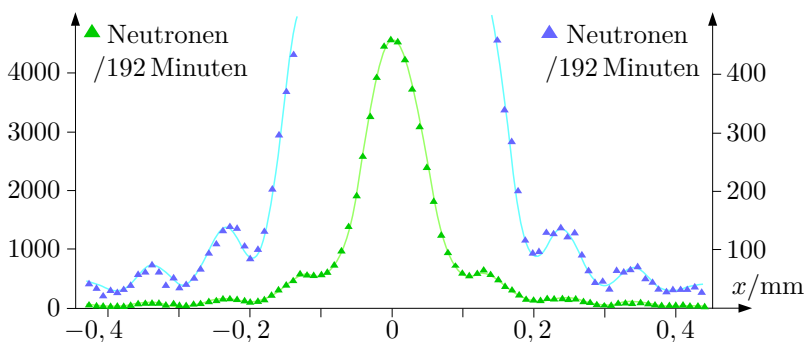


Abb. 4.7: Interferenz von Neutronen am Einfachspalt

die Aufspreizung der rechten Achse um den Faktor 10 werden die Nebenmaxima deutlicher erkennbar.

Wieso gibt es beim Einfachspalt überhaupt mehrere Beugungsmaxima und -minima? Müssen in diesem Fall nicht alle Neutronen den gleichen Weg nehmen, nämlich durch den einzigen zur Verfügung stehenden Spalt? Wie kann es dann Interferenzen geben? Die Antwort lässt sich aus Abb. 4.8 ablesen. Diese Zeichnung erklärt auch, warum der Abstand zwischen den Minima beim Doppelspalt viel kleiner ist als beim Einfachspalt.

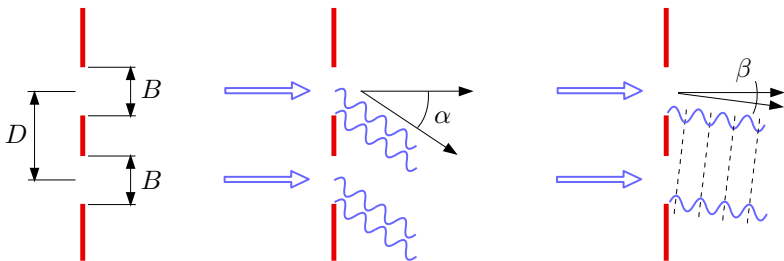


Abb. 4.8: Destruktive Interferenz am Einzel- und Doppelspalt

Im Vergleich zur Größe eines Neutrons ist ein Spalt von mehreren  $\mu\text{m}$  Breite riesengroß, und es macht einen gewaltigen Unterschied an welcher Stelle genau das Neutron den Spalt durchquert, ob am rechten oder linken Rand, oder in der Mitte, oder wo auch immer. In der rechten Skizze werden zwei Teilwellen gezeigt, die den jeweiligen Spalt am rechten Rand durchqueren. Unter dem Winkel  $\beta$  sind diese beiden Teilwellen um genau eine halbe Wellenlänge gegeneinander versetzt. In großem Abstand vom Spalt überlagern sich diese beiden Teilwellen, und interferieren destruktiv, d. h. sie löschen sich gegenseitig aus. Ebenso löschen sich unter dem Winkel  $\beta$  paarweise alle anderen Teilwellen aus, die voneinander den Abstand  $D$  haben, die z. B. beide den jeweiligen Spalt in der Mitte durchqueren, oder beide am linken Rand, usw. Insgesamt gibt es

also beim Doppelspalt unter dem Winkel  $\beta$  vollständige destruktive Interferenz aller Teilwellen.

$\beta$  ist der kleinste Winkel, unter dem es vollständige destruktive Interferenz gibt. Die nächste vollständige destruktive Interferenz gibt es, wenn die Teilwellen mit Abstand  $D$  um  $3/2$  Wellenlängen versetzt sind, die nächste dann bei einem Versatz von  $5/2$  Wellenlängen, und so weiter.

In der mittleren Skizze von Abb. 4.8 sind Paare von Teilwellen gezeigt, die voneinander den Abstand  $B/2$  haben. In großem Abstand vom Spalt überlagern sie sich und löschen sich wechselseitig aus. Ebenso löschen sich paarweise alle anderen Teilwellen aus, die voneinander den Abstand  $B/2$  haben. Weil in diesem Fall die destruktiv interferierenden Teilwellen den gleichen Spalt durchqueren, gibt es das Interferenzminimum unter dem Winkel  $\alpha$  sowohl beim Doppelspalt als auch beim Einfachspalt.  $\alpha$  ist der kleinste Winkel, unter dem es beim Einfachspalt vollständige destruktive Interferenz gibt. Die nächste vollständige destruktive Interferenz beim Einfachspalt gibt es, wenn die die Teilwellen mit Abstand  $B/2$  um  $3/2$  Wellenlängen versetzt sind, die nächste dann bei einem Versatz von  $5/2$  Wellenlängen, und so weiter.

Offensichtlich sind die Winkel, unter denen es destruktive Interferenz gibt, umgekehrt proportional zum Abstand der interferierenden Teilwellen:<sup>7</sup>

$$\alpha \sim \frac{1}{B/2} \quad (4.4a)$$

$$\beta \sim \frac{1}{D} \quad (4.4b)$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{D}{B/2} \quad (4.4c)$$

<sup>7</sup> für Physiker: Dies ist eine ausgezeichnete Näherung bei kleinen Winkeln. Genau genommen gelten die Relationen nicht für  $\alpha$  und  $\beta$ , sondern für  $\sin \alpha$  und  $\sin \beta$ .

Diese Relation können wir sofort anhand der Diagramme 4.6 und 4.7 überprüfen. In Diagramm 4.6 war der Abstand der beiden Öffnungen des Doppelspalts  $D \approx 126 \mu\text{m}$ , und die halbe Breite des Einfachspalts war  $B/2 \approx 12 \mu\text{m}$ . Also ist nach (4.4c)  $\alpha \approx \beta \cdot 126/12 \approx 10\beta$  zu erwarten, d. h. das erste Minimum des Einfachspalts sollte etwa 10 mal so weit vom zentralen Maximum entfernt sein wie das erste Minimum beim Doppelspalt. Das ist mit 0,4 mm gegenüber 0,04 mm tatsächlich der Fall. Und beim Experiment von Diagramm 4.7 war der Einzelspalt  $90 \mu\text{m}$  breit, beim Experiment von Diagramm 4.6 aber nur  $25 \mu\text{m}$  breit. Also sollte nach (4.4a) das erste Einzelspalt-Minimum in Diagramm 4.6 etwa  $90/25 \approx 3,6$  mal so weit vom zentralen Maximum entfernt sein wie das erste Minimum von Diagramm 4.7. Auch das ist mit 0,4 mm gegenüber 0,1 mm  $\approx 0,4 \text{ mm}/3,6$  tatsächlich der Fall.

Die eng beieinander liegenden Minima der roten Messkurve von Diagramm 4.6 sind also eindeutig von Neutronenwellen erzeugt worden, die beide Spalte des Doppelspalts durchquert haben. Wenn eine Welle nur einen Spalt durchquert, dann fehlen diese Minima. Hier stoßen wir auf das gleiche Problem, dem wir schon bei der Interferenz einzelner Photonen begegnet sind: Nehmen wir einmal an, dass die Interferenzstruktur dadurch zustande kommt dass ein Neutron durch den linken Spalt läuft, ein anderes durch den rechten Spalt, und dass die beiden dann in der Detektor-Ebene interferieren. Das kann bestimmt nicht klappen, wenn das eine Neutron dem anderen in 3 Metern Abstand hinterher läuft. Auch 3 Zentimeter Abstand wären noch viel zu viel. Sagen wir mal in aller Vorsicht: Der Abstand zwischen den beiden Neutronen muss auf jeden Fall viel kleiner als 1 cm sein, wenn Interferenz zustande kommen soll.

Die Geschwindigkeit der Neutronen war größer als 2000 m/s. Jedes Neutron legte die Strecke von 1 cm also in weniger als  $5 \mu\text{s}$  zurück. Demzufolge können die beiden Neutronen nur dann mit-

einander interferieren, wenn sie im zeitlichen Abstand von weniger als  $5 \mu\text{s}$  am Detektor ankommen. Bei einer maximale Zählrate – siehe Diagramm 4.6 – von etwa  $4000/125 \text{ Minuten} = 0,5/\text{s}$  war  $2 \text{ s}$  der durchschnittliche zeitliche Abstand, mit dem zwei aufeinander folgende Neutronen den Detektor erreichten. Dieser durchschnittliche Abstand ist nach unserer Annahme (maximal  $1 \text{ cm}$  Abstand)  $400\,000$  mal größer als akzeptabel, wenn Interferenz zustande kommen soll. Mit anderen Worten: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei Neutronen so kurz hintereinander kommen, dass sie unterschiedliche Wege durch den Doppelspalt nehmen und dann durch Interferenz die Struktur 4.6 zustande bringen können, ist verschwindend gering. Die Interferenzstruktur kann nur dadurch entstanden sein, dass fast alle Neutronen *einzelnen* den Doppelspalt durchquert haben, dabei den Weg durch *beide* Spalte genommen und mit sich selbst interferiert haben.

Wie soll man sich das vorstellen? Lläuft ein halbes Neutron durch den linken und ein halbes Neutron durch den rechten Spalt? Wie schaffen es die beiden Hälften, sich vor dem Detektor wieder zu einem vollständigen Neutron zusammen zu finden? Was passiert, wenn eine Hälfte des Neutrons kurz hinter dem Spalt auf ein überraschendes Hindernis stößt?

Im vorigen Kapitel wurde bereits die ziemlich überraschende Antwort auf diese Fragen präsentiert, die durch die Quantentheorie nahe gelegt wird: Es ist nicht so, dass die Neutronen einen Ort „haben“, sondern der Ort der Neutronen wird durch die Wechselwirkung der Neutronen mit der Apparatur, insbesondere mit den Blenden und Detektoren, erzeugt. Das Experiment von Zeilinger et. al. war so aufgebaut, dass der Ort jedes Neutrons sich beim Durchgang durch den Doppelspalt über beide Spalte erstreckte, obwohl das Neutron sich zu keinem Zeitpunkt in zwei Teilchen aufspaltete! Das klingt absurd, aber in den folgenden Kapitel werden überzeugende Beweise dafür vorgebracht, dass es sich tatsächlich so verhält.

## 4.4 Elektronenbeugung am Doppel- und Einfachspalt

2008 berichteten Frabboni et al. [21] über ein Interferenzexperiment mit Elektronen, die einen außerordentlich fein gearbeiteten Doppelspalt durchquerten. Zur Herstellung des Doppelspalts beschichteten die Experimentatoren eine 500 nm dicke Silizium-Nitrid-Membran mit einer 100 nm dicken Goldschicht. Dann wurde mit einem Ionenstrahl zwei je 83 nm breite Spalte im Abstand (Mitte zu Mitte) von 420 nm in die Membran gefräst.

Die Elektronen hatten die ziemlich hohe Energie von 200 keV, was einer Geschwindigkeit von etwa  $2 \cdot 10^8$  m/s (immerhin ein fünftel der Lichtgeschwindigkeit) und einer (relativistisch berechneten) de Broglie-Wellenlänge von 0,0025 nm entspricht. (Diese hohe Energie war der Grund, warum die SiN Membran mit Gold beschichtet werden musste; ohne diese Beschichtung wären die hochenergetischen Elektronen auch neben den Spalten einfach durch die Membran hindurchgeschossen.) Hinter den Spalten wurde der Elektronenstrahl durch elektrostatische Linsen so aufgeweitet, dass das Interferenzbild auf dem Detektor die gleiche Größe hatte, die es ohne Aufweitung in etwa 100 m Entfernung gehabt hätte. Der Detektor war ein  $512 \times 512$  Pixel CCD Chip mit einer Pixelgröße von  $50 \times 50 \mu\text{m}$ .

Zunächst nahmen Frabboni et al. das obere Bild von Abb. 4.9 mit einem Elektronenstrahl auf, der den Doppelspalt durchquert hatte. Dann verschlossen<sup>8</sup> sie einen der beiden Spalte, und nahmen das in Abb. 4.9 unten gezeigte Bild auf.

Man erkennt im unteren Bild von Abb. 4.9 deutlich das breite

---

<sup>8</sup> Es ist alles andere als einfach, einen 83 nm breiten Spalt zu verschließen, wenn ein 420 nm entfernter Spalt dabei nicht beeinträchtigt werden soll. Indem mithilfe eines Ionenstrahls aus einem metallorganischen Gas Platin selektiv auf einen der Spalte abgeschieden wurde gelang es Frabboni et al. diesen Spalt zuverlässig zu verschließen, während der andere nur von 83 nm auf 76 nm schrumpfte.

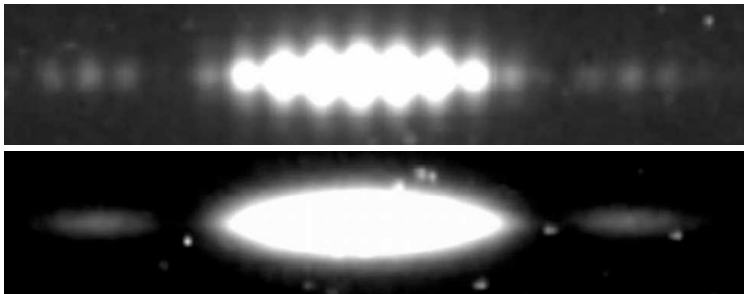


Abb. 4.9: Interferenz am Doppelspalt (oben) und Einfachspalt (unten).  
Aufnahmen aus [21].

Haupt-Maximum im Zentrum, und links und rechts davon je ein schwaches Nebenmaximum. Die Unterteilung dieser drei Maxima durch zahlreiche Minima, die das obere Bild kennzeichnet, ist im unteren Bild verschwunden. Dies Ergebnis entspricht genau den Beobachtungen bei der Beugung von Neutronen am Doppelspalt und am Einzelspalt, die in Diagramm 4.7 auf Seite 84 dargestellt wurden. Mithilfe der Relation

$$\frac{\alpha}{\beta} \stackrel{(4.4c)}{=} \frac{D}{B/2}$$

können wir die Elektronen-Interferenzbilder von Abb. 4.9 auch quantitativ überprüfen. Der Abstand  $D$  der beiden Öffnungen des Doppelspalts war 420 nm, die Breite  $B$  des Einfachspalts war 76 nm. Also ist  $\alpha = \beta \cdot 420/38 \approx 10\beta$  zu erwarten, d. h. das erste Minimum des unteren Bildes sollte etwa 10 mal so weit vom zentralen Maximum entfernt sein wie das erste Minimum im oberen Bild. Das ist tatsächlich der Fall. Die eng beieinander liegenden Minima im oberen Bild von Abb. 4.9 sind also eindeutig von Elektronenwellen erzeugt worden, die beide Spalte des Doppelspalts durchquert haben. Wenn eine Welle nur einen der beiden Spalte durchquert, dann fehlen diese Minima.

Aus der Tatsache dass jedes Elektron etwa 5 ns brauchte um die Apparatur zu durchqueren, aber nur ungefähr alle  $5 \mu\text{s}$  ein Elektron vom Detektor registriert wurde, schlossen Fraboni et al.: Die Wahrscheinlichkeit, dass sich gleichzeitig mehr als ein Elektron im Bereich zwischen Elektronenquelle und Detektor befand, war vernachlässigbar klein. Also muss jedes einzelne Elektron mit sich selbst interferiert haben. Insbesondere muss im oberen Bild von Abb. 4.9 jedes einzelne Elektron beide Spalte durchquert haben.

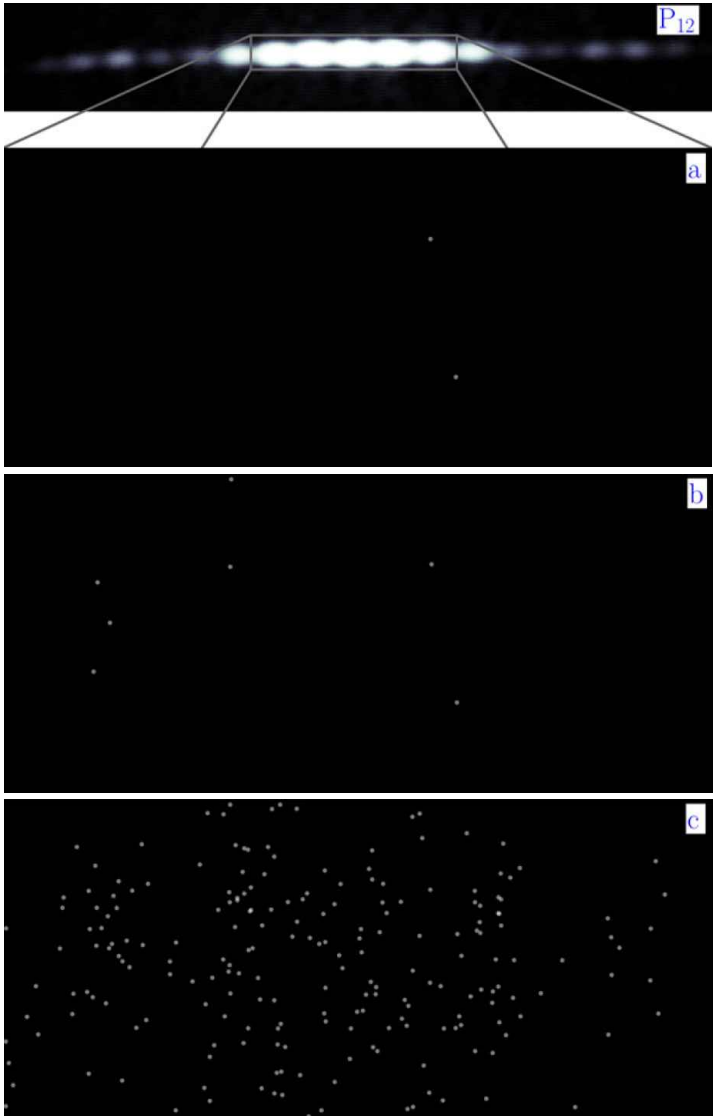
Über eine ganz ähnliche Untersuchung der Selbst-Interferenz von Elektronen am Doppelspalt berichteten 2013 Bach et al. [22]. Anders als Frabboni et al. dokumentierten sie aber zusätzlich die allmähliche Entstehung des Interferenzbildes auf ihrem CCD Detektor. Bach et al. beschleunigten die Elektronen mit einer Spannung von nur 600 V, wodurch die Elektronen nach de Broglie's Relation (4.2) eine Wellenlänge von  $\lambda = 0,0501 \text{ nm} \pm 0,0001 \text{ nm}$  bekamen. Jeder Spalt ihres Doppelspalts war 62 nm breit, ihr Abstand (Mitte zu Mitte) betrug 272 nm. Hinter den Spalten wurde der Elektronenstrahl durch eine elektrostatische Quadrupol-Linse so aufgeweitet, dass das Interferenzbild auf dem Detektor die gleiche Größe hatte, die es ohne Aufweitung in etwa 17 m Entfernung gehabt hätte.<sup>9</sup>

Die Intensität des Elektronenstrahls war so gering, dass pro Sekunde nur etwa 1 Elektron den Detektor erreichte. Das bedeutet, dass der Abstand von einem Elektron bis zum nächsten etwa  $2,3 \cdot 10^6 \text{ m}$  betrug. Es waren also praktisch niemals zwei (oder gar noch mehr) Elektronen gleichzeitig in der etwa 1 m langen Apparatur, die miteinander hätten interferieren können. Sollten sich doch unwahrscheinlicherweise hin und wieder mal zwei Elektronen gleichzeitig in der Nähe des Doppelspalts aufgehalten haben, dann fallen diese exotischen Ereignisse statistisch überhaupt nicht ins Gewicht.

Die Punkte, an denen die Elektronen den Detektor erreichten,

---

<sup>9</sup> Diese Vergrößerung kann man aus fig. S2 auf Seite 4 in [23] ablesen.



*Fortsetzung nächste Seite*

*Fortsetzung der vorigen Seite*

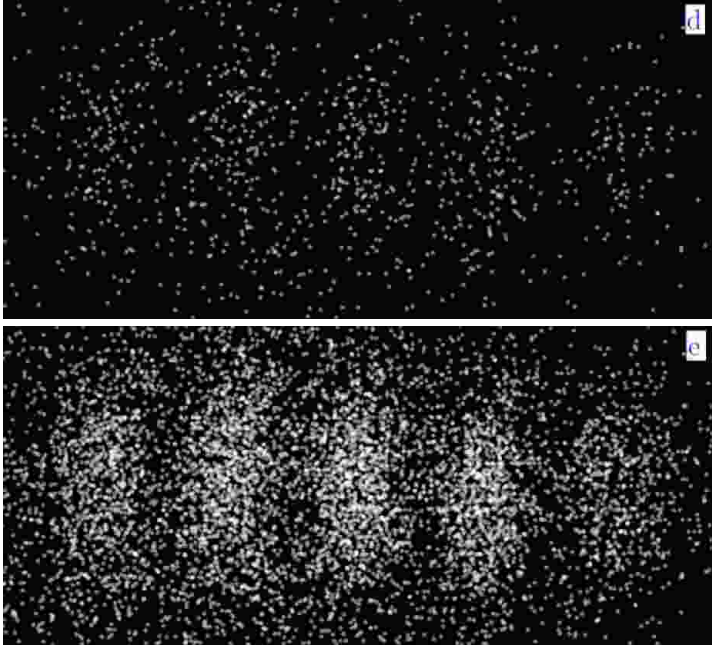


Abb. 4.9: Allmählicher Aufbau des Interferenzbildes: Den Detektor erreicht haben (a) 2 Elektronen, (b) 7 Elektronen, (c) 209 Elektronen, (d) 1004 Elektronen, (e) 6235 Elektronen. Dies ist figure 3 aus [22]. Die Autoren betonen: the electron detection rate in the pattern was about 1 Hz. At this rate and kinetic energy, the average distance between consecutive electrons was  $2.3 \cdot 10^6$  m. This ensures that only one electron is present in the 1 m long system at any one time, thus eliminating electron-electron interactions.

wurden zeitaufgelöst registriert. In Abb. 4.9 auf Seite 92 sieht man das Ergebnis. Ganz oben ist angedeutet, welcher Bereich der Interferenzstruktur betrachtet wurde. Dann folgen Bilder, auf denen als weiße Punkte die Auftreffpunkte der ersten 2, 7, 209, 1004, 6235 Elektronen sichtbar sind. Rechts und links vom zentralen Maximum entstehen je 3 Minima, die eindeutig auf destruktive Interferenz von Teilwellen zurückzuführen sind, die *verschiedene* Öffnungen des Doppelspalts durchquert haben. Das Experiment beweist, dass jedes (oder zumindest fast jedes) Elektron einzeln *beide* Spalte durchquert und dann mit sich selbst interferiert hat.

## 4.5 Beugung von Atomen und Molekülen am Doppelspalt

Je kleiner die Wellenlänge der Materiewelle im Verhältnis zu Breite und Abstand der Spalte ist, um so schwieriger ist es die Interferenz sichtbar zu machen. Wenn man die Interferenz von Atomen beobachten will, hat man nach de Broglie's Gleichung (4.2b) die besten Chancen bei sehr kleinem **Impuls** der Atome, also möglichst leichten Atomen, die noch dazu sehr langsam fliegen sollten.

1991 konnten Carnal und Mlynek [24] die Interferenz von Helium-Atomen beobachten, die mit einer Geschwindigkeit von  $990 \text{ m/s} \pm 60 \text{ m/s}$  durch einen Doppelspalt flogen. Das He-Atom ist das zweitleichteste aller Atome. Dennoch hat es bei dieser Geschwindigkeit eine Wellenlänge von nur  $0,103 \text{ nm} \pm 6\%$ . Die anderen Parameter – siehe Abb. 4.5 auf Seite 82 – des Experiments von Carnal und Mlynek waren:

$$\begin{array}{ll}
 S1 = 2 \mu\text{m} & L1 = 64 \text{ cm} \\
 S2 : \text{zwei Spalte von je } 1 \mu\text{m} \text{ Breite,} & \\
 \quad \text{Abstand (Mitte zu Mitte)} = 8 \mu\text{m} & \\
 L2 = 64 \text{ cm} & S3 = 2 \mu\text{m}
 \end{array}$$

Die Anzahl von Atomen, die in jeweils 10 Minuten bei verschie-

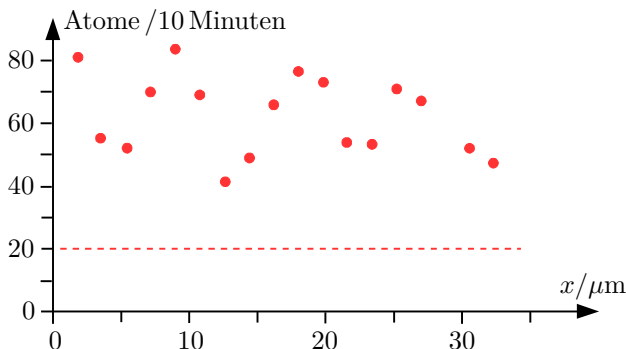


Abb. 4.10: Interferenz von Helium-Atomen am Doppelspalt

denen Stellungen des Detektors auf der  $x$ -Achse registriert wurden, sind im Diagramm 4.10 als rote Punkte aufgetragen. Die gestrichelte Linie gibt an, wie viele Atome typischerweise gezählt wurden, wenn der Eintrittsspalt der Apparatur abgedeckt war. In einem idealen Experiment läge die gestrichelte Linie bei Null. Das „Rauschen“ von etwa 20 registrierten Atomen pro 10 Minuten vermittelt einen Eindruck von der unvermeidlichen Ungenauigkeit dieses Experiments.

Bei einer Wellenlänge der Atome von  $0,103 \text{ nm}$  war zwischen den Interferenz-Maxima ein Abstand von  $8,2 \mu\text{m}$  zu erwarten. Aus dem Diagramm 4.10 lasen Carnal und Mlynek [24] einen Abstand von  $8,4 \mu\text{m} \pm 0,8 \mu\text{m}$  ab.

Neon-Atome sind fünf mal so schwer wie Helium-Atome. Also haben Ne-Atome nach de Broglie's Relation (4.2b) dann die gleiche Wellenlänge wie He-Atome, wenn sie sich fünf mal langsamer bewegen. 1991 konnten Shimizu et. al. [25] die Interferenz von Ne-Atomen nachweisen, obwohl sie einen Detektor verwendeten dessen  $x$ -Auflösung um mehr als einen Faktor 10 schlechter war als im Experiment von Carnal und Mlynek. Shimizu et. al. waren trotzdem erfolgreich, weil die Neon-Atome in ihrem Experiment eine Ge-

geschwindigkeit von weniger als 2 m/s hatten, während die He-Atome im Experiment von Carnal und Mlynek eine Geschwindigkeit von etwa 1000 m/s hatten.

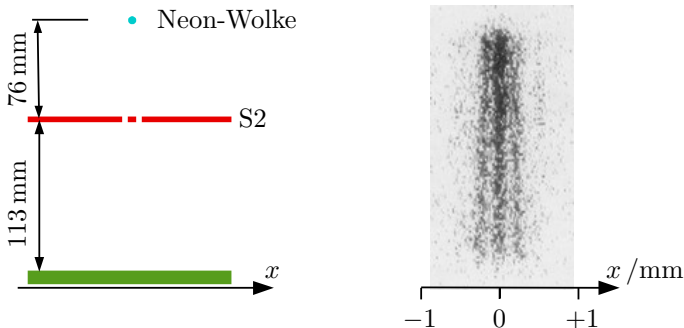


Abb. 4.11 : Interferenz von Neon-Atomen am Doppelspalt

Der Aufbau des Experiments von Shimizu et. al. [25] ist in Abbildung 4.11 skizziert. Der türkise Punkt oben links soll eine Wolke von Neon-Atomen darstellen, die in einer Vakuum-Kammer schwebt. Aus der Wolke fallen Neon-Atome unter dem Einfluss der Schwerkraft 76 mm hinab auf eine Folie, in die ein Doppelspalt geätzt ist. Jeder Spalt ist  $2\ \mu\text{m}$  breit, der Abstand (Mitte zu Mitte) der beiden Spalte ist  $6\ \mu\text{m}$ . Wenn die Atome den Doppelspalt durchquert haben, fallen sie nach weiteren 113 mm auf einen Detektor, der den Auftreffpunkt der Atome mit einer räumlichen Auflösung von  $20\ \mu\text{m} \times 20\ \mu\text{m}$  und einer zeitlichen Auflösung von 17 ms registriert.

Galilei fand schon vor vierhundert Jahren heraus, dass im Vakuum alle Körper gleich schnell zu Boden fallen.<sup>10</sup> Die Neon-Atome fallen unter dem Einfluss der Anziehungskraft der Erde wie Steine mit einer Beschleunigung von  $9,81\ \text{m/s}^2$  zu Boden. Falls ihre

<sup>10</sup> Das ist bemerkenswert, weil zu Galileis Lebzeiten noch kein Mensch ein Vakuum herstellen konnte. Durch intelligentes Nachdenken fand Galilei trotzdem heraus (und erklärte in den Discorsi [26]), dass und warum es nicht anders sein kann.

Anfangsgeschwindigkeit Null ist, durchqueren sie den Doppelspalt mit einer Geschwindigkeit von  $1,22 \text{ m/s}$ , und treffen mit einer Geschwindigkeit von  $1,93 \text{ m/s}$  nach einer Fallzeit von insgesamt  $197 \text{ ms}$  auf den Detektor.

Die große Kunst bei diesem Experiment bestand darin, die Atome tatsächlich zu einem bestimmten Zeitpunkt mit einer Anfangsgeschwindigkeit von zumindest näherungsweise Null fallen zu lassen. Die durchschnittliche Geschwindigkeit von Atomen in einem Gas ist umso größer, je wärmer das Gas ist. Shimizu et. al. [25] kühlten mit einem System von vier gekreuzten Laserstrahlen, deren Frequenzen sorgfältig auf verschiedene Absorptionslinien von Neon abgestimmt waren, die Neon-Wolke auf eine Temperatur von  $2,5 \text{ mK}$ , das sind  $2,5$  tausendstel Grad über dem absoluten Nullpunkt.

Zu einem bestimmten Zeitpunkt wurden die Laser so umgeschaltet, dass Atome aus der Wolke fielen. Idealerweise hätten sie  $197 \text{ ms}$  später am Detektor ankommen sollen. Das rechte Bild in Abb. 4.11 zeigt als schwarze Punkte die Auftreffpunkte von Atomen, die zwischen  $175 \text{ ms}$  und  $208 \text{ ms}$  nach dem Umschalten der Laser den Detektor erreichten, also schon in der Wolke eine kleine vertikale Anfangsgeschwindigkeit nach oben oder nach unten hatten.

Die Interferenz-Streifen sind deutlich erkennbar. Weil das Interferenzbild im unteren Drittel besser gelungen ist als im oberen Teil, haben Shimizu et. al. [25] nur das untere Drittel genauer ausgewertet, wie im Diagramm 4.12 auf der nächsten Seite dargestellt. Die roten Punkte zeigen an, wie viele Atome insgesamt in welchem Abstand vom mittleren Interferenzstreifen registriert wurden. Die blaue Linie gibt die erwartete Interferenzstruktur wieder. Sie wurde mit de Broglie's Gleichungen (4.2) berechnet. Obwohl die Messwerte einen deutlich erkennbaren Linksdrall haben, kann man sie angesichts der enormen technischen Schwierigkeiten sicherlich trotzdem als überzeugende Bestätigung von de Broglie's Hypothese betrachten.

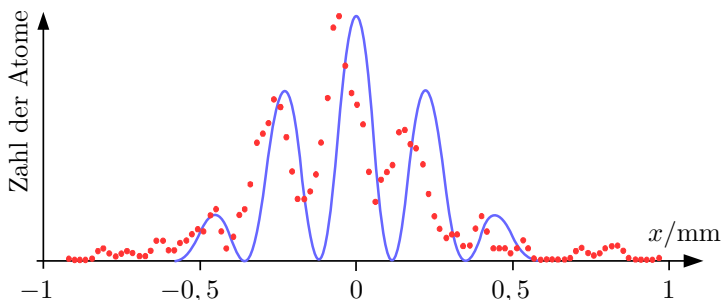


Abb. 4.12: Interferenz von Neon-Atomen am Doppelspalt

Das rechte Bild in Abb. 4.11 enthält insgesamt etwa 6000 Punkte, die in mehr als 100 000 Durchläufen des Experiments gewonnen wurden.<sup>11</sup> Im Durchschnitt musste das Experiment also mehr als 16 mal durchgeführt werden, um auch nur ein einziges Atom registrieren zu können! Das ist wieder ein deutlicher Hinweis darauf, dass nicht Ne-Atome, die den rechten Spalt durchquert haben, mit anderen Ne-Atomen interferierten, die den linken Spalt durchquert haben. Vielmehr muss offenbar jedes, oder zumindest fast jedes Atom, das am Detektor registriert wurde, zuvor *einzel*n den Doppelspalt durchquert haben, und dabei *beide* Spalte genutzt und mit sich selbst interferiert haben.

An dieser Stelle ist anzumerken, dass der Detektor nur Neon-Atome wahrnehmen konnte, die bei der Laserkühlung in einen metastabilen Zustand angeregt worden waren. Die große Mehrzahl der Atome in der Apparatur war nicht in diesem metastabilen Zustand, wurde demzufolge auch nicht gekühlt, und auch nicht registriert. Die ungekühlten Atome können aber nicht zur beobachteten Interferenzstruktur beigetragen haben, weil sie aufgrund

<sup>11</sup> Das setzt natürlich voraus, dass das Experiment vollautomatisch abläuft. Es wurde computergesteuert etwa 2 mal pro Sekunde durchgeführt, so dass die gut 100 000 Durchläufe in insgesamt etwa 14 Stunden stattfanden.

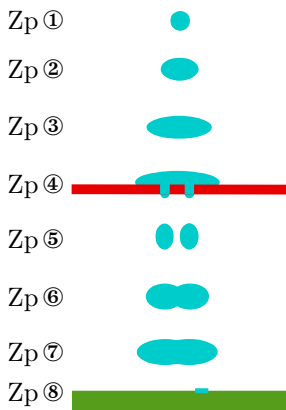


Abb. 4.13: Der Ort eines Ne-Atoms zu verschiedenen Zeitpunkten. Zum Zeitpunkt ① wird der Ort des Atoms durch seine Wechselwirkung mit den Kühl-Lasern etwa 76 mm über dem Doppelspalt erschaffen. Durch die Wechselwirkung mit dem Doppelspalt wird der Ort des Atoms zum Zeitpunkt ④ erheblich verkleinert, und in zwei Teile aufgespalten. Nur der Ort des Atoms wird aufgespalten, das Atom selbst ist zu jedem Zeitpunkt ein vollständiges, ungeteiltes Atom. Zum Zeitpunkt ⑥ schrumpft der Ort des Atoms durch die Wechselwirkung von Atom und Detektor schlagartig auf die Größe  $20\ \mu\text{m} \times 20\ \mu\text{m}$  eines Detektor-Pixels.

ihrer hohen Geschwindigkeit eine viel zu kleine Wellenlänge hatten.

Wieder stehen wir vor dem rätselhaften Phänomen der Selbst-Interferenz einzelner Atome: Der Steg zwischen den beiden Spalten war mit  $4 \cdot 10^{-6}\ \text{m}$  gigantisch groß im Vergleich zur Größe des Atoms von etwa  $10^{-10}\ \text{m}$  und dem Durchmesser seines Atomkerns von etwa  $10^{-15}\ \text{m}$ . Wie kann ein einzelnes Atom gleichzeitig beide Spalte durchqueren? Solange wir uns (wie seinerzeit Laplace in dem im ersten Kapitel abgedruckten Zitat) vorstellen dass ein Atom einen bestimmten Ort „hat“ (auch wenn er uns nicht genau bekannt ist), solange erscheint das völlig unmöglich.

Wenn wir aber anerkennen, dass der Ort des Atoms durch seine Wechselwirkung mit der Apparatur erschaffen wird, sieht die Sache anders aus. Betrachten wir einmal ganz genau und Schritt für Schritt den Ort eines einzelnen Ne-Atoms, das zum Zeitpunkt ⑧ vom Detektor registriert wird, siehe Abb. 4.13. Der Detektor registriert dieses Atom mit einem seiner  $20\ \mu\text{m} \times 20\ \mu\text{m}$  großen Pixel. Also ist das der Ort dieses Atoms zum Zeitpunkt ⑧.

Etwa 197 ms zuvor begann der Fall dieses Atom von oben herab

auf den Doppelspalt. Zu diesem Zeitpunkt – in Abb. 4.13 Zeitpunkt ① genannt – hatte der Ort des Atoms die Form einer Kugel mit etwa 1 mm Durchmesser. Dieser Ort wurde durch die Wechselwirkung des Atoms mit den Kühllasern erschaffen. Zugleich mit dem Ort erschufen die Kühllaser auch die Anfangsgeschwindigkeit, die das Atom beim Abschalten der Laser hatte. Diese Anfangsgeschwindigkeit war sehr klein, aber nicht Null. Deshalb dehnte sich der Ort des Atoms ständig weiter aus, während es herabfiel.

Die Wechselwirkung mit dem Doppelspalt schränkte den Ort des Atoms in horizontaler Richtung stark ein – und es spaltete ihn auf. Das ist ein Gedanke der uns nicht in den Kopf will, gegen den sich der „gesunde Menschenverstand“, den unsere Vorfahren in den vielen Millionen Jahren der Evolution erworben und an uns vererbt haben, aufs Heftigste sträubt.

Nur der Ort des Atoms wird aufgespalten, nicht das Atom selbst. Davon kann man sich leicht dadurch überzeugen, dass man den Detektor unmittelbar unter den Doppelspalt platziert. Dann sprechen immer nur die Pixel hinter einem Spalt an, niemals sprechen gleichzeitig Pixel hinter beiden Spalten an. Am Beispiel von Photonen wurde das in den im vorigen Kapitel geschilderten Experimenten mit Strahlteilern explizit überprüft.

Der Ort des Atoms wird von den Kühllasern, dem Doppelspalt, dem Detektor, und dem Atom, gemeinsam erschaffen. Es hängt von der Anordnung dieser Geräte ab, wie ausgedehnt der Ort des Atoms ist, und welche Form er hat. Wenn der Detektor unmittelbar hinter dem Doppelspalt aufgebaut wird, dann ist der Ort des Atoms stets einfach zusammenhängend. Wenn der Detektor weit genug entfernt vom Doppelspalt aufgebaut wird, dann ist – wie die vom Detektor registrierte Interferenzstruktur beweist – der Ort des Atoms zum Zeitpunkt ⑤ (siehe Abb. 4.13) auf zwei voneinander getrennte Gebiete aufgespalten.

Darüber werde ich in diesem Buch noch vieles sagen, und vor

allem experimentelle Beweise dafür präsentieren, dass diese Betrachtungsweise dem Sachverhalt tatsächlich angemessen ist, so widersinnig der aufgespaltenen Ort eines ungeteilten Atoms zunächst auch erscheinen mag. Als erstes Indiz kann man immerhin schon jetzt feststellen, dass uns diese Betrachtungsweise eine Idee vermittelt, wieso einzelne Elektronen, Photonen, Neutronen, Atome überhaupt zur Interferenz mit sich selbst fähig sind.

Interferenz-Experimente mit noch etwas schwereren Objekten, nämlich Natrium-Atomen und -Molekülen, gelangen 1995 Chapman et. al. [27]. Sie präparierten in einer Vakuum-Kammer einen Strahl von Na-Atomen und Na<sub>2</sub>-Molekülen mit Krypton-Atomen als Trägergas. Alle Atome und Moleküle in diesem Strahl hatten eine Geschwindigkeit von  $v = 820 \text{ m/s} \pm 3,5 \%$ . Also hatten die Na-Atome und Na<sub>2</sub>-Moleküle nach de Broglie's Gleichung (4.2b) die Wellenlänge

$$\lambda_{\text{Na}} = 0,021 \text{ nm}$$

$$\lambda_{\text{Na}_2} = 0,011 \text{ nm} .$$

Der Strahl wurde auf eine Folie gerichtet, in die ein Gitter<sup>4</sup> aus zahlreichen  $0,03 \mu\text{m}$  breiten Spalten mit einem Abstand (Mitte zu Mitte) von  $0,1 \mu\text{m}$  geätzt war. 1,20 m hinter dem Gitter wurden die eintreffenden Atome und Moleküle gezählt. Die Krypton-Atome waren für den Detektor unsichtbar. Das Ergebnis ist im oberen Diagramm von Abb. 4.14 auf der nächsten Seite eingetragen.

In einem zweiten Experiment wurden die Na-Atome durch intensive Bestrahlung mit einem Laser der Wellenlänge<sup>12</sup>  $\lambda = 0,589 \mu\text{m}$  schon vor dem Gitter aus dem Strahl herausgestreut, so dass nur Na<sub>2</sub>-Moleküle und Krypton-Atome, die Licht mit dieser Wellenlänge nicht absorbieren, im Strahl blieben, und durch das Gitter zum

---

<sup>12</sup> Die orange Linie im Spektrum von Natrium kennt man aus der Beleuchtung von Straßenkreuzungen. Man kann sie auch beobachten, wenn man Kochsalz (NaCl) in eine Kerzenflamme streut.

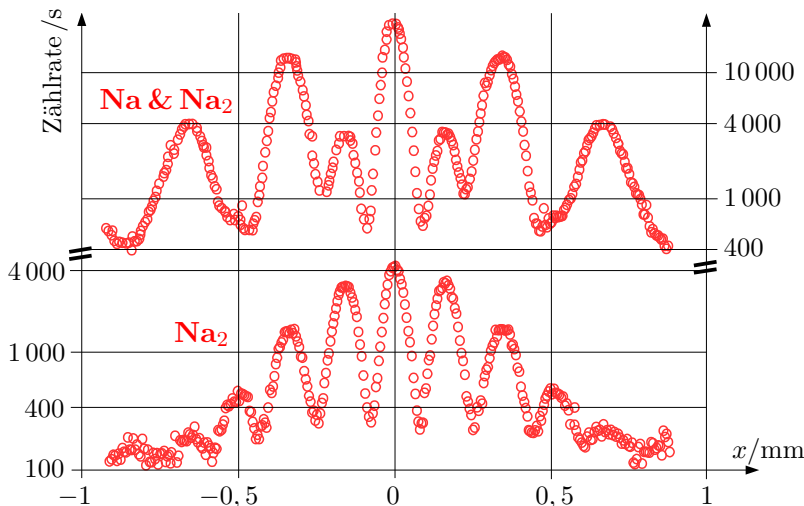


Abb. 4.14: Interferenz von Na & Na<sub>2</sub> (oben) und Na<sub>2</sub> (unten)

Detektor gelangten. Das Ergebnis dieser Messung ist im unteren Diagramm von Abb. 4.14 eingetragen.

Weil die Wellenlänge der Na-Atome doppelt so groß ist wie die Wellenlänge der Na<sub>2</sub>-Moleküle, sind ihre Beugungsmaxima in der Detektor-Ebene doppelt so weit aufgespreizt. Man erkennt die

Beugungsmaxima von

Na bei 0 mm  $\pm 0,33$  mm  $\pm 0,67$  mm

Na<sub>2</sub> bei 0 mm  $\pm 0,17$  mm  $\pm 0,33$  mm  $\pm 0,5$  mm  $\pm 0,67$  mm .

Auch dieses Experiment ist eine eindrucksvolle Bestätigung von de Broglie's Relation (4.2).

Geht es auch mit noch schwereren Molekülen? Man kennt keinen prinzipiellen Grund, warum Interferenzexperimente nicht mit beliebig schweren Objekten (zum Beispiel mit Lastwagen) möglich sein sollten. Es ist „nur“ einer Frage der Kunstfertigkeit der Experimentatoren, die technischen Schwierigkeiten zu überwinden.

Die schwersten Objekte, deren Wellennatur gemäß der de Broglie-Relation (4.2) bisher nachgewiesen werden konnte waren Moleküle, die aus mehr als 800 Atomen bestanden, schwerer als 10 000 Wasserstoff-Atome waren, und mehr als 6 nm Durchmesser hatten [28, 29].

## 5 Vektoren und Projektionsamplituden

Galileo Galilei (1564–1642), einer der Mitbegründer der neuzeitlichen Physik, schrieb im 6. Brief seines Buches „Il Saggiatore“<sup>1</sup> [30]:

„Die Philosophie [Galilei meint die Naturwissenschaft] ist in jenem größten aller Bücher aufgezeichnet, das uns jederzeit offen vor Augen steht (ich spreche vom Universum). Aber man kann es nicht verstehen, wenn man sich nicht zuvor darin übt seine Sprache zu verstehen und die Buchstaben kennenzulernen, mit denen es geschrieben ist. Es ist in mathematischer Sprache geschrieben, und die Buchstaben sind Dreiecke, Kreise, und andere geometrische Figuren. Ohne derartige Hilfsmittel ist es unmöglich, auch nur ein einziges Wort zu verstehen; ohne sie irrt man hilflos in einem finsternen Labyrinth umher.“

Das gilt auch noch heute, und es gilt ganz besonders wenn wir versuchen werden, Quantenphänomene – wie zum Beispiel die rätselhafte Selbst-Interferenz einzelner Teilchen – zu beschreiben und zu verstehen. Die mathematischen Elemente, die wir in der Quantentheorie benötigen um nicht „hilflos in einem finsternen Labyrinth umherzuirren“ sind nicht „Dreiecke, Kreise, und andere geometrische Figuren“, sondern Zahlen und Vektoren.

Was Zahlen sind, weiß jeder. Von Vektoren brauchen wir nicht mehr zu wissen, als dass man sie (mit Einschränkungen, die im Folgenden erklärt werden) durch Pfeile veranschaulichen kann, so

---

<sup>1</sup> (italienisch) il saggiatore = die Goldwaage

wie wir das in früheren Kapiteln dieses Buches bereits gemacht haben. Weil das Rechnen mit Vektoren so wichtig ist, und uns im Folgenden so häufig begegnen wird, werden wir es jetzt etwas genauer und systematischer betrachten.

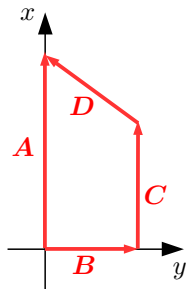


Abb. 5.1: Rechnen mit Vektoren

Im Diagramm 5.1 kommt man vom Kreuzungspunkt der Koordinaten auf dem Weg  $B + C + D$  zum gleichen Zielpunkt wie auf dem Weg  $A$ . Also gilt die Vektor-Gleichung

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{C} + \mathbf{D} . \quad (5.1a)$$

Wenn man dagegen die Weglänge betrachtet, dann ist der rechte Weg deutlich weiter als der linke Weg. Die Länge eines Vektors ist sein *Betrag*. Für Vektoren haben wir bisher fette Buchstaben verwendet. Beträge kennzeichnen

wir durch Betragsstriche oder durch normale Buchstaben:

$$|\mathbf{A}| = A = \text{Betrag (d. h. Länge) des Vektors } \mathbf{A}$$

Für die Beträge (d. h. die Längen) der Vektoren im Diagramm 5.1 bzw. in der Gleichung (5.1a) gilt also

$$|\mathbf{A}| = A < B + C + D = |\mathbf{B}| + |\mathbf{C}| + |\mathbf{D}| . \quad (5.1b)$$

## 5.1 Einheitsvektoren

Paul Dirac (1902–1984), einer der genialen Mitbegründer der Quantentheorie, führte für Vektoren folgende Schreibweise ein:

$$|a\rangle = \mathbf{a} \quad (5.2a)$$

Der Strich auf der linken Seite von  $|\dots\rangle$  hat nichts mit Betragsstrichen zu tun. Wir werden sehen dass man sich schnell an diese

praktische Schreibweise gewöhnt. Besonders wichtig in der Quantentheorie sind Vektoren, deren Betrag 1 ist, und die deshalb als Einheitsvektoren bezeichnet werden. Damit wir auf den ersten Blick erkennen, ob es sich bei einem Vektor um einen Einheitsvektor handelt oder nicht, werde ich in diesem Buch für Einheitsvektoren immer und ausnahmslos Dirac's Schreibweise (5.2a) verwenden:

$$\text{Betrag von } |a\rangle = \left| |a\rangle \right| = 1 \quad (5.2b)$$

Für Vektoren die keine Einheitsvektoren sind (d. h. deren Länge  $\neq 1$  ist), werde ich stattdessen die Schreibweise  $\mathbf{A}$  mit fetten Buchstaben verwenden:

$$\text{Betrag von } \mathbf{A} = \left| \mathbf{A} \right| \neq 1$$

In Abb. 5.2(a) sind zwei rechtwinklige Koordinatensysteme eingezeichnet: Eines mit den Koordinaten  $x$  und  $y$ , und eines mit den Koordinaten  $a$  und  $b$ . Außerdem enthält die Graphik die vier Einheitsvektoren  $|a\rangle, |b\rangle, |x\rangle, |y\rangle$ , die die selben Richtungen wie die gleichnamigen Koordinatenachsen haben, und einen weiteren Einheitsvektor  $|p\rangle$ .

In Abb. 5.2(b) sind der Einheitsvektor  $|p\rangle$  und zwei Vektoren  $|x\rangle \cdot p_x$  und  $|y\rangle \cdot p_y$  dargestellt.  $p_x$  und  $p_y$  sind Zahlen. Offenbar

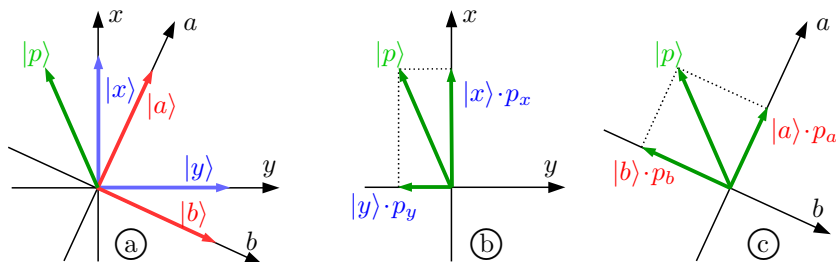


Abb. 5.2: Einheitsvektoren und Projektionen

ist  $0 < p_x < 1$ , denn der Vektor  $|x\rangle \cdot p_x$  hat die gleiche Richtung wie der Einheitsvektor  $|x\rangle$ , ist aber kürzer als  $|x\rangle$ . Und offenbar ist  $-1 < p_y < 0$ , denn der Vektor  $|y\rangle \cdot p_y$  hat die umgekehrte Richtung wie der Einheitsvektor  $|y\rangle$ , und ist kürzer als  $|y\rangle$ .

In Abb. 5.2© ist nochmals der Einheitsvektor  $|p\rangle$  dargestellt, sowie zwei Vektoren  $|a\rangle \cdot p_a$  und  $|b\rangle \cdot p_b$ . Offenbar ist  $0 < p_a < 1$ , denn der Vektor  $|a\rangle \cdot p_a$  hat die gleiche Richtung wie der Einheitsvektor  $|a\rangle$ , ist aber kürzer als  $|a\rangle$ . Und offenbar ist  $-1 < p_b < 0$ , denn der Vektor  $|b\rangle \cdot p_b$  hat die umgekehrte Richtung wie der Einheitsvektor  $|b\rangle$ , und ist kürzer als  $|b\rangle$ .

Die Zahlen  $p_x, p_y, p_a, p_b$  werden als *Projektionen* oder *Projektionsamplituden* des Vektors  $|p\rangle$  auf die vier Vektoren  $|x\rangle, |y\rangle, |a\rangle, |b\rangle$  bezeichnet. Für Projektionsamplituden werden wir folgende Schreibweise verwenden:

$$p_x = \langle x||p\rangle = \text{Projektionsamplitude von } |p\rangle \text{ auf } |x\rangle \quad (5.3a)$$

$$p_y = \langle y||p\rangle = \text{Projektionsamplitude von } |p\rangle \text{ auf } |y\rangle \quad (5.3b)$$

$$p_a = \langle a||p\rangle = \text{Projektionsamplitude von } |p\rangle \text{ auf } |a\rangle \quad (5.3c)$$

$$p_b = \langle b||p\rangle = \text{Projektionsamplitude von } |p\rangle \text{ auf } |b\rangle \quad (5.3d)$$

Man kann sich beispielsweise die Projektionsamplitude  $\langle x||p\rangle$  von  $|p\rangle$  auf  $|x\rangle$  veranschaulichen, indem man den Vektor  $|p\rangle$  aus großer Entfernung senkrecht zur  $x$ -Achse so anleuchtet, dass sein Schatten auf die  $x$ -Achse fällt, wie durch die gepunktete Linie in Abb. 5.2ⓑ angedeutet. Der Schattenpfeil  $|x\rangle \cdot p_x = |x\rangle \langle x||p\rangle$  ist gleich dem Vektor  $|x\rangle$ , multipliziert mit der Zahl  $\langle x||p\rangle$ .

Wenn man den Vektor  $|p\rangle$  aus großer Entfernung senkrecht zur  $b$ -Achse anleuchtet, dann fällt sein Schatten auf die negative  $b$ -Achse, wie durch die gepunktete Linie in Abb. 5.2© angedeutet. Also ist die Projektionsamplitude  $p_b = \langle b||p\rangle$  negativ.

Vektoren werden nicht verändert wenn man sie so verschiebt, dass ihre Länge und ihre Richtung unverändert bleiben. Man darf also den Vektor  $|y\rangle \langle y||p\rangle = |y\rangle \cdot p_y$  in der Zeichenebene so verschieben,

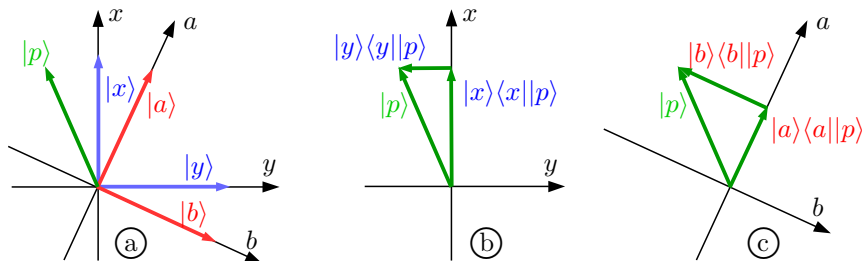


Abb. 5.3:  $|p\rangle = |x\rangle\langle x||p\rangle + |y\rangle\langle y||p\rangle = |a\rangle\langle a||p\rangle + |b\rangle\langle b||p\rangle$

dass er an der Spitze von  $|x\rangle\langle x||p\rangle$  ansetzt und an der Spitze von  $|p\rangle$  endet. Und man darf den Vektor  $|b\rangle\langle b||p\rangle$  in der Zeichenebene so verschieben, dass er an der Spitze von  $|a\rangle\langle a||p\rangle$  ansetzt und an der Spitze von  $|p\rangle$  endet, wie in Abb. 5.3 gezeichnet.

Also ist  $|p\rangle$  jeweils die Summe der beiden anderen Vektoren:

$$\underbrace{|p\rangle}_{\text{Einheitsvektor}} = \underbrace{|x\rangle}_{\text{Vektor}} \underbrace{\langle x||p\rangle}_{\text{Projektionsamplitude}} + |y\rangle\langle y||p\rangle \quad (5.4a)$$

$$= |a\rangle\langle a||p\rangle + |b\rangle\langle b||p\rangle \quad (5.4b)$$

Jetzt muss eine kleine Komplikation erwähnt werden. Die Veranschaulichung von Vektoren durch Pfeile ist schön und nützlich, sie trifft aber nicht vollständig zu. Die mathematische Definition von Vektoren ist allgemeiner und umfassender als die geometrische Definition von Pfeilen. Anders gesagt: Man kann jeden Pfeil als Vektor beschreiben, aber man kann nicht jeden Vektor durch einen Pfeil darstellen. Vektoren können mathematische Eigenschaften haben, die Pfeile nicht haben.

Ein Unterschied, der für uns wichtig ist, tritt bei den Projektionsamplituden auf: Die Projektionsamplituden von Pfeilen sind positive oder negative Zahlen, auf jeden Fall aber reelle Zahlen. Dagegen können die Projektionsamplituden von Vektoren auch

komplex sein. Um zu klären was es mit komplexen Zahlen auf sich hat, berechnen wir als Beispiel die Wurzel aus  $-42,25$ :

$$\sqrt{-42,25} = \sqrt{(-1) \cdot (+42,25)} = \underbrace{\sqrt{-1}}_{\pm i} \cdot \underbrace{\sqrt{+42,25}}_{\pm 6,5} = \pm i 6,5 \quad (5.5a)$$

Damit man auch Gleichungen lösen kann, in denen die Wurzeln von negativen Zahlen vorkommen, haben die Mathematiker im sechzehnten Jahrhundert die Zahl  $i = \sqrt{-1}$  erfunden. Die Umkehrung von (5.5a) ist

$$(+6,5) \cdot (+6,5) = +42,25 \quad (5.5b)$$

$$(-6,5) \cdot (-6,5) = +42,25 \quad (5.5c)$$

$$(+i) \cdot (+i) = -1 \quad (5.5d)$$

$$(-i) \cdot (-i) = -1 \quad (5.5e)$$

Wenn die Vorzeichen der beiden Zahlen unterschiedlich sind, gilt dagegen

$$(+6,5) \cdot (-6,5) = -42,25 \quad (5.5f)$$

$$(+i) \cdot (-i) = +1 \quad (5.5g)$$

Alle Zahlen, in denen der Faktor  $i = \sqrt{-1}$  vorkommt, heißen *komplexe Zahlen*. Alle Zahlen, in denen  $i$  nicht vorkommt, heißen *reelle Zahlen*.

$$i 728,73 \quad , \quad 5,17 - i 54 \quad , \quad 16 + i 3,77 \quad , \quad \dots$$

sind Beispiele für komplexe Zahlen. Für das Rechnen mit komplexen Zahlen gelten die gleichen Regeln wie für das Rechnen mit reellen Zahlen. Beispielsweise ist das Quadrat

$$\begin{aligned}
 (5, 17 - i 54)^2 &= (5, 17 - i 54)(5, 17 - i 54) = \\
 &= 5, 17^2 \underbrace{-5, 17 \cdot i 54 - i 54 \cdot 5, 17}_{-i 2 \cdot 5, 17 \cdot 54} \underbrace{+ i^2 54^2}_{-54^2}. \quad (5.5h)
 \end{aligned}$$

Die *konjugiert komplexe* einer Zahl ist die Zahl, bei der alle  $i$  durch  $-i$  ersetzt wurden. Die konjugiert komplexe Zahl wird durch einen hochgestellten Stern\* gekennzeichnet. Beispiel:

$$(5, 17 - i 54)^* = 5, 17 + i 54 \quad (5.5i)$$

Beim Quadrat wird eine Zahl mit sich selbst multipliziert. Dagegen wird beim *Betragsquadrat* eine Zahl mit ihrer konjugiert komplexen multipliziert:

$$\begin{aligned}
 \text{Betragsquadrat von } 5, 17 - i 54 &= \\
 &= |5, 17 - i 54|^2 = (5, 17 - i 54)^* \cdot (5, 17 - i 54) = \\
 &= (5, 17 + i 54) \cdot (5, 17 - i 54) = \\
 &= 5, 17^2 \underbrace{-5, 17 \cdot i 54 + i 54 \cdot 5, 17}_0 \underbrace{-i^2 54^2}_{+54^2} = 5, 17^2 + 54^2 \quad (5.5j)
 \end{aligned}$$

Während das Quadrat (5.5h) einer komplexen Zahl im allgemeinen wieder eine komplexe Zahl ist, ist das Betragsquadrat (5.5j) einer komplexen Zahl stets eine positive reelle Zahl.

(5.5) enthält sämtliche Regeln für den Umgang mit komplexen Zahlen, die wir in diesem Buch benötigen. Eigentlich nicht schwierig, aber sicher gewöhnungsbedürftig. Ich werde deshalb jedes mal, wenn uns eine komplexe Zahl begegnet, an diese Regeln erinnern.

Physiker haben komplexe Zahlen schon lange vor der Entdeckung der Quantentheorie im Jahr 1925 benutzt. Aber nur aus Bequemlichkeit, weil man viele mathematische Probleme in der

klassischen Physik mithilfe von komplexen Zahlen sehr elegant und effizient bearbeiten kann. Wenn jemand jedoch partout komplexe Zahlen vermeiden wollte, dann konnte er alle physikalischen Berechnungen auch mit reellen Zahlen durchführen. Das hat sich mit der Quantentheorie geändert. In der Quantentheorie sind komplexe Zahlen unverzichtbar, und deshalb können wir ihnen in diesem Buch auch nicht immer aus dem Weg gehen.

Damit zurück zu den Projektionsamplituden. *Wenn* zwei Vektoren  $|g\rangle$  und  $|h\rangle$  durch Pfeile dargestellt werden können (das ist manchmal, aber nicht immer der Fall), dann ist die Projektionsamplitude des einen auf den anderen gleich der Projektionsamplitude des anderen auf den einen:

$$\text{manchmal ist } \langle g||h\rangle = \langle h||g\rangle . \quad (5.6a)$$

Bei den Vektoren, mit denen wir es in der Quantentheorie zu tun haben, ist das jedoch häufig nicht der Fall. Vielmehr gilt

$$\text{oftmals } \langle g||h\rangle \neq \langle h||g\rangle , \text{ aber} \quad (5.6b)$$

$$\text{immer } \langle g||h\rangle = \left(\langle h||g\rangle\right)^* . \quad (5.6c)$$

Der Stern\* bedeutet das konjugiert komplexe, erklärt in (5.5i). (5.6a) trifft für reelle Projektionsamplituden zu, (5.6b) für komplexe Projektionsamplituden. Warum (5.6c) gilt, kann man nicht durch Bilder mit Pfeilen erklären. Wir nehmen hier (5.6c) einfach als mathematische Tatsache zur Kenntnis.

Für den Spezialfall reeller Projektionsamplituden — also den Fall, dass (5.6a) gilt — sind in Diagramm 5.4 auf der nächsten Seite die Projektionsamplituden  $\langle h||g\rangle$  und das Quadrat  $(\langle h||g\rangle)^2$  der Einheitsvektoren  $|h\rangle$  und  $|g\rangle$  als Funktion des Winkels  $\sphericalangle(h, g)$  zwischen ihnen eingetragen. Für reelle Projektionsamplituden von Einheitsvektoren ist in der Mathematik der Name *Kosinus* üblich, der als  $\cos$  abgekürzt wird. Es gilt also

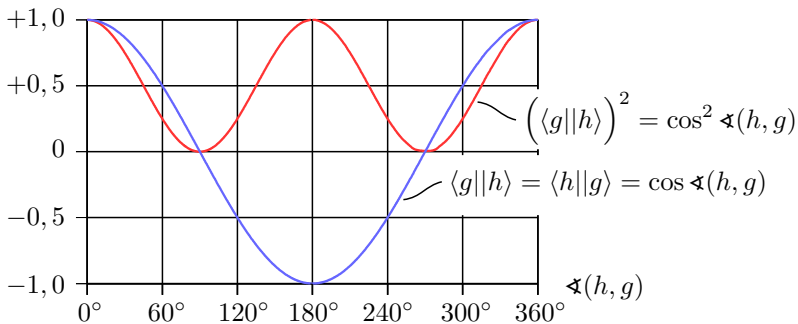


Abb. 5.4: **Reelle Projektionsamplituden** und das **Quadrat reeller Projektionsamplituden** von Einheitsvektoren

falls  $\langle h|g \rangle$  reell ist:

$$\langle h|g \rangle = \langle g|h \rangle = \cos \alpha(h, g) \quad (5.7a)$$

$$\left(\langle h|g \rangle\right)^2 = \left(\langle g|h \rangle\right)^2 = \cos^2 \alpha(h, g) . \quad (5.7b)$$

Wenn der Winkel zwischen zwei Einheitsvektoren  $90^\circ$  oder  $270^\circ$  beträgt, also ein „rechter Winkel“ ist, dann werden die Vektoren als **orthogonal** bezeichnet. Beispielsweise ist  $|x\rangle$  in Abb. 5.3 orthogonal zu  $|y\rangle$ , und  $|a\rangle$  ist orthogonal zu  $|b\rangle$ . Die Projektionsamplitude (sprich der Kosinus) orthogonaler Vektoren ist offensichtlich Null: Wenn man den Vektor  $|x\rangle$  aus großer Entfernung senkrecht zur  $y$ -Achse anleuchtet, dann hat sein Schatten auf der  $y$ -Achse die Länge Null.

Wenn eine Projektionsamplitude  $\langle g|h \rangle$  komplex ist, dann kann man die Vektoren  $|g\rangle$  und  $|h\rangle$  nicht als Pfeile darstellen, und deswegen auch nicht den Winkel zwischen ihnen bestimmen. Es ist aber eine übliche Sprechweise, auch solche Vektoren  $|g\rangle$  und  $|h\rangle$  als orthogonal zu bezeichnen, wenn ihre Projektionsamplitude Null ist.

## 5.2 Zwei Beispiele

Jetzt verfügen wir über alle Hilfsmittel, die zur systematischen Beschreibung von Messungen in der Quantentheorie erforderlich sind. Als Beispiel betrachten wir die Messung der Polarisation eines Photons, die in Abb. 5.5 dargestellt ist.

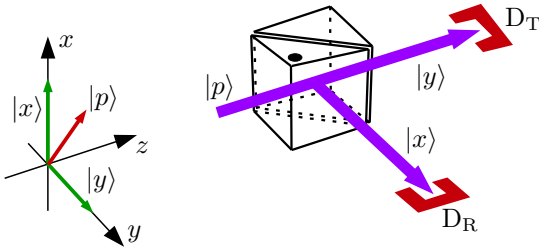


Abb. 5.5: Ein Photon am polarisierenden Strahlteiler

Das Objekt, an dem die Messung ausgeführt werden soll, ist das einlaufende Photon, das in  $p$ -Richtung polarisiert ist. Der Einheitsvektor  $|p\rangle$  beschreibt den Zustand des Photons, deshalb wird  $|p\rangle$  auch als *Zustandsvektor* bezeichnet. Das Messgerät, also der polarisierende Strahlteiler mit den beiden Detektoren an seinen Ausgängen, ist so gedreht, dass er  $x$ -polarisiertes Licht **reflektiert**, und  $y$ -polarisiertes Licht **transmittiert**.

Falls das Photon transmittiert wird, dann wird es den Strahlteiler im Zustand  $|y\rangle$  verlassen und vom Detektor  $D_T$  registriert werden. Falls das Photon reflektiert wird, dann wird es den Strahlteiler im Zustand  $|x\rangle$  verlassen und vom Detektor  $D_R$  registriert werden. Nur falls  $|p\rangle = |y\rangle$  oder  $|p\rangle = |x\rangle$  ist, wird der Zustandsvektor des Photons hinter dem Strahlteiler der gleiche sein wie vor dem Strahlteiler.

In der Klassischen Physik wird bei einer gut durchgeführten Messung das gemessene Objekt nicht verändert. Man stellt eine Eigenschaft fest, die das Objekt bereits vor der Messung hatte,

und die es nach der Messung immer noch hat. Bei der Messung von Quantenobjekten verhält es sich anders. Das Messgerät prägt dem gemessenen Objekt einen Zustand auf. Man sagt dass das Messgerät das Objekt in einem bestimmten Zustand präpariert. Jedes Messgerät hat nur ein begrenztes Reservoir von Zustandsvektoren, die es dem Objekt aufprägen kann. Diese Vektoren werden als *Eigenvektoren* des Messgeräts bezeichnet. Der polarisierende Strahlteiler hat nur zwei Eigenvektoren:  $|x\rangle$  und  $|y\rangle$ .

In welchem seiner Eigenvektoren wird das Messgerät (der polarisierende Strahlteiler) das Objekt (das Photon) präparieren? Um das zu berechnen, geht man in der Quantentheorie folgendermaßen vor: Zuerst schreibt man den Zustandsvektor des Objekts, das gemessen wird (in diesem Fall des Photons) als Summe der Projektionen auf alle Eigenvektoren des Messgeräts:

$$\begin{aligned} \text{Zustandsvektor des Objekts vor der Messung} &= \\ &= |p\rangle = \underbrace{|x\rangle}_{\text{Eigenvektor des Messgeräts}} \langle x|p\rangle + \underbrace{|y\rangle}_{\text{Eigenvektor des Messgeräts}} \langle y|p\rangle \end{aligned} \quad (5.8)$$

In Abb. 5.2(b) auf Seite 106 und Abb. 5.3(b) auf Seite 108 wurde die Berechnung von (5.8) veranschaulicht. Der Zustandsvektor (5.8) enthält beide Möglichkeiten, Reflektion und Transmission des Photons. Aber nur einer der beiden Detektoren, entweder  $D_R$  oder entweder  $D_T$ , wird das Photon registrieren. Welcher? Die Antwort auf diese Frage gibt die 1926 von Max Born (1882–1970) entdeckte [31] und nach ihm benannte

Born'sche Regel: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein bestimmtes Messergebnis eintritt, ist gleich dem Betragsquadrat der Projektionsamplitude des Zustandsvektors des gemessenen Objekts auf den entsprechenden Eigenvektor des Messgeräts. (5.9)

Das klingt furchtbar kompliziert, ist aber ganz einfach. Betrachten wir das Beispiel (5.8). Das Photon gelangt zum Detektor  $D_R$ , wenn

der Strahlteiler es im Zustand  $|x\rangle$  präpariert. Die Projektionsamplitude des Zustandsvektors des Photons auf diesen Eigenvektor des Messgeräts ist  $\langle x||p\rangle$ . Also ist nach der Born'schen Regel die Wahrscheinlichkeit  $W(D_R)$  dafür, dass das Photon zum Detektor  $D_R$  gelangt, gleich

$$W(D_R) = \left| \langle x||p\rangle \right|^2 . \quad (5.10a)$$

Dagegen wird das Photon zum Detektor  $D_T$  gelangen, wenn der Strahlteiler es im Zustand  $|y\rangle$  präpariert. Die Projektionsamplitude des Zustandsvektors des Photons auf diesen Eigenvektor des Messgeräts ist  $\langle y||p\rangle$ . Also ist

$$W(D_T) = \left| \langle y||p\rangle \right|^2 \quad (5.10b)$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Photon zum Detektor  $D_T$  transmittiert wird.

Wenn  $|p\rangle = |x\rangle$  ist, dann ist  $W(D_R) = 1$  und  $W(D_T) = 0$ . Und wenn  $|p\rangle = |y\rangle$  ist, dann ist  $W(D_R) = 0$  und  $W(D_T) = 1$ . In allen anderen Fällen entscheidet der Zufall, ob das Photon nun im Zustand  $|x\rangle$  oder  $|y\rangle$  präpariert wird: Man weiß dann nur, dass es mit der Wahrscheinlichkeit  $W(D_R)$  im Zustand  $|x\rangle$  und mit der Wahrscheinlichkeit  $W(D_T)$  im Zustand  $|y\rangle$  präpariert wird, aber man kann das Ergebnis der Messung im Einzelfall nicht sicher vorhersagen. Die Messung ist in der Quantentheorie die einzige Stelle, an der der Zufall in Aktion tritt. Solange keine Messung stattfindet, ist die Quantentheorie eine völlig deterministische Theorie, genau so wie die Theorien der Klassischen Physik.

Betrachten wir als zweites Beispiel die Beugung von Neutronen am Doppelspalt. Der prinzipielle Aufbau des Experiments wird in Abb. 4.5 auf Seite 82 dargestellt, das Ergebnis der Messung wird im Diagramm 4.6 auf Seite 83 durch rote Punkte dargestellt. Den Zustandsvektor eines Neutrons, das durch den Spalt S1 in die

Apparatur einläuft, nennen wir  $|S1\rangle$ . Der Doppelspalt präpariert es in einem seiner beiden Eigenzustände  $|S2_l\rangle$  oder  $|S2_r\rangle$ . Dabei bedeutet der Index  $r$  dass das Neutron durch den rechten Spalt geflogen ist, und der Index  $l$  bedeutet dass das Neutron durch den linken Spalt geflogen ist. Die wahrscheinlichste Möglichkeit ist natürlich, dass das Neutron keinen der beiden Spalte trifft, sondern schon in der ersten Kammer stecken bleibt. Wir betrachten hier aber nur die Fälle, in denen das Neutron tatsächlich die Detektorebene erreicht.

Um zu klären was am Doppelspalt mit dem Neutron geschieht, beschreiben wir seinen Zustand (vor dem Doppelspalt) als Summe seiner Projektionen auf die beiden Eigenvektoren des Doppelspalts:

$$|S1\rangle = |S2_l\rangle\langle S2_l||S1\rangle + |S2_r\rangle\langle S2_r||S1\rangle \quad (5.11)$$

Wenn unmittelbar hinter den beiden Spalten Detektoren ständen, so wie beim Aufbau 5.5 Detektoren hinter beiden Ausgängen des Strahlteilers standen, dann würde der Doppelspalt das Neutron nach der Born'schen Regel (5.9) mit der Wahrscheinlichkeit

$$W_l = \left| \langle S2_l||S1\rangle \right|^2 \quad (5.12a)$$

im Zustand  $|S2_l\rangle$  präparieren, und der Detektor hinter dem linken Spalt würde das Neutron registrieren Mit der Wahrscheinlichkeit

$$W_r = \left| \langle S2_r||S1\rangle \right|^2 \quad (5.12b)$$

würde der Doppelspalt das Neutron im Zustand  $|S2_r\rangle$  präparieren, und der Detektor hinter dem rechten Spalt würde das Neutron detektieren. Weil die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Möglichkeiten immer 1 ist, und weil das Experiment sorgfältig so aufgebaut wurde, dass beide Möglichkeiten gleich wahrscheinlich sind, ist

$$W_l = W_r = 1/2 . \quad (5.12c)$$

Das bedeutet aber *nicht*, dass die beiden Projektionsamplituden gleich  $\sqrt{1/2}$  sind, denn Projektionsamplituden sind ja im allgemeinen komplex. Deshalb führen wir die Abkürzungen

$$l = \langle S_{2l} || S_1 \rangle \quad , \quad r = \langle S_{2r} || S_1 \rangle \quad (5.13)$$

mit  $|l|^2 = |r|^2 = W_l = W_r = 1/2$

ein. Damit kann der Zustandsvektor des Neutrons als

$$|S_1\rangle = l |S_{2l}\rangle + r |S_{2r}\rangle \quad (5.14)$$

geschrieben werden.

Jetzt sind wir bei einer der rätselhaftesten Eigenheiten der Quantentheorie angekommen: Weil keine Detektoren unmittelbar hinter den Spalten stehen, wird das Neutron laut Quantentheorie am Doppelspalt *nicht* in einem der Zustände  $|S_{2l}\rangle$  oder  $|S_{2r}\rangle$  präpariert, sondern fliegt im „unentschiedenen“ Zustand (5.14) weiter. Nicht anders ist es beim polarisierenden Strahlteiler: Wenn keine Detektoren hinter den beiden Ausgängen des Strahlteilers ständen, dann würde – laut Quantentheorie – der Strahlteiler das Photon weder im Zustand  $|x\rangle$  noch im Zustand  $|y\rangle$  präparieren sondern im „unentschiedenen“ Zustand

$$|5.8\rangle = |x\rangle\langle x|p\rangle + |y\rangle\langle y|p\rangle . \quad (5.15)$$

Es scheint so als ob das, was am Strahlteiler oder am Doppelspalt geschieht, davon abhängt ob man mithilfe von Detektoren das Geschehen beobachtet, oder nicht. Die bessere Betrachtungsweise ist aber die, die bereits in Abb. 4.13 auf Seite 99 skizziert wurde: Der Ort des Neutrons wird durch seine Wechselwirkung mit der Apparatur erschaffen. Die Trajektorie des Neutrons in diesem Experiment ist die Abfolge der Orte, die es nacheinander auf seinem

Weg durch die Spalte bis zum Detektor einnimmt. Der Zustandsvektor (5.14) spiegelt die Tatsache wieder, dass die Trajektorie des Neutrons in diesem Experiment *nicht* auf einen der beiden Spalte eingeschränkt wird, sondern sich über beide Spalte erstreckt.

Der Neutronendetektor rastert die  $x$ -Achse mit einer Schrittweite von 0,01 mm an insgesamt 87 Positionen ab. Die 87 Eigenvektoren des Detektors nennen wir

$$|x_1\rangle, |x_2\rangle, |x_3\rangle, \dots, |x_{86}\rangle, |x_{87}\rangle. \quad (5.16)$$

Um zu klären was bei der Detektion mit dem Neutron geschieht, beschreiben wir seinen Zustand (unmittelbar bevor es auf die Detektorebene trifft) als Summe seiner Projektionen auf die 87 Eigenvektoren des Detektors:

$$\begin{aligned} l|S_{2l}\rangle + r|S_{2r}\rangle &= |x_1\rangle \left( l\langle x_1|S_{2l}\rangle + r\langle x_1|S_{2r}\rangle \right) + \\ &+ |x_2\rangle \left( l\langle x_2|S_{2l}\rangle + r\langle x_2|S_{2r}\rangle \right) + \dots + \\ &+ |x_{87}\rangle \left( l\langle x_{87}|S_{2l}\rangle + r\langle x_{87}|S_{2r}\rangle \right) = \\ &= \sum_{j=1}^{87} |x_j\rangle \left( l\langle x_j|S_{2l}\rangle + r\langle x_j|S_{2r}\rangle \right) \end{aligned} \quad (5.17)$$

In der letzten Zeile wird der griechische Buchstabe  $\Sigma$  = Sigma als Summationszeichen verwendet. Man liest das Zeichen als „Summe von  $j$  gleich 1 bis 87“. Es bedeutet, dass im ersten Summanden für  $j$  die Zahl 1 eingesetzt werden soll, im zweiten Summanden die Zahl 2, im dritten Summanden die Zahl 3, usw., bis schließlich im letzten Summanden für  $j$  die Zahl 87 eingesetzt wird. Die letzte Zeile von (5.17) ist also nur eine abkürzende Schreibweise für die Zeilen darüber.

Damit können wir berechnen, mit welcher Wahrscheinlichkeit der Detektor das Neutron an welcher Position registrieren wird.

Beispielsweise ist die Wahrscheinlichkeit  $W(x_{31})$  dafür, dass das Neutron an der Detektorposition  $x_{31}$  beobachtet wird, laut der Born'schen Regel (5.9) gleich dem Betragsquadrat der Projektionsamplitude auf den Eigenvektor  $|x_{31}\rangle$  des Detektors in Gleichung (5.17), also gleich

$$\begin{aligned}
 W(x_{31}) &= \left| l \langle x_{31} | S_{2l} \rangle + r \langle x_{31} | S_{2r} \rangle \right|^2 \stackrel{(5.5j)}{=} \\
 &= \left( l \langle x_{31} | S_{2l} \rangle + r \langle x_{31} | S_{2r} \rangle \right)^* \left( l \langle x_{31} | S_{2l} \rangle + r \langle x_{31} | S_{2r} \rangle \right) \stackrel{(5.6c)}{=} \\
 &= \left( l^* \langle S_{2l} | x_{31} \rangle + r^* \langle S_{2r} | x_{31} \rangle \right) \left( l \langle x_{31} | S_{2l} \rangle + r \langle x_{31} | S_{2r} \rangle \right) \stackrel{(5.13)}{=} \\
 &= \underbrace{l^* l \langle S_{2l} | x_{31} \rangle \langle x_{31} | S_{2l} \rangle}_{\frac{1}{2} |\langle x_{31} | S_{2l} \rangle|^2} + l^* r \langle S_{2l} | x_{31} \rangle \langle x_{31} | S_{2r} \rangle + \\
 &\quad + r^* l \langle S_{2r} | x_{31} \rangle \langle x_{31} | S_{2l} \rangle + \underbrace{r^* r \langle S_{2r} | x_{31} \rangle \langle x_{31} | S_{2r} \rangle}_{\frac{1}{2} |\langle x_{31} | S_{2r} \rangle|^2} . \quad (5.18)
 \end{aligned}$$

In Abb. 5.6 auf der nächsten Seite ist die Wahrscheinlichkeit  $W(x) = (5.18)$  dafür, das Neutron an der Position  $x$  zu detektieren, als rote Kurve eingetragen, außerdem in blau und grün die Beiträge der verschiedenen Summanden in (5.18). Bei der Berechnung dieser Kurven wurde angenommen, dass der Abstand der beiden Spalte (Mitte zu Mitte) drei mal so groß ist wie ihre Breite.<sup>2</sup>

Es lohnt sich, *sehr* genau zu betrachten, wie die rote Kurve zustande kommt. Die blaue Kurve ist die Summe des ersten und des vierten Summanden in (5.18). Beim Betragsquadrat  $|\langle x | S_{2l} \rangle|^2$  ist das Neutron eindeutig vom linken Spalt zur Detektorposition  $x$  gekommen, beim Betragsquadrat  $|\langle x | S_{2r} \rangle|^2$  eindeutig vom rechten Spalt. Diese beiden Terme sind immer positiv, und tragen nicht

<sup>2</sup> für Physiker: Die blaue Linie ist  $\sin^2(x)/x^2$ , also das Quadrat der „Spaltfunktion“. Die rote Linie ist  $\cos^2(3x) \sin^2(x)/x^2$ .

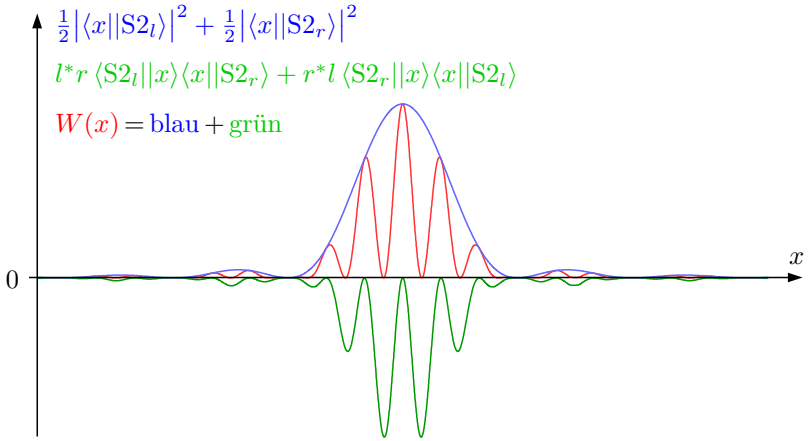


Abb. 5.6: Die Wahrscheinlichkeit  $W(x)$  dafür, das Neutron an der Position  $x$  zu detektieren

zur Interferenz zwischen den beiden Möglichkeiten (linker Spalt oder rechter Spalt) bei. Die Interferenz wird durch die „gemischten“ Terme – also den zweiten und den dritten Summanden in (5.18) – beschrieben, in denen sowohl  $S_{2_l}$  als auch  $S_{2_r}$  vorkommt. Welchen Wert diese Terme haben, das hängt davon ab wie groß der Unterschied der Weglängen vom linken bzw. rechten Spalt bis zur Position  $x$  des Detektors ist. Wenn der Unterschied der Weglängen gleich

$$0, \pm\lambda, \pm2\lambda, \pm3\lambda, \dots$$

ist, wobei  $\lambda$  die Wellenlänge des Neutrons ist, dann gibt es an dieser Stelle ein Interferenz-Maximum. Wenn der Unterschied der Weglängen jedoch gleich

$$\pm\lambda/2, \pm3\lambda/2, \pm5\lambda/2, \dots$$

ist, dann gibt es an dieser Stelle ein Interferenz-Minimum, siehe Abb. 2.4 auf Seite 28. Es ist plausibel dass es an der Stelle der  $x$ -Achse, die von beiden Spalten gleich weit entfernt ist, also im

Zentrum der Interferenzstruktur, stets ein Maximum gibt, siehe auch Abb. 2.10 auf Seite 41.

### 5.3 Messungen in der Quantentheorie

Dieser Abschnitt ist nicht viel mehr als eine Zusammenfassung dessen, was bereits in den beiden vorangegangenen Abschnitten erklärt wurde. Weil das Thema „Messung“ so wichtig ist lohnt es sich aber, die wesentlichen Punkte nochmals übersichtlich zusammenzustellen.

Das Messgerät stellt nicht fest, welchen Zustandsvektor (oder welche sonstige Eigenschaften) das untersuchte Quantenobjekt vor der Messung hatte, sondern es prägt dem Quantenobjekt einen seiner Eigenvektoren auf. (5.19a)

Eine alternative Sprechweise ist, dass das Messgerät das Objekt in einem seiner Eigenzustände präpariert. Jedes Messgerät hat nur einen begrenzten Vorrat von Eigenvektoren, die es dem Quantenobjekt aufprägen kann. Beim Beispiel der Polarisationsmessung im vorigen Abschnitt (siehe Abb. 5.5 auf Seite 113) wurde das Photon in einem der beiden Zustände  $|x\rangle$  oder  $|y\rangle$  präpariert, und das Neutron wurde vom Detektor in einem seiner 87 Eigenzustände  $|x_1\rangle, |x_2\rangle, \dots, |x_{87}\rangle$  präpariert.

Nicht jedes mögliche Messergebnis ist gleich wahrscheinlich. Vielmehr wird die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Messergebnisses durch die Born'schen Regel (5.9) festgelegt:

Born'sche Regel: Ein Messgerät wird einem Quantenobjekt, dessen Zustandsvektor vor der Messung  $|q\rangle$  ist, mit der Wahrscheinlichkeit

$$W_j = |\langle M_j || q \rangle|^2$$

seinen Eigenvektor  $|M_j\rangle$  aufprägen, d. h. das Objekt im Zustand  $|M_j\rangle$  präparieren. (5.19b)

Im Formalismus der Quantentheorie sind die Eigenvektoren der Messgeräte Elemente von *Vektorräumen*, die genau so viele Dimensionen haben wie das Messgerät Eigenvektoren hat. Das sind natürlich abstrakte mathematische Räume, die nichts mit dem dreidimensionalen Ortsraum zu tun haben, in dem wir leben. Den zweidimensionalen Raum der Vektoren  $|x\rangle$  und  $|y\rangle$  kann man sich leicht vorstellen, und auch – wie z. B. in Abb. 5.2 auf Seite 106 – auf Papier zeichnen. Aber niemand kann sich einen 87-dimensionalen Raum anschaulich vorstellen. Der formale mathematische Umgang mit dem abstrakten 87-dimensionalen Raum der Eigenvektoren des Neutronendetektors ist jedoch nicht schwieriger als der formale mathematische Umgang mit dem dreidimensionalen Ortsraum.

Die Eigenvektoren von Messgeräten werden in der Quantentheorie so konstruiert, dass folgendes gilt:

Alle Eigenvektoren eines Messgeräts sind zueinander orthogonal: $\langle M_j    M_k \rangle = 0 \quad \text{falls } k \neq j$ $\langle M_j    M_k \rangle = 1 \quad \text{falls } k = j$	(5.19c)
--	---------

## 5.4 Wie die Quantentheorie entdeckt wurde

Max Planck hatte seine „glücklich erratene Interpolationsformel“ (3.3) für das Spektrum der Schwarzen Strahlung im Jahr 1900 gefunden. Viele Jahre lang stand diese Formel zusammenhanglos im Raum, sie ließ sich in keiner Weise in die damals bekannten physikalischen Theorien einfügen. Das Atommodell [32] von Niels Bohr (1885–1962), in dem die Elektronen um den Atomkern kreisen wie Planeten um die Sonne, stammte aus dem Jahr 1913, und war ebenfalls keine Theorie, sondern eben ein Modell mit vielen Lücken, Ungereimtheiten, und inneren Widersprüchen. Die Quantentheorie wurde erst 1925 entdeckt, dann aber gleich zwei mal.

Der erste, der sie fand, war Werner Heisenberg (1901–1976), damals 23-jähriger Assistent von Max Born (der später die Born'sche

Regel entdeckte) in Göttingen. Heisenberg wurde Anfang Juni 1925 von einem derartig massiven Heuschnupfen geplagt, dass er Born um Urlaub bitten und für zehn Tage nach Helgoland flüchten musste. Dort konnte er ungestört daran arbeiten, nach einer besseren Alternative zu Bohrs Atommodell zu suchen.

Kernpunkt seiner Überlegungen war, dass die Bahnen der Elektronen um den Atomkern einerseits in Bohrs Modell eine zentrale Rolle spielten, andererseits aber in den Beobachtungen der Experimentatoren überhaupt nicht vorkamen. Kein Mensch hatte jemals ein Elektron um einen Atomkern kreisen sehen. Heisenberg hoffte zu besseren Ergebnissen zu gelangen, wenn er sämtlichen unbeobachteten Ballast aus dem Modell entfernte, und sich ganz auf das konzentrierte was die Experimentatoren wirklich sahen. Was die Experimentatoren wirklich sahen waren die Lage der Spektrallinien (bei welchen Wellenlängen absorbieren Atome und Moleküle Licht, und bei welchen Wellenlängen nicht?), und ihre Intensität (warum sind manche Spektrallinien sehr stark, und andere nur sehr schwach?).

Es gelang Heisenberg tatsächlich, die einfachsten aller Spektren, nämlich die Vibrationsspektren zweiatomiger Moleküle, durch Arrangements von Zahlen zu beschreiben, die auf einer eigenartigen Systematik basierten. Heisenberg nannte sie einfach „Zahlenschemata“. Als er damit nach Göttingen zurück kehrte, staunte Born nicht schlecht. Auf solche Ideen war in der Atomphysik noch niemand gekommen. Es stellte sich heraus dass es sich bei Heisenbergs Zahlenschemata um etwas handelte, was die Mathematiker als Matrizen zu bezeichnen pflegen. Heisenbergs neuartige Quantenmechanik wurde deshalb auch als Matrizenmechanik bezeichnet.

In den folgenden Monaten arbeiteten Heisenberg, Born, und Pascual Jordan (1902–1980), ein anderer Assistent von Born, die Matrizenmechanik weiter aus. Von den bekannten Theorien der Klassischen Physik unterschied sich die Matrizenmechanik vor

allem durch vier Eigenarten:

- \* Erstens beruhte sie auf einer nicht-kommutativen Algebra. Wenn man zwei Matrizen  $A$  und  $B$  miteinander multipliziert, dann ist im allgemeinen  $AB \neq BA$ .
- \* Die Matrizenmechanik kann nicht mit reellen Zahlen allein formuliert werden. Komplexe Zahlen sind unverzichtbar.
- \* Seit Newtons Tagen bildeten Differentialgleichungen das Rückgrat aller physikalischen Theorien. Dagegen beruht die Matrizenmechanik auf der Transformation von Matrizen. Das ist ein außerordentlich mühsames Geschäft im Vergleich zur eleganten Technik der Differentialgleichungen.
- \* Die Matrizenmechanik war ein *total* abstrakter mathematischer Formalismus. Niemand konnte sich anschaulich vorstellen was eigentlich bei Quantenphänomenen vor sich geht, auch Heisenberg nicht.

Erwin Schrödinger (1887–1961), damals Professor für Theoretische Physik an der Universität Zürich, fand Heisenbergs Matrizenmechanik so „schrecklich“, dass er seinen Weihnachtsurlaub 1925/26 der Aufgabe widmete, eine „schönere“ Quantentheorie zu entwickeln. Und er war erfolgreich! Anders als Heisenberg hatte Schrödinger ein deutliches Bild der atomaren Vorgänge im Sinn. Er interpretierte de Broglies Wellentheorie der Materie wortwörtlich, und überlegte sich wie Elektronenwellen im Atom aussehen können.

Wenn ein Musiker das Waldhorn spielt, dann kann er nur eine diskrete Menge von „Naturtönen“ hervorbringen, weil die Länge des Horns ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge der Schallwelle sein muss. Wenn er Zwischentöne spielen will, dann muss er seine Faust in den Schalltrichter des Horns stopfen, um die Länge des Rohrs passend zu verkürzen. So wie die Schallwelle ins Rohr des Waldhorns passen muss, so muss die Elektronenwelle, die durch elektrostatische Kräfte an den Atomkern gebunden ist, in den

Raum passen der ihr zur Verfügung steht.

Es gelang Schrödinger, diese Idee mathematisch präzise zu formulieren und in eine Differentialgleichung zu übersetzen. Als Lösung dieser Differentialgleichung, die fortan als Schrödingergleichung bezeichnet wurde, erhielt er tatsächlich das Spektrum des Wasserstoff-Atoms. Entsprechend groß war die allgemeine Begeisterung, die aber alsbald jüher Ernüchterung wich.

Als Schrödinger nämlich die Spektren von Atomen mit mehreren Elektronen berechnete, da bemerkte er dass die Elektronenwellen nicht im dreidimensionalen Ortsraum um den Atomkern schwingen, sondern in einem abstrakten mathematischen Raum, der mit jedem zusätzlichen Elektron um drei Dimensionen anwächst. Weil der abstrakte mathematische Raum beim Wasserstoff-Atom nur 3-dimensional ist (weil das Wasserstoff-Atom nur ein einziges Elektron hat), hatte Schrödinger ihn irrtümlich mit dem dreidimensionalen Ortsraum verwechselt.

Die Quantentheorie blieb also auch in Schrödingers Formulierung ziemlich abstrakt. Und die anderen Eigenheiten der Matrizenmechanik, nämlich eine nicht-kommutative Algebra und die Notwendigkeit komplexer Zahlen, tauchten auch in Schrödingers Theorie wieder auf. Im Frühjahr 1926 stellte Schrödinger schließlich fest, dass seine „Wellenmechanik“ und Heisenbergs „Matrizenmechanik“ letztlich mathematisch vollkommen äquivalent waren. Egal ob man ein physikalisches Problem per Matrizenmechanik oder per Wellenmechanik berechnete, aufgrund der mathematischen Äquivalenz musste immer das gleiche Ergebnis rauskommen. Es war so als hätten Heisenberg und Schrödinger genau den gleichen Text geschrieben, nur der eine auf chinesisch und der andere auf japanisch.

Inhaltlich waren beide Theorien gleichwertig, aber formal war Schrödingers Differentialgleichungs-Formalismus weitaus eleganter und effizienter als Heisenbergs schwerfälligiger Matrizen-Formalismus.

Also schwenkten auch die Göttinger Physiker (alle anderen sowieso) dankbar auf Schrödingers Differentialgleichung ein, während die Matrizenmechanik nach knapp einem Jahr Lebensdauer auf nimmer Wiedersehen von der Bildfläche verschwand.

Neben den bereits genannten (Heisenberg, Schrödinger, Born, Jordan) spielten auch Wolfgang Pauli (1900–1958), damals Professor für Theoretische Physik an der Universität Hamburg, und Paul Dirac (1902–1984), damals Doktorand an der Universität Cambridge (GB), bei der Entwicklung der jungen Quantentheorie herausragende Rollen. In Diracs Händen mutierten Schrödingers anschauliche Wellenfunktionen zu den abstrakten  $|\text{Zustandsvektoren}\rangle$ , die wir im ersten Teil dieses Kapitels kennengelernt haben. Und die Elemente von Heisenbergs Matrizen entpuppten sich als  $\langle \text{Projektions} || \text{amplituden} \rangle$  auf diese Zustandsvektoren.

Mitte 1926 hatten die Physiker auf diese Weise eine mathematische Maschinerie in der Hand, die reihenweise physikalische Ergebnisse ausspuckte die sich allesamt bei der experimentellen Prüfung als korrekt erwiesen. Aber niemand hatte das Gefühl wirklich zu „verstehen“, was denn nun bei Quantenphänomenen tatsächlich vor sich geht.

Das war für die Physiker eine völlig neuartige Erfahrung. Bei allen Theorien der Klassischen Physik hatten sie zunächst eine mehr oder weniger klare Vorstellung von den Zusammenhängen gehabt, und dann versucht diesen Vorstellungen eine möglichst präzise und einfache mathematische Form zu geben. Bei der Quantentheorie war es genau umgekehrt. Der mathematische Formalismus lag fix und fertig auf dem Tisch, es war aber keine anschauliche Erklärung damit verknüpft. Schrödingers anschauliches Bild von den Elektronenwellen hatte sich als Irrtum erwiesen, und Heisenbergs Zahlenschemata waren von Anfang an eine total abstrakte mathematische Konstruktion.

Wieder war es Heisenberg, der Bewegung in die stockende Ent-

wicklung brachte. Diesmal aber nicht allein, sondern gemeinsam mit Bohr, dessen Anteil an der „Kopenhagener Deutung der Quantentheorie“ mindestens genau so groß war wie der Anteil Heisenbergs. Heisenberg verbrachte von 1924 bis 1927 jedes Jahre mehrere Monate an Bohrs Institut in Kopenhagen. Im Winter 1926/27 erarbeiteten beide Physiker dort gemeinsam die anschauliche Interpretation des mathematischen Formalismus der Quantentheorie, die später als „Kopenhagener Deutung“ bekannt wurde.

Heisenberg hatte im Herbst 1920 an der Universität München das Studium der Physik begonnen. Statt zunächst einmal gründlich die Klassische Physik kennen zu lernen, hatte er sich sofort auf die theoretische Atomphysik konzentriert, die dort von Arnold Sommerfeld (1868–1951) gelehrt wurde. Diese Vernachlässigung der Klassischen Physik hatte übrigens zur Folge, dass er bei der Abschlussprüfung am Ende seines Studiums um ein Haar durchgefallen wäre, und nur mit der schlechtest-möglichen Note bestand.

Im Frühsommer 1922 reiste Sommerfeld zu einer Tagung nach Göttingen, bei der Niels Bohr mehrere Vorträge über den aktuellen Stand der Atomphysik hielt. Heisenberg durfte Sommerfeld begleiten. Nach einem Vortrag, bei dem Bohr über eine Arbeit berichtete die er einige Monate zuvor mit seinem Assistenten Kramers veröffentlicht hatte, stand Heisenberg auf und äußerte Zweifel und Einwände. Heisenberg war sich seiner Sache sicher, weil er kurz zuvor über diese Arbeit in Sommerfelds Seminar referiert hatte.

Bohr erkannte schnell die außergewöhnliche Begabung des vorwitzigen Studenten, und lud ihn zu einem längeren Spaziergang über den Hainberg am Stadtrand von Göttingen ein, um die Dinge in Ruhe zu besprechen. „Dieser Spaziergang hat auf meine spätere wissenschaftliche Entwicklung den stärksten Einfluss ausgeübt, oder man kann vielleicht besser sagen, daß meine eigentliche wissenschaftliche Entwicklung erst mit diesem Spaziergang begonnen hat“, erinnerte Heisenberg sich Jahrzehnte später in seiner

Autobiographie [33].

Bohr habe auf diesem Spaziergang unter anderem gesagt: „In der bisherigen Physik konnte man, wenn man ein neues Phänomen erklären wollte, unter Benützung der vorhandenen Begriffe und Methoden versuchen, das neue Phänomen auf die schon bekannten Erscheinungen oder Gesetze zurückzuführen. In der Atomphysik aber wissen wir ja schon, dass die bisherigen Begriffe dazu sicher nicht ausreichen. Und daher wird es auch keine anschauliche Beschreibung der Struktur des Atoms geben können, da eine solche – eben weil sie anschaulich sein sollte – sich der Begriffe der klassischen Physik bedienen müsste, die aber das Geschehen nicht mehr ergreifen. Sie verstehen dass man mit einer solchen Theorie eigentlich etwas ganz Unmögliches versucht. Denn wir sollten etwas über die Struktur des Atoms aussagen, aber wir besitzen keine Sprache, mit der wir uns verständlich machen könnten.“

„Wenn die innere Struktur der Atome einer anschaulichen Beschreibung so wenig zugänglich ist wie Sie sagen,“ habe Heisenberg zurückgefragt, „wenn wir eigentlich keine Sprache besitzen, mit der wir über diese Strukturen reden könnten, werden wir dann die Atome überhaupt jemals verstehen?“ „Doch,“ habe Bohr geantwortet, „aber wir werden dabei erst lernen, was das Wort ‚verstehen‘ bedeutet.“

Der letzte Satz ist charakteristisch für Bohr, und er ist charakteristisch für die Kopenhagener Deutung der Quantentheorie. Denn im Grunde bildet die Analyse des Wortes ‚verstehen‘ tatsächlich den Kern dieser Deutung, über die in den folgenden Kapiteln noch einiges zu sagen sein wird.

Wir werden diese Deutung wesentlich leichter verstehen, und vor allem auch beim Thema „der Ort eines Teilchens als relationale Eigenschaft“ wesentlich voran kommen, wenn wir die „Verschränkung“ von Zustandsvektoren kennen, die das Thema des folgenden Kapitels ist.

## 6 Verschränkung

Wenn ein Quantensystem aus mehreren Teilsystemen besteht, dann kann der Zustandsvektor des Gesamtsystems „verschränkt“ sein. Was das genau bedeutet, und welche Folgen das hat, werden wir in diesem Kapitel klären. Schrödinger, der diesen Begriff prägte, bezeichnete die Verschränkung als „nicht *einen*, sondern vielmehr *den* charakteristischen Zug der Quantenmechanik, der ihre vollständige Abkehr von der klassischen Denkweise erzwingt.“ [34] Das ist wohl nicht übertrieben. Wir werden die Merkwürdigkeiten der Phänomene, mit denen wir uns in den vorangegangenen Kapiteln befasst haben, durch die Analyse der Verschränkung nicht beseitigen können; aber wir werden sie präziser fassen und systematischer einordnen können als bisher.

Dieses Kapitel ist schwierig, weil es noch abstrakter als die vorangegangenen Kapitel ist. Wir werden nicht mehr mathematische Methoden der Quantentheorie benötigen als im vorigen Kapitel vorgestellt wurden, nämlich Zustandsvektoren und Projektionsamplituden. Aber diese beiden in hoher Dosis, die volle Dröhnung. Sorry, es geht nicht anders. Wo die Anschauung an ihre Grenzen stößt – und das tut sie beim Thema Verschränkung zweifellos – da kann uns nur noch die Mathematik weiterhelfen.

Die Anstrengung lohnt sich, weil aus der Analyse verschränkter Quantensysteme drei bedeutsame Erkenntnisse resultieren:

- \* Erstens kann man mithilfe verschränkter Systeme experimentell nachweisen, dass viele Eigenschaften, die wir gewöhnlich als Eigenschaften von Objekten betrachten, tatsächlich rela-

tionale Eigenschaften sind. Also nicht Eigenschaften, die ein einzelnes Objekt „an sich hat“, sondern Eigenschaften die durch Wechselwirkung zwischen diesem Objekt und geeigneten Messgeräten erzeugt werden.

- \* Zweitens werden wir Beweise dafür finden, dass die Natur in vielen Quantenphänomenen nichtlokal agiert.
- \* Drittens resultiert aus der Analyse verschränkter Quantensysteme der bereits in Kapitel 1 angekündigte Beweis dafür, dass die Ergebnisse von Messungen an Quantensystemen im Einzelfall<sup>1</sup> in aller Strenge **irrational** sind, dass sie also nicht durch frühere Ereignisse **determiniert** und deshalb mithilfe von (möglicherweise noch nicht entdeckten) Naturgesetzen berechenbar sind, sondern dass hier „echter“ Zufall am Werk ist.

Wie gewohnt werden wir uns so eng wie möglich an wichtige Experimente halten, die zum Thema Verschränkung durchgeführt wurden. Um diese Experimente verstehen zu können müssen wir uns vorab klar machen, was es mit der Richtungsquantelung des Drehimpulses auf sich hat.

## 6.1 Richtungs-Quantelung des Drehimpulses

Im Jahr 1922 führten Otto Stern (1888 – 1969) und Walther Gerlach (1889 – 1979) an der Universität Frankfurt ein Experiment durch [35], das in Abb. 6.1 auf der nächsten Seite skizziert wird:

In einer Vakuum-Kammer wird ein Strahl von Silber-Atomen<sup>2</sup> – wie durch den türkisen Pfeil angedeutet – auf einen Spalt gerich-

---

<sup>1</sup> Die statistische Verteilung der Ergebnisse einer großen Menge von Messungen an gleichartigen Quantensystemen kann man sehr genau berechnen, aber eben nicht das Ergebnis im Einzelfall. Das ist genau wie bei den Ergebnissen des Würfelspiels.

<sup>2</sup> Ag ist das chemische Zeichen für Silber, von (lateinisch) *argentum* = Silber.

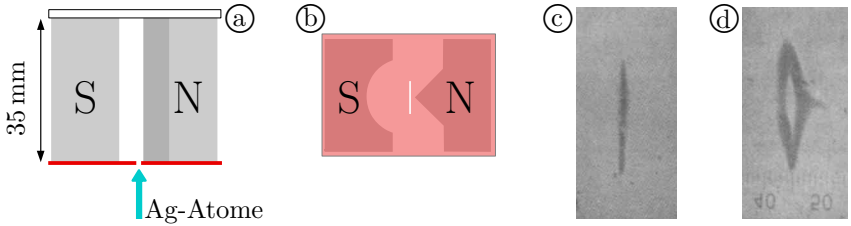


Abb. 6.1: Das Experiment von Stern und Gerlach

tet, der 0,8 mm hoch und ungefähr 0,03 mm bis 0,04 mm breit ist. 35 mm hinter dem Spalt trifft der Atomstrahl auf eine Glasplatte, auf der sich das Silber niederschlägt.

In 6.1(a) blickt man von oben auf das Experiment, in 6.1(b) von vorne (in Richtung des Atomstrahls) auf das Blech mit dem Spalt. Dieses Blech ist in 6.1(b) transparent gezeichnet, damit man die eigenartige Form der Polschuhe eines Elektromagneten erkennen kann, der sich zwischen dem Spalt und der Glasplatte befindet. Der Nordpol ist als spitze Schneide gefertigt, während in den Südpol eine breite runde Nut gefräst ist. Auf ihrem Flug vom Spalt zur Glasplatte bewegen sich die Silberatome dicht neben der Schneide des Nordpols.

6.1(c) zeigt den Niederschlag der Silberatome auf der Glasplatte bei ausgeschaltetem Elektromagneten, 6.1(d) bei eingeschaltetem Elektromagneten. Wenn man in 6.1(d) hineinzoomt, erkennt man unten im Bild die seitenverkehrte und auf dem Kopf stehende Skala des Mess-Okulars. 1 Skalenteil = 0,05 mm, d. h. die Strecke von 40 bis 50 ist genau 0,5 mm lang.

Die Aufspaltung der Linie des Silberniederschlags in 6.1(d) hat nichts mit Beugung und Interferenz von Atomen am Spalt zu tun. Das erkennt man allein schon daran, dass die Aufspaltung verschwindet wenn der Elektromagnet ausgeschaltet ist. Die de Broglie-Wellenlänge der Silberatome ist auch viel zu klein um mit einem so breiten Spalt nachweisbar zu sein. Die Aufspaltung der Linie in

6.1 ⓓ wird vielmehr als Nachweis für die Richtungs-Quantelung des Drehimpulses interpretiert.

Der **Drehimpuls** ist eine Erhaltungsgröße. Genau wie Energie und **Impuls** kann auch Drehimpuls nicht aus dem Nichts erscheinen und auch nicht im Nichts verschwinden. Ein Drehimpuls hat nicht nur einen Wert, sondern auch eine Richtung im Raum. Deshalb werden Drehimpulse in der Theorie durch Vektoren repräsentiert und mit Fettdruck gekennzeichnet. Wir werden im Folgenden für Drehimpulse den Buchstaben ***J*** verwenden.

Früher glaubte man dass der Betrag eines Drehimpulses jeden beliebigen Wert haben könne. Erst bei der Untersuchung der Spektren von Atomen und Molekülen wurde entdeckt, dass der Betrag jedes Drehimpulses, ohne Ausnahme, einen der **diskreten** Werte

$$|\mathbf{J}| = \sqrt{j(j+1)} \hbar \quad \text{mit } j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots \quad (6.1)$$

hat. In dieser Formel ist  $\hbar$  (sprich: ha quer) eine abkürzende Schreibweise für  $h/(2\pi)$ , wobei  $h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{kg m}^2/\text{s}$  die Planck'sche Konstante und  $\pi = 3,1415\dots$  das Verhältnis vom Umfang zum Durchmesser eines Kreises ist.  $j$  ist die Drehimpuls-Quantenzahl. Bei einem makroskopischen Kreisel ist die Quantenzahl  $j$  gigantisch groß, so dass man Änderungen von  $j$  nach  $j \pm 1$  überhaupt nicht bemerkt, und der Drehimpuls eine **kontinuierliche** Größe zu sein scheint.

Silberatome haben den kleinsten von Null verschiedenen Drehimpuls<sup>3</sup>, der laut (6.1) überhaupt möglich ist: Ihre Drehimpuls-Quantenzahl ist  $j_{\text{Ag}} = 1/2$ , so dass der Drehimpuls von Silberatomen den Wert

---

<sup>3</sup> für Physiker: Dies ist lediglich der Drehimpuls der Elektronenhülle des Silberatoms im Grundzustand. Sein Atomkern hat einen zusätzlichen Drehimpuls („Kernspin“) und ein zusätzliches magnetisches Moment, das aber mehr als zehntausend mal kleiner ist als das magnetische Moment der Elektronenhülle, und deshalb bei der Diskussion des Experiments von Stern und Gerlach getrost ignoriert werden kann.

$$|\mathbf{J}_{\text{Ag}}| \stackrel{(6.1)}{=} \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right)} \hbar = \frac{\sqrt{3}}{2} \hbar \quad (6.2)$$

hat.

Eng verbunden mit dem Drehimpuls ist eine weitere Eigenschaft des Silberatoms, nämlich ein magnetisches Dipolmoment. Das klingt komplizierter als es ist. Man kann sich die Silberatome als winzig kleine Magnetnadeln vorstellen. So wie die Magnetnadel eines Kompasses vom Magnetfeld der Erde in die Nord-Süd-Richtung gedreht wird, so wird auch das magnetische Dipolmoment eines Silberatoms in die Richtung eines äußeren Magnetfeldes gedreht. Das magnetische Dipolmoment  $\boldsymbol{\mu}_{\text{Ag}}$  des Silberatoms ist **proportional** zu seinem Drehimpuls  $\mathbf{J}_{\text{Ag}}$ :

$$\boldsymbol{\mu}_{\text{Ag}} = r \cdot \mathbf{J}_{\text{Ag}} \quad \text{mit } r = \text{konstant} < 0 \quad (6.3)$$

Welchen Wert die negative Konstante  $r$  genau hat, braucht uns nicht zu kümmern. Wir merken nur an:  $\boldsymbol{\mu}_{\text{Ag}}$  hat (wegen  $r < 0$ ) die umgekehrte Richtung wie der Drehimpuls  $\mathbf{J}_{\text{Ag}}$ , und ist winzig klein im Vergleich zum magnetischen Moment einer Kompass-Nadel. Weil das magnetische Dipolmoment  $\boldsymbol{\mu}_{\text{Ag}}$  nicht nur einen bestimmten Wert, sondern auch eine Richtung im Raum hat, wird es in der Theorie – wie der Drehimpuls – durch einen Vektor repräsentiert und mit Fettdruck gekennzeichnet.

Das Magnetfeld der Erde dreht eine Kompassnadel in die Nord-Süd-Richtung, es setzt aber nicht die gesamte Nadel in Richtung Nordpol oder in Richtung Südpol in Bewegung. Das liegt daran, dass der Nordpol der Nadel mit der gleichen Kraft zum magnetischen Südpol der Erde gezogen wird wie der Südpol der Nadel zum magnetischen Nordpol der Erde.<sup>4</sup> Das ändert sich aber, wenn das

<sup>4</sup> Gleichnamige Magnetpole stoßen sich ab, ungleichnamige Magnetpole ziehen sich an. Der magnetische Nordpol der Erde befindet sich derzeit in der Nähe des geographischen Nordpols im nördlichsten Kanada, und wandert mit einer Geschwindigkeit von etwa 50 km/Jahr Richtung Sibirien. Der Südpol der Magnetnadel eines Kompasses weist zum Nordpol des Magnetfeldes der Erde.

Magnetfeld nicht überall gleich stark ist, sondern an einem Ende der Magnetnadel stärker als am anderen.

Genau das erreichten Stern und Gerlach durch die besondere Form des Polschuhe ihres Magneten, die in Abb. 6.1 auf Seite 131 gezeichnet wurde. In der Nähe des spitz ausgeformten Nordpols ist das Magnetfeld viel stärker als auf der anderen Seite des Strahls, in Richtung Südpol. Wenn der Nordpol des magnetischen Dipolmoments eines Silberatoms zum Nordpol des Magneten gerichtet ist, dann wird der Nordpol des Atoms stärker vom Nordpol des Magneten abgestoßen als der Südpol des Atoms vom Südpol des Magneten. Also wird das Atom insgesamt in Richtung des Südpols des Magneten abgelenkt. Wenn dagegen der Südpol des magnetischen Dipolmoments eines Silberatoms zum Nordpol des Magneten gerichtet ist, dann wird das Atom in Richtung des Nordpols des Magneten abgelenkt.

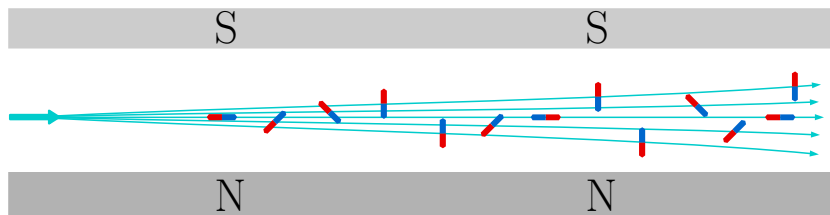


Abb. 6.2: Ablenkung der magnetischen Dipolmomente der Silberatome (blau = Nordpol, rot = Südpol) im inhomogenen Feld des Elektromagneten

In Abb. 6.2 ist das Prinzip skizziert. Dort sind die magnetischen Dipolmomente der Silberatome als Magnetnadeln mit blauem Nordpol und rotem Südpol dargestellt. Tatsächlich würde das Verfahren mit makroskopischen Magnetnadeln nicht funktionieren, denn das Feld des Elektromagneten würde sämtliche Nadeln gleich hinter dem Spalt so rotieren dass ihr Südpol zum Nordpol des Elektromagneten weist, und dann würden sämtliche Nadeln zum Nordpol des

Elektromagneten abgelenkt. Bei den Silberatomen verhält es sich anders, denn ihr magnetisches Dipolmoment ist so winzig klein, dass in der kurzen Flugzeit der Atome vom Spalt zur Glasplatte nahezu keines der Atome rotiert wird.

Wenn die magnetischen Momente der Silberatome beliebige Richtungen relativ zum Feld des Elektromagneten hätten, dann würde die schmale Linie von Abb. 6.1(c) bei eingeschaltetem Magnetfeld zu einem breiten Fleck aufgeweitet. Tatsächlich zeigt Abb. 6.1(d) aber eine Aufspaltung in zwei deutlich getrennte Linien. Dicht bei der scharfen Schneide ist die Ablenkung der einen Linie besonders stark ausgeprägt, in größerer Entfernung von der Schneide ist das Magnetfeld nicht inhomogen genug, um die beiden Linien zu trennen.

Wenn es statt eines breiten Flecks nur zwei deutlich voneinander getrennte Linien gibt, dann bedeutet das, dass die magnetischen Momente der Silberatome eben nicht in beliebige Richtungen des Raumes orientiert sind, sondern relativ zum Magnetfeld entweder die eine oder die andere von nur zwei möglichen Richtungen haben. Das wird als Richtungsquantelung bezeichnet. Wegen des Zusammenhangs (6.3) von magnetischem Moment und Drehimpuls der Silberatome bedeutet das Ergebnis von Stern und Gerlach zugleich, dass der Drehimpuls jedes Silberatoms relativ zum magnetischen Feld entweder die eine oder die andere von nur zwei möglichen

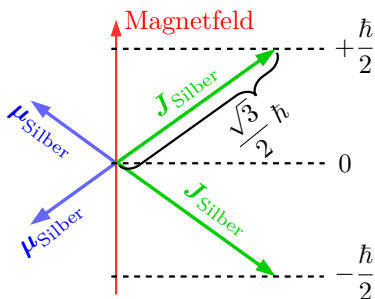


Abb. 6.3: Richtungsquantelung des Drehimpulses und des magnetischen Dipolmoments der Silberatome relativ zum Magnetfeld.

Richtungen hat.

Im Lauf der folgenden Jahre zeigte die genauere quantitative Untersuchung, dass der Drehimpuls eines Silberatoms im Magnetfeld stets so gerichtet ist, dass seine Projektion auf die Richtung des Magnetfeldes

$$+\frac{\hbar}{2} \quad \text{oder} \quad -\frac{\hbar}{2} \quad (6.4)$$

ist, siehe Abbildung 6.3 auf der vorherigen Seite. Auch dies ist der Spezialfall einer allgemeinen Regel: Wenn die Projektion eines

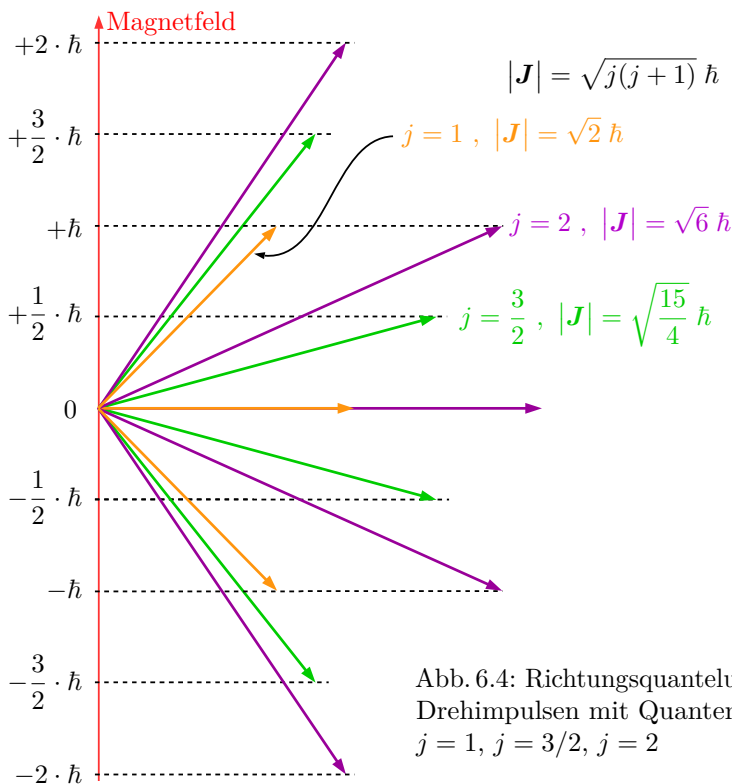


Abb. 6.4: Richtungsquantelung von Drehimpulsen mit Quantenzahlen  $j = 1$ ,  $j = 3/2$ ,  $j = 2$

Drehimpulses mit Quantenzahl  $j$  auf eine bestimmte Richtung des Raums gemessen wird, dann hat sie stets einen der Werte

$$j \hbar, (j - 1) \hbar, (j - 2) \hbar, \dots, -j \hbar. \quad (6.5)$$

Die Richtungsquantelung für einen Drehimpuls mit  $j = 1/2$  ist in Abb. 6.3 auf Seite 135 illustriert, die Richtungsquantelung von Drehimpulsen mit Quantenzahlen  $j = 1$ ,  $j = 3/2$ , und  $j = 2$  in Abb. 6.4 auf der vorherigen Seite.

## 6.2 Messung und Realität

Und was sind die Projektionen der Drehimpulse auf die anderen Richtungen? Wenn beispielsweise die in Abb. 6.4 rot gezeichnete Richtung des Magnetfelds identisch mit der  $x$ -Achse ist, was sind dann die Projektionen von  $\mathbf{J}$  auf die  $y$ -Achse und die  $z$ -Achse?

Die Antwort der Quantentheorie ist klar, wird aber sicher nicht jeden zufrieden stellen: Laut Quantentheorie gibt es keine Projektionen auf andere Richtungen. Die Projektion des Drehimpulses eines Quantenobjekts auf eine Achse ist einer der Werte (6.5) *falls* diese Projektion durch eine Messung (z. B. mithilfe eines Stern-Gerlach Magnetens) festgestellt wurde. Besser sollte man sagen: *falls* diese Projektion durch eine Messung erschaffen wurde.

Das Wort Messung hat in der Quantentheorie eine andere Bedeutung als in der Klassischen Physik. In der Klassischen Physik stellt man bei der Messung eine Eigenschaft eines Objekts fest, die dieses Objekt auch schon vor der Messung besessen hat, und nach der Messung weiterhin behält. Anders in der Quantentheorie: Nur wenn der Zustandsvektor des Objekts bereits vor der Messung mit einem der Eigenvektoren des Messgeräts identisch war, bleibt der Zustandsvektor des Objekts unverändert. Andernfalls wird das Objekt in einem der Eigenzustände des Messgeräts präpariert. In welchem? Das entscheidet der Zufall. Nach der Born'schen Regel

(5.19b) kann man die Wahrscheinlichkeit dafür dass das Objekt in einem bestimmten Eigenzustand des Messgeräts präpariert wird dadurch berechnen, dass man den Zustandsvektors des Objekts (vor der Messung) auf diesen Eigenzustand des Messgeräts projiziert. Das Betragsquadrat der Projektionsamplitude ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

Der Stern-Gerlach-Magnet ist ein Messgerät, das die Projektion von Drehimpulsen auf die Richtung des Magnetfeldes misst. Das Magnetfeld hat immer eine einzige, bestimmte Richtung. Es kann nicht mehrere Richtungen gleichzeitig haben. Wenn man an der gleichen Stelle einen Magneten in  $x$ -Richtung und einen weiteren Magneten in  $y$ -Richtung justiert wie in Abb. 6.5 (a) skizziert, dann hat das Gesamt-Magnetfeld die Richtung  $45^\circ$  zwischen diesen beiden Raumachsen, und man misst mit diesem Doppel-Magneten ausschließlich die Projektion des Drehimpulses des Objekts auf diese  $45^\circ$ -Richtung, aber nicht seine Projektion auf die  $x$ -Richtung und auch nicht seine Projektion auf auf die  $y$ -Richtung.

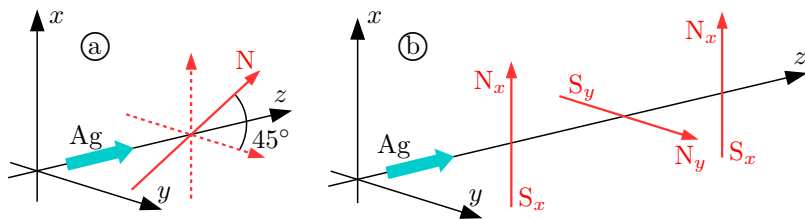


Abb. 6.5: Messung mit mehreren Stern-Gerlach-Magneten

Wenn man dagegen das Objekt, wie in Abb. 6.5 (b) skizziert, zunächst durch einen in  $x$ -Richtung justierten und anschließend durch einen in  $y$ -Richtung justierten Stern-Gerlach-Magneten laufen lässt, dann macht die zweite Messung das Ergebnis der ersten vollständig zunichte. Schauen wir uns den Sachverhalt am Beispiel des Experiments von Stern und Gerlach genau an: Ein Silberatom

kommt im Zustand  $|Ag\rangle$  zum ersten Magneten. Dieser Magnet ist in  $x$ -Richtung justiert. Seine Eigenzustände sind  $|N_x\rangle$  und  $|S_x\rangle$ , wobei  $N_x$  bzw.  $S_x$  für Ablenkung des Atoms Richtung Nord- bzw. Südpol steht.

In (5.19c) habe ich darauf hingewiesen, dass die Eigenvektoren eines Messgeräts stets zueinander **orthogonal** sind. Also sind im abstrakten mathematischen Raum der Eigenvektoren eines Stern-Gerlach-Magneten  $|N_x\rangle$  und  $|S_x\rangle$  orthogonal, d. h. es ist

$$\langle N_x || S_x \rangle \stackrel{(5.19c)}{=} 0, \quad \langle N_x || N_x \rangle = \langle S_x || S_x \rangle \stackrel{(5.19c)}{=} 1. \quad (6.6)$$

Man darf den Raum der Eigenvektoren des Messgeräts also nicht mit dem Ortsraum verwechseln, in dem die Richtungen  $N_x$  und  $S_x$  nicht orthogonal sondern antiparallel sind.

Um zu berechnen was mit dem Silberatom am ersten Magneten passiert, projizieren wir wie üblich zunächst den Zustandsvektor  $|Ag\rangle$  des Silberatoms auf die Eigenvektoren des Messgeräts (d. h. des Magneten):

$$|Ag\rangle = |N_x\rangle \langle N_x || Ag \rangle + |S_x\rangle \langle S_x || Ag \rangle \quad (6.7)$$

Wem der Sinn dieser Gleichung nicht 100%ig klar ist, der sollte nochmal sorgfältig Abb. 5.2 auf Seite 106 anschauen. Man braucht in 5.2© nur  $|p\rangle$  durch  $|Ag\rangle$  zu ersetzen, und  $|a\rangle$  und  $|b\rangle$  durch die Eigenvektoren  $|N_x\rangle$  und  $|S_x\rangle$  des Stern-Gerlach-Magneten zu ersetzen, und schon ist 5.2© eine präzise Darstellung der Gleichung (6.7).

Aus den Projektionsamplituden in (6.7) liest man ab, dass das Silberatom nach der Born'schen Regel (5.19b) mit der Wahrscheinlichkeit

$$W(N_x) = \left| \langle N_x || Ag \rangle \right|^2$$

in Richtung Nordpol des Magneten abgelenkt wird, und mit der Wahrscheinlichkeit

$$W(S_x) = \left| \langle S_x | |Ag\rangle \right|^2$$

in Richtung Südpol. Nehmen wir an, es wird bei einer Durchführung des Experiments tatsächlich in Richtung Nordpol abgelenkt. Dann wurde es vom ersten Magneten im Zustand  $|N_x\rangle$  präpariert. Die Projektion dieses Zustandsvektors auf die Eigenvektoren des zweiten Magneten, der in  $y$ -Richtung justiert ist (siehe Abb. 6.5), ist

$$|N_x\rangle = |N_y\rangle \langle N_y | |N_x\rangle + |S_y\rangle \langle S_y | |N_x\rangle .$$

Also wird das Silberatom nach der Born'schen Regel vom zweiten Magneten mit der Wahrscheinlichkeit

$$W(N_y) = \underbrace{\left| \langle N_y | |N_x\rangle \right|^2}_{1/2} \quad \text{bzw.} \quad W(S_y) = \underbrace{\left| \langle S_y | |N_x\rangle \right|^2}_{1/2}$$

in Richtung Nord- bzw. Südpol des zweiten Magneten abgelenkt. Nehmen wir an, es wird bei einer Durchführung des Experiments tatsächlich in Richtung Nordpol abgelenkt, vom zweiten Magneten also im Zustand  $|N_y\rangle$  präpariert. Hat es jetzt noch die Eigenschaft, dass die Projektion seines Drehimpulses in einem in  $x$ -Richtung justierten Magnetfeld in Richtung Nordpol zeigt? Es hat diese Eigenschaft nicht mehr. Um das zu sehen, montieren wir hinter den zweiten Stern-Gerlach-Magneten einen dritten, der wieder in  $x$ -Richtung justiert ist (siehe Abb. 6.5), und projizieren den aktuellen Eigenvektor  $|N_y\rangle$  des Atoms auf die Eigenvektoren des dritten Magneten:

$$|N_y\rangle = |N_x\rangle \langle N_x | |N_y\rangle + |S_x\rangle \langle S_x | |N_y\rangle$$

Nach der Born'schen Regel wird das Silberatom mit der Wahrscheinlichkeit

$$W(N_x) = \underbrace{\left| \langle N_x | N_y \rangle \right|^2}_{1/2} \quad \text{bzw.} \quad W(S_x) = \underbrace{\left| \langle S_x | N_y \rangle \right|^2}_{1/2}$$

vom dritten Magneten in Richtung Nord- bzw. Südpol dieses Magneten abgelenkt. Das Atom hat also am dritten Magneten – trotz des Messergebnisses am ersten Magneten – keine Präferenz mehr für Ablenkung Richtung Nordpol.

Wenn man dagegen den zweiten Magneten aus dem Experiment herausgenommen hätte, dann wäre das Atom vom ersten Magneten im Zustand  $|N_x\rangle$  direkt zum dritten Magneten gekommen. Die Projektion seines Zustandsvektors auf die Eigenvektoren des dritten Magneten wäre laut (6.6)

$$|N_x\rangle = |N_x\rangle \underbrace{\langle N_x | N_x \rangle}_1 + |S_x\rangle \underbrace{\langle S_x | N_x \rangle}_0 \quad (6.8)$$

gewesen, und es wäre nach der Born'schen Regel mit der Wahrscheinlichkeit

$$W(N_x) = \left| \langle N_x | N_x \rangle \right|^2 = 1 \quad \text{bzw.} \quad W(S_x) = \left| \langle S_x | N_x \rangle \right|^2 = 0$$

in Richtung Nord- bzw. Südpol abgelenkt worden. Der dritte Magnet hätte das Ergebnis des ersten bei diesem Aufbau des Experiments mit Sicherheit ( $W(N_x) = 1$ ) bestätigt. In diesem Sinn kann man sagen, dass das Atom, nachdem es vom ersten Stern-Gerlach-Magneten im Zustand  $|N_x\rangle$  präpariert wurde, „wirklich“ die Eigenschaft  $N_x$  hat.

Die Eigenschaften  $N_x$  oder  $S_x$  bzw.  $N_y$  oder  $S_y$  des Silberatoms werden laut Quantentheorie durch die Messgeräte erschaffen. Weil es kein Messgerät gibt, das die Projektion eines Drehimpulses auf die  $x$ -Achse UND die Projektion des Drehimpulses auf die  $y$ -Achse zugleich erschaffen kann, kann auch kein Silberatom diese Eigenschaften zugleich haben – falls die Quantentheorie richtig ist, d. h. falls die Projektionen des Drehimpulses tatsächlich erst durch die Messung erschaffen werden, und nicht schon vorher existieren.

### 6.3 EPR = Einstein, Podolski, Rosen

Albert Einstein war überzeugt, dass die Quantentheorie in dieser Hinsicht eben nicht richtig ist. Genauer gesagt, dass die Quantentheorie an dieser Stelle unvollständig ist. Das versuchte er – gemeinsam mit seinen Mitarbeitern Boris Podolski (1896 – 1966) und Nathan Rosen (1909 – 1995) – in einem Artikel zu beweisen, der 1935 unter dem Titel „Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?“ [36] veröffentlicht wurde. Es war der letzte von Einsteins zahlreichen und bedeutenden Beiträgen zur Quantentheorie, und der einzige der einen Fehler enthielt, oder deutlicher gesagt: Der einzige, mit dem Einstein total daneben lag. Weil dieser Artikel in der physikalischen Literatur unglaublich häufig zitiert und diskutiert wird, hat es sich eingebürgert die Namen der drei Autoren als EPR abzukürzen.

Die Frage nach der Vollständigkeit der Quantentheorie war nur eine **rhetorische**. EPR ließen in ihrem Artikel keinen Zweifel daran, dass sie die Quantentheorie für unvollständig hielten, und zwar für unvollständig genau im Hinblick auf Eigenschaften von Quantenobjekten, denen die Quantentheorie merkwürdigerweise nur dann einen Wert zuordnet, wenn dieser Wert durch eine Messung „erschaffen“ wurde.

EPR wollten mit ihrem Artikel beweisen, dass Eigenschaften wie beispielsweise der genaue Ort eines Teilchens, oder die Projektionen des Drehimpulses von Silberatomen auf jede beliebige Raumachse, sehr wohl zu jeder Zeit genau definierte Werte haben, auch wenn diese Werte (noch) nicht gemessen wurden. Kurioserweise entstand aber gerade aus der Analyse ihres Arguments schließlich der experimentelle Beweis dafür, dass es sich eben doch genau so verhält: Die Projektion von Drehimpulsen auf bestimmte Raumachsen, und zahlreiche andere Eigenschaften von Quantenobjekten (als besonders spektakuläres Beispiel ist uns bereits der „Ort“ eines Teilchens begegnet) werden erst durch die Messung erschaffen. Vor

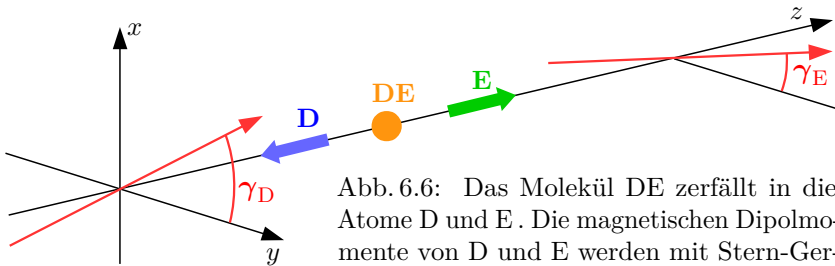


Abb. 6.6: Das Molekül DE zerfällt in die Atome D und E. Die magnetischen Dipolmomente von D und E werden mit Stern-Gerlach Magneten gemessen, die um die Winkel  $\gamma_D$  bzw.  $\gamma_E$  gegen die  $y$  Achse gedreht sind.

der Messung sind sie nicht nur unbekannt, sondern sie existieren schlichtweg nicht.

EPR untersuchten das Thema in sehr allgemeiner und grundsätzlicher Weise. Wir werden ihr Argument aber viel leichter anhand eines konkreten Beispiels verstehen, das David Bohm (1917–1992) in seinem Lehrbuch der Quantentheorie [37] diskutierte. Bohm betrachtete ein hypothetisches DE-Molekül, dessen Drehimpuls Null ist. Das Molekül ist instabil und zerfällt in die Atome D und E, siehe Abb. 6.6. Die drei Teilchen haben in Bohms Modell die Drehimpuls-Quantenzahlen

$$j_{DE} = 0 \quad , \quad j_D = \frac{1}{2} \quad , \quad j_E = \frac{1}{2} . \quad (6.9)$$

Also haben die Drehimpulse die Beträge

$$|\mathbf{J}_{DE}| \stackrel{(6.1)}{=} \sqrt{j(j+1)} \hbar = 0 \quad (6.10a)$$

$$|\mathbf{J}_D| = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 1\right)} \hbar = \frac{\sqrt{3}}{2} \hbar \quad (6.10b)$$

$$|\mathbf{J}_E| = \frac{\sqrt{3}}{2} \hbar . \quad (6.10c)$$

Wenn die davonfliegenden Atome D und E mit Stern-Gerlach-Magneten untersucht werden, deren Nord-Süd-Achsen gleich justiert

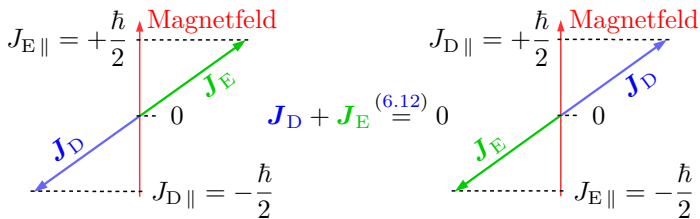


Abb. 6.7: Die beiden möglichen Projektionen der Drehimpulse der Atome **D** und **E** auf die Richtung des externen Magnetfeldes

sind ( $\gamma_D = \gamma_E$ ), dann müssen die Projektion  $J_{D||}$  des Drehimpulses  $\mathbf{J}_D$  und die Projektion  $J_{E||}$  des Drehimpulses  $\mathbf{J}_E$  auf die Richtung des Magnetfeldes

$$\text{entweder } J_{D||} = +\frac{\hbar}{2} \quad \text{und} \quad J_{E||} = -\frac{\hbar}{2} \quad (6.11a)$$

$$\text{oder } J_{D||} = -\frac{\hbar}{2} \quad \text{und} \quad J_{E||} = +\frac{\hbar}{2} \quad (6.11b)$$

sein. Denn die Erhaltung des Drehimpulses

$$\mathbf{J}_{DE} = 0 = \mathbf{J}_D + \mathbf{J}_E \quad (6.12)$$

lässt keine andere Möglichkeit, siehe Abb. 6.7.

Weil wir die Beziehungen (6.11) im Folgenden immer und immer wieder benötigen werden, lohnt es sich eine abkürzende Schreibweise einzuführen. Wir definieren

$$\uparrow = +\frac{\hbar}{2} \quad , \quad \downarrow = -\frac{\hbar}{2} . \quad (6.13)$$

Mit dieser Schreibweise sind im Fall  $\gamma_D = \gamma_E$  die Projektionen der Drehimpulse  $\mathbf{J}_D$  und  $\mathbf{J}_E$  auf die Richtung des Magnetfeldes

$$\text{entweder } J_{D||} = \uparrow \quad \text{und} \quad J_{E||} = \downarrow \quad (6.14a)$$

$$\text{oder } J_{D||} = \downarrow \quad \text{und} \quad J_{E||} = \uparrow \quad (6.14b)$$

$$\text{falls } \gamma_D = \gamma_E .$$

Die durch (6.11) bzw. (6.14) beschriebene **Korrelation** zwischen den Projektionen der beiden Drehimpulse  $\mathbf{J}_D$  und  $\mathbf{J}_E$  ist das zentrale Thema dieses Kapitels. In der Quantentheorie wird der Drehimpuls des Gesamtsystems D & E (siehe Abb. 6.6 auf Seite 143) vor der Messung durch den Zustandsvektor

$$|D\&E\rangle = r |\downarrow\rangle_D |\uparrow\rangle_E + s |\uparrow\rangle_D |\downarrow\rangle_E \quad (6.15)$$

$$\text{mit } |r|^2 = |s|^2 = \frac{1}{2}$$

beschrieben. Diese Art von Zustandsvektoren wird als „verschränkt“ bezeichnet. Charakteristisch für verschränkte Zustandsvektoren ist, dass sie nicht das Produkt von Zustandsvektoren von Teilsystemen sind. Versuchen wir einmal, (6.15) als Produkt von Zustandsvektoren

$$|D\rangle = q |\uparrow\rangle_D + u |\downarrow\rangle_D \quad \text{mit } |q|^2 + |u|^2 = 1 \quad (6.16a)$$

$$|E\rangle = v |\uparrow\rangle_E + w |\downarrow\rangle_E \quad \text{mit } |v|^2 + |w|^2 = 1 \quad (6.16b)$$

der Atome D und E zu konstruieren:

$$\begin{aligned} |D\rangle|E\rangle &= \left( q |\uparrow\rangle_D + u |\downarrow\rangle_D \right) \left( v |\uparrow\rangle_E + w |\downarrow\rangle_E \right) = \\ &= qv |\uparrow\rangle_D |\uparrow\rangle_E + qw |\uparrow\rangle_D |\downarrow\rangle_E + \\ &\quad + uv |\downarrow\rangle_D |\uparrow\rangle_E + uw |\downarrow\rangle_D |\downarrow\rangle_E \quad (6.17) \\ &\text{mit } |q|^2 + |u|^2 = 1 \text{ und } |v|^2 + |w|^2 = 1 \end{aligned}$$

Um auf diese Weise den verschränkten Zustand (6.15) zu bilden, müsste

$$qw = s \implies q \neq 0 \text{ und } w \neq 0 \quad (6.18a)$$

$$uv = r \implies u \neq 0 \text{ und } v \neq 0 \quad (6.18b)$$

und gleichzeitig

$$qv = 0 \implies q = 0 \text{ oder } v = 0 \quad (6.18c)$$

$$uw = 0 \implies u = 0 \text{ oder } w = 0 \quad (6.18d)$$

sein. Die vier Bedingungen (6.18) können unmöglich gleichzeitig erfüllt werden. Also kann der verschränkte Zustandsvektor (6.15) nicht als Produkt der Zustandsvektoren (6.16) der einzelnen Atome geschrieben werden.

Was sind dann die Zustandsvektoren der einzelnen Atome, wenn der Zustandsvektor des Gesamtsystems gleich (6.15) ist? Nun, (6.16) sind wirklich die allgemeinsten Zustandsvektoren, die man für die einzelnen Atome definieren kann. Wenn (6.15) nicht als Produkt dieser Zustände geschrieben werden kann dann bedeutet das nicht mehr und nicht weniger, als dass die Quantentheorie im Fall (6.15) den einzelnen Atomen überhaupt keine Zustandsvektoren zuordnet.

Im verschränkten Zustand (6.15) sind die Zustandsvektoren  $|\uparrow\rangle_D, |\downarrow\rangle_D, |\uparrow\rangle_E, |\downarrow\rangle_E$  der beiden einzelnen Atome zwar enthalten, die einzelnen Atome haben aber gewissermaßen keine eigenständige Existenz. Im Formalismus der Quantentheorie existieren sie nur als Bestandteile des Gesamtsystems D & E.

Daraus, dass die Atome D und E im Gesamtsystem D & E zwar enthalten sind, aber nicht als eigenständige Objekte existieren, folgt dass auch bestimmte Eigenschaften, wie die Projektionen  $\uparrow$  oder  $\downarrow$  ihrer Drehimpulse auf irgendwelche Richtungen, nicht existieren. Das ist nicht nur einfach so eine kühne Behauptung der Quantentheorie, sondern es wurde experimentell nachgewiesen dass es sich tatsächlich so verhält. All die umständlichen Erörterungen in diesem Kapitel dienen nur dem Zweck, die Leser in die Lage zu versetzen, dass sie den experimentellen Nachweis verstehen können.

Die Quantentheorie ordnet den beiden Atomen keine eindeutigen Projektionen ihrer Drehimpulse auf bestimmte Raumachsen zu, denn der verschränkte Zustandsvektor (6.15) enthält sowohl  $|\uparrow\rangle_D$  als auch  $|\downarrow\rangle_D$ , und er enthält sowohl  $|\uparrow\rangle_E$  als auch  $|\downarrow\rangle_E$ . Aber zugleich beschreibt der verschränkte Zustandsvektor die Korrelation

(6.14), denn einer seiner zwei Summanden enthält das Produkt  $|\uparrow\rangle_D|\downarrow\rangle_E$ , und der andere enthält das Produkt  $|\downarrow\rangle_D|\uparrow\rangle_E$ .

Überlegen wir uns noch einmal das Argument von Einstein, Podolski, und Rosen. Wenn man die Projektion  $J_{D\parallel}$  des Drehimpulses von Atom  $D$  auf eine beliebige Raumachse ( $\gamma_D$  beliebig) misst, dann kann man aufgrund der **Korrelation** (6.14) mit Sicherheit (mit der Wahrscheinlichkeit  $W=1$ ) vorhersagen, welches Ergebnis eine Messung der Projektion  $J_{E\parallel}$  auf die gleiche Raumachse ( $\gamma_E = \gamma_D$ ) haben wird. Dafür gab es nach Überzeugung von EPR [36] nur zwei mögliche Erklärungen:

Entweder existieren – wie von der Quantentheorie angenommen – die Projektionen  $J_{D\parallel}$  und  $J_{E\parallel}$  der Drehimpulse auf irgendwelche Raumachsen noch nicht, solange sie nicht gemessen wurden, sondern sie werden erst im Moment der Messung erschaffen. Unter dieser Voraussetzung kann die Korrelation (6.14) nur dadurch realisiert werden, dass die Einstellung  $\gamma$  des Stern-Gerlach-Magneten, mit dem  $J_{\parallel}$  eines Teilchens gemessen wurde, und das bei der Messung erzielte Ergebnis, auf irgend eine unbekannte Weise augenblicklich – schneller als mit Lichtgeschwindigkeit, ohne die geringste Verzögerung – zu dem Ort übertragen wird, an dem  $J_{\parallel}$  des anderen Teilchens gemessen wird, und diese Messung so beeinflusst, dass die beiden Messergebnisse entsprechend (6.14) korreliert sind.

Oder aber die Drehimpulse der Atome  $D$  und  $E$  haben bestimmte Richtungen – also bestimmte Projektionen auf jede beliebige Raumachse – bereits von dem Augenblick an, in dem das Molekül  $DE$  zerfallen ist. Weil beim Zerfall von  $DE$  der Drehimpuls erhalten blieb, sind die Projektionen  $J_{D\parallel}$  und  $J_{E\parallel}$  der Drehimpulse auf beliebige Raumrichtungen selbstverständlich entsprechend (6.14) korreliert. Bei der Messung werden diese Projektionen nicht erst erzeugt, sondern es werden lediglich die bereits seit dem Zerfall von  $DE$  existierenden Projektionen festgestellt.

Zwecks späterer Referenzierung formulieren wir die beiden alter-

nativen Erklärungen nochmal in allgemeinerer Form:

- A** Viele Eigenschaften von Quantenobjekten existieren noch nicht, solange sie nicht gemessen wurden, sondern sie werden erst im Moment der Messung erschaffen. Unter dieser Voraussetzung können die Korrelationen zwischen den Eigenschaften verschränkter Teilsysteme nur dadurch realisiert werden, dass die Einstellungen der Messapparaturen und die bei der Messung erzielten Ergebnisse auf irgend eine unbekannte Weise augenblicklich – schneller als mit Lichtgeschwindigkeit, ohne die geringste Verzögerung – zwischen den Orten übertragen werden an denen die Messungen stattfinden, und die Korrelation der Messergebnisse bewirken.
- B** Die Teilsysteme haben die Eigenschaften, die später gemessen werden, bereits vor der Messung. Bei der Messung werden diese Eigenschaften nicht erst erzeugt, sondern es werden lediglich die bereits vorher existierenden Eigenschaften festgestellt.

Betrachten wir die Alternative **A** genauer: Nehmen wir an, die Atome D und E erreichen ihre jeweiligen Stern-Gerlach-Magnete zu solchen Zeitpunkten, dass nicht einmal ein Funksignal, das sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet, das Ergebnis der Messung am Atom D zum Atom E übermitteln könnte, bevor die Messung am Atom E abgeschlossen ist, und umgekehrt.

Um die Schwierigkeit zu erhöhen, wurden entsprechende Experimente später so durchgeführt, dass die Einstellungen der Messgeräte (in unserem Beispiel die Winkel  $\gamma_D$  und  $\gamma_E$ ) durch Zufallsgeneratoren so kurz vor dem Eintreffen der Teilchen verändert wurden, dass Teilchen D nicht wissen konnte welche Detektor-Einstellung Teilchen E vorfinden würde, und umgekehrt, es sei denn dass irgend eine geheimnisvolle Kommunikation mit Überlichtgeschwindigkeit stattfände. Auch unter solchen erschwerten Bedingungen wurden die Korrelationen (6.14) in allen Experimenten fehlerfrei realisiert.

Wie machen die Atome das, wenn ihr Drehimpuls vor der Messung keine Richtung hat? Wenn beispielsweise das Atom D seinen Magneten mit der Einstellung  $\gamma_D = 47^\circ$  vorfindet und sich im Moment der Messung für  $J_D = \uparrow$  entscheidet, dann muss das Atom E sich für  $J_E = \downarrow$  entscheiden, falls der Zufallsgenerator seinen Magneten ebenfalls auf  $\gamma_E = 47^\circ$  eingestellt hat. Das erschien Einstein, Podolski und Rosen unmöglich, wenn die beiden Atome sich nicht mit Überlichtgeschwindigkeit absprechen können. Und Kommunikation mit Überlichtgeschwindigkeit hielten sie für eine indiskutable Idee.

Also musste nach ihrer Überzeugung Alternative **B** richtig sein. Mit dieser Alternative finden die Korrelationen (6.14) eine klare, einfache, und vernünftige Erklärung. Die Quantentheorie sagt jedoch vor der Messung lediglich die Korrelation (6.14) voraus, sie sagt aber nicht voraus ob Atom D mit  $\uparrow$  und Atom E mit  $\downarrow$  gemessen werden wird, oder Atom D mit  $\downarrow$  und Atom E mit  $\uparrow$ . Aus diesem Grund erklärten EPR die Quantentheorie für unvollständig.

Das Argument von EPR stieß bei einigen Physikern auf Zustimmung, bei weit mehr Physikern aber auf Ablehnung. Bohr widersprach entschieden. Er veröffentlichte wenige Wochen nach Erscheinen des Artikels von Einstein, Podolski, und Rosen eine Antwort in der gleichen Zeitschrift. Bohrs Artikel [38] ist ein Musterbeispiel für seinen berüchtigten, gewunden verklausulierten und äußerst schwer verständlichen Schreibstil. Man muss den Artikel mindestens dreimal sehr wohlwollend lesen um herauszufinden, halb zwischen den Zeilen, was er eigentlich sagen will. Den wichtigsten Satz findet man auf der zweiten der sieben Seiten:

“The impossibility of a closer analysis of the reactions between the particle and the measuring instrument is indeed no peculiarity of the experimental procedure described, but is rather an essential property of any arrangement suited to the study of the phenomena of the type concerned, where we have to do with a feature of

*individuality* completely foreign to classical physics.”

Das Wort *individuality* ließ Bohr kursiv drucken, um es besonders hervorzuheben, und er ließ weder hier noch in seinen anderen Schriften einen Zweifel daran, dass er diesen Begriff wortwörtlich meinte. (lateinisch) dividere = teilen, (lateinisch) in- = un- (Verneinung). Individuality bedeutet also so etwas wie Ungeteiltheit oder Ganzheitlichkeit.

Quantenphänomene können nach Bohrs Überzeugung nur durch eine ganzheitliche Beschreibung angemessen erfasst werden. In Teile zerlegt werden können sie nur dadurch, dass man ihnen mit Messgeräten zuleibe rückt. Solange man das nicht tut, kann man auch nicht sinnvoll von den Teilen und ihren Eigenschaften sprechen. Nach seiner Überzeugung war Alternative B völlig falsch, aber auch A war nicht richtig, weil hier von Kommunikation zwischen Teilen des Systems D & E gesprochen und dadurch der ganzheitliche Charakter der Quantenphänomene nicht richtig erfasst wird.

Die Vorstellung, dass die Atome D und E während des Fluges zu ihren jeweiligen Stern-Gerlach-Magneten zwei voneinander unabhängige Objekte seien, ist nach Bohr's Verständnis nicht korrekt. Vielmehr bildet das Gesamtsystem D & E ein *individuelles* Quantenphänomen, das nicht einmal in Gedanken in Teile zerlegt werden darf, egal wie weit sich die Atome D und E voneinander entfernt haben. Das individuelle Quantenphänomen D & E hat den Drehimpuls  $\mathbf{J}_D + \mathbf{J}_E = 0$ . Aber die Atome D und E existieren nicht als eigenständige Objekte. Deshalb existieren weder der Drehimpuls  $\mathbf{J}_D$  noch der Drehimpuls  $\mathbf{J}_E$ , und erst recht nicht die Projektionen dieser Drehimpulse auf irgendwelche Raumachsen. Die Lebensdauer des Quantenphänomens D & E endet erst, wenn aus ihm durch die Messung mit den Stern-Gerlach-Magneten zwei neue Quantenphänomene, nämlich die voneinander unabhängigen Atome D und E mitsamt ihren Drehimpulsen  $\mathbf{J}_D$  und  $\mathbf{J}_E = -\mathbf{J}_D$  und Projektionen  $J_{D\parallel}$  und  $J_{E\parallel}$  auf die Feldrichtungen der beiden

Magnete erschaffen werden.

Formulieren wir Bohrs Ansicht in allgemeinerer Form als Alternative C:

**C** Die Vorstellung, dass die Teile eines verschränkten Gesamtsystems voneinander unabhängige Objekte seien, ist nicht korrekt. Vielmehr bildet das Gesamtsystem ein *individuelles* Quantenphänomen, das nicht einmal in Gedanken in Teile zerlegt werden darf, egal wie weit seine Bestandteile voneinander entfernt sind. Das individuelle Quantenphänomen hat bestimmte Eigenschaften. Aber seine Bestandteile existieren nicht als eigenständige Objekte, und haben deshalb auch nicht alle Eigenschaften die das Gesamtsystem hat. Die Lebensdauer des individuellen Quantenphänomens endet erst, wenn aus ihm durch eine Messung zwei neue Quantenphänomene, nämlich die voneinander unabhängigen Teilsysteme mitsamt ihren Eigenschaften erschaffen werden.

Diesen Gedanken muss man erstmal verkraften. Das Gesamtsystem existiert und hat bestimmte Eigenschaften, aber seine Bestandteile haben keine eigenständige Existenz und keine bestimmten Eigenschaften, solange diese nicht durch eine Messung erschaffen werden. Das ist ungefähr so wie wenn man sagen würde dass mein Schreibtisch zwar als kompletter Tisch mit vier Beinen existiert, dass die vier Beine und die Tischplatte aber als eigenständige Objekte nicht existieren.

Bohrs Sichtweise war nicht einfach aus der Luft gegriffen. Vielmehr hatten die Quantenphysiker bei der Analyse der Quantentheorie, die 1925/26 durch geniales Raten entdeckt worden war, erkannt dass diese Theorie die Phänomene ganzheitlich beschreibt, zumindest deutlich ganzheitlicher als man das von der Klassischen Physik gewohnt war. Genau dieser ganzheitliche Aspekt kommt in dem verschränkten Zustandsvektor (6.15) zum Ausdruck: Nur dem

Gesamtsystem D & E, aber nicht den einzelnen Bestandteilen D und E, wird in der Quantentheorie ein Zustandsvektor zugeordnet, und dieser Zustandsvektor bestimmt eine ganzheitliche Eigenschaft, nämlich die Korrelation (6.14).

Wir wollen jetzt mit den Methoden der Quantentheorie berechnen, welches Ergebnis die Messung mit den beiden Stern-Gerlach-Magneten haben wird. Vier verschiedene Messergebnisse sind im Prinzip möglich:

$$\downarrow_{\gamma_D} \uparrow_{\gamma_E} \quad \text{oder} \quad \downarrow_{\gamma_D} \downarrow_{\gamma_E} \quad \text{oder} \quad \uparrow_{\gamma_D} \uparrow_{\gamma_E} \quad \text{oder} \quad \uparrow_{\gamma_D} \downarrow_{\gamma_E}$$

Die Messergebnisse  $\uparrow\uparrow$  und  $\downarrow\downarrow$  sind bei der Einstellung  $\gamma_D = \gamma_E$  aufgrund der Korrelation (6.14) ausgeschlossen, aber bei Einstellungen  $\gamma_D \neq \gamma_E$  sind sie möglich, und bei der Einstellung  $\gamma_D = \gamma_E \pm 180^\circ$  sind sie sogar die einzig möglichen.

Dementsprechend hat das Messgerät (sprich: die zwei Stern-Gerlach-Magnete) diese vier Eigenvektoren:

$$\begin{aligned} &|\downarrow\rangle_{\gamma_D} |\uparrow\rangle_{\gamma_E} \quad , \quad |\downarrow\rangle_{\gamma_D} |\downarrow\rangle_{\gamma_E} \quad , \\ &|\uparrow\rangle_{\gamma_D} |\uparrow\rangle_{\gamma_E} \quad , \quad |\uparrow\rangle_{\gamma_D} |\downarrow\rangle_{\gamma_E} \quad . \end{aligned} \quad (6.19)$$

Die Wahrscheinlichkeit  $W$  jedes der vier möglichen Messergebnisse ist nach der Born'schen Regel (5.19b) gleich dem Betragsquadrat der Projektionsamplitude des entsprechenden Eigenvektors des Messgeräts auf den Zustandsvektor  $|D\&E\rangle = (6.15)$  des gemessenen Objekts.

$$\begin{aligned} W(\downarrow_D \uparrow_E) &= \left| \left( \gamma_D \langle \downarrow | \gamma_E \langle \uparrow | \right) |6.15\rangle \right|^2 = & (6.20a) \\ &= \left| \left( \gamma_D \langle \downarrow | \gamma_E \langle \uparrow | \right) \left( r |\downarrow\rangle_D |\uparrow\rangle_E + s |\uparrow\rangle_D |\downarrow\rangle_E \right) \right|^2 = \\ &= \left| r \gamma_D \langle \downarrow || \downarrow \rangle_D \gamma_E \langle \uparrow || \uparrow \rangle_E + s \gamma_D \langle \downarrow || \uparrow \rangle_D \gamma_E \langle \uparrow || \downarrow \rangle_E \right|^2 \end{aligned}$$

Auf die gleiche Weise findet man die Wahrscheinlichkeiten der drei anderen möglichen Messergebnisse:

$$W(\downarrow_D \downarrow_E) = \quad (6.20b)$$

$$= \left| r_{\gamma_D} \langle \downarrow \parallel \downarrow \rangle_D \gamma_E \langle \downarrow \parallel \uparrow \rangle_E + s_{\gamma_D} \langle \downarrow \parallel \uparrow \rangle_D \gamma_E \langle \downarrow \parallel \downarrow \rangle_E \right|^2$$

$$W(\uparrow_D \uparrow_E) = \quad (6.20c)$$

$$= \left| r_{\gamma_D} \langle \uparrow \parallel \downarrow \rangle_D \gamma_E \langle \uparrow \parallel \uparrow \rangle_E + s_{\gamma_D} \langle \uparrow \parallel \uparrow \rangle_D \gamma_E \langle \uparrow \parallel \downarrow \rangle_E \right|^2$$

$$W(\uparrow_D \downarrow_E) = \quad (6.20d)$$

$$= \left| r_{\gamma_D} \langle \uparrow \parallel \downarrow \rangle_D \gamma_E \langle \downarrow \parallel \uparrow \rangle_E + s_{\gamma_D} \langle \uparrow \parallel \uparrow \rangle_D \gamma_E \langle \downarrow \parallel \downarrow \rangle_E \right|^2$$

Die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten (6.20) kann man in Anhang A.2 nachlesen. In Abb. 6.8 sind sie als Funktion von  $(\gamma_E - \gamma_D)$  dargestellt. Es ist also  $W(\downarrow_D \downarrow_E) = W(\uparrow_D \uparrow_E)$  und  $W(\downarrow_D \uparrow_E) = W(\uparrow_D \downarrow_E)$ , und die Wahrscheinlichkeiten hängen nur von der Differenz  $(\gamma_E - \gamma_D)$  der beiden Winkel ab, nicht von ihren Absolutwerten. Man beachte, dass die Summe der vier Wahrscheinlichkeiten bei jedem Winkel gleich 1 ist, wie es sein muss.

Bei der Diskussion der Experimente, mit denen wir uns im Folgenden beschäftigen werden, ist es üblich und nützlich die Korrelationsfunktion

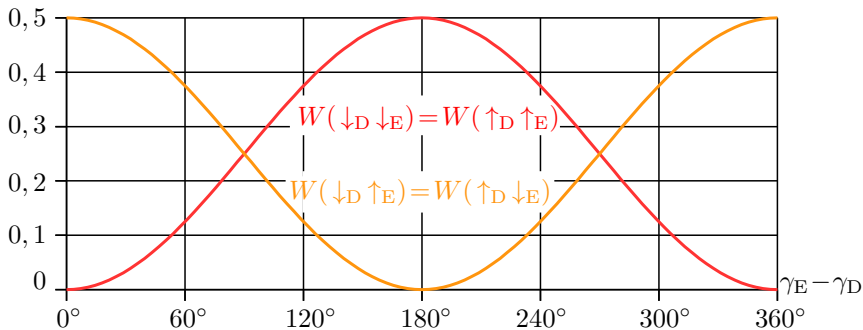


Abb. 6.8: Die vier Wahrscheinlichkeiten (A.10)

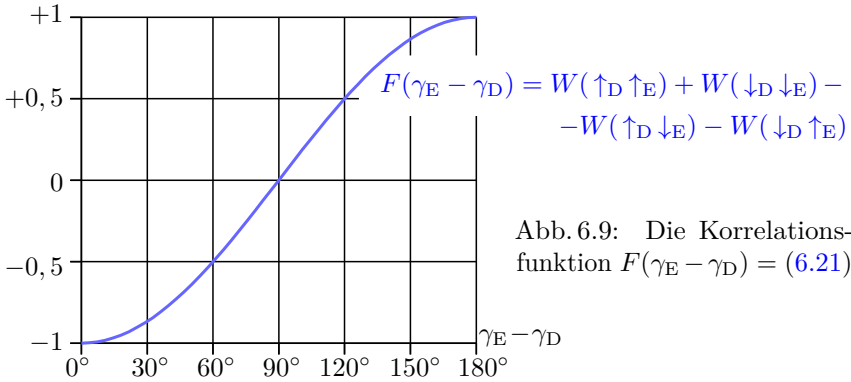


Abb. 6.9: Die Korrelationsfunktion  $F(\gamma_E - \gamma_D) = (6.21)$

$$F(\gamma_D, \gamma_E) = W(\uparrow_D \uparrow_E) + W(\downarrow_D \downarrow_E) - W(\downarrow_D \uparrow_E) - W(\uparrow_D \downarrow_E) \quad (6.21)$$

zu betrachten, die in Abb. 6.9 dargestellt wird.<sup>5</sup> Das Diagramm beschränkt sich auf die Winkeldifferenzen  $\gamma_E - \gamma_D = 0^\circ \dots 180^\circ$ . Das genügt, weil man bereits aus Abb. 6.8 erkennt dass der Bereich  $180^\circ \dots 360^\circ$  nur das Spiegelbild des Bereichs  $0^\circ \dots 180^\circ$  ist und keine neuen Informationen enthält.

Bei  $\gamma_E - \gamma_D = 180^\circ$  ist  $F = +1$ . Das bedeutet: Wenn das Atom D zum Nordpol abgelenkt wird, dann wird das Atom E mit Sicherheit ebenfalls zum Nordpol abgelenkt. Und wenn das Atom D zum Südpol abgelenkt wird, dann wird das Atom E mit Sicherheit ebenfalls zum Südpol abgelenkt. Das wird als vollständige Korrelation bezeichnet. Bei  $\gamma_E - \gamma_D = 0^\circ$  ist  $F = -1$ . In diesem Fall wird D mit Sicherheit zum Nordpol abgelenkt falls E zum Südpol abgelenkt wird, und D wird mit Sicherheit zum Südpol abgelenkt falls E zum Nordpol abgelenkt wird. Das wird als vollständige Antikorrelation bezeichnet. Bei  $\gamma_E - \gamma_D = 90^\circ$  ist  $F = 0$ , die Messergebnisse der beiden Stern-Gerlach-Magneten sind überhaupt nicht korreliert, es

<sup>5</sup> für Physiker: mit den Gleichungen (A.13) in Anhang A.2 erhält man

$$F(\gamma_D, \gamma_E) = \sin^2(\gamma_D/2 - \gamma_E/2) - \cos^2(\gamma_D/2 - \gamma_E/2) = -\cos(\gamma_D - \gamma_E)$$

besteht in diesem Fall kein Zusammenhang zwischen der Ablenkung von D und E.

Die Korrelationsfunktionen  $F$  verschiedener verschränkter Quantensysteme wurden mithilfe der Quantentheorie berechnet, und dann experimentell überprüft und bestätigt. Beispiele werden im Folgenden vorgestellt. Aber was beweisen diese Experimente? Gewiss, sie beweisen dass die Quantentheorie zumindest in dieser Hinsicht nicht falsch ist. Aber das haben EPR ja auch gar nicht behauptet. Sie haben lediglich behauptet dass die Quantentheorie unvollständig sei. Könnte es nicht sein dass man eine bessere Theorie konstruieren kann, die nicht nur die gleiche Korrelationsfunktion  $F(\gamma_E, \gamma_D)$  liefert, sondern darüber hinaus noch Informationen über die Projektionen der Drehimpulse  $\mathbf{J}_D$  und  $\mathbf{J}_E$  auf Raumachsen liefert, die nicht mit den Stern-Gerlach-Magneten gemessen werden?

## 6.4 Die Bell'sche Ungleichung

Dieser Frage ging John Bell (1928–1990) in einem Artikel [39] nach, den er 1964 veröffentlichte. Bell leitete eine Ungleichung her, die für sämtliche Theorien gilt die annehmen, dass Alternative B richtig ist, d. h. dass die Richtungen von Drehimpulsen, und zahlreiche andere Eigenschaften von Quantenobjekten, die laut Quantentheorie erst durch die Messung erzeugt werden und zuvor nicht existieren, tatsächlich schon vor der Messung existieren und durch die Messung lediglich festgestellt werden.

Um Bell's Ungleichung zu verstehen, müssen wir zunächst die Ergebnisse der Messungen mit Stern-Gerlach-Magneten in Zahlen  $r_{\gamma_D}$  und  $r_{\gamma_E}$  übersetzen. Das machen wir folgendermaßen:

$$\begin{array}{ll} \uparrow_D \leftrightarrow r_{\gamma_D} = +1 & \downarrow_D \leftrightarrow r_{\gamma_D} = -1 \\ \uparrow_E \leftrightarrow r_{\gamma_E} = +1 & \downarrow_E \leftrightarrow r_{\gamma_E} = -1 \end{array}$$

Eine Messung mit dem Stern-Gerlach-Magneten kann entweder

ergeben, dass das Teilchen zum Nordpol abgelenkt wird (dies Resultat bezeichnen wir mit  $\uparrow$  oder mit  $r = +1$ ), oder dass das Teilchen zum Südpol abgelenkt wird (dies Resultat bezeichnen wir mit  $\downarrow$  oder mit  $r = -1$ ). Außerdem wird im Index  $\gamma$  noch dokumentiert, auf welchen Winkel der Magnet eingestellt war als das Resultat erzielt wurde, siehe Abb. 6.6 auf Seite 143.

Jetzt nehmen wir versuchsweise einmal an, dass die von EPR favorisierte Alternative B richtig ist: Obwohl mit den Stern-Gerlach-Magneten nur die Projektion der Drehimpulse der Atome D und E auf jeweils eine Raumachse gemessen werden kann (und bei dieser Messung die beiden Ergebnisse  $r_{\gamma_D}$  und  $r_{\gamma_E}$  erzielt werden), müssen die Projektionen der Drehimpulse auf beliebige andere Raumachsen genau so real existieren. Denn aufgrund der Korrelation (6.14) hätten wir zum Beispiel das Resultat  $r_{\gamma'_E}$  mit  $\gamma'_E \neq \gamma_E$  mit Wahrscheinlichkeit  $W = 1$  (also mit völliger Sicherheit) durch eine Messung von  $r_{\gamma_D}$  mit  $\gamma_D = \gamma'_E$  vorhersagen können. Und was man mit Wahrscheinlichkeit  $W = 1$  vorhersagen kann, das muss – so das Argument von EPR – auch wirklich real existieren.

Für unsere Zwecke genügt es anzunehmen, dass zusätzlich zu den zwei gemessenen Projektionen  $r_{\gamma_D}$  und  $r_{\gamma_E}$  zwei weitere Projektionen  $r_{\gamma'_D}$  und  $r_{\gamma'_E}$  mit  $\gamma'_D \neq \gamma_D$  und  $\gamma'_E \neq \gamma_E$  genau so real existieren, obwohl sie nicht gemessen wurden. Bell's Herleitung seiner Ungleichung ist viel zu kompliziert für dieses Buch, aber Asher Peres (1934–2005) zeigte später, dass es auch viel einfacher geht [40]. Tatsächlich genügt schon die schlichte Annahme

**A1**<sub>Peres</sub> : Das Quartett

$$(r_{\gamma_D}, r_{\gamma_E}, r_{\gamma'_D}, r_{\gamma'_E})$$

mit zwei tatsächlich gemessenen Werten und zusätzlich zwei nicht gemessenen Werten existiert genau so real wie das Dublett

$$(r_{\gamma_D}, r_{\gamma_E})$$

der beiden tatsächlich gemessenen Werte.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$r_{\gamma_D}$	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
$r_{\gamma_E}$	+1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	-1
$r_{\gamma'_D}$	+1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1
$r_{\gamma'_E}$	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1
$q$	+2	+2	+2	-2	-2	-2	+2	-2	-2	+2	-2	-2	-2	+2	+2	+2

Tab. 6.1: Die 16 Quartette  $(r_{\gamma_D}, r_{\gamma_E}, r_{\gamma'_D}, r_{\gamma'_E})$

Weil jedes  $r$  entweder  $+1$  oder  $-1$  ist, kann man 16 verschiedene Quartette bilden, die in den 16 Spalten von Tabelle 6.1 aufgelistet sind. Die Tabelle ist vollständig, es gibt außer diesen 16 keine weiteren Quartette. Also muss jedes mal, wenn ein Molekül DE zerfällt und die Atome D und E mit Stern-Gerlach-Magneten analysiert werden, das Ergebnis eines der 16 Quartette aus dieser Tabelle sein.

In der untersten Zeile der Tabelle ist für jedes Quartett der Wert von

$$q = r_{\gamma_D} \cdot r_{\gamma_E} + r_{\gamma_D} \cdot r_{\gamma'_E} + r_{\gamma'_D} \cdot r_{\gamma_E} - r_{\gamma'_D} \cdot r_{\gamma'_E} \quad (6.22)$$

eingetragen. Weil die Tabelle vollständig ist, gibt es auch keine weiteren Werte von  $q$  außer den 16 aufgelisteten. Wir wissen also mit Sicherheit, dass bei jeder Messung mit den beiden Stern-Gerlach-Magneten

$$q = +2 \quad \text{oder} \quad q = -2$$

ist.

Wenn  $N$  mal die Drehimpuls-Projektionen  $r_{\gamma_D}$  und  $r_{\gamma_E}$  gemessen werden, dann muss für den Mittelwert  $S$  der dabei erzielten  $N$  Werte von  $q$  auf jeden Fall die Ungleichung

$$-2 \leq S \leq +2 \quad \text{mit} \quad S = \frac{1}{N} \sum^N q \quad (6.23)$$

gelten<sup>6</sup>, ganz egal welche Ergebnisquartette zufällig erzielt werden. Mit  $q = (6.22)$  kann man  $S$  auch als

$$S = \frac{1}{N} \sum^N (r_{\gamma_D} \cdot r_{\gamma_E}) + \frac{1}{N} \sum^N (r_{\gamma_D} \cdot r_{\gamma'_E}) + \frac{1}{N} \sum^N (r_{\gamma'_D} \cdot r_{\gamma_E}) - \frac{1}{N} \sum^N (r_{\gamma'_D} \cdot r_{\gamma'_E}) \quad (6.24)$$

schreiben. Jeder der vier Terme ist der Mittelwert von  $r \cdot r$  in den  $N$  Durchläufen des Experiments. Und der Mittelwert hängt wiederum eng mit der Wahrscheinlichkeit  $W$  der verschiedenen Ergebnisse zusammen. Berechnen wir zum Beispiel einmal

$$\frac{1}{N} \sum^N (r_{\gamma_D} \cdot r_{\gamma_E}) = \text{Mittelwert}(r_{\gamma_D} \cdot r_{\gamma_E}).$$

Wenn  $r_{\gamma_D} = +1$  und  $r_{\gamma_E} = +1$  ist, dann ist  $r_{\gamma_D} \cdot r_{\gamma_E} = +1$ . Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieser Fall eintritt, ist  $W(r_{\gamma_D} = +1, r_{\gamma_E} = +1) = W(\uparrow_D \uparrow_E)$ .

Wenn  $r_{\gamma_D} = +1$  und  $r_{\gamma_E} = -1$  ist, dann ist  $r_{\gamma_D} \cdot r_{\gamma_E} = -1$ . Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieser Fall eintritt, ist  $W(r_{\gamma_D} = +1, r_{\gamma_E} = -1) = W(\uparrow_D \downarrow_E)$ .

Wenn  $r_{\gamma_D} = -1$  und  $r_{\gamma_E} = +1$  ist, dann ist  $r_{\gamma_D} \cdot r_{\gamma_E} = -1$ . Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieser Fall eintritt, ist  $W(r_{\gamma_D} = -1, r_{\gamma_E} = +1) = W(\downarrow_D \uparrow_E)$ .

Wenn  $r_{\gamma_D} = -1$  und  $r_{\gamma_E} = -1$  ist, dann ist  $r_{\gamma_D} \cdot r_{\gamma_E} = +1$ . Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieser Fall eintritt, ist  $W(r_{\gamma_D} = -1, r_{\gamma_E} = -1) = W(\downarrow_D \downarrow_E)$ .

Also ist der Mittelwert von  $r_{\gamma_D} \cdot r_{\gamma_E}$  in den  $N$  Durchläufen des Experiments gleich

<sup>6</sup> Das Summationszeichen  $\Sigma$  wurde bei Gleichung (5.17) erklärt.  $S$  ist der Mittelwert aller  $q$ -Werte, die bei  $N$  Messungen erzielt wurden.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N} \sum^N (r_{\gamma_D} \cdot r_{\gamma_E}) &= \text{Mittelwert}(r_{\gamma_D} \cdot r_{\gamma_E}) = \\
&= +1 \cdot W(\uparrow_D \uparrow_E) - 1 \cdot W(\uparrow_D \downarrow_E) - 1 \cdot W(\downarrow_D \uparrow_E) + \\
&\quad + 1 \cdot W(\downarrow_D \downarrow_E) \stackrel{(6.21)}{=} F(\gamma_D, \gamma_E) .
\end{aligned} \tag{6.25}$$

Demnach ist

$$S \stackrel{(6.24), (6.25)}{=} F(\gamma_D, \gamma_E) + F(\gamma_D, \gamma'_E) + F(\gamma'_D, \gamma_E) - F(\gamma'_D, \gamma'_E) .$$

Wenn man dies in (6.23) einsetzt, erhält man die Bell'sche Ungleichung

$$-2 \leq S \leq +2 \tag{6.26}$$

$$\text{mit } S = F(\gamma_D, \gamma_E) + F(\gamma_D, \gamma'_E) + F(\gamma'_D, \gamma_E) - F(\gamma'_D, \gamma'_E) .$$

Falls die Quantentheorie korrekt ist, wird die Bell'sche Ungleichung bei vielen Winkeln verletzt. Beispielsweise erhält man mit

$$\gamma_D = 45^\circ, \gamma_E = 90^\circ, \gamma'_D = 135^\circ, \gamma'_E = 0^\circ$$

den Wert<sup>5</sup>

$$S_{\text{Quantentheorie}} = -2\sqrt{2} \approx -2,83 \not\leq -2 . \tag{6.27}$$

Laut (6.26) dürfte  $S$  niemals kleiner als  $-2$  sein. Aber laut Quantentheorie ist  $S$  manchmal doch kleiner als  $-2$ . Was bedeutet das? Falls unsere Herleitung der Bell'schen Ungleichung (6.26) keinen formalen Fehler enthält – und das ist bei einer derartig einfachen Herleitung fast nicht möglich –, dann bleiben nur zwei Möglichkeiten:

- ① Entweder sind die mithilfe der Quantentheorie berechneten Korrelationsfunktionen  $F = (6.21)$  falsch. Das hieße dann also dass die Quantentheorie falsch ist.

- ② oder die Annahme  $A1_{\text{Peres}}$ , auf der die Herleitung von Bell's Ungleichung beruht, ist falsch, also die Annahme dass nicht gemessenen Resultate wie beispielsweise  $r_{\gamma'_D}$  und  $r_{\gamma'_E}$  genau so real existieren wie die gemessenen Resultate  $r_{\gamma_D}$  und  $r_{\gamma_E}$ .

Tatsächlich beruht die Herleitung der Bell'schen Ungleichung nicht nur auf der Annahme  $A1_{\text{Peres}}$ . Bell erkannte später [41, vorletzter Abschnitt] dass zusätzlich folgende Annahme erforderlich ist:

- $A2_{\text{Peres}}$ : Die Einstellung der Messgeräte (also die Winkel, auf die die Stern-Gerlach-Magnete bzw. Polarisatoren einjustiert werden), und die Eigenschaften der Teilchen, die gemessen werden sollen, werden *nicht* durch eine gemeinsame Ursache vorherbestimmt. (Kein „Super-Determinismus“)

Und schließlich bemerkte Cramer [42, 43] eine dritte notwendige Annahme:

- $A3_{\text{Peres}}$ : Das zukünftige Ergebnis einer Messung beeinflusst *nicht* die Einstellung der Messgeräte (also die Winkel, auf die die Stern-Gerlach-Magnete bzw. Polarisatoren einjustiert werden). (Keine „Rückwärts-Verursachung“)

Wenn die Möglichkeit ② zutrifft, dann muss mindestens eine von Peres' drei grundlegenden Annahmen  $A1_{\text{Peres}}$ ,  $A2_{\text{Peres}}$ ,  $A3_{\text{Peres}}$  falsch sein. Aber welche? Es gibt zwar einige Physiker, die die beiden fast selbstverständlich erscheinenden Annahmen  $A2_{\text{Peres}}$  und  $A3_{\text{Peres}}$  in Zweifel ziehen. Im Einklang mit der großen Mehrheit der Physiker werde ich aber bei der folgenden Diskussion annehmen, dass diese beiden Annahmen richtig sind. Das bedeutet: Wenn Möglichkeit ② zutrifft, dann werde ich daraus schlussfolgern dass die Annahme  $A1_{\text{Peres}}$  (und damit zugleich auch die Annahme B) falsch ist.

Durch die Entdeckung der Bell'schen Ungleichung nahm die Diskussion eine Wendung, die niemand erwartet hatte. EPR hatten erklärt, dass die Quantentheorie wahrscheinlich korrekt sei, so weit sie geht, dass sie aber unvollständig sei und durch sogenannte „verborgene Parameter“, zum Beispiel die nicht gemessenen Projektionen  $r_{\gamma'_D}$  und  $r_{\gamma'_E}$  von Drehimpulsen, ergänzt werden müsse. Nun stellte sich heraus, dass entweder – Möglichkeit ① – die Quantentheorie nicht nur unvollständig sondern geradezu falsch sein muss, oder dass – Möglichkeit ② – die „verborgenen Parameter“ überhaupt nicht existieren, dass also die Messergebnisse vor der Messung noch nicht festgelegt sind, sondern erst im Moment der Messung erschaffen werden. Möglichkeit ② bedeutet, dass die Quantentheorie bereits vollständig ist, und durch die Ergänzung mit verborgenen Parametern von einer korrekten Theorie zu einer fehlerhaften Theorie verschlimmbessert würde.

Vor allem stellte sich heraus, dass man nicht nur philosophisch über diese Fragen diskutieren kann, sondern dass man experimentell feststellen kann, ob Möglichkeit ① oder Möglichkeit ② zutrifft. Dazu muss man an geeigneten Systemen die Korrelationsfunktion  $F = (6.21)$  messen, und aus den Messergebnissen die Funktion  $S = (6.26)$  berechnen.

Wenn es Detektor-Einstellungen  $\gamma_D, \gamma'_D, \gamma_E, \gamma'_E$  gibt, bei denen

$S > 2$  oder  $S < -2$  ist,<sup>7</sup> dann trifft Möglichkeit ② zu. Dann ist<sup>8</sup> die Annahme  $A1_{\text{Peres}}$ , und damit zugleich auch die Annahme **B**, falsch und experimentell widerlegt. Experimente, die beweisen dass Möglichkeit ② tatsächlich zutrifft, werden im folgenden Kapitel vorgestellt.

---

<sup>7</sup> Hier gibt es einen logischen Stolperstein: In der Annahme  $A1_{\text{Peres}}$  wurden  $r_{\gamma_D}$  und  $r_{\gamma_E}$  als tatsächlich gemessene Resultate definiert,  $r_{\gamma'_D}$  und  $r_{\gamma'_E}$  als Resultate von nur gedachten, aber nicht wirklich durchgeführten Messungen.

Wie kann man  $S \stackrel{(6.26)}{=} F(\gamma_D, \gamma_E) + F(\gamma_D, \gamma'_E) + F(\gamma'_D, \gamma_E) - F(\gamma'_D, \gamma'_E)$  experimentell ermitteln, wenn man keine Messungen mit  $\gamma'_D$  und  $\gamma'_E$  durchführt? Nun, man macht eine Messreihe mit  $\gamma_D, \gamma_E$ , eine Messreihe mit  $\gamma_D, \gamma'_E$ , eine Messreihe mit  $\gamma'_D, \gamma_E$ , und eine Messreihe mit  $\gamma'_D, \gamma'_E$ , und bestimmt aus diesen vier Messreihen die vier Funktionen  $F$  in (6.26). Dabei muss man freilich die Annahme machen dass die laut **A1** nur gedachten, laut EPR aber vollständig realen und mit Wahrscheinlichkeit  $W = 1$  feststehenden Ergebnisse  $r_{\gamma'_D}$  und  $r_{\gamma'_E}$  sich nicht auf einmal verändern, wenn sie tatsächlich gemessen werden. Das ist aber eine sehr plausible Annahme, der EPR mit Sicherheit uneingeschränkt zugestimmt hätten.

<sup>8</sup> unter der Voraussetzung dass die Annahmen  $A2_{\text{Peres}}$  (kein Superdeterminismus) und  $A3_{\text{Peres}}$  (keine Rückwärts-Verursachung) beide richtig sind

## 7 Experimente zur Bell'schen Ungleichung

Der experimentelle Beweis, dass die Bell'sche Ungleichung tatsächlich verletzt wird, wurde seit den achtziger Jahren in zahlreichen Experimenten erbracht. Allerdings kennt man kein instabiles DE-Molekül mit Drehimpulsquantenzahl  $j = 0$ , das in die Atome D und E mit Drehimpulsquantenzahlen  $j = 1/2$  zerfällt. Bohms in Abb. 6.6 auf Seite 143 skizziertes Experiment ist lediglich ein sogenanntes *Gedankenexperiment*. Es ist nützlich, um das Argument von EPR zu erklären, und es zeigt wie ein Experiment zum Test von Bells Ungleichung im Prinzip gestaltet werden könnte.

Beweiskraft haben aber natürlich nur Experimente, die tatsächlich im Labor durchgeführt wurden. Im Folgenden wird über mehrere derartige Experimente detailliert berichtet. Ich beschreibe diese Experimente deshalb so genau, damit erkennbar wird dass es sich um so solide, vertrauenswürdige, und zuverlässige Beweise handelt, wie man sie sich überhaupt nur wünschen und vorstellen kann. Die Experimente zeigen, dass die Annahme **B** wirklich definitiv und endgültig widerlegt ist.<sup>8</sup>

Alle Experimente laufen nach dem gleichen einfachen Schema ab:

- \* Erster Schritt: Ein Quantensystem, das aus zwei Teilen besteht, wird in einem verschränkten Zustand präpariert. Sein Zustandsvektor hat also die Form (6.15). Diese Art von Zustandsvektoren kann nicht als Produkt von Zustandsvektoren der Teilsysteme geschrieben werden, d. h. die Quantentheorie

ordnet nur dem verschränkten Gesamtsystem einen Zustandsvektor zu, aber nicht den Teilsystemen.

- \* Zweiter Schritt: Eine bestimmte Eigenschaft wird an beiden Teilsystemen gemessen. Es stellt sich heraus, dass die Ergebnisse der Messungen an den beiden Teilsystemen **korreliert** sind, und zwar genau so wie durch die quantentheoretisch berechnete Korrelationsfunktion  $F = (6.21)$  vorhergesagt.
- \* Dritter Schritt: Die gemessenen Korrelationen  $F = (6.21)$  verletzen bei bestimmten Einstellungen der Messgeräte deutlich die Bell'sche Ungleichung (6.26). In Abschnitt 7.5 werden anschließend die Schlussfolgerungen aus diesem Resultat gezogen.

Ich habe mir die allergrößte Mühe gegeben die Experimente so klar wie möglich darzustellen. Einige technische Details sind aber so schwierig, dass ein großer Teil der Nicht-Physiker, an die sich dies Buch doch eigentlich in erster Linie richtet, hier aus der Kurve fliegen könnte. Diese besonders schwierigen Punkte habe ich deshalb in den Anhang verbannt, und empfehle allen Lesern – falls sie keine Physiker sind – zumindest beim ersten Lesen diese Anhänge zu ignorieren, um den „roten Faden“ nicht zu verlieren.

## 7.1 Verschränkte Ca-Lumineszenz-Photonen

In Abbildung 7.1 auf der nächsten Seite ist der Aufbau eines Experiments skizziert, das 1981 von Aspect, Grangier, und Roger [44, 45] durchgeführt wurde. Der türkise Punkt soll einen Strahl von Calcium-Atomen symbolisieren, die sich in einer evakuierten Kammer parallel zur  $y$ -Achse – also senkrecht zur Papierebene – bewegen.

Der Atomstrahl hat einen Durchmesser von etwa 1 mm, und enthält pro  $\text{mm}^3$  etwa  $3 \cdot 10^7$  Ca-Atome. Der Atomstrahl wird parallel und antiparallel zur  $x$ -Achse mit zwei Laserstrahlen angeleuchtet. Die Wellenlänge des einen Laserstrahls ist 406,7 nm, die Wellenlänge des anderen Laserstrahls ist 581 nm. Beide Laserstrahlen sind

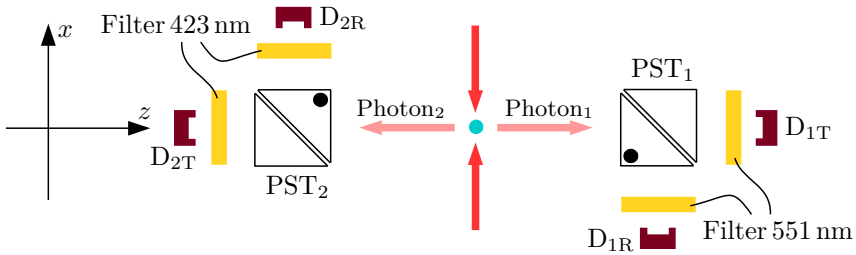


Abb. 7.1: Das Experiment von Aspect, Grangier, und Roger [45]

parallel zur  $y$ -Achse (also senkrecht zur Papierebene der Skizze 7.1) polarisiert.

Aus dem Term-Schema 7.2 auf der nächsten Seite kann man ablesen, was bei der Wechselwirkung der Calcium-Atome mit den beiden Laserstrahlen vor sich geht. Die drei waagerechten Striche symbolisieren die Energie des Calcium-Atoms in verschiedenen Zuständen. Je höher der Strich, desto höher die Energie. Der unterste Strich symbolisiert die Energie des Atoms im Grundzustand. Durch die gleichzeitige Absorption von zwei Photonen,<sup>1</sup> eines mit Wellenlänge 406,7 nm und eines mit Wellenlänge 581 nm, wird es angeregt in einen Zustand, der durch den obersten Strich symbolisiert wird. Nach einiger Zeit emittiert das Atom ein Photon mit Wellenlänge 551,3 nm, so dass es nur noch die Energie hat, die durch den mittleren Strich symbolisiert wird. Mit einer Halbwertszeit von 5 ns emittiert das Atom ein weiteres Photon mit Wellenlänge 422,7 nm und gelangt dadurch wieder in den Grundzustand.

<sup>1</sup> Bei der Besprechung von Lenards Experimenten zum Lichtelektrischen Effekt in Abschnitt 3.1 wurde gesagt, dass die gleichzeitige Absorption von zwei Photonen an der gleichen Stelle extrem unwahrscheinlich ist. Aber Lenards Lichtquellen waren wirklich nur kläglich trübe Funzeln im Vergleich zu der geballten Laser-Power, die den Experimentatoren 1981 zur Verfügung stand. Bei dieser hohen Intensität des anregenden Lichts kommt die gleichzeitige Absorption von zwei Photonen häufig vor.

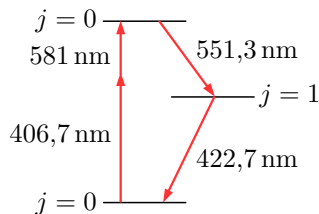


Abb. 7.2: Eine Lumineszenz-Kaskade des Calcium-Atoms

Neben den Strichen sind die Drehimpuls-Quantenzahlen<sup>2</sup> des Atoms in diesen drei Zuständen angegeben. Drehimpuls kann weder aus dem Nichts auftauchen noch ins Nichts verschwinden. Wenn sich der Drehimpuls des Atoms bei den beiden Übergängen der Lumineszenzkaskade ändert, dann müssen die emittierten Lumineszenz-Photonen den fehlenden Drehimpuls mitgenommen haben.

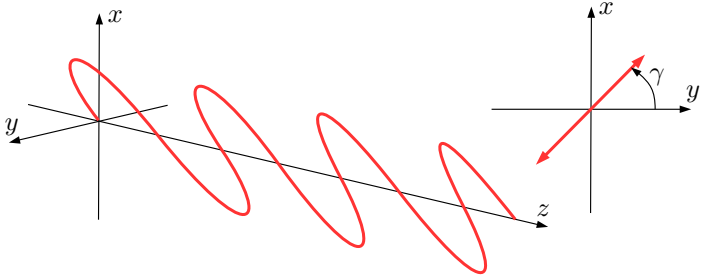
In Anhang A.3 wird gezeigt, dass die Erhaltung des Drehimpulses die folgende Form der Zustandsfunktion der beiden Lumineszenz-Photonen erzwingt:

$$|\text{Photon}_1 \& \text{Photon}_2\rangle \stackrel{\text{(A.16c)}}{=} \sqrt{\frac{1}{2}} \left( |L_\gamma\rangle_1 |L_\gamma\rangle_2 + |L_{\gamma+90}\rangle_1 |L_{\gamma+90}\rangle_2 \right) \quad \text{mit beliebigem } \gamma \quad (7.1)$$

$|L_\gamma\rangle$  ist der Zustandsvektor eines linear polarisierten Photons, das sich entlang der  $z$ -Achse des Koordinatensystems bewegt, und dessen Polarisations Ebene um den Winkel  $\gamma$  gegen die  $y$ -Achse gedreht ist, siehe Abb. 7.3 auf der nächsten Seite. Der Winkel  $\gamma$  kann jeden beliebigen Wert  $0^\circ \leq \gamma \leq 180^\circ$  haben.

Der Zustandsvektor (7.1) beschreibt die Polarisation des verschränkten Gesamtsystems  $\text{Photon}_1 \& \text{Photon}_2$ , er beschreibt aber nicht die Polarisation der einzelnen Photonen. Um das klar zu sehen, betrachten wir zum Vergleich diese Zustandsvektoren:

<sup>2</sup> In Gleichung (6.1) wurde angegeben, wie der Wert des Drehimpulses  $\mathbf{J}$  von der Quantenzahl  $j$  abhängt.

Abb. 7.3: Der Polarisationswinkel  $\gamma$  der Lumineszenz-Photonen

$$|\text{Photon}\rangle_1 = u_1|L_\gamma\rangle_1 + v_1|L_{\gamma+90}\rangle_1 \quad \text{mit } |u_1|^2 + |v_1|^2 = 1 \quad (7.2a)$$

$$|\text{Photon}\rangle_2 = u_2|L_\gamma\rangle_2 + v_2|L_{\gamma+90}\rangle_2 \quad \text{mit } |u_2|^2 + |v_2|^2 = 1 \quad (7.2b)$$

Diese Zustandsvektoren beschreiben die Polarisation der einzelnen Photonen. Zum Beispiel ist  $\text{Photon}_1$  mit Wahrscheinlichkeit  $|u_1|^2$  mit Winkel  $\gamma$  linear polarisiert, und mit Wahrscheinlichkeit  $|v_1|^2$  mit Winkel  $\gamma+90^\circ$  linear polarisiert. Wenn  $u_1 = 0$  und  $|v_1|^2 = 1$  ist, dann ist  $\text{Photon}_1$  eindeutig mit Winkel  $\gamma+90^\circ$  linear polarisiert. Wenn jedes der beiden Photonen als eigenständiges Quantenobjekt existiert, dann ist der Zustandsvektor des Gesamtsystems gleich dem Produkt dieser Vektoren:

$$\begin{aligned} |\text{Photon}_1 \& \text{Photon}_2\rangle &= |\text{Photon}\rangle_1 |\text{Photon}\rangle_2 = \\ &= \left( u_1|L_\gamma\rangle_1 + v_1|L_{\gamma+90}\rangle_1 \right) \left( u_2|L_\gamma\rangle_2 + v_2|L_{\gamma+90}\rangle_2 \right) = \\ &= u_1u_2|L_\gamma\rangle_1|L_\gamma\rangle_2 + u_1v_2|L_\gamma\rangle_1|L_{\gamma+90}\rangle_2 + \\ &\quad + v_1u_2|L_{\gamma+90}\rangle_1|L_\gamma\rangle_2 + v_1v_2|L_{\gamma+90}\rangle_1|L_{\gamma+90}\rangle_2 \quad (7.3) \\ &\quad \text{mit } |u_1|^2 + |v_1|^2 = 1 \text{ und } |u_2|^2 + |v_2|^2 = 1 \end{aligned}$$

Der verschränkte Zustandsvektor (7.1) unterscheidet sich fundamental von (7.3). Denn wenn man (7.1) auf die Form (7.3) zurückführen wollte, dann müsste man  $u_1u_2 = \sqrt{1/2}$  und  $v_1v_2 = \sqrt{1/2}$  setzen. Daraus würde dann  $u_1 \neq 0$ ,  $u_2 \neq 0$ ,  $v_1 \neq 0$ , und  $v_2 \neq 0$

folgen. Also wären auch die beiden mittleren Terme in (7.3) von Null verschieden, die doch gleich Null sein müssten um zur Form (7.1) zu gelangen.

Der verschränkte Zustandsvektor (7.1) kann also nicht als Produkt der Zustandsvektoren (7.2) einzelner Photonen geschrieben werden. Die Quantentheorie ordnet den Teilen eines verschränkten Systems *überhaupt keinen* Zustandsvektor zu. In dem verschränkten Zustand (7.1) sind die Zustandsvektoren  $|L_\gamma\rangle_1$ ,  $|L_{\gamma+90}\rangle_1$ ,  $|L_\gamma\rangle_2$ ,  $|L_{\gamma+90}\rangle_2$  der beiden einzelnen Photonen zwar enthalten, man kann (7.1) aber nicht faktorisieren und in die Form (7.3) bringen, in der für jedes Photon ein Zustandsvektor definiert ist. Im Formalismus der Quantentheorie haben die beiden Lumineszenz-Photonen keine eigenständige Existenz, sondern existieren nur als Bestandteile des Gesamtsystems „zwei Lumineszenzphotonen“.

Um die Korrelation der Polarisation der beiden Lumineszenz-Photonen zu prüfen, wurden im Experiment von Aspect et al. polarisierende Strahlteiler eingesetzt, deren Funktionsweise in Abb. 2.8 auf Seite 37 dargestellt wird. Photon<sub>1</sub> bewegt sich in Richtung der positiven  $z$ -Achse zum polarisierenden Strahlteiler PST<sub>1</sub>, und Photon<sub>2</sub> bewegt sich in Richtung der negativen  $z$ -Achse zum polarisierenden Strahlteiler PST<sub>2</sub>, siehe Abb. 7.1 auf Seite 165.

Zwischen PST<sub>1</sub> und den Detektoren D<sub>1T</sub> und D<sub>1R</sub> befindet sich je ein Filter, der nur Photonen mit einer Wellenlänge von etwa 551 nm durchlässt. Zwischen PST<sub>2</sub> und den Detektoren D<sub>2T</sub> und D<sub>2R</sub> befindet sich je ein Filter, der nur Photonen mit einer Wellenlänge von etwa 423 nm durchlässt. Diese Filter sind erforderlich, weil sonst direktes Streulicht von den anregenden Laserstrahlen das schwache Lumineszenzlicht überdecken würde.

Wenn Photon<sub>1</sub> eine Wellenlänge von etwa 551 nm hat, dann wird es von Detektor D<sub>1T</sub> detektiert falls es vom polarisierenden Strahlteiler transmittiert wird, bzw. von Detektor D<sub>1R</sub> detektiert falls es vom polarisierenden Strahlteiler reflektiert wird. Wenn

Photon<sub>2</sub> eine Wellenlänge von etwa 423 nm hat, dann wird es von Detektor D<sub>2T</sub> detektiert falls es vom polarisierenden Strahlteiler transmittiert wird, bzw. von Detektor D<sub>2R</sub> detektiert falls es vom polarisierenden Strahlteiler reflektiert wird.

Jeder der vier Detektoren zählte im Experiment von Aspect, Grangier, und Roger etwa  $10^4$  Photonen pro Sekunde. Eine **Korrelation** der Polarisation ist aber nur zwischen den jeweils zwei Photonen der Lumineszenz-Kaskade des gleichen Atoms zu erwarten, nicht zwischen den Lumineszenz-Photonen verschiedener Atome. Deshalb wurden die Ergebnisse der vier Zähler zeitaufgelöst analysiert: Wenn einer der beiden Zähler D<sub>1T</sub> oder D<sub>1R</sub> ein Photon registrierte, dann wurde geprüft ob

- \* innerhalb von 20 ns der jeweils andere der beiden Zähler D<sub>1T</sub> oder D<sub>1R</sub> *kein* Photon registrierte,
- \* im gleichen 20 ns-Zeitraum einer der beiden Zähler D<sub>2T</sub> oder D<sub>2R</sub> ein Photon registrierte,
- \* der jeweils andere der beiden Zähler D<sub>2T</sub> oder D<sub>2R</sub> im gleichen 20 ns-Zeitraum *kein* Photon registrierte.

Wenn alle drei Bedingungen erfüllt waren, dann wurden die beiden Photonen als Lumineszenzphotonen des gleichen Atoms interpretiert, und das Ereignis wurde gespeichert. Wenn mindestens eine Bedingung nicht erfüllt war, wurde das Ereignis ignoriert. Abhängig von der Stellung der Polarisatoren wurden mit diesen Kriterien bis zu 50 gültige Ereignisse pro Sekunde registriert. Weil im Term-schema 7.2 die Halbwertszeit des mittleren Niveaus 5 ns beträgt, wird das zweite Lumineszenz-Photon der Kaskade tatsächlich nur selten außerhalb des 20 ns langen Zeitfensters liegen. Aber das umgekehrte gilt nicht: Dass ein Ereignis alle drei Bedingungen erfüllt beweist noch nicht zwingend, dass beide Photonen wirklich aus der Lumineszenz-Kaskade des gleichen Atoms stammen. Aspect et. al. schätzten vielmehr (und konnten das auch mit geeigneten Tests

belegen), dass ziemlich stabil etwa 10 scheinbar gültige Ereignisse pro Sekunde registriert wurden, bei denen die beiden detektierten Photonen tatsächlich nicht aus der gleichen Kaskade stammten sondern nur zufällig ins gleiche Zeitfenster gerutscht waren. Deshalb zogen sie von allen ihren Ergebnissen 10 Ereignisse pro Sekunde ab. Damit blieben letztlich noch – je nach Stellung der Polarisatoren – bis zu 40 gültige Ereignisse pro Sekunde übrig.

Die beiden polarisierenden Strahlteiler konnten unabhängig voneinander mitsamt ihren nachgeschalteten Filtern und Detektoren um die  $z$ -Achse gedreht werden. In der rechten Skizze von Abb. 7.4 wird gezeigt, wie das System der Koordinaten  $a$  und  $b$  definiert wird, das sich mit den Strahlteilern um die  $z$ -Achse dreht. Aus den beiden anderen Skizzen kann man ablesen, wie die Drehwinkel  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  der beiden polarisierenden Strahlteiler definiert werden, nämlich als Winkel zwischen der positiven  $y$ -Achse und der positiven  $b_1$ -Achse bzw. der negativen  $b_2$ -Achse. In der mittleren Skizze blickt man in Richtung der positiven  $z$ -Achse, also in Bewegungsrichtung von  $\text{Photon}_1$ , auf den Strahlteiler  $\text{PST}_1$ . In der linken Skizze blickt man in Richtung der negativen  $z$ -Achse, also in Bewegungsrichtung von  $\text{Photon}_2$ , auf den Strahlteiler  $\text{PST}_2$ .

Wir definieren die Einheitsvektoren  $|a_1\rangle$ ,  $|b_1\rangle$ ,  $|a_2\rangle$ ,  $|b_2\rangle$  parallel zu den jeweiligen Koordinatenachsen  $a$  und  $b$ . Die vier Eigenvektoren der Messapparatur (sprich der beiden polarisierenden Strahlteiler

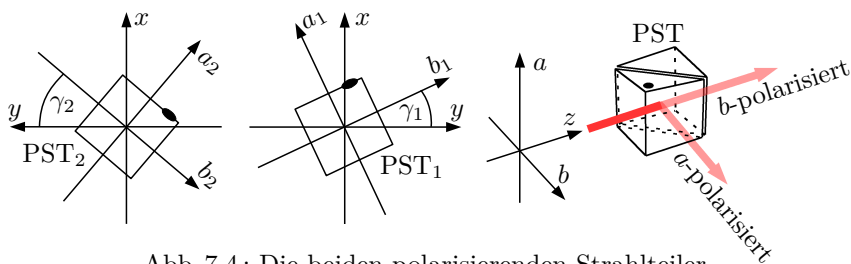


Abb. 7.4: Die beiden polarisierenden Strahlteiler

mit den nachgeschalteten Detektoren) sind also

$$|a_1\rangle |a_2\rangle \quad , \quad |a_1\rangle |b_2\rangle \quad , \quad |b_1\rangle |a_2\rangle \quad , \quad |b_1\rangle |b_2\rangle . \quad (7.4)$$

Wir nennen

$W_{RR}$  die Wahrscheinlichkeit dafür dass beide Photonen reflektiert werden (also nach der Messung in  $a$ -Richtung des jeweiligen Strahlteilers polarisiert sind und durch den Zustandsvektor  $|a_1\rangle |a_2\rangle$  beschrieben werden),

$W_{RT}$  die Wahrscheinlichkeit dafür dass Photon<sub>1</sub> reflektiert und Photon<sub>2</sub> transmittiert wird (die Photonen also nach der Messung in  $a_1$ -Richtung bzw. in  $b_2$ -Richtung polarisiert sind und durch den Zustandsvektor  $|a_1\rangle |b_2\rangle$  beschrieben werden),

$W_{TR}$  die Wahrscheinlichkeit dafür dass Photon<sub>1</sub> transmittiert und Photon<sub>2</sub> reflektiert wird (die Photonen also nach der Messung in  $b_1$ -Richtung bzw. in  $a_2$ -Richtung polarisiert sind und durch den Zustandsvektor  $|b_1\rangle |a_2\rangle$  beschrieben werden), und

$W_{TT}$  die Wahrscheinlichkeit dafür dass beide Photonen von ihrem jeweiligen Strahlteiler transmittiert werden (also nach der Messung in  $b$ -Richtung des jeweiligen Strahlteilers polarisiert sind und durch den Zustandsvektor  $|b_1\rangle |b_2\rangle$  beschrieben werden).

Um diese Wahrscheinlichkeiten zu berechnen, projizieren wir wie gewohnt zunächst den Zustandsvektor (7.1) des Photonenpaars vor der Messung auf die vier Eigenvektoren (7.4) der Messapparatur:

$$\begin{aligned} |\text{Photon}_1 \& \text{Photon}_2\rangle \stackrel{(7.1)}{=} \sqrt{\frac{1}{2}} \left[ \right. \\ & |a_1\rangle |a_2\rangle \left( \langle a_1 || L_\gamma \rangle_1 \langle a_2 || L_\gamma \rangle_2 + \langle a_1 || L_{\gamma+90} \rangle_1 \langle a_2 || L_{\gamma+90} \rangle_2 \right) + \\ & + |a_1\rangle |b_2\rangle \left( \langle a_1 || L_\gamma \rangle_1 \langle b_2 || L_\gamma \rangle_2 + \langle a_1 || L_{\gamma+90} \rangle_1 \langle b_2 || L_{\gamma+90} \rangle_2 \right) + \\ & + |b_1\rangle |a_2\rangle \left( \langle b_1 || L_\gamma \rangle_1 \langle a_2 || L_\gamma \rangle_2 + \langle b_1 || L_{\gamma+90} \rangle_1 \langle a_2 || L_{\gamma+90} \rangle_2 \right) + \\ & \left. + |b_1\rangle |b_2\rangle \left( \langle b_1 || L_\gamma \rangle_1 \langle b_2 || L_\gamma \rangle_2 + \langle b_1 || L_{\gamma+90} \rangle_1 \langle b_2 || L_{\gamma+90} \rangle_2 \right) \right] \end{aligned}$$

Nach der Born'schen Regel (5.9) ist die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Messergebnisses gleich dem Betragsquadrat der Projektionsamplitude auf den jeweiligen Eigenvektor der Messapparatur:

$$W_{RR} = \frac{1}{2} \left| \langle a_1 || L_\gamma \rangle_1 \langle a_2 || L_\gamma \rangle_2 + \langle a_1 || L_{\gamma+90} \rangle_1 \langle a_2 || L_{\gamma+90} \rangle_2 \right|^2 \quad (7.5a)$$

$$W_{RT} = \frac{1}{2} \left| \langle a_1 || L_\gamma \rangle_1 \langle b_2 || L_\gamma \rangle_2 + \langle a_1 || L_{\gamma+90} \rangle_1 \langle b_2 || L_{\gamma+90} \rangle_2 \right|^2 \quad (7.5b)$$

$$W_{TR} = \frac{1}{2} \left| \langle b_1 || L_\gamma \rangle_1 \langle a_2 || L_\gamma \rangle_2 + \langle b_1 || L_{\gamma+90} \rangle_1 \langle a_2 || L_{\gamma+90} \rangle_2 \right|^2 \quad (7.5c)$$

$$W_{TT} = \frac{1}{2} \left| \langle b_1 || L_\gamma \rangle_1 \langle b_2 || L_\gamma \rangle_2 + \langle b_1 || L_{\gamma+90} \rangle_1 \langle b_2 || L_{\gamma+90} \rangle_2 \right|^2 \quad (7.5d)$$

Die in Anhang A.4 detailliert erklärte Berechnung ergibt

$$W_{TT} \stackrel{(A.23b)}{=} W_{RR} \stackrel{(A.25)}{=} \frac{1}{2} \cos^2(\gamma_1 - \gamma_2) \quad (7.6a)$$

$$\begin{aligned} W_{RT} \stackrel{(A.23a)}{=} W_{TR} \stackrel{(A.23d)}{=} \frac{1}{2} - W_{RR} = \\ \stackrel{(A.25)}{=} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos^2(\gamma_1 - \gamma_2) . \end{aligned} \quad (7.6b)$$

Damit können wir die Korrelationsfunktion berechnen:

$$\begin{aligned} F(\gamma_1, \gamma_2) &\stackrel{(6.21)}{=} W_{TT} + W_{RR} - W_{TR} - W_{RT} = \\ &= 2 \cos^2(\gamma_2 - \gamma_1) - 1 \end{aligned} \quad (7.7)$$

In der Korrelationsfunktion kommt das Quadrat  $\cos^2$  der Kosinusfunktion vor, die in Abb. 5.4 auf Seite 112 grafisch dargestellt wurde. Aus dieser Grafik kann man mithilfe der roten Linie für jede beliebige Winkeldifferenz  $\gamma_2 - \gamma_1$  den Wert von  $\cos^2(\gamma_2 - \gamma_1)$  ablesen.<sup>3</sup>

<sup>3</sup> Wesentlich einfacher geht das mit jedem halbwegs brauchbaren Taschenrechner.

Jetzt ist noch ein Korrekturfaktor erforderlich, und zwar aus folgendem Grund: Wir haben bisher angenommen, dass die beiden Lumineszenz-Photonen in *genau* entgegengesetzte Richtung emittiert werden. Vollkommene Genauigkeit ist bei keinem Experiment möglich, und der Winkel zwischen den Flugrichtungen der beiden Photonen kann auch geringfügig von  $180^\circ$  abweichen. Das hat eine geringfügig schwächere Korrelation der Polarisationsrichtungen zur Folge. Aspect et. al. berechneten dafür den folgenden Korrekturfaktor:

$$K = 0,984 \quad (7.8)$$

Damit ergibt sich die theoretisch berechnete Korrelationsfunktion

$$F_K(\gamma_1, \gamma_2) = K \cdot F(\gamma_1, \gamma_2) \stackrel{(7.7)}{=} 0,984 \cdot \left( 2 \cos^2(\gamma_2 - \gamma_1) - 1 \right). \quad (7.9)$$

Diese Funktion ist als blaue Kurve im Diagramm 7.5 eingetragen.

Bemerkenswert ist, dass erstens der Winkel  $\gamma$ , der in der Zustandsfunktion  $|\text{Photon}_1 \& \text{Photon}_2\rangle = (7.1)$  enthalten war, in der

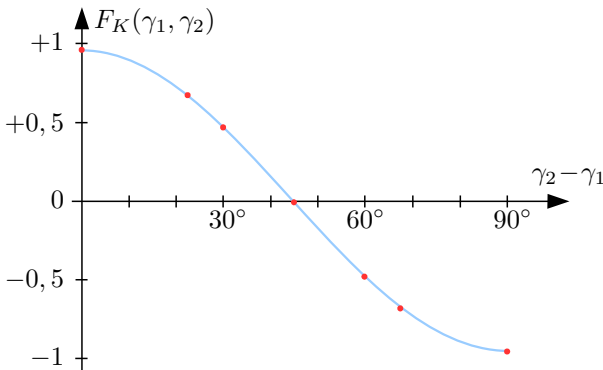


Abb. 7.5: Die Korrelation  $F_K(\gamma_1, \gamma_2)$

Korrelationsfunktion (7.9) überhaupt nicht mehr auftaucht, und dass zweitens (7.9) nur von der Differenz  $\gamma_2 - \gamma_1$  abhängt, aber nicht von den absoluten Werten dieser Winkel.<sup>4</sup>

Wenn man das Diagramm 7.5 mit dem Diagramm 6.9 auf Seite 154 vergleicht, sieht man drei Unterschiede:

Erstens sind am linken Ende der Skala die Ergebnisse maximal korreliert, am rechten Ende der Skala maximal anti-korreliert. Das war in Diagramm 6.9 deshalb genau umgekehrt, weil in jedem Term des verschränkten Zustandsvektors (6.15) die Drehimpulse der Atome D und E umgekehrt gerichtet sind, während in jedem Term des verschränkten Zustandsvektors (7.1)  $\text{Photon}_1$  und  $\text{Photon}_2$  die gleiche Polarisationsrichtung haben.

Zweitens erreicht die Korrelationsfunktion von Diagramm 7.5 nicht ganz die Werte  $\pm 1$ . Das liegt an dem Korrekturfaktor (7.8).

Und drittens geht die Skala der Winkel  $\gamma_2 - \gamma_1$  im Diagramm 6.9 von  $0^\circ$  bis  $180^\circ$ , im Diagramm 7.5 aber nur von  $0^\circ$  bis  $90^\circ$ . Das liegt daran, dass man die Stern-Gerlach-Magnete um  $180^\circ$  rotieren muss, damit ihre Eigenvektoren  $|N\rangle$  in die Eigenvektoren  $|S\rangle$  übergehen. Aber die polarisierenden Strahlteiler muss man nur um  $90^\circ$  rotieren, damit ihre Eigenvektoren  $|b\rangle$  in die Eigenvektoren  $|a\rangle$  übergehen.

Um die Korrelationsfunktion experimentell zu überprüfen, zählten Aspect et. al. bei verschiedenen Einstellungen der Winkel  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$

die Zahl  $N_{TT}$  gültiger Ereignisse pro 100 Sekunden, bei denen die Detektoren  $D_{1T}$  und  $D_{2T}$  ansprachen,

die Zahl  $N_{RR}$  gültiger Ereignisse pro 100 Sekunden, bei denen die Detektoren  $D_{1R}$  und  $D_{2R}$  ansprachen,

die Zahl  $N_{TR}$  gültiger Ereignisse pro 100 Sekunden, bei denen die Detektoren  $D_{1T}$  und  $D_{2R}$  ansprachen,

---

<sup>4</sup> Physiker sollten spätestens nach kurzer Überlegung erkennen, dass der Grund für Beides identisch ist, nämlich die Rotationssymmetrie des Systems um die  $z$ -Achse.

die Zahl  $N_{RT}$  gültiger Ereignisse pro 100 Sekunden, bei denen die Detektoren  $D_{1R}$  und  $D_{2T}$  ansprachen.

Aus diesen Ergebnissen berechneten sie dann die Wahrscheinlichkeiten

$$W_{TT} = \frac{N_{TT}}{N_{TT} + N_{RR} + N_{TR} + N_{RT}} \quad (7.10a)$$

$$W_{RR} = \frac{N_{RR}}{N_{TT} + N_{RR} + N_{TR} + N_{RT}} \quad (7.10b)$$

$$W_{TR} = \frac{N_{TR}}{N_{TT} + N_{RR} + N_{TR} + N_{RT}} \quad (7.10c)$$

$$W_{RT} = \frac{N_{RT}}{N_{TT} + N_{RR} + N_{TR} + N_{RT}} , \quad (7.10d)$$

und daraus schließlich die Korrelationsfunktion

$$F(\gamma_1, \gamma_2) \stackrel{(6.21)}{=} W_{TT} + W_{RR} - W_{TR} - W_{RT} . \quad (7.11)$$

Wie erwartet stellte sich heraus, dass die Korrelation  $F(\gamma_1, \gamma_2)$  nur von der Differenz  $\gamma_2 - \gamma_1$  abhängt (z. B. war  $F(30^\circ, 75^\circ) = F(0^\circ, 45^\circ)$ , usw.). Die Ergebnisse für die Einstellungen  $\gamma_1 - \gamma_2$  gleich  $0^\circ, 22, 5^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 67, 5^\circ$ , und  $90^\circ$  sind im Diagramm 7.5 als rote Punkte eingetragen. Theorie und Experiment stimmen offensichtlich sehr gut überein.

Aspect et. al. überprüften mit ihren Messdaten auch die in (6.26) beschriebene Bell'sche Ungleichung

$$-2 \leq S \leq +2 \quad (7.12)$$

$$S = F(\gamma_2 - \gamma_1) + F(\gamma_2 - \gamma'_1) + F(\gamma'_2 - \gamma'_1) - F(\gamma'_2 - \gamma_1) ,$$

die mit beliebigen Einstellungen  $\gamma_1$  und  $\gamma'_1$  von  $\text{PST}_1$  und beliebigen Einstellungen  $\gamma_2$  und  $\gamma'_2$  von  $\text{PST}_2$  erfüllt sein muss, falls die Annahme B richtig sein sollte.

Wenn dagegen die Quantentheorie richtig ist, dann wird die Ungleichung (7.12) bei zahlreichen Einstellungen der Strahlteiler verletzt, und zwar besonders stark bei den Winkelkombinationen

$$\begin{aligned}\gamma_2 - \gamma_1 &= \gamma'_1 - \gamma_2 = \gamma'_2 - \gamma'_1 = 22,5^\circ \\ \gamma'_2 - \gamma_1 &= 67,5^\circ .\end{aligned}$$

Bei diesen Winkeln berechnet man mit der Quantentheorie den Wert

$$K \cdot S_{\text{Quantentheorie}} = K \cdot 2\sqrt{2} = 2,70 , \quad (7.13a)$$

wobei  $K \stackrel{(7.8)}{=} 0,984$  der Korrekturfaktor dafür ist, dass die Lumineszenzphotonen sich nicht völlig exakt entlang der  $z$ -Achse bewegen. Aus den Messwerten ergab sich bei den gleichen Winkeln

$$S_{\text{Experiment}} = 2,697 \pm 0,015 . \quad (7.13b)$$

Dies Experiment verletzt die Bell'sche Ungleichung (7.12) so deutlich, dass kein Raum für Alternative B bleibt. Das Experiment beweist, dass die Polarisation der Photonen nicht bereits bei der Emission festgelegt wird, sondern erst durch die Wechselwirkung mit den Strahlteilern und Detektoren erschaffen wird. Bei der Emission wird lediglich festgelegt, dass beide Photonen in der gleichen Richtung linear polarisiert sein werden, wenn (erst dann, vorher nicht!) ihre lineare Polarisation durch eine Messung in der Zukunft erschaffen werden sollte.

## 7.2 Verschränkte Be<sup>+</sup> Ionen

Unter allen in diesem Buch berichteten Experimenten ist dasjenige mit Beryllium-Ionen, das ich in diesem Abschnitt beschreibe, das bei weitem komplizierteste. Eigentlich ist es zu schwierig für dieses Buch, aber ich wollte unbedingt einen Test der Bell'schen

Ungleichung mit materiellen Teilchen dabei haben. Sonst könnte der falsche Eindruck entstehen, dass nur Photonen die Bell'sche Ungleichung verletzen. Auch hier habe ich besonders schwierige technische Details in den Anhang verschoben, und wiederhole nochmals die Empfehlung, die Anhänge beim ersten Lesen zunächst zu ignorieren, um den „roten Faden“ nicht zu verlieren.

Im Jahr 2000 präparierten Rowe et. al. [46, 47] Paare von Beryllium-Ionen im verschränkten Zustand

$$|\text{Be}^+ \& \text{Be}^+\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}} \left( |\downarrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 - |\uparrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2 \right). \quad (7.14)$$

In Bohms Gedankenexperiment befinden sich die Atome D und E im Zustand (6.15), bei dem die Projektionen ihrer Drehimpulse auf eine beliebige Richtung – wenn sie durch eine Messung erschaffen werden – stets entgegengesetzt sind. Dagegen sind die Projektionen der Drehimpulse der beiden Beryllium-Ionen im Zustand (7.14) – wenn sie durch eine Messung erschaffen werden – stets gleich gerichtet. Das ändert nichts daran, dass (7.14) ein verschränkter Zustand ist, denn er kann nicht als Produkt der Zustände

$$|\text{Be}^+\rangle_1 = q |\uparrow\rangle_1 + u |\downarrow\rangle_1 \quad \text{mit } |q|^2 + |u|^2 = 1 \quad (7.15a)$$

$$|\text{Be}^+\rangle_2 = v |\uparrow\rangle_2 + w |\downarrow\rangle_2 \quad \text{mit } |v|^2 + |w|^2 = 1 \quad (7.15b)$$

der einzelnen Ionen geschrieben werden, egal welche Werte man für die Amplituden  $q, u, v, w$  wählt.

$|\uparrow\rangle$  und  $|\downarrow\rangle$  sind im Fall des Beryllium-Ions abkürzende Schreibweisen. Für das Verständnis des Experiments ist es unwichtig, um welche Zustände es sich im Detail handelt. Wer es trotzdem genau wissen möchte, kann es in Anhang A.5 nachlesen.

Um zwei  $\text{Be}^+$  Ionen in den verschränkten Zustand (7.14) zu bringen, gingen Rowe et. al. folgendermaßen vor: In einer evakuierten Kammer befand sich die elektrostatische Falle, die in Abb. 7.6 auf der nächsten Seite skizziert ist. In 7.6(b) schaut man von schräg

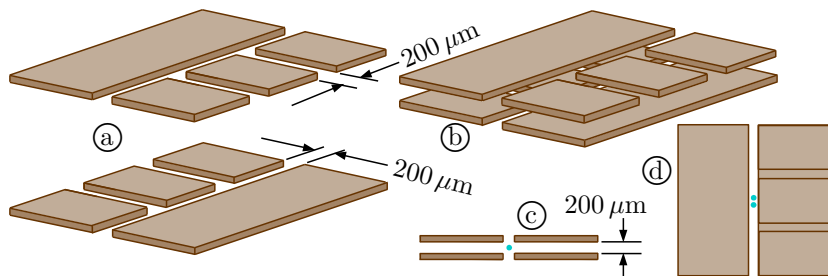


Abb. 7.6: Die Ionen-Falle

oben, in 7.6(c) von der Stirnseite, und in 7.6(d) senkrecht von oben auf die Falle. In 7.6(a) sind zwecks besserer Sichtbarkeit die oberen und unteren Elektroden einzeln gezeichnet.

Die türkisen Punkte sollen die  $\text{Be}^+$  Ionen symbolisieren. Gleichnamige Ladungen stoßen sich ab. Wenn man eine positive Spannung an die Elektroden legt, dann stoßen sie die positiv geladenen Ionen ab, so dass die Ionen im Inneren der Falle gefangen sind. (An die vier kleinen Elektroden in den Ecken wird eine etwas höhere positive Spannung angelegt als an die vier anderen Elektroden, damit die Ionen sich nicht durch den länglichen Kanal hinaus schleichen können.)

Wie bringt man die Ionen in die Falle hinein? Man schießt zunächst einen Strahl von Ionen in die Falle, die so hohe Geschwindigkeit haben dass die schwache Abstoßung durch die Elektroden überhaupt keine Rolle spielt. Im Inneren der Falle werden die Ionen dann durch Laserstrahlung mit geeigneter Frequenz fast bis zum absoluten Nullpunkt abgekühlt (d. h. gebremst). Wenn man es schafft, sie fast zur Ruhe zu bringen, dann können sie nach dem Abschalten des Lasers die Falle nicht mehr verlassen, weil ihre thermische Energie dann nicht mehr ausreicht, um die elektrostatische Abstoßung durch die Elektroden zu überwinden.

Weil die beiden Ionen positiv geladen sind, stoßen sie sich auch

wechselseitig ab. Ihr durchschnittlicher Abstand beträgt etwa  $3 \mu\text{m}$ , ist also etwa hundert mal kleiner als der Abstand zwischen den Elektroden, aber etwa 10 000 mal größer als der typische Abstand zwischen den beiden Atomen eines zweiatomigen Moleküls. Trotz dieses gewaltigen Abstands vibrieren die beiden Ionen relativ zueinander wie ein zweiatomiges Molekül, allerdings mit weitaus niedrigerer Frequenz. Dieses künstliche Molekül werden wir  $\text{Be}^+ \& \text{Be}^+$  nennen.

Sein Termschema wird in Abb. 7.7 gezeigt. Der Energieabstand zwischen den Zuständen  $|\downarrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2$  und  $|\uparrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2$  beträgt etwa  $h \cdot 2,5 \text{ GHz}$ . Die Energie der beiden Zustände  $|\uparrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2$  und  $|\downarrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2$  liegt genau in der Mitte zwischen den beiden anderen Zuständen.

Anfangs wird das künstliche Molekül  $\text{Be}^+ \& \text{Be}^+$  durch Laserkühlung im Grundzustand  $|\downarrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2$  präpariert. Aus diesem wird es mithilfe von vier gekreuzten Laserstrahlen, deren Wellenlänge etwa  $313 \text{ nm}$  beträgt, durch doppelte stimulierte Raman-Streuung angeregt in den Zustand  $|\uparrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2$ . Das klingt nicht nur ziemlich kompliziert, sondern ist es auch. Als Raman-Streuung wird ein Prozess bezeichnet, bei dem ein Atom oder Molekül ein Photon weder elastisch (ohne Energieänderung des Photons) streut noch komplett absorbiert, sondern das Photon zwar absorbiert aber gleichzeitig ein Photon mit nur geringfügig niedrigerer Energie

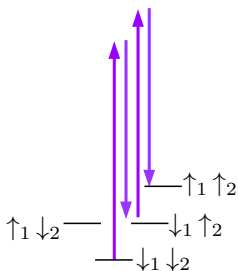


Abb. 7.7: Das Term-Schema von  $\text{Be}^+ \& \text{Be}^+$ . Die Energiedifferenz zwischen den Zuständen  $|\downarrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2$  und  $|\uparrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2$  beträgt etwa  $h \cdot 2,5 \text{ GHz}$ . Die violetten Pfeile sind nicht maßstabsgerecht gezeichnet!

emittiert. Dieser relativ unwahrscheinliche Vorgang kann dadurch „stimuliert“ (weniger unwahrscheinlich gemacht) werden, dass das Atom oder Molekül mit Photonen bestrahlt wird, die die gleiche Frequenz wie das Photon haben das emittiert wird.

In diesem Fall müssen sogar zwei Photonen inelastisch gestreut werden, was den Vorgang nochmals unwahrscheinlicher macht. Damit die Anregung überhaupt gelingt, müssen die Ionen fast in den Einzelionen-Zustand  $^2\text{P}_{1/2}$  angeregt werden, siehe das Term-Schema A.3. Aber eben nur fast, denn es soll ja weder dieser Zustand angeregt werden, noch einer der Zustände  $\uparrow_1 \downarrow_2$  oder  $\downarrow_1 \uparrow_2$ , sondern möglichst ausschließlich der Zustand  $\uparrow_1 \uparrow_2$ . Um die erforderliche Frequenzdifferenz von insgesamt 2,5 GHz zwischen den Laserstrahlen zustande zu bringen, muss deshalb mindestens einer der Laserstrahlen mit einem elektrooptischen Modulator präzise verstimmt werden.

Schließlich ist noch ein letzter Trick erforderlich: Das künstliche Molekül soll ja nicht im Zustand  $|\uparrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2$  präpariert werden, sondern im verschränkten Zustand

$$|\text{Be}^+ \& \text{Be}^+\rangle \stackrel{(7.14)}{=} \sqrt{\frac{1}{2}} \left( |\downarrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 - |\uparrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2 \right). \quad (7.16)$$

Man darf also nicht über das Ziel hinaus schießen, sondern muss die Anregung auf halbem Weg abbrechen.<sup>5</sup> Wann der halbe Weg zurückgelegt ist, das hängt von der Stärke der Laser ab. Rowe et. al. fanden heraus, dass sie die Laser nach ziemlich genau  $0,5 \mu\text{s}$  abschalten mussten, um den verschränkten Zustand möglichst perfekt zu präparieren.

Zur Analyse des  $\text{Be}^+ \& \text{Be}^+$ -Moleküls hätten wir gerne einen Detektor mit den vier Eigenvektoren

<sup>5</sup> für Physiker: In der Theorie der Rabi-Oszillationen spricht man von einem  $\pi/2$ -Puls. Eine elementare Einführung in diese Thematik findet man in [48].

$$\begin{array}{ll}
 |\uparrow\rangle_{D1} |\uparrow\rangle_{D2} & |\uparrow\rangle_{D1} |\downarrow\rangle_{D2} \\
 |\downarrow\rangle_{D1} |\uparrow\rangle_{D2} & |\downarrow\rangle_{D1} |\downarrow\rangle_{D2} .
 \end{array} \quad (7.17)$$

Wie die Stern-Gerlach-Magneten im Gedankenexperiment von Bohm und die polarisierenden Strahlteiler im Experiment von Aspect et. al. sollen die Detektoren drehbar sein. Wenn der Detektor D1 um den Winkel  $\varphi_1$  und der Detektor D2 um den Winkel  $\varphi_2$  gedreht wird, dann soll beispielsweise aus dem Eigenvektor

$$|\uparrow\rangle_{D1} |\uparrow\rangle_{D2}$$

der Eigenvektor

$$(a |\uparrow\rangle_{D1} + b |\downarrow\rangle_{D1}) (c |\uparrow\rangle_{D2} + d |\downarrow\rangle_{D2})$$

werden, in dem die Amplituden  $a$  und  $b$  von  $\varphi_1$  und die Amplituden  $c$  und  $d$  von  $\varphi_2$  abhängen. Die Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen Messergebnisse können dann wie gewohnt als Betragsquadrate der verschiedenen Projektionsamplituden berechnet werden. In diesen Berechnungen werden beispielsweise Terme der Art

$$\begin{aligned}
 & \left| (b_{D1} \langle \downarrow | + a_{D1} \langle \uparrow |) | \downarrow \rangle_1 \right|^2 = \\
 & = \left| b \underbrace{_{D1} \langle \downarrow | \downarrow \rangle_1}_1 + a \underbrace{_{D1} \langle \uparrow | \downarrow \rangle_1}_0 \right|^2 = |b|^2
 \end{aligned} \quad (7.18)$$

auftauchen. So einen drehbaren Detektor hatten Rowe et. al. nicht. Aber sie überlegten sich, dass man genau die gleichen Betragsquadrate erhält, wenn man statt der Detektoren den Zustandsvektor  $|\text{Be}^+ \& \text{Be}^+\rangle$  dreht. Dann erhält man beispielsweise anstelle von (7.18) das Betragsquadrat

$$\begin{aligned}
 & \left| {}_{D1} \langle \downarrow | (a |\uparrow\rangle_1 + b |\downarrow\rangle_1) \right|^2 = \\
 & = \left| a \underbrace{{}_{D1} \langle \downarrow | \uparrow \rangle_1}_0 + b \underbrace{{}_{D1} \langle \downarrow | \downarrow \rangle_1}_1 \right|^2 = |b|^2 .
 \end{aligned} \quad (7.19)$$

Es ist also egal, ob man den Detektor oder den Zustandsvektor des untersuchten Systems dreht, das Ergebnis ist in beiden Fällen das gleiche.

In Anhang A.6 wird erklärt, auf welche Weise Rowe et. al. die Drehungen

$$|\uparrow\rangle_1 \xrightarrow{\text{Drehung um } \varphi_1} a_1 |\uparrow\rangle_1 + b_1 |\downarrow\rangle_1 \quad (7.20a)$$

$$|\downarrow\rangle_1 \xrightarrow{\text{Drehung um } \varphi_1} c_1 |\uparrow\rangle_1 + d_1 |\downarrow\rangle_1 \quad (7.20b)$$

$$|\uparrow\rangle_2 \xrightarrow{\text{Drehung um } \varphi_2} a_2 |\uparrow\rangle_2 + b_2 |\downarrow\rangle_2 \quad (7.20c)$$

$$|\downarrow\rangle_2 \xrightarrow{\text{Drehung um } \varphi_2} c_2 |\uparrow\rangle_2 + d_2 |\downarrow\rangle_2, \quad (7.20d)$$

der Zustände zustande brachten, in denen die Amplituden  $a_1, b_1, c_1, d_1$  von einem variabel wählbaren Winkel  $\varphi_1$  abhängen, und die Amplituden  $a_2, b_2, c_2, d_2$  von einem variabel wählbaren Winkel  $\varphi_2$  abhängen.

Durch Drehung um die Winkel  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  wird der Zustandsvektor (7.16) des  $\text{Be}^+\&\text{Be}^+$ -Moleküls zu

$$\begin{aligned} |\text{Be}^+\&\text{Be}^+\rangle &\stackrel{(7.16),(7.20)}{=} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}} \left[ \left( c_1 |\uparrow\rangle_1 + d_1 |\downarrow\rangle_1 \right) \left( c_2 |\uparrow\rangle_2 + d_2 |\downarrow\rangle_2 \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left( a_1 |\uparrow\rangle_1 + b_1 |\downarrow\rangle_1 \right) \left( a_2 |\uparrow\rangle_2 + b_2 |\downarrow\rangle_2 \right) \right]. \quad (7.21) \end{aligned}$$

Dieser Zustandsvektor wird dann wie gewohnt auf die vier Eigenvektoren (7.17) der Messapparatur projiziert:

$$\begin{aligned} |\text{Be}^+\&\text{Be}^+\rangle &= |7.21\rangle = \\ &= |\uparrow\rangle_{D1} |\uparrow\rangle_{D2} D_2 \langle \uparrow |_{D1} \langle \uparrow | |7.21\rangle + \\ &+ |\uparrow\rangle_{D1} |\downarrow\rangle_{D2} D_2 \langle \downarrow |_{D1} \langle \uparrow | |7.21\rangle + \\ &+ |\downarrow\rangle_{D1} |\uparrow\rangle_{D2} D_2 \langle \uparrow |_{D1} \langle \downarrow | |7.21\rangle + \end{aligned}$$

$$+ |\downarrow\rangle_{D1} |\downarrow\rangle_{D2} \langle\downarrow|_{D1} \langle\downarrow| \quad (7.22)$$

Die jeweilige Wahrscheinlichkeit für jedes der vier möglichen Messergebnisse berechnet man nach der Born'schen Regel (5.19b) als Betragsquadrat der entsprechenden Projektionsamplitude:

$$W(\uparrow_1 \uparrow_2) = \left| \langle\downarrow|_{D2} \langle\uparrow|_{D1} \langle\uparrow| \right|^2 \quad (7.23a)$$

$$W(\uparrow_1 \downarrow_2) = \left| \langle\downarrow|_{D2} \langle\downarrow|_{D1} \langle\uparrow| \right|^2 \quad (7.23b)$$

$$W(\downarrow_1 \uparrow_2) = \left| \langle\downarrow|_{D2} \langle\uparrow|_{D1} \langle\downarrow| \right|^2 \quad (7.23c)$$

$$W(\downarrow_1 \downarrow_2) = \left| \langle\downarrow|_{D2} \langle\downarrow|_{D1} \langle\downarrow| \right|^2 \quad (7.23d)$$

Um diese Wahrscheinlichkeits-Vorhersagen der Quantentheorie experimentell zu prüfen, richteten Rowe et. al. ihr Experiment vollautomatisch computergesteuert ein. Mit vier verschiedenen Kombinationen der Winkel  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  führten sie jeweils 20 000 Läufe des Experiments durch. Jeder der Läufe bestand aus drei Schritten:

- \* Zuerst wurde das  $\text{Be}^+ \& \text{Be}^+$ -Molekül im verschränkten Zustand (7.16) präpariert.
- \* Dann wurden die gewünschten Phasenverschiebungen durchgeführt und damit das  $\text{Be}^+ \& \text{Be}^+$ -Molekül in den Zustand (7.21) gedreht.
- \* Schließlich wurde das  $\text{Be}^+ \& \text{Be}^+$ -Molekül mit einem 1 ms langen „Detektionspuls“ bestrahlt, dessen Frequenz<sup>6</sup> so gewählt wurde, dass eine intensive Resonanz-Lumineszenz auftrat wenn

<sup>6</sup> Die Frequenz war exakt auf den Übergang zwischen dem Grundzustand  $\downarrow$  und dem Zustand  ${}^2P_{3/2}$  der Einzel-Ionen einjustiert, siehe das Termschema A.3. Ein Ion, das sich beim Beginn des Detektionspulses im Zustand  $|\downarrow\rangle$  befindet, wird bei dieser Bestrahlung zwischen den Zuständen  $|\downarrow\rangle$  und  $|{}^2P_{3/2}\rangle$  oszillieren, wobei eine intensive Resonanz-Lumineszenz auftritt, die leicht beobachtet werden kann.

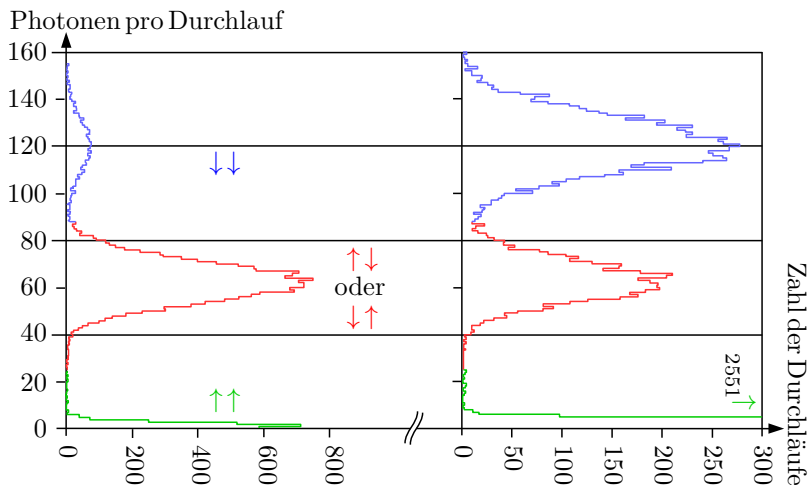


Abb. 7.8: Linkes Diagramm: Das Ergebnis von 20 000 Durchläufen des Experiments mit  $\varphi_1 = +67,5^\circ \hat{=} +3\lambda/16$ ,  $\varphi_2 = +67,5^\circ \hat{=} +3\lambda/16$   
 Rechtes Diagramm: Das Ergebnis von 20 000 Durchläufen des Experiments mit  $\varphi_1 = +67,5^\circ \hat{=} +3\lambda/16$ ,  $\varphi'_2 = -22,5^\circ \hat{=} -\lambda/16$

das bestrahlte Ion sich im Zustand  $|\downarrow\rangle$  befand, aber keine Lumineszenz auftrat, wenn das bestrahlte Ion sich im Zustand  $|\uparrow\rangle$  befand.

Die Ergebnisse von je 20 000 Durchläufen des Experiments mit zwei verschiedenen Winkel-Einstellungen sind in den Diagrammen 7.8 dargestellt. Auf der vertikalen Achse ist eingetragen, wie viele Lumineszenz-Photonen in einem Durchlauf des Experiments gezählt wurden, auf der waagerechten Achse ist eingetragen, in wie vielen Durchläufen die jeweilige Zahl von Photonen auftrat.

Man erkennt in den Diagrammen drei deutlich voneinander abgesetzte Gruppen. Die Experimentatoren interpretierten diese

Ergebnisse folgendermaßen:

- \* Wenn mehr als 85 Lumineszenzphotonen gezählt wurden, dann befanden sich offenbar beide Ionen im Zustand  $|\downarrow\rangle$  (beide Ionen leuchten).
- \* Wenn 25 bis 85 Lumineszenzphotonen gezählt wurden, dann befand sich offenbar eines der Ionen im Zustand  $|\downarrow\rangle$  (ein Ion leuchtet), und ein Ion im Zustand  $|\uparrow\rangle$  (ein Ion ist dunkel).
- \* Wenn weniger als 25 Lumineszenzphotonen gezählt wurden, dann befanden sich offenbar beide Ionen im Zustand  $|\uparrow\rangle$  (beide Ionen sind dunkel).

Wir definieren

$N_{\downarrow\downarrow}$  als die Anzahl der Durchläufe, bei denen mehr als 85 Photonen gezählt wurden.

$N_{\uparrow\downarrow}$  oder  $\downarrow\uparrow$  als die Anzahl der Durchläufe, bei denen 25 bis 85 Photonen gezählt wurden.

$N_{\uparrow\uparrow}$  als die Anzahl der Durchläufe, bei denen weniger als 25 Photonen gezählt wurden.

Klarerweise ist  $N_{\downarrow\downarrow} + N_{\uparrow\downarrow} \text{ oder } \downarrow\uparrow + N_{\uparrow\uparrow} = 20\,000$ . Aus diesen Werten ergeben sich die Wahrscheinlichkeiten (d. h. die relativen Häufigkeiten), mit denen die verschiedenen Zustände im Experiment auftraten:

$$W(\uparrow_1 \uparrow_2) = \frac{N_{\uparrow\uparrow}}{N_{\uparrow\uparrow} + N_{\uparrow\downarrow} \text{ oder } \downarrow\uparrow + N_{\downarrow\downarrow}} \quad (7.24a)$$

$$W(\uparrow_1 \downarrow_2) + W(\downarrow_1 \uparrow_2) = \frac{N_{\uparrow\downarrow} \text{ oder } \downarrow\uparrow}{N_{\uparrow\uparrow} + N_{\uparrow\downarrow} \text{ oder } \downarrow\uparrow + N_{\downarrow\downarrow}} \quad (7.24b)$$

$$W(\downarrow_1 \downarrow_2) = \frac{N_{\downarrow\downarrow}}{N_{\uparrow\uparrow} + N_{\uparrow\downarrow} \text{ oder } \downarrow\uparrow + N_{\downarrow\downarrow}}. \quad (7.24c)$$

Rowe et. al. bestimmten diese drei Wahrscheinlichkeiten für die vier Winkel-Kombinationen

$$\varphi_1 = +67,5^\circ \hat{=} + \frac{3}{16} \lambda$$

$$\begin{aligned}\varphi_2 &= +67,5^\circ \hat{=} + \frac{3}{16} \lambda \\ \varphi'_1 &= -22,5^\circ \hat{=} - \frac{1}{16} \lambda \\ \varphi'_2 &= -22,5^\circ \hat{=} - \frac{1}{16} \lambda .\end{aligned}\tag{7.25}$$

Aus diesem Ergebnis ergeben sich die Korrelationsfunktionen

$$F \stackrel{(6.21)}{=} W(\uparrow_1 \uparrow_2) + W(\downarrow_1 \downarrow_2) - W(\uparrow_1 \downarrow_2) - W(\downarrow_1 \uparrow_2) ,$$

mit denen man die Bell'sche Ungleichung (6.26)

$$-2 \leq S \leq +2 \tag{7.26}$$

$$\text{mit } S = F(\varphi_1, \varphi_2) + F(\varphi_1, \varphi'_2) + F(\varphi'_1, \varphi_2) - F(\varphi'_1, \varphi'_2)$$

prüfen kann. Zur Erinnerung: Die Ungleichung (7.26) muss bei beliebigen Einstellungen  $\varphi_1, \varphi'_1, \varphi_2, \varphi'_2$  erfüllt sein, falls die Annahme **B** zutrifft. Die Annahme **B** besagt im Fall des künstlichen  $\text{Be}^+ \& \text{Be}^+$ -Moleküls, dass die Ionen bereits vor der Messung in einem der Zustände  $|\uparrow\rangle_1$  oder  $|\downarrow\rangle_1$  bzw.  $|\uparrow\rangle_2$  oder  $|\downarrow\rangle_2$  sind, und dass dieser Zustand durch die Messung lediglich festgestellt wird. Dagegen nimmt die Quantentheorie an, dass die Zustände  $|\uparrow\rangle_1$  oder  $|\downarrow\rangle_1$  bzw.  $|\uparrow\rangle_2$  oder  $|\downarrow\rangle_2$  erst durch die Messung erschaffen werden. Solange das  $\text{Be}^+ \& \text{Be}^+$ -Molekül im verschränkten Zustand (7.16) existiert, haben die einzelnen Ionen laut Quantentheorie keine eigenständige Existenz und deshalb auch keinen Zustand.

Wenn man  $S$  mithilfe der Quantentheorie berechnet, dann wird die Bell'sche Ungleichung (7.26) bei vielen Winkeln verletzt, und zwar besonders deutlich bei den von Rowe et. al. untersuchten Winkeln (7.25). Bei diesen Winkeln berechnet man mit der Quantentheorie

$$S_{\text{Quantentheorie}} = 2\sqrt{2} \approx 2,83 . \tag{7.27}$$

Rowe et. al. fanden

$$S_{\text{Experiment}} = 2,25 \pm 0,03 + 0,12 . \quad (7.28)$$

Das liegt deutlich über 2, und widerlegt damit Annahme B. Der experimentelle Wert liegt aber auch deutlich unter dem Wert  $2\sqrt{2}$  der Quantentheorie. Warum? Dafür sahen Rowe et. al. hauptsächlich drei Gründe:

- \* Die Aufnahme eines kompletten Datensatzes – insgesamt 80 000 Durchläufe des Experiments mit vier verschiedenen Kombinationen der Winkel (7.25) – dauerte etwa vier Minuten. Das klingt nach wenig, es erwies sich aber als sehr schwierig die Geräte, mit denen die Phasenverschiebungen gesteuert wurden, über den gesamten Zeitraum stabil zu halten. Die Ungenauigkeiten bei der Einstellung der Phasenverschiebungen führten zum Fehler  $\pm 0,03$  in (7.28).
- \* Bei der Detektion wurden ungewollt einige Ionen aus dem Zustand  $|\downarrow\rangle$  durch den Detektions-Puls in den Zustand  $|\uparrow\rangle$  angeregt, waren dann dunkel, und wurden deshalb falsch bewertet. Rowe et. al. schätzten, dass ihr Ergebnis um den in (7.28) angegebenen Wert von  $+0,12$  höher wäre, wenn dieser Fehler bei der Detektion abgestellt werden könnte.
- \* Ein dritter Fehler bestand darin, dass die Präparation des künstlichen Moleküls  $\text{Be}^+ \& \text{Be}^+$  im verschränkten Zustand (7.16) tatsächlich nur in 88 % der Fälle gelang. Die Experimentatoren konnten die Auswirkungen dieses Fehlers auf (7.28) nicht quantifizieren. Es ist aber nicht zu bezweifeln, dass eine Verbesserung der Präparation den Wert (7.28) noch weiter erhöhen würde.

Also wird die Annahme B durch das Experiment von Rowe et. al. zweifelsfrei widerlegt.

### 7.3 Verschränkte SPDC-Photonen

Im Experiment von Aspect, Grangier, und Roger, das in Abschnitt 7.1 geschildert wurde, wurden mithilfe einer Lumineszenz-Kaskade von Ca-Atomen Paare von Photonen, die wir  $\text{Photon}_1$  und  $\text{Photon}_2$  genannt haben, im verschränkten Polarisationszustand

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{1}{2}} \left[ |C_R\rangle_1 |C_R\rangle_2 + |C_L\rangle_1 |C_L\rangle_2 \right] = \\ & \stackrel{\text{(A.16)}}{=} \sqrt{\frac{1}{2}} \left( |L_0\rangle_1 |L_0\rangle_2 + |L_{90}\rangle_1 |L_{90}\rangle_2 \right) \end{aligned}$$

hergestellt und untersucht. Seit in den neunziger Jahren das SPDC-Verfahren (SPDC = spontaneous parametric downconversion, siehe Abschnitt 3.5 und insbesondere Abb. 3.6 auf Seite 63) entwickelt wurde, ist die Herstellung von Photonenpaaren in solchen verschränkten Zuständen wesentlich einfacher geworden.

Die Trajektorien der beiden Tochterphotonen und des Pumpphotons liegen beim SPDC-Verfahren stets in einer Ebene, weil nur so der Impuls erhalten werden kann. Diese Ebene braucht aber für verschiedene Paare von Tochterphotonen nicht die gleiche zu sein. Bei SPDC Typ I liegen die Trajektorien der Tochterphotonen auf einem Kegelmantel, dessen Achse durch den Pumpstrahl definiert wird, siehe Abb. 3.6. Bei SPDC Typ II liegen die Trajektorien der Tochterphotonen auf unterschiedlichen Kegelmänteln, wie in Abb. 7.9 skizziert. Ob SPDC Typ I oder SPDC Typ II auftritt hängt davon ab, wie der Kristall relativ zum Pumplicht-Strahl justiert wird.

Wenn das Pumpphoton  $L_{90}$ -polarisiert ist, wird beim SPDC-II-Prozess das Tochterphoton, dessen Trajektorie auf dem oberen Kegelmantel liegt, im Zustand  $|L_0\rangle$  präpariert. Das Tochterphoton, dessen Trajektorie auf dem unteren Kegelmantel liegt, wird im Zustand  $|L_{90}\rangle$  präpariert.

Aber in welchem Polarisations-Zustand werden die beiden Tochterphotonen präpariert, wenn man – wie in Abb. 7.10 auf der nächsten Seite skizziert – mithilfe von Lochblenden Photonen auswählt, deren Trajektorien genau auf den Schnittlinien der beiden Kegelmäntel liegen? Laut Quantentheorie werden die Photonen in diesem Fall weder im Zustand  $|L_0\rangle$  noch im Zustand  $|L_{90}\rangle$  präpariert, sondern das Gesamtsystem der beiden Tochterphotonen wird im Zustand

$$|\text{Photonenpaar}\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}} \left( |L_0\rangle_1 |L_{90}\rangle_2 + |L_{90}\rangle_1 |L_0\rangle_2 \right) \quad (7.29)$$

präpariert. Wenn dies der Zustandsvektor des Photonenpaares ist, dann hat – solange die Polarisation noch nicht gemessen wurde – laut Quantentheorie weder Photon<sub>1</sub> noch Photon<sub>2</sub> irgendeine Polarisation. Dennoch weiß man mit Sicherheit: Eine künftige Polarisationsmessung wird die beiden Photonen in Polarisationszuständen präparieren, bei denen die in (7.29) beschriebene Korrelation zwischen den Polarisierungen von Photon<sub>1</sub> und Photon<sub>2</sub> realisiert wird.

Das ist etwas wesentlich anderes als die von EPR favorisierte

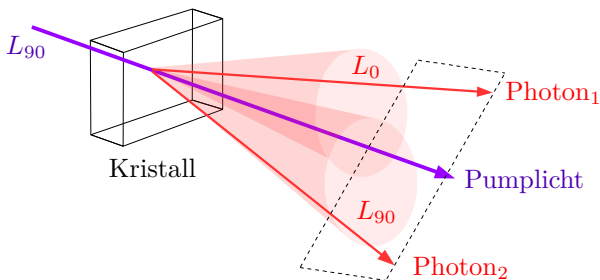


Abb. 7.9: Bei SPDC Typ II liegen die Trajektorien der beiden Tochterphotonen (rote Pfeile) auf unterschiedlichen Kegelmänteln, aber stets symmetrisch zum Pumpstrahl, wie durch die gestrichelte Ebene angedeutet.

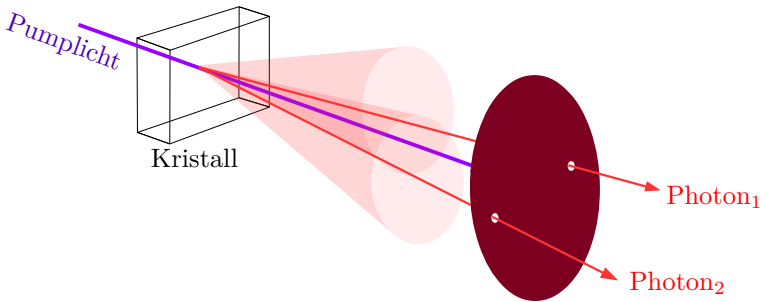


Abb. 7.10: Präparation des verschränkten Zustands (7.29)

Annahme **B**, dass die Photonen eine Polarisation haben, die uns lediglich unbekannt ist. Indem man mithilfe der Photonenpaare (7.29) die Bell'sche Ungleichung prüft, kann man die Annahme **B** experimentell widerlegen.

Das taten im Jahr 1995 Kwiat, Mattle, Weinfurter, Zeilinger, Sergienko, und Shih [49]. Sie erzeugten Paare verschränkter Photonen durch SPDC Typ II mithilfe eines geeignet justierten Kristalls aus  $\beta$ -Bariumborat (BBO). Wie in Abb. 7.10 gezeichnet justierten sie die beiden Lochblenden, mit denen die Photonenpaare ausgewählt wurden, so, dass sowohl  $\text{Photon}_1$  als auch  $\text{Photon}_2$  auf *beiden* Kegelmänteln lagen. Dadurch wurden die erzeugten Photonenpaare im Zustand (7.29) präpariert.

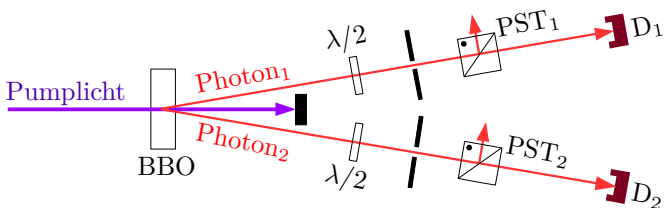


Abb. 7.11: Das Experiment von Kwiat et. al. [49]

Weitere Details ihres Experiments sind in Abb. 7.11 abgebildet. Sowohl  $\text{Photon}_1$  als auch  $\text{Photon}_2$  liefen durch je ein  $\lambda/2$ -Plättchen (sprich:  $\lambda$ -halbe-Plättchen). Das ist ein dünnes Plättchen eines **anisotropen** Kristalls (meist wird Glimmer verwendet), der von Licht mit unterschiedlicher Polarisation unterschiedlich schnell durchlaufen wird. Was dabei geschieht, kann man anhand von Abb. A.1 auf Seite 361 verstehen. Wenn das  $\lambda/2$ -Plättchen so justiert ist dass seine „schnelle“ Achse in  $y$ -Richtung orientiert ist, dann läuft die gestrichelt gezeichnete Teilwelle mit  $L_0$ -Polarisation schneller durch den Kristall als die gepunktet gezeichnete Teilwelle mit  $L_{90}$ -Polarisation. Wenn das Plättchen genau so dick geschnitten ist, dass die schnellere Teilwelle der langsameren Teilwelle am Ende des Kristalls gerade um eine halbe Wellenlänge voraus ist (daher hat das Plättchen seinen Namen), dann ist aus der  $L_{45}$ -Welle von Abb. A.1 (a) die  $L_{135}$ -Welle von Abb. A.1 (b) geworden. Das  $\lambda/2$ -Plättchen hat die Polarisationsrichtung des Lichts also um  $90^\circ$  gedreht.<sup>7</sup>

Wenn die schnelle Achse des  $\lambda/2$ -Plättchens dagegen um  $45^\circ$  gegen die  $y$ -Achse gedreht ist, dann wird weder die Polarisation der

---

<sup>7</sup> Man kann sich auch klarmachen, dass ein  $\lambda/2$ -Plättchen das rechts-zirkular polarisierte Lichte von Abb. A.1 (c) in das links-zirkular polarisierte Lichte von Abb. A.1 (d) verwandelt, und umgekehrt.

Wenn man ein  $\lambda/2$ -Plättchen in zwei Plättchen halber Dicke spaltet, dann erhält man zwei  $\lambda/4$ -Plättchen. Das  $\lambda/4$ -Plättchen verschiebt die schnelle Teilwelle um eine viertel Wellenlänge gegenüber der langsamen Teilwelle. Deshalb erzeugt es, wenn seine schnelle Achse in  $y$ -Richtung justiert ist, aus der linear polarisierten Welle von Abb. A.1 (a) die rechtszirkular polarisierte Welle von Abb. A.1 (c), und aus der linear polarisierten Welle von Abb. A.1 (b) die linkszirkular polarisierte Welle von Abb. A.1 (d). Wenn die schnelle Achse des  $\lambda/4$ -Plättchens um  $45^\circ$  gegen die  $y$ -Achse gedreht ist, dann verändert es die Polarisation der Wellen A.1 (a) und A.1 (b) überhaupt nicht. Bei Einstellung zwischen  $0^\circ$  und  $45^\circ$  entstehen elliptisch polarisierte Wellen, mit denen wir uns in diesem Buch nicht befassen werden. Umgekehrt verwandelt ein  $\lambda/4$ -Plättchen zirkular polarisiertes Licht in linear polarisiertes Licht.

$L_{45}$ -Welle von Abb. A.1(a) noch die Polarisation der  $L_{135}$ -Welle von Abb. A.1(b) gedreht, weil diese Wellen dann entweder ausschließlich schnelleres Licht oder ausschließlich langsames Licht enthalten. In diesem Fall gibt es keine schnellere Teilwelle, die eine langsamere Teilwelle überholen könnte.

Wenn das  $\lambda/2$ -Plättchen je nach Einstellung die Polarisationsrichtung von Licht um  $90^\circ$  oder um  $0^\circ$  dreht, dann ist es plausibel – und man kann es sich mit etwas Überlegung auch detailliert klarmachen – dass man die Polarisationsrichtung von linear polarisiertem Licht durch geeignete Justierung des  $\lambda/2$ -Plättchens um jeden beliebigen Winkel drehen kann.

Wenn die Polarisation von  $\text{Photon}_1$  mithilfe eines  $\lambda/2$ -Plättchens um  $\gamma_1$  gedreht wird, und die Polarisation von  $\text{Photon}_2$  mithilfe eines  $\lambda/2$ -Plättchens um  $\gamma_2$  gedreht wird, dann wird der Zustandsvektor des Photonenpaares folgendermaßen geändert:

$$\begin{aligned}
 |7.29\rangle &= \sqrt{\frac{1}{2}} \left( |L_0\rangle_1 |L_{90}\rangle_2 + |L_{90}\rangle_1 |L_0\rangle_2 \right) \xrightarrow{\lambda/2\text{-Plättchen}} \\
 &\longrightarrow \sqrt{\frac{1}{2}} \left( |L_{0+\gamma_1}\rangle_1 |L_{90+\gamma_2}\rangle_2 + |L_{90+\gamma_1}\rangle_1 |L_{0+\gamma_2}\rangle_2 \right) \quad (7.30)
 \end{aligned}$$

In diesem Zustand traf das Photonenpaar auf die polarisierenden Strahlteiler  $\text{PST}_1$  und  $\text{PST}_2$ . Beide Strahlteiler waren so justiert, dass sie Licht mit  $L_0$ -Polarisation (in der Papierebene von Zeichnung 7.11 polarisiertes Licht) **transmittierten**, und Licht **reflektierten** das  $L_{90}$ -polarisiert war (Polarisation senkrecht zur Papierebene von Zeichnung 7.11).

Reflektierte Photonen wurden ignoriert, transmittierte Photonen wurden mit den Detektoren  $D_1$  und  $D_2$  detektiert. Wenn nur ein Detektor ansprach, wurde das Ereignis ebenfalls ignoriert. Nur Koinzidenzen (beide Detektoren sprechen an) wurden gezählt. Weil beide Strahlteiler transmittierte Photonen im Zustand  $|L_0\rangle$  präparieren, hat die Messapparatur nur den einen Eigenvektor

$$|L_0\rangle_1 |L_0\rangle_2 . \quad (7.31)$$

Die Projektion von (7.30) auf diesen Eigenvektoren der Messapparatur ergibt:

$$|7.30\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}} \left[ |L_0\rangle_1 |L_0\rangle_2 \cdot \left( {}_1\langle L_0 || L_{\gamma_1} \rangle_1 {}_2\langle L_0 || L_{90+\gamma_2} \rangle_2 + {}_1\langle L_0 || L_{90+\gamma_1} \rangle_1 {}_2\langle L_0 || L_{\gamma_2} \rangle_2 \right) \right]$$

Die Wahrscheinlichkeit  $W_{TT}(\gamma_1, \gamma_2)$  dafür, dass beide Photonen transmittiert werden, ist nach der Born'schen Regel (5.19b) gleich dem Betragsquadrat der entsprechenden Projektionsamplitude:

$$\begin{aligned} W_{TT} &= \frac{1}{2} \left| \langle L_0 || L_{\gamma_1} \rangle \langle L_0 || L_{90+\gamma_2} \rangle + \langle L_0 || L_{90+\gamma_1} \rangle \langle L_0 || L_{\gamma_2} \rangle \right|^2 = \\ &= \frac{1}{2} \left| \langle L_0 || L_{90+\gamma_1+\gamma_2} \rangle \right|^2 \end{aligned} \quad (7.32)$$

Die letzte Umformung<sup>8</sup> ist wahrscheinlich nur Physikern verständlich. Alle anderen Leser sollten das Ergebnis einfach hinnehmen.

Kwiat et. al. stellten mithilfe der  $\lambda/2$ -Plättchen die Polarisation von Photon<sub>1</sub> stets auf  $\gamma_1 = -45^\circ$  ein, während die Polarisation von Photon<sub>2</sub> in verschiedenen Durchläufen des Experiments auf verschiedene Winkel  $\gamma_2$  eingestellt wurde. In Abb. 7.12 auf der nächsten Seite ist  $W_{TT} = (7.32)$  als Funktion von  $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma_2 - 45^\circ$  als gelbe Kurve eingezeichnet. Es gilt die rechte Skala, nicht die linke!

Bei 12 verschiedenen Einstellungen von  $\gamma_2$  zählten Kwiat et. al. jeweils 200 Sekunden lang, wie oft die Detektoren D<sub>1</sub> und D<sub>2</sub> (siehe

8

für Physiker:  $2 \cdot W_{TT} =$ 

$$= \left| \cos(\gamma_1) \cos(90^\circ + \gamma_2) + \cos(90^\circ + \gamma_1) \cos(\gamma_2) \right|^2 = \sin^2(\gamma_2 + \gamma_1)$$

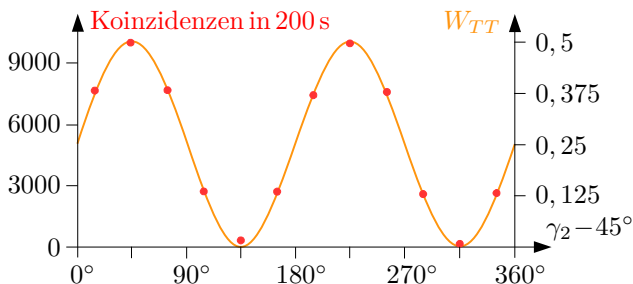


Abb. 7.12: Das Experiment von Kwiat et. al.[49]

Abb. 7.11) gleichzeitig<sup>9</sup> ansprechen. Die Anzahl dieser Koinzidenzen ist in Abb. 7.12 durch rote Punkte dargestellt. Es gilt die linke Skala, die so gestaucht wurde, dass die roten Punkte möglichst genau auf der gelben Linie liegen.

Es fällt auf, dass die Koinzidenzen bei  $135^\circ$  und bei  $315^\circ$  nicht exakt Null sind, wie es laut der gelben Linie – spricht laut Quantentheorie – eigentlich sein sollte. Experimente sind halt niemals perfekt. Trotzdem kann man sicherlich feststellen, dass die Quantentheorie sehr gut mit dem experimentellen Ergebnis übereinstimmt.

Die Annahme **B** wird durch dieses Ergebnis widerlegt, denn die Bell'sche Ungleichung wird verletzt. Zur Erinnerung: Die Bell'sche Ungleichung (6.26) lautet

$$-2 \leq S \leq +2 \quad (7.33)$$

$$\text{mit } S = F(\gamma_1, \gamma_2) + F(\gamma_1, \gamma'_2) + F(\gamma'_1, \gamma_2) - F(\gamma'_1, \gamma'_2) .$$

Wenn Annahme **B** richtig wäre, dann müsste diese Ungleichung bei beliebigen Winkeln  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma'_1, \gamma'_2$  gelten.  $F$  ist die **Korrelationsfunktion**

<sup>9</sup> Kwiat et. al. haben vergessen in ihrer Veröffentlichung [49] zu dokumentieren, wie groß der Abstand der Photonen sein durfte, damit ihre Detektion als „gleichzeitig“ anerkannt wurde. Typischerweise wählen Experimentatoren dieses Zeitfenster 2 bis 10 Nanosekunden groß.

$$F(\gamma_1, \gamma_2) \stackrel{(7.11)}{=} W_{TT}(\gamma_1, \gamma_2) + W_{RR}(\gamma_1, \gamma_2) - W_{TR}(\gamma_1, \gamma_2) - W_{RT}(\gamma_1, \gamma_2). \quad (7.34)$$

Mit der Wahrscheinlichkeit  $W_{TT}(\gamma_1, \gamma_2)$  wird Photon<sub>1</sub> vom polarisierenden Strahlteiler PST<sub>1</sub> transmittiert, wenn es mit Polarisation  $L_{\gamma_1}$  einläuft, und gleichzeitig Photon<sub>2</sub> vom polarisierenden Strahlteiler PST<sub>2</sub> transmittiert, wenn es mit Polarisation  $L_{\gamma_2}$  einläuft, mit  $W_{TR}(\gamma_1, \gamma_2)$  wird Photon<sub>1</sub> transmittiert und Photon<sub>2</sub> reflektiert, mit  $W_{RT}(\gamma_1, \gamma_2)$  wird Photon<sub>1</sub> reflektiert und Photon<sub>2</sub> transmittiert, mit  $W_{RR}(\gamma_1, \gamma_2)$  wird Photon<sub>1</sub> reflektiert und Photon<sub>2</sub> reflektiert. Diese Wahrscheinlichkeiten hängen mit der Anzahl transmittierter und reflektierter Photonen folgendermaßen zusammen:

$$W_{TT} = \frac{N_{TT}}{N_{TT} + N_{RR} + N_{TR} + N_{RT}} \quad (7.35a)$$

$$W_{RR} = \frac{N_{RR}}{N_{TT} + N_{RR} + N_{TR} + N_{RT}} \quad (7.35b)$$

$$W_{TR} = \frac{N_{TR}}{N_{TT} + N_{RR} + N_{TR} + N_{RT}} \quad (7.35c)$$

$$W_{RT} = \frac{N_{RT}}{N_{TT} + N_{RR} + N_{TR} + N_{RT}} \quad (7.35d)$$

$N_{TT}$  mal wurde Photon<sub>1</sub> transmittiert und Photon<sub>2</sub> transmittiert,  $N_{TR}$  mal wurde Photon<sub>1</sub> transmittiert und Photon<sub>2</sub> reflektiert,  $N_{RT}$  mal wurde Photon<sub>1</sub> reflektiert und Photon<sub>2</sub> transmittiert,  $N_{RR}$  mal wurde Photon<sub>1</sub> reflektiert und Photon<sub>2</sub> reflektiert.

Tatsächlich registrierten Kwiat et. al. nur transmittierte Photonen, die reflektierten Photonen wurden nicht registriert. Sie konnten die anderen Werte aber aus

$$N_{RT}(\gamma_1, \gamma_2) = N_{TT}(\gamma_1 + 90^\circ, \gamma_2)$$

$$N_{TR}(\gamma_1, \gamma_2) = N_{TT}(\gamma_1, \gamma_2 + 90^\circ)$$

$$N_{RR}(\gamma_1, \gamma_2) = N_{TT}(\gamma_1 + 90^\circ, \gamma_2 + 90^\circ)$$

erschließen. Deswegen zählten sie die Koinzidenzen  $N_{TT}$  bei folgenden Winkeln

$$\gamma_1 = -22,5^\circ \quad \gamma_1^\perp = -22,5^\circ + 90^\circ = +67,5^\circ \quad (7.36a)$$

$$\gamma_1' = +22,5^\circ \quad \gamma_1'^\perp = +22,5^\circ + 90^\circ = +112,5^\circ \quad (7.36b)$$

$$\gamma_2 = -45^\circ \quad \gamma_2^\perp = -45^\circ + 90^\circ = +45^\circ \quad (7.36c)$$

$$\gamma_2' = 0^\circ \quad \gamma_2'^\perp = 0^\circ + 90^\circ = +90^\circ, \quad (7.36d)$$

und berechneten daraus den Wert

$$S = -2,649 \pm 0,006, \quad (7.37)$$

der die Bell'sche Ungleichung (7.33) um

$$\frac{2,649 - 2}{0,006} \approx 108$$

Standardabweichungen<sup>10</sup> verletzt. Damit ist definitiv bewiesen, dass Annahme B falsch ist.

## 7.4 Raumartig getrennte Detektoren

Die Photonen-Detektoren, die von Aspect et. al. und von Kwiat et. al. verwendet wurden, hatten eine Effizienz von weniger als 40 %. Weil zwei Detektoren ansprechen mussten, damit ein Ereignis bemerkt wurde, heißt das: Weniger als  $(40\%)^2 = 16\%$  der Ereignisse wurden von den Detektoren bemerkt, mehr als 84 % wurden

<sup>10</sup> Was eine „Standardabweichung“ ist, wurde bei Gleichung (3.13) erklärt.

schlichtweg übersehen. Könnte es nicht sein, dass aus irgend einem finsternen Grund zwar die beobachtete Untergruppe von weniger als 16 % der Ereignisse die Bell'sche Ungleichung verletzt, dass aber die unbeobachteten 84 % der Ereignisse so deutlich innerhalb der Grenzen der Bell'schen Ungleichung liegen, dass man insgesamt Übereinstimmung mit der Bell'schen Ungleichung finden würde, wenn man tatsächlich sämtliche Ereignisse ohne Ausnahme sehen könnte?

Die Experimente von Aspect et. al. und von Kwiat et. al. beweisen die Verletzung der Bell'schen Ungleichung offenbar nur unter der Annahme, dass die beobachteten 16 % der Ereignisse für die Gesamtheit aller Ereignisse, der beobachteten und der unbeobachteten, repräsentativ sind. Das wird in der Literatur als die „fair sampling“ Hypothese bezeichnet.

Die fair sampling Hypothese ist zwar sehr plausibel, trotzdem ist es ärgerlich dass hier ein Schlupfloch besteht, das die Beweiskraft der Experimente einschränkt. Genau diese Überlegung war eine der Motivationen für das Experiment von Rowe et. al. mit den  $\text{Be}^+$  Ionen. Bei diesem Experiment gab es bei jedem einzelnen der 80 000 Läufe ein definitives Ergebnis. Kein einziges Ereignis konnte den Experimentatoren durch die Lappen gehen, weil es ja nicht darum ging ob ein oder kein Photon beobachtet wurde, sondern ob mehr als 25 oder mehr als 85 Photonen beobachtet wurden. Mit schlechterer Detektoreffizienz würde der Peak, der in den Diagrammen 7.8 auf Seite 184 bei 60 Photonen liegt, vielleicht bei 50 oder 40 Photonen liegen. Mit besserer Detektoreffizienz würde er vielleicht bei 70 oder 80 Photonen liegen. Trotzdem könnte man das Ergebnis jedes einzelnen Laufes problemlos einem der drei Peaks zuordnen. Das Experiment von Rowe et. al. hat also das Schlupfloch der unzulänglichen Detektoreffizienz geschlossen, es ist auf die „fair sampling“ Hypothese nicht mehr angewiesen.

Ein zweites Schlupfloch, das den Physikern noch mehr Sorgen

machte, wird unter dem Namen „locality loophole“ oder „communication loophole“ diskutiert. Kann man sich wirklich sicher sein, dass nicht die beiden Stern-Gerlach-Magneten in Bohms Gedankenexperiment auf irgend eine unbekannte Weise herausfinden, auf welchen Winkel der jeweils andere Magnet eingestellt ist, und dann die Atome so ablenken, dass sich die passende Korrelation der beiden Messergebnisse ergibt? Oder dass in den Experimenten mit korrelierten Photonenpaaren die polarisierenden Strahlteiler und  $\lambda/2$ -Plättchen irgendwie die Einstellung des jeweils anderen in Erfahrung bringen, und dann die Photonen so transmittieren oder reflektieren, dass die passende Korrelation beobachtet wird? Gewiss, niemand weiß auf welche Weise die Magnete und Strahlteiler, selbst wenn sie diese Informationen hätten, ihre Aktionen koordinieren könnten. Trotzdem ist dies ein Schlupfloch, das geschlossen werden sollte.

Bell hatte schon in seinem Artikel von 1964 erklärt, wie man das machen kann: Man muss die Einstellungen der Magnete bzw. Strahlteiler und  $\lambda/2$ -Plättchen so kurz vor dem Eintreffen der Teilchen verändern, dass die Information über die aktuelle Einstellung – vorausgesetzt dass sie nicht schneller als mit Lichtgeschwindigkeit übertragen wird – unmöglich beim anderen Detektor eintreffen kann, bevor die Messung an beiden Detektoren abgeschlossen ist. In der Sprache der Relativitätstheorie sagt man, dass dann die Detektoren voneinander „raumartig getrennt“ sind.

Ein Experiment mit raumartig getrennten Detektoren wurde erstmals 1998 von Weihs et. al. realisiert [50]. Der Aufbau des Experiments ist in Abb. 7.13 auf der nächsten Seite skizziert. Es handelt sich um eine Weiterentwicklung des Experiments Abb. 7.11 von Kwiat et. al. (beide Experimente wurden im gleichen Labor an der Universität Innsbruck durchgeführt). Die Photonenpaare wurden per SPDC Typ II mit einem BBO-Kristall ( $\beta$ -Bariumborat) erzeugt, und – wie in Abb. 7.10 skizziert – so ausgewählt, dass sie

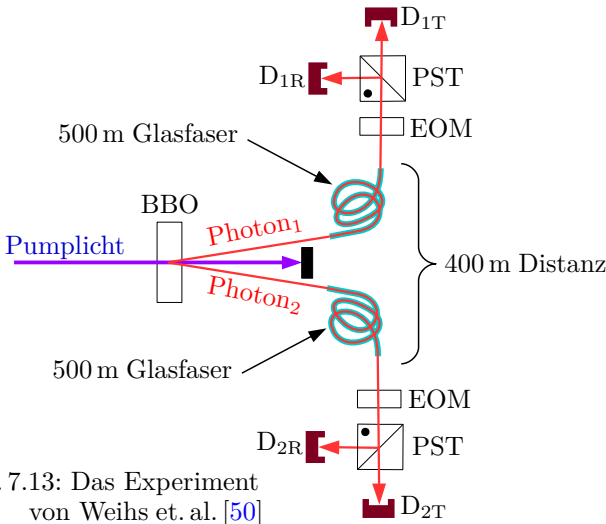


Abb. 7.13: Das Experiment von Weihs et. al. [50]

im verschränkten Zustand

$$|\text{Photonenpaar}\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}} \left( |L_0\rangle_1 |L_0\rangle_2 - |L_0\rangle_1 |L_0\rangle_2 \right) \quad (7.38)$$

präpariert wurden. (Dass hier ein Minuszeichen auftaucht, wo in (7.29) ein Pluszeichen stand, beruht auf einer geringfügig anderen Justierung des BBO-Kristalls. Für das Verständnis des Experiments ist dies Detail belanglos.) Weihs et. al. detektierten nicht nur die transmittierten Photonen, sondern auch die reflektierten Photonen, maßen also – anders als Kwiat et. al. – nicht nur  $N_{TT}$ , sondern direkt auch  $N_{TR}$ ,  $N_{RT}$ , und  $N_{RR}$ .

Besonders wichtig waren zwei Veränderungen: Erstens wurden die  $\lambda/2$ -Plättchen durch elektro-optische Modulatoren (EOM) ersetzt. Das sind Kristalle, die die Polarisation von Licht um einen mehr oder weniger großen Winkel drehen, wenn eine mehr oder weniger große elektrische Spannung an den Kristall gelegt wird. Welche Spannung angelegt wurde, d. h. um welche Winkel die Polarisationen von Photon<sub>1</sub> und Photon<sub>2</sub> gedreht wurden, das wurde von

Zufallsgeneratoren gesteuert. Zweitens waren die Zufallsgeneratoren, elektrooptischen Modulatoren (EOM), polarisierenden Strahlteiler (PST) und Detektoren, die  $\text{Photon}_1$  verarbeiteten, 400 m entfernt von den entsprechenden Geräten, die sich mit  $\text{Photon}_2$  beschäftigten. Die Quelle der Photonenpaare befand sich etwa in der Mitte.  $\text{Photon}_1$  und  $\text{Photon}_2$  wurden durch je eine 500 m lange, teilweise aufgewickelte Glasfaser vom BBO-Kristall zur jeweiligen Detektorstation geführt.

Um eine Information mit Lichtgeschwindigkeit vom einen zum anderen Detektor zu übertragen, braucht man

$$\frac{400 \text{ m}}{c} = \frac{400 \text{ m}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 1,33 \mu\text{s} . \quad (7.39)$$

Das Zeitintervall, das die Experimentatoren benötigten, um mit schnellen physikalischen Zufalls-Generatoren Winkel für die Polarisatoren zu wählen, mithilfe der elektrooptischen Modulatoren diese Einstellungen zu realisieren, und schließlich das Messergebnis zu registrieren, lag deutlich unter den maximal zulässigen 1,3 Mikrosekunden. Das „locality“ Schlupfloch war also bei diesem Experiment zuverlässig geschlossen.

Jedes mal wenn einer der vier Detektoren ansprach, wurde dokumentiert zu welcher Zeit dies geschah (das wurde mit synchronisierten Atomuhren gemessen) und auf welche Polarisation der elektrooptische Modulator dabei eingestellt war. Nach Abschluss der Messungen wurden die Ereignisse dann einander zugeordnet: Wenn der Zeitabstand kleiner als 6 ns war wurde angenommen, dass es sich um  $\text{Photon}_1$  und  $\text{Photon}_2$  eines korrelierten Paares (7.38) handelte.

Weil die Zufallsgeneratoren in diesem Experiment je etwa 40 verschiedene Winkeleinstellungen der elektrooptische Modulatoren auswählten statt sich auf wenige Winkel zu konzentrieren, eigneten sich die Daten nicht für eine Auswertung der Bell'schen Ungleichung. Die Experimentatoren beschränkten sich deshalb darauf, aus

ihren Daten Messkurven nach Art der roten Punkte in Abb. 7.12 auf Seite 194 herzustellen, und die gute Übereinstimmung dieses Resultats mit der Vorhersage der Quantentheorie festzustellen.

Damit war das locality Schlupfloch geschlossen. Leider war aber in diesem Experiment wegen der schlechten Effizienz der Photonen-Detektoren wieder die fair sampling Hypothese erforderlich.

Experimente, bei denen alle bekannten Schlupflöcher gleichzeitig geschlossen wurden, gelangen erst in den Jahren 2015 und 2016, dann aber gleich in vier verschiedenen Laboratorien [51–54]. Ich werde diese Experimente hier nicht im Einzelnen diskutieren und gebe nur bekannt, dass sie – wie von niemandem anders erwartet – die Bell'sche Ungleichung verletzen und damit die Alternative B erneut widerlegten.

## 7.5 Schlussfolgerungen

Was bedeuten die experimentellen Ergebnisse, die in den vorangegangenen Abschnitten beschrieben wurden? Fassen wir unsere Überlegungen nochmal übersichtlich zusammen:

- \* Laut Quantentheorie können zwei Teilsysteme 1 und 2 zu einem Gesamtsystem 1&2 mit dem Zustandsvektor

$$|1&2\rangle = u|A\rangle_1|B\rangle_2 + v|B\rangle_1|A\rangle_2 \quad \text{mit } |u|^2 + |v|^2 = 1$$

verschränkt sein. Charakteristisch für verschränkte Zustandsvektoren ist, dass sie nicht als Produkt  $|1\rangle|2\rangle$  von Zustandsvektoren

$$|1\rangle = a|A\rangle_1 + b|B\rangle_1 \quad \text{mit } |a|^2 + |b|^2 = 1$$

$$|2\rangle = c|A\rangle_2 + d|B\rangle_2 \quad \text{mit } |c|^2 + |d|^2 = 1$$

der Teilsysteme geschrieben werden können.

- \* Wenn der Zustandsvektor des Gesamtsystems verschränkt ist,

dann ordnet die Quantentheorie also nur dem Gesamtsystem einen Zustandsvektor zu, aber nicht den Teilsystemen. Das bedeutet: Die Teilsysteme existieren (laut Quantentheorie) nur als Bestandteile des Gesamtsystems, haben aber keine eigenständige Existenz.

- \* Insbesondere kann das verschränkte Gesamtsystem Eigenschaften haben (z. B. eine bestimmte Polarisation, oder eine bestimmte Projektion seines Drehimpulses auf eine bestimmte Raumachse, oder auch z. B. einen bestimmten Ort oder einen bestimmten Impuls), die die Teilsysteme nicht haben.
- \* Einstein, Podolski, und Rosen (EPR) wollten beweisen, dass die Quantentheorie in dieser Hinsicht unvollständig ist, dass nämlich auch die Teilsysteme alle diese Eigenschaften bereits vor der Messung haben, dass diese Eigenschaften der Teilsysteme bei einer Messung also nicht erschaffen werden, sondern lediglich festgestellt werden.
- \* Der vermeintliche Beweis von EPR erwies sich bei genauerer Analyse als Rohrkrepiierer. Die Verletzungen der Bell'schen Ungleichung sind<sup>8</sup> experimentelle Beweise dafür, dass die Korrelationen zwischen den Teilsystemen verschränkter Gesamtsysteme stärker sind als sie es maximal sein könnten, wenn die von EPR favorisierte Annahme **B** richtig wäre.

Überlegen wir nochmal ganz genau, was es mit der Bell'schen Ungleichung und ihrer Verletzung in den Experimenten auf sich hat. Wir haben aus den drei Annahmen

**A1**<sub>Peres</sub> : Das Quartett

$$(r_{\gamma_D}, r_{\gamma_E}, r'_{\gamma_D}, r'_{\gamma_E})$$

mit zwei tatsächlich gemessenen Werten und zusätzlich zwei nicht gemessenen Werten existiert genau so real wie das Dublett

$$(r_{\gamma_D}, r_{\gamma_E})$$

der beiden tatsächlich gemessenen Werte.

**A2**<sub>Peres</sub> : Die Einstellung der Messgeräte (also die Winkel, auf die die Stern-Gerlach-Magnete bzw. Polarisatoren einjustiert werden), und die Eigenschaften der Teilchen, die gemessen werden sollen, werden *nicht* durch eine gemeinsame Ursache vorherbestimmt. (Kein „Super-Determinismus“)

**A3**<sub>Peres</sub> : Das zukünftige Ergebnis einer Messung beeinflusst *nicht* die Einstellung der Messgeräte (also die Winkel, auf die die Stern-Gerlach-Magnete bzw. Polarisatoren einjustiert werden). (Keine „Rückwärts-Verursachung“)

die Bell'sche Ungleichung (6.26)

$$-2 \leq S \leq +2$$

$$\text{mit } S = F(\gamma_D, \gamma_E) + F(\gamma_D, \gamma'_E) + F(\gamma'_D, \gamma_E) - F(\gamma'_D, \gamma'_E)$$

hergeleitet. Diese Ungleichung wird in den geschilderten Experimenten verletzt. Also muss mindestens eine der drei grundlegenden Annahmen **A1**<sub>Peres</sub>, **A2**<sub>Peres</sub>, **A3**<sub>Peres</sub> falsch sein. Die Annahmen **A2**<sub>Peres</sub> und **A3**<sub>Peres</sub> sind zwar nicht absolut sicher richtig, aber doch in hohem Maße wahrscheinlich. Also muss **A1**<sub>Peres</sub> die falsche Annahme sein. Demnach ergibt sich aus der Verletzung der Bell'schen Ungleichung, dass die Negation von **A1**<sub>Peres</sub> gilt:

\* Die Verletzung der Bell'schen Ungleichung beweist<sup>8</sup>, dass die nicht gemessenen Werte  $r_{\gamma'_D}$  und  $r_{\gamma'_E}$  *nicht* genau so real existieren wie die tatsächlich gemessenen Werte  $r_{\gamma_D}$  und  $r_{\gamma_E}$ .

Diese Schlussfolgerung kann man auch als Negation der Annahme **B** formulieren:

- \* Die Verletzung der Bell'schen Ungleichung beweist<sup>8</sup>, dass die Teilsysteme eines verschränkten Quantensystems die Eigenschaften, die später gemessen werden, *nicht* bereits vor der Messung haben. Bei der Messung werden im allgemeinen *nicht* bereits vorher existierende Eigenschaften festgestellt, sondern diese Eigenschaften werden erst durch die Messung *erzeugt*.

Die Einschränkung „im allgemeinen“ bezieht sich auf den Spezialfall, dass das untersuchte Quantensystem schon vor der Messung in einem Eigenzustand des Messgeräts präpariert wurde. Dieser Spezialfall wurde in Gleichung (6.8) betrachtet. Nur in diesem Spezialfall hat das Quantenobjekt bereits vor der Messung die Eigenschaft, die bei der Messung festgestellt wird. In allen anderen Fällen wird<sup>8</sup> die Eigenschaft erst bei der Messung erzeugt.

Wenn bestimmte Eigenschaften von verschränkten Quantensystemen vor der Messung nicht existieren, dann existieren diese Eigenschaften in nicht verschränkten Quantensystemen vor der Messung erst recht nicht. Man kann die Schlussfolgerung also etwas allgemeiner formulieren:

- \* Die Verletzung der Bell'schen Ungleichung beweist<sup>8</sup>, dass viele Eigenschaften von Quantenobjekten, wie eine bestimmte Polarisation, eine bestimmte Projektion des Drehimpulses auf eine bestimmte Raumachse, ein bestimmter Ort, ein bestimmter Impuls, . . . , durch die Messung nicht festgestellt sondern *erschaffen* werden.

Pascal Jordan packte das in die griffige Formulierung: „Realität entsteht durch Messung.“<sup>11</sup> Außerdem gilt folgende Schlussfolgerung:

- \* Die Verletzung der Bell'schen Ungleichung beweist<sup>8</sup>, dass die Natur nicht-lokal handelt. Als im Experiment von Weihs et. al.

<sup>11</sup> Dies Zitat habe ich mal gelesen, leider weiß ich nicht mehr wo.

die Polarisation eines der beiden SPDC-erzeugten Photonen durch Messung erschaffen wurde, da wurde zugleich die Polarisation des 400 m entfernten Partner-Photons erschaffen. Und zwar genau so erschaffen, dass die richtige Korrelation zwischen den Polarisationen der beiden Photonen realisiert wurde.

Wahrscheinlich können nur Leser, die eine Ausbildung in Klassischer Physik genossen haben, ermessen, wie sensationell dies Ergebnis ist.

Eine weitere Schlussfolgerung – und zwar nach meiner Ansicht die allerwichtigste – setzt eine zusätzliche Annahme voraus:

**A4<sub>Peres</sub>**: Messungen haben eindeutige Ergebnisse.

Diese Annahme dürfte die meisten Leser verblüffen. Die Annahme besagt zum Beispiel: Ein Silberatom wird vom Stern-Gerlach-Magneten entweder eindeutig zum Nordpol oder eindeutig zum Südpol abgelenkt, aber nicht zweideutig zum Nordpol *und* zum Südpol. Ist das nicht selbstverständlich?

Tatsächlich hat die Suche nach plausiblen Erklärungen für die seltsamen Quantenphänomene einige Physiker dazu bewogen, sogar die selbstverständlich erscheinende Annahme **A4<sub>Peres</sub>** in Zweifel zu ziehen. In der „Viele-Welten-Interpretation“ wird angenommen, dass jedes einzelne Silberatom tatsächlich vom Magneten zum Nordpol *und* zum Südpol abgelenkt wird. Darüber werde ich im Abschnitt 9.3 berichten. Die Annahme **A4<sub>Peres</sub>** ist also nicht trivial. Wenn sie richtig ist, dann kann man Folgendes überlegen:

Wenn das Messergebnis vor der Messung noch nicht feststeht, sondern erst im Moment der Messung erschaffen wird, dann kann es vor der Messung auch nicht berechnet werden. Dann wird das Ergebnis der Messung nicht durch irgendein Naturgesetz bestimmt, das die Physiker bisher nicht kennen, aber vielleicht in Zukunft eines Tages entdecken werden. Dann steht vielmehr definitiv fest

dass es so ein Naturgesetz überhaupt nicht gibt, dass die Natur sich also im Moment der Messung **irrational** für eines der möglichen Messergebnisse entscheidet – wenn sie sich denn nach Annahme **A4**<sub>Peres</sub> tatsächlich für ein eindeutiges Ergebnis entscheidet:

- \* Wenn die Annahmen **A2**<sub>Peres</sub>, **A3**<sub>Peres</sub>, **A4**<sub>Peres</sub> alle drei richtig sind, dann beweist die Verletzung der Bell'schen Ungleichung dass das Ergebnis der Messung nicht durch irgendein bisher unbekanntes Naturgesetz bestimmt wird, sondern dass die Erschaffung des Messergebnisses im Moment der Messung tatsächlich ein **irrationaler** Akt der Natur ist, der der wissenschaftlichen Analyse für immer entzogen sein wird, dass bei der Erschaffung des Messergebnisses echter Zufall am Werk ist.

Einstein hat die Entdeckung der Bell'schen Ungleichung, und ihre Verletzung in den Experimenten, nicht mehr erlebt; er starb 1955. Also werden wir nie erfahren, ob er angesichts dieser Entwicklung seine Meinung geändert hätte. Sein Biograph Abraham Pais (1918–2000) berichtete viele Jahre später über Gespräche, die er mit Einstein über dessen Einwände gegen die Quantentheorie geführt hatte: “We often discussed his notions on objective reality. I recall that during one walk Einstein suddenly stopped, turned to me and asked whether I really believed that the moon exists only when I look at it.” [55, page 907]

Selbstverständlich wusste Einstein, dass ein plötzliches Verschwinden des Mondes eine unübersehbare, gigantische Flutkatastrophe an allen Küsten der Erde auslösen würde. Das „Hinschauen zum Mond“ war nur eine plakative Kurzformel für das Unbehagen, mit dem er die Entwicklung betrachtete, die die Quantentheorie in den letzten dreißig Jahren seines Lebens genommen hatte. Solange er lebte hielt er unbeirrbar an der Überzeugung fest, dass die Realität so ist wie sie ist, dass sie eben nicht „durch Messung

erschaffen“ wird.

Diese Überzeugung teilte Albert Einstein (1879–1955) mit seinem älteren Kollegen Max Planck (1858–1947), dem im Jahr 1900 mit der Entdeckung des Wirkungsquantums  $h = (3.3b)$  und seiner Formel (3.3a) für das Spektrum der Schwarzen Strahlung der allererste Schritt in Richtung Quantentheorie gelungen war. Planck verfasste 1945 eine kurz gefasste „Wissenschaftliche Selbstbiographie“ [56], in der er – sicherlich auch unter dem Eindruck der Diskussionen um die Quantentheorie – schrieb: „Was mich zu meiner Wissenschaft führte und von Jugend auf für sie begeisterte, ist die durchaus nicht selbstverständliche Tatsache, daß unsere Denkgesetze übereinstimmen mit den Gesetzmäßigkeiten im Ablauf der Eindrücke, die wir von der Außenwelt empfangen, daß es also dem Menschen möglich ist, durch reines Denken Aufschlüsse über jene Gesetzmäßigkeiten zu gewinnen. Dabei ist von wesentlicher Bedeutung, daß die Außenwelt etwas von uns Unabhängiges, Absolutes darstellt, dem wir gegenüberstehen, und das Suchen nach den Gesetzen, die für dieses Absolute gelten, erschien mir als die schönste wissenschaftliche Lebensaufgabe.“ Man glaubt fast eine Selbstironie herauszuhören, wenn Planck einige Seiten später schreibt: „Eine neue wissenschaftliche Wahrheit pflegt sich nicht in der Weise durchzusetzen, daß ihre Gegner überzeugt werden und sich als belehrt erklären, sondern vielmehr dadurch, daß ihre Gegner allmählich aussterben und daß die heranwachsende Generation von vornherein mit der Wahrheit vertraut gemacht ist.“ [56, Seite 22]

## 8 Welcher Weg?

Die Ein-Teilchen-Interferenz beruht darauf, dass die Trajektorie des Teilchens über beide Spalte eines Doppelspalts oder über beide Wege eines Interferometers delokalisiert ist. Wenn die Trajektorie auf einen Spalt oder einen Weg im Interferometer eingeschränkt wird, dann verschwindet die Interferenz. Experimente, in denen untersucht wird wie die Einschränkung der Trajektorie im Detail geschieht, werden im Jargon der Physiker als „welcher-Weg“-Experimente bezeichnet. Einige besonders bemerkenswerte welcher-Weg-Experimente werden in diesem Kapitel beschrieben. Vorab gehe ich auf eine wichtige theoretische Arbeit über diesen Themenkreis ein, die Heisenberg im Frühjahr 1927 veröffentlichte.

### 8.1 Die Heisenberg'sche Unbestimmtheits-Relation

Die Projektion des Drehimpulses auf bestimmte Raumachsen (bzw. die Polarisation im Fall von Photonen) ist ein Beispiel für eine relationale Eigenschaft, die ein Quantenobjekt nicht einfach „hat“, sondern die durch die Wechselwirkung dieses Objekts mit geeigneten Messgeräten erschaffen wird. Es handelt sich um ein extremes Beispiel insofern, als – wie in Abschnitt 6.2 erklärt – eine zuvor erschaffene Projektion auf eine bestimmte Raumachse vollständig vernichtet wird, sobald die Projektion auf eine andere Raumachse erschaffen wird. Das ist sozusagen Schwarz-Weiß-Malerei: Die Projektion auf eine Raumachse ist genau definiert, und die Projektionen auf die dazu senkrechten Raumachsen existieren überhaupt nicht.

Es gibt andere Eigenschaften von Quantenobjekten, die ebenfalls nicht miteinander kompatibel sind, die aber in differenzierteren Abstufungen erschaffen werden können. Besonders wichtige Eigenschaften dieser Art sind Ort und **Impuls**. In den Zeichnungen 3.10 auf Seite 71 und 4.13 auf Seite 99 habe ich versucht anzudeuten, wie die Bauart und Anordnung der Messapparatur die Ausdehnung des Orts eines Photons oder Atoms bestimmt. Beim Impuls ist es nicht anders: Die Genauigkeit, mit der der Impuls bestimmt ist, hängt ab von der Präzision der Messgeräte, durch deren Wechselwirkung mit dem Quantenobjekt der Impuls dieses Objekts erschaffen wird.

Wir werden gleich sehen dass man Kompromisse schließen muss, wenn man mit einem Messgerät den Ort und den Impuls eines Quantenobjekts zugleich erschaffen will: Je genauer das Gerät den Ort erschafft, desto ungenauer wird der Impuls sein, den dieses Gerät erschafft, und umgekehrt. Wir bezeichnen mit dem griechischen Buchstaben  $\Delta$  (sprich: Delta) die Ungenauigkeit, mit der eine Eigenschaft eines Objekts durch Messung erschaffen wird. Wenn beispielsweise die Ausdehnung eines Atoms in  $x$ -Richtung dadurch festgelegt wird, dass man es durch einen Spalt mit  $1\ \mu\text{m}$  Breite fliegen lässt, dann ist die Unbestimmtheit seines Orts in dieser Richtung  $\Delta x = 1\ \mu\text{m}$ . Die Unbestimmtheit des Impulses des Objekts in  $x$ -Richtung, die ebenfalls durch die Präzision der Messapparatur bestimmt wird, nennen wir  $\Delta p_x$ .

Im Frühjahr 1927 zeigte Heisenberg [57], dass aus dem rätselhaften mathematischen Formalismus der Quantentheorie die Unbestimmtheits-Relation

$$\left. \begin{array}{l} \Delta x \cdot \Delta p_x \approx h \\ \Delta y \cdot \Delta p_y \approx h \\ \Delta z \cdot \Delta p_z \approx h \end{array} \right\} = 6,63 \cdot 10^{-34} \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}} \quad (8.1)$$

hergeleitet werden kann,<sup>1</sup> in der  $h$  das Wirkungsquantum ist. Wenn

<sup>1</sup> für Physiker: Robertson leitete wenig später anstelle von (8.1) die präzisere

man bedenkt wie winzig klein das Wirkungsquantum ist, dann wird sofort klar warum die Unbestimmtheiten von Ort und **Impuls** bis zum Ende des 19. Jahrhunderts unbemerkt blieben: Der Impuls eines Objekts ist proportional zu seiner Masse, und die Masse von Steinen oder gar Planeten, und sogar von den winzigsten Staubkörnern, die man bis dahin mikroskopisch erkennen konnte, sind so riesengroß, dass die Unbestimmtheitsrelation (8.1) unmöglich bemerkt werden konnte. Erst als die Physiker in der Lage waren, einzelne Atome, Elektronen, Neutronen zu untersuchen, wurden die Unbestimmtheiten erkennbar.

Heisenberg interpretierte die Unbestimmtheitsrelation (8.1) folgendermaßen: Wenn man die Apparatur, die gleichzeitig den Ort und den Impuls eines Objekts erschafft, so konstruiert, dass der Impuls in  $x$ -Richtung mit einem ziemlich präzisen Wert erschaffen wird ( $\Delta p_x$  sehr klein), dann wird diese Apparatur – wegen  $\Delta x \approx h/(\Delta p_x)$  sehr groß – den Ort des Objekts in  $x$ -Richtung nur sehr ungenau erschaffen (d. h. der Ort wird in  $x$ -Richtung ein weit ausgedehnter Raumbereich sein), und umgekehrt. Es ist unmöglich die Apparatur so zu konstruieren, dass  $\Delta x$  und  $\Delta p_x$  gleichzeitig beliebig klein sind. Für die  $y$ - und  $z$ -Richtung gilt das gleiche.

Warum Ort und Impuls beispielsweise eines Elektrons nicht gleichzeitig beliebig präzise erschaffen werden können, wird aus Abbildung 8.1 auf der nächsten Seite klar. Das Elektron, dessen Ort in  $x$ -Richtung anfangs nur sehr ungenau bestimmt ist, fliegt – wie durch die türkisen Pfeile angedeutet – von links auf einen Spalt mit Breite  $\Delta x$  zu. Wenn es den Spalt passiert (natürlich könnte es den Spalt auch verfehlen, für diesen Fall interessieren wir uns aber nicht), dann ist  $\Delta x$  die Unbestimmtheit seines Ortes in  $x$ -Richtung.

Jetzt müssen wir uns daran erinnern, dass das Elektron nicht nur Eigenschaften eines Teilchens sondern auch Eigenschaften ei-

---

Form  $\Delta j \cdot \Delta p_j \approx \hbar/2$  her, siehe [58].

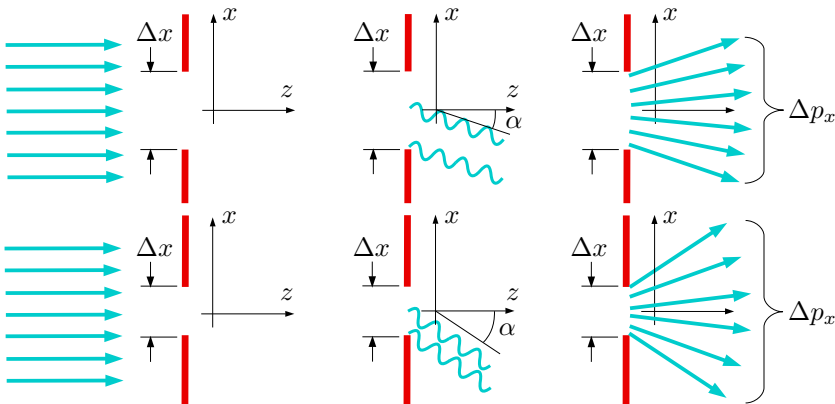


Abb. 8.1: Das Produkt  $\Delta x \cdot \Delta p_x$  bei großem  $\Delta x$  (obere Skizzen) und kleinem  $\Delta x$  (untere Skizzen)

ner Welle hat. Seine Wellenlänge  $\lambda$  hängt mit seinem Impuls  $p$  durch de Broglie's Relation  $\lambda \stackrel{(4.2b)}{=} h/p$  zusammen. Wenn die Elektronenwelle den Spalt passiert, dann wird sie **gebeugt**. Unter dem Winkel  $\alpha$  interferieren alle Teilwellen, die den Spalt im Abstand  $\Delta x/2$  passieren, paarweise destruktiv (d. h. sie löschen sich paarweise gegenseitig aus), wenn sie sich in großem Abstand vom Spalt überlagern.

$\alpha$  ist der kleinste Winkel, bei dem ein Interferenzminimum auftritt. Zwar gibt es unter größeren Beugungswinkeln weitere Nebenmaxima, wir erhalten aber eine brauchbare Faustformel wenn wir einfachheitshalber annehmen, dass das erste Minimum den Impuls des Elektrons in  $x$ -Richtung begrenzt, wie in den beiden Skizzen rechts in Abb. 8.1 dargestellt. Wegen

$$\Delta p_x \sim \alpha \stackrel{(4.4a)}{\sim} \frac{1}{\Delta x/2}$$

wird der Impuls des Elektrons unvermeidlich mit größerer Unbestimmtheit  $\Delta p_x$  erschaffen, wenn man durch einen engeren Spalt die

Unbestimmtheit  $\Delta x$  seines Ortes in  $x$ -Richtung verringern möchte. Je kleiner man  $\Delta x$  wählt, um so größer wird der Winkel  $\alpha$  des ersten Beugungs-Minimums, wie man aus dem Vergleich der unteren Skizzen mit den oberen Skizzen von Abb. 8.1 erkennt. Heisenbergs Unbestimmtheitsrelation (8.1) ist die quantitative Formulierung dieses Zusammenhangs.

Es sind also die „eigentlich“, d. h. nach klassischem Verständnis dieser Begriffe, miteinander unvereinbaren Eigenschaften von Wellen und Teilchen, die verhindern dass ein Quantenobjekt gleichzeitig einen präzise definierten Impuls und einen präzise definierten Ort haben kann. Bohr bezeichnete solche Eigenschaften als *komplementär*.

Die Doppelnatur von Quantenobjekten als Wellen und Teilchen, durch die die von Heisenberg entdeckte Unbestimmtheits-Relation (8.1) verursacht wird, ist auch wichtig wenn wir überlegen, wie etwa beim Doppelspalt-Experiment mit Elektronen die Trajektorie der Teilchen so eingeschränkt werden kann, dass jedes Elektron nur einen der beiden Spalte, aber nicht beide Spalte gleichzeitig, durchquert. Man könnte beispielsweise hinter einem Spalt einen senkrecht gerichteten Lichtstrahl einbauen der so intensiv ist, dass das Elektron mindestens ein Photon **streuen** wird, falls es diesen Spalt benutzt. Wenn ein gestreutes Photon detektiert wird, dann muss das Elektron diesen Spalt durchquert haben. Und es muss den anderen Spalt durchquert haben, wenn kein gestreutes Photon detektiert wird. Das Verfahren funktioniert nur, wenn das Elektron mindestens ein Photon so stark ablenkt, dass es auch wirklich deutlich aus dem Lichtstrahl heraus gekickt wird. Das Elektron muss also einen beträchtlichen Impuls auf das Photon übertragen. Wegen der Impulserhaltung ändert sich bei dem Kick auch der Impuls des Elektrons, und demzufolge auch seine de Broglie-Wellenlänge

$$\lambda \stackrel{(4.2b)}{=} \frac{h}{p} = \frac{h}{\text{Impuls}} .$$

Wenn die de Broglie-Wellenlänge des Elektrons auf unterschiedlichen Wegen unterschiedlich stark verändert und gestört wird, dann ist selbstverständlich keine Interferenz mehr möglich. Jahrzehntlang schien es so, als ob damit der Zusammenhang zwischen Erschaffung einer genau definierten Trajektorie und Verschwinden der Ein-Teilchen-Interferenz vollständig erklärt sei. Deshalb fanden unter den Physikern Experimente große Aufmerksamkeit, bei denen eine genau definierte Trajektorie von Teilchen erschaffen werden konnte ohne dabei ihre de Broglie-Wellenlänge wesentlich zu verändern. Solche Experimente gelangen erstmals Ende der Neunziger Jahre.

## 8.2 Der Weg durchs Interferometer

1998 veröffentlichten S. Dürr, T. Nonn, und G. Rempe die Ergebnisse von Interferenzexperimenten mit Rubidium-Atomen, die sie an der Universität Konstanz durchgeführt hatten [59]. Der Aufbau ihres Experiments, der in Abb. 8.2 auf der nächsten Seite skizziert ist, ähnelt dem des Interferenzexperiments mit Neon-Atomen von Shimizu et. al., der in Abb. 4.11 auf Seite 96 dargestellt wurde.

In einer evakuierten Kammer wurde eine Wolke von Rubidium-Atomen durch Laserkühlung auf etwa  $10 \mu\text{K}$  (10 millionstel Grad über dem absoluten Nullpunkt) gekühlt. Beim Abschalten der Laser fielen die Atome wie Steine nach unten, zunächst durch einen  $100 \mu\text{m}$  breiten Spalt S1, der sich 1 cm unterhalb der Wolke befand, und dann durch einen  $450 \mu\text{m}$  breiten Spalt S2, der sich 20 cm unterhalb der Wolke befand. Weitere 25 cm tiefer wurde die  $x$ -Position der Atome mit einer Auflösung von  $50 \mu\text{m}$  detektiert.

Die Spalte waren viel zu breit, um Beugungseffekte der Atome zu beobachten, sie sollten lediglich die Breite der Trajektorie begrenzen. Unmittelbar nachdem sie den Spalt S2 durchquert hatten, wurden die Atome mit dem stehenden Wellenfeld eines Lasers bestrahlt.

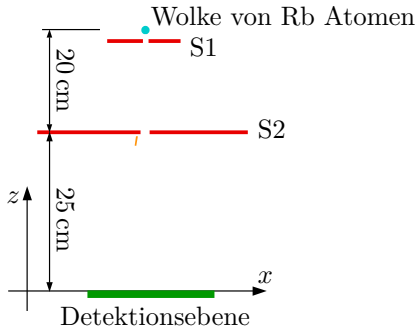


Abb. 8.2: Rubidium-Atome fallen durch eine evakuierte Kammer

Damit ist folgendes gemeint:

Wenn man einen Laserstrahl exakt in sich zurück spiegelt, dann bilden sich in regelmäßigen Abständen vor dem Spiegel Flächen (sogenannte Knotenflächen) aus, in denen die Lichtintensität Null ist, während sie in der Mitte zwischen den Knotenflächen maximal ist. In Abb. 8.3 ist der Spiegel, der sich unmittelbar unterhalb des Spalts S2 befindet, gelb skizziert, und die Knotenflächen des Laserstrahls sind durch rote Striche angedeutet. Der Abstand von einer Knotenfläche zur nächsten beträgt genau eine halbe Wellenlänge des Laserlichts.

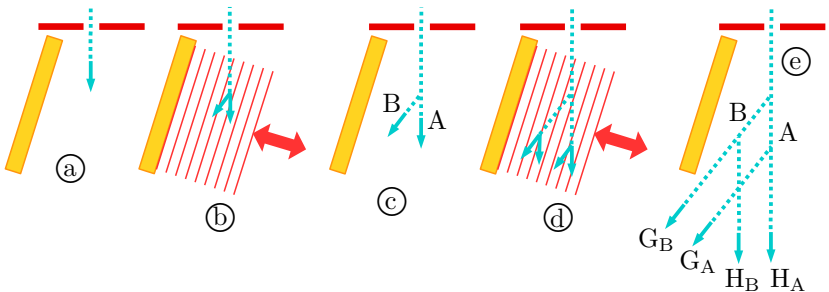


Abb. 8.3: Das Rb-Interferometer mit zwei Strahlteilern

Die türkisen Pfeile und gestrichelten Linien sollen den Fallweg der Rubidium-Atome darstellen. Der regelmäßige Stapel von Flächen maximaler Laser-Intensität wirkt wie ein Strahlteiler für den Strahl der Rubidium-Atome. Je größer die Intensität des Laserlichts ist, und je länger der Laser eingeschaltet bleibt, um so größer ist die Wahrscheinlichkeit dass ein Rubidium-Atom, das durch das stehende Wellenfeld des Lasers fällt, reflektiert wird. Die Experimentatoren ließen den Laser  $45 \mu\text{s}$  lang eingeschaltet, und passten die Intensität des Laserstrahls so an, dass jedes Rb-Atom ziemlich genau mit Wahrscheinlichkeit  $1/2$  reflektiert wurde, und mit Wahrscheinlichkeit  $1/2$  geradeaus weiter flog, siehe Abb. 8.3(b).

Nach  $45 \mu\text{s}$  wurde der Laser für  $105 \mu\text{s}$  abgeschaltet. Während dieser  $105 \mu\text{s}$  flog jedes Atom mit Wahrscheinlichkeit  $1/2$  auf dem Weg A weiter, mit Wahrscheinlichkeit  $1/2$  aber auf dem Weg B weiter, siehe Abb. 8.3(c). Dann wurde der Laser ein zweites mal für  $45 \mu\text{s}$  eingeschaltet, so dass erneut jedes Atom mit Wahrscheinlichkeit  $1/2$  abgelenkt wurde, mit Wahrscheinlichkeit  $1/2$  aber geradeaus weiter flog, siehe Abb. 8.3(d). Nach der zweiten Periode von  $45 \mu\text{s}$  wurde der Laser endgültig abgeschaltet, und die Atome fielen im freien Fall weiter hinab.

Überlegen wir, welche Geschwindigkeit die Atome während der Wechselwirkung mit dem Laserfeld hatten. Wenn man einen Stein im Schwerfeld der Erde (Schwerebeschleunigung  $9,81 \text{ m/s}^2$ ) fallen lässt, dann hat er<sup>2</sup> nach einer Fallhöhe von  $20 \text{ cm}$  die

$$\text{Geschwindigkeit} = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \sqrt{\frac{2 \cdot 20 \text{ cm}}{9,81 \text{ m/s}^2}} = 1,98 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

erreicht. Die Wechselwirkung mit dem Laserfeld spielte sich im Zeitraum von  $45 \mu\text{s}$  plus  $105 \mu\text{s}$  Pause plus nochmal  $45 \mu\text{s}$  gleich  $195 \mu\text{s} \approx 0,2 \text{ ms}$  ab. In diesem Zeitraum fielen die Atome ungefähr

<sup>2</sup> Leser, denen solche Formeln fremd sind, sollten sich nicht erschrecken lassen sondern einfach das Ergebnis zur Kenntnis nehmen.

$$2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0,2 \text{ ms} = 0,4 \text{ mm}$$

weit. Das Laserfeld hatte in  $z$ -Richtung (siehe Abb. 8.2) eine Breite von 8 mm [60], so dass man sicher sein kann dass jedes Rb-Atom beide Einschaltphasen des Lasers in voller Länge erlebte.

Man muss betonen dass die Reflektionswinkel in Abb. 8.3 extrem übertrieben dargestellt sind. Tatsächlich waren die Ablenkwinkel so klein, dass die Strahlen  $G_A$  und  $G_B$ , wenn sie 25 cm tiefer detektiert wurden, nur etwa 1 mm gegen die Strahlen  $H_A$  und  $H_B$  versetzt waren. Deshalb kann man auch nicht sagen dass die Hälfte der Atome genau senkrecht und die andere Hälfte schräg hinab fiel, sondern die Atome beider Strahlen fielen nahezu senkrecht hinab. Außerdem waren die beiden Strahlen  $G_A$  und  $G_B$  und die beiden Strahlen  $H_A$  und  $H_B$  nicht exakt parallel, sondern überlagerten sich in der Detektionsebene, so dass sie miteinander interferierten. Die Wirkung dieser Interferenz ist in Abb. 8.4 durch blaue Dreiecke dargestellt.

Die durchgezogene gelbe Linie gibt den Bereich an, in dem die Atome der Strahlen  $G_A$  und  $G_B$  bzw.  $H_A$  und  $H_B$  die Detektionsebene erreichten. Im Zentrum der Strahlen G erkennt man ein deutliches Maximum, im Zentrum der Strahlen H ein deutliches Mi-

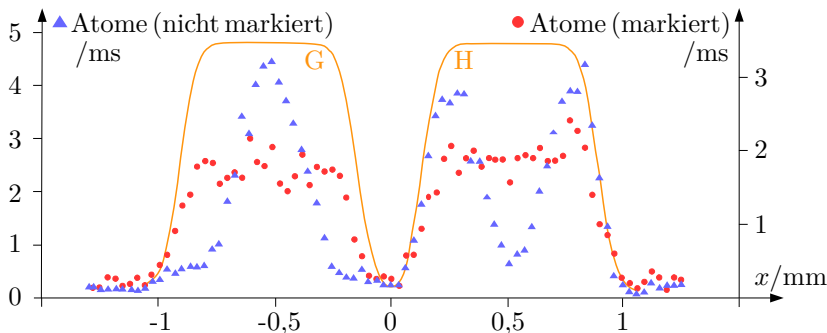


Abb. 8.4: Interferenz von nicht markierten und markierten Rb-Atomen

nimum. Das bedeutet dass die Rb-Atome der Strahlen  $G_A$  und  $G_B$  konstruktiv interferierten, die Strahlen  $H_A$  und  $H_B$  aber destruktiv.

Die Erklärung dafür ist *genau* die gleiche wie beim Photonen-Interferometer von Abb. 2.2 auf Seite 26: Bei jeder Reflektion an einem Strahlteiler gibt es eine Phasenverschiebung von einer viertel Wellenlänge zwischen der transmittierten und der reflektierten Welle. Worauf diese Phasenverschiebung beruht, ist für unsere Überlegungen unwichtig.<sup>3</sup> Die beiden Strahlen  $G_A$  und  $G_B$  wurden je  $1\times$  reflektiert, sind also insgesamt „in Phase“ wenn sie in der Detektionsebene eintreffen. Dagegen wurden die Atome des Strahls  $H_B$  zweimal reflektiert, die Atome des Strahls  $H_A$  aber überhaupt nicht reflektiert, siehe Abb. 8.3(e). Insgesamt ist die Phase der Atome im Strahl  $H_B$  also um eine halbe Wellenlänge gegen die Phase der Atome im Strahl  $H_A$  verschoben, so dass diese Strahlen destruktiv interferieren wie in Abb. 2.4 auf Seite 28 erklärt. Das gilt aber jeweils nur im Zentrum der Bereiche G und H, wo die Wege der beiden Teilstrahlen genau gleich lang sind. Am rechten und linken Rand der Bereiche, in denen die Strahlen die Detektionsebene erreichen, ist der Weg des einen Teilstrahls um eine halbe Wellenlänge weiter als der Weg des anderen Teilstrahls. Deshalb beobachtet man am rechten und linken Rand des Bereichs H konstruktive Interferenz, am rechten und linken Rand des Bereichs G aber destruktive Interferenz.

An jeder Stelle der Detektionsebene wurden pro Millisekunde weniger als 5 Atome registriert. Die Atome trafen an jeder Stelle also mit einem durchschnittlichen zeitlichen Abstand von 0,2 ms oder mehr ein. Ihre Geschwindigkeit in der Detektionsebene war

$$\text{Geschwindigkeit} = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \sqrt{\frac{2 \cdot 45 \text{ cm}}{9,81 \text{ m/s}^2}} \approx 3 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

so dass der durchschnittliche Abstand von einem Atom zum nächsten mehr als

$$3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0,2 \text{ ms} = 0,6 \text{ mm}$$

betrug. Zwei Atome in so großem Abstand können sicher nicht miteinander interferieren (der Durchmesser eines Atoms beträgt weniger als 1 nm). Die Interferenz kam also dadurch zustande, dass jedes einzelne Atom beide Wege durch das Interferometer nahm, und mit sich selbst interferierte.

Soweit wie bis hierher berichtet, war das Experiment von Dürr et. al. „nur“ ein weiteres (sehr schönes) Beispiel für die Selbst-Interferenz von Atomen. Der eigentliche Clou kam erst im zweiten Teil des Experiments: Jetzt wurde die Trajektorie der Atome, die sich zuvor über die Wege A *und* B (siehe Abb. 8.3 auf Seite 214) erstreckt hatte, so eingengt dass sie sich nur noch über den Weg A *oder* B erstreckte.

Die genauer definierte Trajektorie (Weg A *oder* B statt Weg A *und* B) wurde dadurch erschaffen, dass die Rb-Atome wegabhängig markiert wurden. Die Markierung geschah folgendermaßen:

Die Elektronenhülle des Rubidium-Atoms hat im Grundzustand die Drehimpuls-Quantenzahl  $j_e = 1/2$ , und der Kern des in diesem Experiment verwendeten Rubidium-**Isotops**  $^{85}\text{Rb}$  hat die Drehimpuls-Quantenzahl  $j_K = 5/2$ . Diese beiden Quantenzahlen können zur Gesamt-Drehimpuls-Quantenzahl  $j = 5/2 + 1/2 = 3$  oder  $j = 5/2 - 1/2 = 2$  kombiniert werden. Der Zustand mit  $j = 2$  ist der Grundzustand (d. h. der Zustand mit niedrigster Energie), die Energie des Zustands mit  $j = 3$  liegt um  $h \cdot 3,04 \text{ GHz}$  höher.<sup>3</sup>

Wir definieren für den Zustandsvektor der Rubidium-Atome die Schreibweise

<sup>3</sup> Tatsächlich spaltet sich jedes dieser Energieniveaus in einem externen Magnetfeld nochmals in Unterniveaus auf, wie beim Experiment mit Beryllium-Ionen in Abb. A.3 auf Seite 373 beschrieben. Im Hinblick auf die Markierung der Rubidium-Atome ist diese Aufspaltung aber unwichtig.

$$|2\rangle = \text{Grundzustand mit } j = 2 \quad (8.2a)$$

$$|3\rangle = \text{angeregter Zustand mit } j = 3 \text{ und} \\ \text{Energie } h \cdot 3,04 \text{ GHz über Grundzustand .} \quad (8.2b)$$

Wenn man ein Rubidium-Atom, das sich anfangs im Zustand  $|2\rangle$  befindet, mit Mikrowellen der Frequenz 3,04 GHz bestrahlt, dann oszilliert es zwischen den Zuständen  $|2\rangle$  und  $|3\rangle$  hin und her<sup>4</sup>, und zwar um so schneller, je größer die Intensität der Mikrowellenstrahlung ist. Ein Mikrowellenpuls, der das Atom mit der Wahrscheinlichkeit 1/2 aus dem Zustand  $|2\rangle$  in den Zustand  $|3\rangle$  anregt, wird als  $\pi/2$ -Puls (sprich: pi halbe Puls) bezeichnet:

$$|2\rangle \xrightarrow{\pi/2\text{-Puls}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |2\rangle + i|3\rangle \right) \quad (8.3a)$$

Den Phasenfaktor  $i = \sqrt{-1}$  erkläre ich nicht, weil das den Rahmen dieses Buches sprengen würde.<sup>5</sup> Der Faktor  $\sqrt{1/2}$  wurde eingefügt, damit die Projektion dieses Zustands auf sich selbst gleich 1 ist. Prüfen wir es nach (wie immer muss im linken Teil der Projektionsamplitude das Vorzeichen von  $i$  umgedreht werden):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \langle 2| - i\langle 3| \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |2\rangle + i|3\rangle \right) = \\ & = \frac{1}{2} \left( \underbrace{\langle 2|2\rangle}_1 + i \underbrace{\langle 2|3\rangle}_0 - i \underbrace{\langle 3|2\rangle}_0 \underbrace{-i^2}_{+1} \underbrace{\langle 3|3\rangle}_1 \right) = 1 \end{aligned}$$

Würde man das Atom mit drei weiteren  $\pi/2$ -Pulsen bestrahlen, dann würde sich sein Zustandsvektor folgendermaßen ändern:

<sup>4</sup> für Physiker: Eine elementare Einführung in die Theorie der Rabi-Oszillationen findet man in [48].

<sup>5</sup> für Physiker: Es handelt sich um die gleichen Phasenfaktoren wie in (A.14). Siehe auch Fußnote 4.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle + i|3\rangle) \xrightarrow{\pi/2\text{-Puls}} i|3\rangle \quad (8.3b)$$

$$i|3\rangle \xrightarrow{\pi/2\text{-Puls}} \frac{1}{\sqrt{2}}(-|2\rangle + i|3\rangle) \quad (8.3c)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(-|2\rangle + i|3\rangle) \xrightarrow{\pi/2\text{-Puls}} -|2\rangle \quad (8.3d)$$

Auch hier werde ich die Phasenfaktoren  $\pm 1$  und  $\pm i$  nicht erklären.<sup>5</sup> Vor dem ersten  $\pi/2$ -Puls befand sich das Atom mit Wahrscheinlichkeit 1 im Zustand  $|2\rangle$ , siehe die linke Seite von (8.3a). Nach dem ersten  $\pi/2$ -Puls befindet es sich mit Wahrscheinlichkeit  $1/2$  im Zustand  $|2\rangle$  und mit Wahrscheinlichkeit  $1/2$  im Zustand  $|3\rangle$ , siehe die rechte Seite von (8.3a).

Nach dem zweiten  $\pi/2$ -Puls befindet das Atom sich mit Wahrscheinlichkeit 1 im Zustand  $|3\rangle$ , siehe die rechte Seite von (8.3b). Nach dem dritten  $\pi/2$ -Puls befindet es sich mit Wahrscheinlichkeit  $1/2$  im Zustand  $|2\rangle$  und mit Wahrscheinlichkeit  $1/2$  im Zustand  $|3\rangle$ , siehe die rechte Seite von (8.3c). Nach dem vierten  $\pi/2$ -Puls befindet es sich schließlich wieder mit Wahrscheinlichkeit 1 im Zustand  $|2\rangle$ , siehe die rechte Seite von (8.3d).

Wichtig für die Markierung der Atome ist nun folgende Tatsache, die ich ebenfalls nicht erkläre:<sup>6</sup> Wenn ein Atom im Zustand  $|2\rangle$  reflektiert wird, dann ändert sich das Vorzeichen des Zustandsvektors. Wenn das Atom im Zustand  $|3\rangle$  ist, bleibt der Zustandsvektor bei Reflektion unverändert:

$$|2\rangle \xrightarrow{\text{Reflektion am Laserfeld}} -|2\rangle \quad (8.4a)$$

$$|3\rangle \xrightarrow{\text{Reflektion am Laserfeld}} +|3\rangle \quad (8.4b)$$

<sup>6</sup> Physiker können die Erklärung in [59] nachlesen. Die Autoren haben übrigens später ihre Meinung geändert und in jüngeren Veröffentlichungen geschrieben dass der transmittierte Zustand  $|2\rangle$  sein Vorzeichen ändert, der reflektierte Zustand  $|2\rangle$  aber nicht. Das kommt mir ziemlich dubios vor, und es ist in diesem Experiment auch egal, in welchem Strahl der Vorzeichenwechsel auftritt.

Durch geschickte Kombination von (8.3) und (8.4) konnten Dürr et. al. die Rubidium-Atome folgendermaßen markieren:

Anfangs, wenn sie von oben durch den Spalt S2 fallen, sind die Atome im Zustand  $|2\rangle$ . Dann wurden sie – noch bevor das Laserfeld, das als Strahlteiler wirkt, eingeschaltet wurde – mit einem  $\pi/2$ -Puls des 3,04 GHz-Mikrowellenfeldes bestrahlt, und dadurch laut (8.3a) in den Zustand

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left( |2\rangle + i|3\rangle \right) \quad (8.5a)$$

angeregt. Anschließend wurde der Atomstrahl durch das erste, 45  $\mu\text{s}$  lang eingeschaltete Laserfeld geteilt. Wenn ein Atom reflektiert wird und den Weg B nimmt, dann ändert sich laut (8.4) das Vorzeichen von  $|2\rangle$ , das Vorzeichen von  $|3\rangle$  aber nicht. Wenn das Atom transmittiert wird und den Weg A nimmt, bleiben die Vorzeichen von  $|2\rangle$  und  $|3\rangle$  unverändert. Also war der Zustandsvektor der Atome nach der ersten Strahlteilung

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \left( |2\rangle + i|3\rangle \right)}_{\text{Weg A}} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \left( -|2\rangle + i|3\rangle \right)}_{\text{Weg B}} \right]. \quad (8.5b)$$

Der Faktor  $\sqrt{1/2}$  vor der eckigen Klammer wurde eingefügt, damit die Projektion des Zustandsvektors auf sich selbst gleich 1 ist.

$|2\rangle$  bzw.  $|3\rangle$  ist eine stark abkürzende Schreibweise für die Zustandsvektoren der Atome. Tatsächlich wissen wir ja viel mehr, als dass die Atome die Drehimpuls-Quantenzahl  $j = 2$  oder  $j = 3$  haben. Wir wissen dass es sich um Rubidium-Atome handelt, wir wissen auf welchem Weg sie unterwegs sind, wir wissen welche Geschwindigkeit sie haben, und vieles mehr. Es wird sich gleich als zweckmäßig erweisen, die Zustandsvektoren als Produkte

$$|2\rangle \longrightarrow |2\rangle|\text{alle anderen Informationen}\rangle$$

$$|3\rangle \longrightarrow |3\rangle|\text{alle anderen Informationen}\rangle$$

zu schreiben. Der erste Faktor enthält nichts weiter als die Information über die Drehimpuls-Quantenzahl, der komplette Rest des vollständigen Zustandsvektor wird in den zweiten Faktor gepackt. Explizit tragen wir in den zweiten Faktor zunächst den Weg ein, auf dem das Atom unterwegs ist:

$$(8.5b) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |2\rangle|A\rangle + i|3\rangle|A\rangle \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -|2\rangle|B\rangle + i|3\rangle|B\rangle \right) \right] \quad (8.5c)$$

Nun wurden die Atome mit einem zweiten  $\pi/2$ -Puls des Mikrowellenfeldes (3,04 GHz) bestrahlt. Aus (8.3b) und (8.3d) kann man ablesen, dass der Zustandsvektor der Atome anschließend

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left[ i|3\rangle|A\rangle - |2\rangle|B\rangle \right] \quad (8.5d)$$

war. Schließlich wurde das Strahlteiler-Laserfeld zum zweiten mal  $45 \mu\text{s}$  lang eingeschaltet, so dass die Atome mit Wahrscheinlichkeit  $1/2$  reflektiert wurden. Dadurch wurde ihr Zustandsvektor zu

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} \left( i|3\rangle|H_A\rangle + i|3\rangle|G_A\rangle \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -|2\rangle|G_B\rangle + |2\rangle|H_B\rangle \right) \right] \\ & = \frac{1}{2} \left( i|3\rangle|G_A\rangle - |2\rangle|G_B\rangle + i|3\rangle|H_A\rangle + |2\rangle|H_B\rangle \right). \end{aligned} \quad (8.5e)$$

Hier wurde beachtet, dass laut (8.4)  $|2\rangle$  bei Reflektion das Vorzeichen wechselt,  $|3\rangle$  dagegen nicht. Im Zustandsvektor (8.5e) besteht eine eindeutige **Korrelation** zwischen  $|3\rangle$  und dem Weg A, sowie zwischen  $|2\rangle$  und dem Weg B. Die Markierung durch den Zustand  $|3\rangle$  hat die Trajektorie des Atoms auf den Weg A eingeschränkt, die Markierung durch den Zustand  $|2\rangle$  hat seine Trajektorie auf den Weg B eingeschränkt. Die Einschnürung der Trajektorie auf den Weg A oder B durch die Markierung des Atoms ist eine objektive Tatsache. Durch eine Messung könnte man eindeutig feststellen,

ob ein Atom im Zustand  $|3\rangle$  oder  $|2\rangle$  ist, und wüsste dann ob es den Weg A oder den Weg B genommen hat.

Bei der Detektion der Atome wurde die  $x$ -Achse auf einer Länge von 2,6 mm mit einer Schrittweite von 2,6 mm/80 abgerastert, und an jeder der 81 Messpositionen die Anzahl der eintreffenden Rubidium-Atome gezählt (die im Diagramm 8.4 eingetragenen Zählraten sind die Mittelwerte von zahlreichen Durchläufen des Experiments). Wenn ein Atom an der Position  $x_j$  detektiert wird, dann präpariert der Detektor es in seinem Eigenzustand  $|x_j\rangle$ , wobei  $j = 1 \dots 81$  sein kann. Um das erwartete Messergebnis zu berechnen, müssen wir wie gewohnt zunächst den Zustandsvektor (8.5e) auf die 81 Eigenvektoren des Detektors projizieren:

$$\begin{aligned} |8.5e\rangle &= |x_1\rangle\langle x_1||8.5e\rangle + |x_2\rangle\langle x_2||8.5e\rangle + \dots + |x_{81}\rangle\langle x_{81}||8.5e\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{81} |x_j\rangle\langle x_j||8.5e\rangle \end{aligned} \quad (8.6)$$

Das Summationszeichen  $\Sigma$  wurde bei Gleichung (5.17) auf Seite 118 erklärt. Nach der Born'schen Regel (5.19b) sind die Betragsquadrate der 81 Projektionsamplituden die Wahrscheinlichkeiten dafür, das Atom an der jeweiligen Position zu detektieren. Beispielsweise ist die Wahrscheinlichkeit dafür, das Atom an der Position  $x_{27}$  zu beobachten, gleich

$$W(x_{27}) = \left| \langle x_{27} | \frac{1}{2} \left( |3\rangle |G_A\rangle - |2\rangle |G_B\rangle + i|3\rangle |H_A\rangle + |2\rangle |H_B\rangle \right) \right|^2.$$

Wenn wir die einundachtzig  $x$ -Positionen im Diagramm 8.4 von links nach rechts zählen, dann liegt  $x_{27}$  deutlich im Bereich G, und es ist äußerst unwahrscheinlich dass sich ein Atom aus den Strahlen  $H_A$  oder  $H_B$  bis dorthin verirrt. Das bedeutet dass die Amplituden  $\langle x_{27} | H_A \rangle$  und  $\langle x_{27} | H_B \rangle$  winzig klein sind, und getrost ignoriert werden können.  $W(x_{27})$  vereinfacht sich dadurch zu

$$W(x_{27}) = \frac{1}{4} \left| i|3\rangle\langle x_{27} | G_A \rangle - |2\rangle\langle x_{27} | G_B \rangle \right|^2 \stackrel{(5.5j), (5.6c)}{=} \quad (8.7)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \left( -i \langle 3 | \langle G_A || x_{27} \rangle - \langle 2 | \langle G_B || x_{27} \rangle \right) \cdot \\
&\quad \cdot \left( i | 3 \rangle \langle x_{27} || G_A \rangle - | 2 \rangle \langle x_{27} || G_B \rangle \right) = \\
&= \frac{1}{4} \left( \underbrace{-i^2}_{+1} \underbrace{\langle 3 || 3 \rangle}_1 \left| \langle x_{27} || G_A \rangle \right|^2 + i \underbrace{\langle 3 || 2 \rangle}_0 \langle G_A || x_{27} \rangle \langle x_{27} || G_B \rangle - \right. \\
&\quad \left. - i \underbrace{\langle 2 || 3 \rangle}_0 \langle G_B || x_{27} \rangle \langle x_{27} || G_A \rangle + \underbrace{\langle 2 || 2 \rangle}_1 \left| \langle x_{27} || G_B \rangle \right|^2 \right) = \\
&= \frac{1}{4} \left( \left| \langle x_{27} || G_A \rangle \right|^2 + \left| \langle x_{27} || G_B \rangle \right|^2 \right). \tag{8.7}
\end{aligned}$$

$|\langle x_{27} || G_A \rangle|^2$  ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Rubidium-Atom über den Weg A zur Position  $x_{27}$  gelangt, und  $|\langle x_{27} || G_B \rangle|^2$  ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Rubidium-Atom über den Weg B zur Position  $x_{27}$  gelangt. Das Ergebnis (8.7) enthält nur noch die Summe dieser beiden Möglichkeiten, aber keine Interferenz zwischen diesen beiden Möglichkeiten. Die Interferenz zwischen den beiden Möglichkeiten steckt in den Produkten  $\langle G_A || x_{27} \rangle \langle x_{27} || G_B \rangle$  und  $\langle G_B || x_{27} \rangle \langle x_{27} || G_A \rangle$ , aber durch  $\langle 2 || 3 \rangle = \langle 3 || 2 \rangle = 0$  sind diese Terme verloren gegangen. Es ist also zu erwarten dass die Interferenzstruktur verschwindet, wenn die Atome so markiert werden dass ihre Trajektorie auf den Weg A oder den Weg B eingeschnürt wird und sich nicht mehr über beide Wege erstreckt.

Das Ergebnis des Experiments mit markierten Rubidium-Atomen ist im Diagramm 8.4 mit roten Punkten eingetragen. Wie in jedem Experiment ist das Ergebnis nicht perfekt. Wenn man unbedingt will, kann man noch Spuren der Interferenzpeaks erahnen. Aber im Vergleich zu den blauen Dreiecken ist bei den roten Punkten die Interferenz doch weitestgehend verschwunden.

Prüfen wir einmal, ob die Theorie die Interferenzstruktur der blauen Dreiecke richtig vorhersagt, wenn die Atome nicht durch Mikrowellenpulse markiert werden. Dann erhält man anstelle von

(8.5) folgende Abfolge von Zustandsvektoren:

Vor der ersten Reflektion ist der Zustandsvektor der Atome

$$|2\rangle. \quad (8.8a)$$

Dann wird der Atomstrahl durch das erste,  $45 \mu\text{s}$  lang eingeschaltete Laserfeld geteilt. Wenn ein Atom reflektiert wird und den Weg B nimmt, dann ändert sich laut (8.4) das Vorzeichen von  $|2\rangle$ , wenn das Atom transmittiert wird und den Weg A nimmt aber nicht. Also ist der Zustandsvektor der Atome nach der ersten Strahlteilung

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left( |2\rangle|A\rangle - |2\rangle|B\rangle \right). \quad (8.8b)$$

Nachdem das Strahlteiler-Laserfeld zum zweiten mal  $45 \mu\text{s}$  lang eingeschaltet wurde, ist der Zustandsvektor der Atome schließlich

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ |2\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |H_A\rangle - |G_A\rangle \right) - |2\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |G_B\rangle - |H_B\rangle \right) \right] = \\ & = \frac{1}{2} \left( -|2\rangle|G_A\rangle - |2\rangle|G_B\rangle + |2\rangle|H_A\rangle + |2\rangle|H_B\rangle \right). \end{aligned} \quad (8.8c)$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, das Atom an der Position  $x_{27}$  zu detektieren ist gleich dem Betragsquadrat der entsprechenden Projektionsamplitude:

$$\begin{aligned} W(x_{27}) = & \frac{1}{4} \left| -|2\rangle\langle x_{27}||G_A\rangle - |2\rangle\langle x_{27}||G_B\rangle + \right. \\ & \left. + |2\rangle\langle x_{27}||H_A\rangle + |2\rangle\langle x_{27}||H_B\rangle \right|^2 \\ & \qquad \qquad \qquad \approx 0 \qquad \qquad \qquad \approx 0 \end{aligned}$$

Weil die Position  $x_{27}$  tief im Bereich G liegt, können die beiden letzten Terme wieder vernachlässigt werden. Damit erhält man

$$\begin{aligned} W(x_{27}) = & \frac{1}{4} \left( -\langle 2|\langle G_A||x_{27}\rangle - \langle 2|\langle G_B||x_{27}\rangle \right) \cdot \\ & \cdot \left( -|2\rangle\langle x_{27}||G_A\rangle - |2\rangle\langle x_{27}||G_B\rangle \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{\langle 2|2\rangle}_1 \frac{1}{4} \left( \underbrace{\left| \langle x_{27} || G_A \rangle \right|^2}_{\textcircled{1}} + \underbrace{\langle G_A || x_{27} \rangle \langle x_{27} || G_B \rangle}_{\textcircled{2}} + \right. \\
&\quad \left. + \underbrace{\langle G_B || x_{27} \rangle \langle x_{27} || G_A \rangle}_{\textcircled{3}} + \underbrace{\left| \langle x_{27} || G_B \rangle \right|^2}_{\textcircled{4}} \right) \quad (8.9)
\end{aligned}$$

Bei den Termen ① und ④ ist das Atom eindeutig über den Weg A bzw. eindeutig über den Weg B zur Position  $x_{27}$  gelangt. Solche Terme beschreiben keine Interferenz. Nur solche Terme kamen in (8.7) vor.

Dagegen beschreiben die Terme ② und ③ den Fall dass das Atom beide Wege genommen hat (d. h. dass seine Trajektorie über beide Wege delokalisiert war). Es sind diese beiden Terme, die die Interferenz-Maxima und -Minima der blauen Dreiecke im Diagramm 8.4 bewirken.

Die vom Weg (A oder B) abhängige Markierung der Atome hat also das Verschwinden der Interferenz zur Folge. Anders als in Heisenbergs theoretischer Überlegung mit dem Gammastrahlen-Mikroskop, die im vorigen Abschnitt erörtert wurde, wurde aber im Experiment von Dürr et. al. bei der Erschaffung der genau definierten Trajektorie die de Broglie-Wellenlänge der Rubidium-Atome nahezu überhaupt nicht gestört. Der winzige Energieübertrag

$$E \stackrel{(4.1a)}{=} h\nu = h \cdot 3,04 \text{ GHz}$$

und der winzige Impulsübertrag

$$p \stackrel{(4.1b)}{=} \frac{E}{c} = \frac{h \cdot 3,04 \text{ GHz}}{c}$$

bei der Markierung der Atome mithilfe der Mikrowellenpulse fällt gar nicht ins Gewicht. Trotzdem verschwand die Interferenz. Die Interferenz verschwindet also nicht wegen einer Störung der de Broglie-

Wellenlänge oder sonst irgend einer Störung der Atome, sondern einfach dadurch, dass durch die Markierung der Atome eine präziser definierte Trajektorie erschaffen wird als ohne Markierung.

Die Trajektorie, die von den Blenden und der  $x$ -Detektion der Atome erschaffen wird, ist nicht auf den Weg A *oder* den Weg B eingeschränkt, sondern erstreckt sich über beide Wege, genau so wie sich die Trajektorie (d. h. die zeitliche Abfolge der Orte) des Neon-Atoms von Zeichnung 4.13 auf Seite 99 über beide Spalte des Doppelspalts erstreckt. Durch die Markierung des Rubidium-Atoms wird die Trajektorie auf einen der beiden Wege eingeschränkt.

Die Erschaffung der engeren Trajektorie ist ein objektiver Vorgang, der die Interferenz zerstört. Es ist nicht erforderlich dass ein Experimentator nachprüft, ob das Atom bei der Detektion im Zustand  $|2\rangle$  ist, die Trajektorie also auf den Weg B eingeschnürt wurde, oder ob es im Zustand  $|3\rangle$  ist, die Trajektorie also auf den Weg A eingeschnürt wurde. Dürr et. al. untersuchten in ihrem Experiment nicht, ob die Atome im Zustand  $|2\rangle$  oder im Zustand  $|3\rangle$  waren. Die objektive Tatsache, dass durch die Markierung die Trajektorie des Atoms auf einen Weg eingeschränkt war, genügte um die Selbstinterferenz zum Verschwinden zu bringen.

### 8.3 Ein Quantenradierer

Mit dem in Abb. 8.5 auf der nächsten Seite skizzierten Aufbau demonstrierten Kim, Yu, Kulik, Shih, und Scully [61] 1998 die Möglichkeit eines „Quantenradierers“. Was das ist, werde ich im Folgenden erklären.

Per SPDC<sup>7</sup> wurden Paare von Photonen folgendermaßen in einem verschränkten Zustand erzeugt: Ein BBO-Kristall ( $\beta$ -Barium-Borat

---

<sup>7</sup> SPDC-Typ I wurde in Abschnitt 3.5 erklärt, SPDC-Typ II in Abschnitt 7.3. Kim et. al. verwendeten SPDC-Typ II, aber dies Detail spielte in ihrem Experiment keine Rolle.

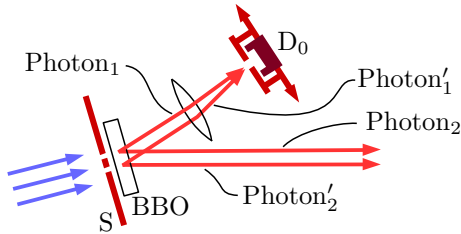


Abb. 8.5 : Interferenz?

$\text{BaB}_2\text{O}_4$ ) wird von links mit einem Pumplaser (angedeutet durch die blauen Pfeile, Wellenlänge 351,1 nm) bestrahlt. Unmittelbar vor dem Kristall befindet sich ein Blech mit einem

Doppelspalt S: (8.10)

Breite = 0,3 mm , Abstand Mitte zu Mitte = 0,7 mm

Die meisten ultravioletten Pump-Photonen durchdringen den BBO-Kristall unverändert. Nur ab und zu wird ein 351,1 nm Pump-photon in zwei 702,2 nm Photonen umgewandelt, die den Kristall unter einem Winkel von etwa  $3^\circ$  (relativ zum Pumpstrahl) verlassen. Die Photonenpaare, die hinter dem oberen Spalt entstehen, nennen wir  $\text{Photon}_1$  und  $\text{Photon}_2$ . Die Photonenpaare, die hinter dem unteren Spalt entstehen, nennen wir  $\text{Photon}'_1$  und  $\text{Photon}'_2$ .

$\text{Photon}_1$  und  $\text{Photon}'_1$  treten durch eine konvexe Linse, deren Fokalebene mit dem Detektor  $D_0$  abgerastert wird. Kann man erwarten, dabei eine Interferenzstruktur zu beobachten? Die Umwandlung eines Pumpphotons in ein Paar von 702,2 nm Photonen kommt so selten vor, dass praktisch niemals innerhalb weniger Nanosekunden 2 Paare von Tochterphotonen erzeugt werden. Deshalb treffen auch praktisch niemals zwei Photonen gleichzeitig beim Detektor  $D_0$  ein. Aber wir kennen ja inzwischen genügend Beispiele für die Selbstinterferenz einzelner Teilchen. Wenn die Trajektorie der Pumphotonen so ungenau lokalisiert ist, dass sie beide Spalte

überdeckt, könnte dann ein Photon delokalisiert hinter dem oberen und dem unteren Spalt erzeugt werden, und in der Fokalebene der Linse mit sich selbst interferieren?

Das ist – wie wir gleich sehen werden – tatsächlich möglich, vorausgesetzt dass der Entstehungsort des Photons – hinter dem oberen oder hinter dem unteren Spalt? – wirklich nicht lokalisiert wird. Es verhält sich genau so wie beim konventionellen Doppelspalt-Experiment: Wenn die Trajektorie des Teilchens durch den Doppelspalt nur so ungenau lokalisiert wird, dass es den Weg durch beide Spalte nehmen kann, dann wird es mit sich selbst interferieren. Wenn jedoch – wie beim Beispiel der markierten Rubidium-Atome – der Weg des Teilchens so genau lokalisiert wird, dass es nur einen der beiden Spalte benutzt, dann gibt es keine Interferenz.

Beim Experiment von Abb. 8.5 wird – wenn man keine weiteren Vorkehrungen trifft – der Entstehungsort des Photons auf den Bereich hinter dem oberen oder hinter dem unteren Spalt eingeschränkt. Das liegt daran, dass ja gleichzeitig das Partnerphoton erzeugt wird. Der Ort des SPDC-Prozesses wird durch das Partnerphoton lokalisiert. Wieso? Das wird in Abb. 8.6 erklärt. Um die Wege von  $\text{Photon}_2$  und  $\text{Photon}'_2$  zu trennen, wurde ein Prisma zwischen dem Kristall und den Detektoren  $D_3$  und  $D_4$  eingebaut. Wenn das Partnerphoton vom Detektor  $D_4$  registriert wird, dann wurde

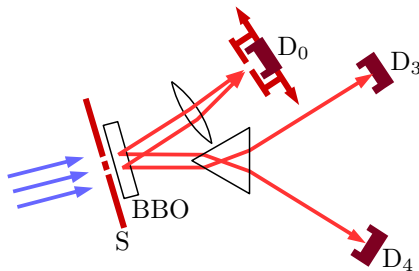


Abb. 8.6: Der Ursprung des Photons wird lokalisiert.

das Photonenpaar hinter dem oberen Spalt erzeugt. Wenn es vom Detektor  $D_3$  registriert wird, dann wurde das Photonenpaar hinter dem unteren Spalt erzeugt.

Der Entstehungsort von  $\text{Photon}_1$  bzw.  $\text{Photon}'_1$  wird durch die Messapparatur erschaffen. Die Messapparatur, das ist in diesem Fall der BBO-Kristall, der Doppelspalt, der Strahl der Pump-Photonen, und das davonfliegende  $\text{Photon}_2$  bzw.  $\text{Photon}'_2$ . Dieser Aufbau der Apparatur erschafft im SPDC-Prozess nicht nur das Paar der Tochterphotonen, sondern auch ihren hinter dem oberen oder dem unteren Spalt lokalisierten Entstehungsort. Die Erschaffung des Entstehungsortes ist eine objektive Tatsache. Es ist nicht erforderlich, dass ein Experimentator mithilfe des Aufbaus von Abb. 8.6 den Entstehungsort der Tochterphotonen zur Kenntnis nimmt. Auch wenn man  $\text{Photon}_2$  bzw.  $\text{Photon}'_2$  ignoriert oder einfach gegen eine Wand laufen lässt und damit die Information über seinen Entstehungsort vernichtet, gibt es keine Selbstinterferenz von  $\text{Photon}_1$  bzw.  $\text{Photon}'_1$ .

Vergewissern wir uns zunächst, dass diese Tatsache durch die Quantentheorie korrekt beschrieben wird: Wenn beim SPDC-Prozess ein Pumpphoton mit Wellenlänge 351,1 nm durch den oberen Spalt tritt und in zwei Photonen mit Wellenlänge 702,2 nm umgewandelt wird, dann entsteht das Paar der Tochterphotonen hinter diesem Spalt im Zustand  $|1\rangle|2\rangle$ . Wenn das Pumpphoton durch den unteren Spalt tritt und in zwei Photonen mit Wellenlänge 702,2 nm umgewandelt wird, dann entsteht das Paar der Tochterphotonen hinter diesem Spalt im Zustand  $|1'\rangle|2'\rangle$ . Wenn die Trajektorie des Pumpphotons jedoch über beide Spalte delokalisiert ist, dann entsteht das Paar der Tochterphotonen im verschränkten Zustand

$$|\text{Photonenpaar}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |1\rangle|2\rangle + |1'\rangle|2'\rangle \right). \quad (8.11)$$

Beim Aufbau von Abb. 8.5 gibt es nur einen Detektor, nämlich  $D_0$ . Mit diesem Detektor werden 28 verschiedene  $x$ -Positionen in der

Fokalebene der Linse abgerastert. Also sind

$$|x_{D0}\rangle \quad (8.12)$$

mit 28 verschiedenen  $x$ -Werten die 28 Eigenvektoren des Detektors  $D_0$ . Die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Messergebnisses ist laut Born'scher Regel (5.19b) gleich dem Betragsquadrat der Projektionsamplitude von (8.11) auf den entsprechenden Eigenvektor des Detektors. Also ist die Wahrscheinlichkeit  $W(x)$  dafür, dass  $D_0$  an der Position  $x$  ein Photon detektiert, gleich

$$\begin{aligned} W(x) &= \frac{1}{2} \left| \langle x_{D0} || 1 \rangle |2\rangle + \langle x_{D0} || 1' \rangle |2'\rangle \right|^2 = \\ &\stackrel{(5.5j)}{=} \frac{1}{2} \left( \langle x_{D0} || 1 \rangle |2\rangle + \langle x_{D0} || 1' \rangle |2'\rangle \right)^* \cdot \\ &\quad \cdot \left( \langle x_{D0} || 1 \rangle |2\rangle + \langle x_{D0} || 1' \rangle |2'\rangle \right) = \\ &\stackrel{(5.6c)}{=} \frac{1}{2} \left( \langle 2 | \langle 1 || x_{D0} \rangle + \langle 2' | \langle 1' || x_{D0} \rangle \right) \cdot \\ &\quad \cdot \left( \langle x_{D0} || 1 \rangle |2\rangle + \langle x_{D0} || 1' \rangle |2'\rangle \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \underbrace{\langle 2 || 2 \rangle}_1 \underbrace{\langle 1 || x_{D0} \rangle \langle x_{D0} || 1 \rangle}_{\textcircled{1}} + \underbrace{\langle 2 || 2' \rangle}_0 \underbrace{\langle 1 || x_{D0} \rangle \langle x_{D0} || 1' \rangle}_{\textcircled{2}} + \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{\langle 2' || 2 \rangle}_0 \underbrace{\langle 1' || x_{D0} \rangle \langle x_{D0} || 1 \rangle}_{\textcircled{3}} + \underbrace{\langle 2' || 2' \rangle}_1 \underbrace{\langle 1' || x_{D0} \rangle \langle x_{D0} || 1' \rangle}_{\textcircled{4}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \underbrace{\left| \langle x_{D0} || 1 \rangle \right|^2}_{\textcircled{1}} + \underbrace{\left| \langle x_{D0} || 1' \rangle \right|^2}_{\textcircled{4}} \right). \quad (8.13) \end{aligned}$$

Durch  $\langle 2 || 2' \rangle = \langle 2' || 2 \rangle = 0$  sind die „gemischten“ Terme ② und ③, in denen sowohl 1 als auch 1' vorkommt, verloren gegangen. Das sind aber genau die beiden Terme, durch die Interferenz hätte zustande kommen können. In ① kommt nur das Photon 1 vor, das

eindeutig lokalisiert hinter dem oberen Spalt erzeugt wurde. Und in ④ kommt nur das Photon  $1'$  vor, das eindeutig lokalisiert hinter dem unteren Spalt erzeugt wurde. Diese beiden Terme können nicht zur Interferenz beitragen.

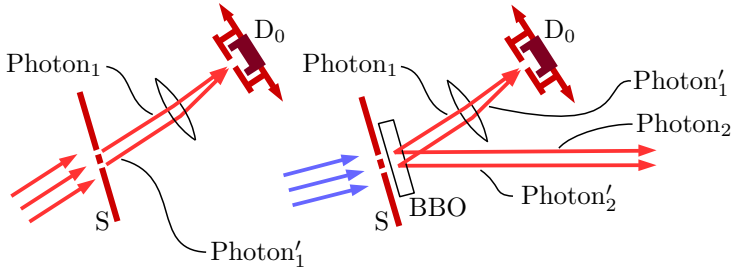


Abb. 8.7: Grob (linke Skizze) und fein (rechte Skizze) lokalisierte Trajektorie von  $\text{Photon}_1$  bzw.  $\text{Photon}'_1$

Zum Vergleich betrachten wir ein einfacheres Experiment, das in der linken Skizze von Abb. 8.7 dargestellt wird. (Rechts in Abb. 8.7 ist lediglich Abb. 8.5 zum Vergleich nochmal abgedruckt.) Beim einfacheren Experiment wird der BBO-Kristall weggenommen, und ein Strahl von Photonen der Wellenlänge 702,2 nm durch den Doppelspalt auf den Detektor  $D_0$  gerichtet. Der Strahl soll über beide Spalte gleichmäßig delokalisiert sein, so dass der Zustandsvektor der Photonen in der Fokalebene der Linse

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left( |1\rangle + |1'\rangle \right) \quad (8.14)$$

ist. Ein  $\text{Photon}_2$  oder  $\text{Photon}'_2$  gibt es mit diesem Aufbau nicht mehr. Die Wahrscheinlichkeit  $W(x)$  dafür, dass das Photon vom Detektor  $D_0$  an der Stelle  $x$  beobachtet wird, ist nach der Born'schen Regel (5.19b) gleich dem Betragsquadrat der Projektionsamplitude von (8.14) auf den entsprechenden Eigenvektor des Detektors.

$$W(x) = \frac{1}{2} \left| \langle x_{D_0} | \left( |1\rangle + |1'\rangle \right) \right|^2 =$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(5.5j),(5.6c)}{=} \frac{1}{2} \left( \langle 1 || x_{D_0} \rangle + \langle 1' || x_{D_0} \rangle \right) \left( \langle x_{D_0} || 1 \rangle + \langle x_{D_0} || 1' \rangle \right) = \\
& = \frac{1}{2} \left( \langle 1 || x_{D_0} \rangle \langle x_{D_0} || 1 \rangle + \langle 1 || x_{D_0} \rangle \langle x_{D_0} || 1' \rangle + \right. \\
& \quad \left. + \langle 1' || x_{D_0} \rangle \langle x_{D_0} || 1 \rangle + \langle 1' || x_{D_0} \rangle \langle x_{D_0} || 1' \rangle \right) = \\
& = \frac{1}{2} \left( \underbrace{\left| \langle x_{D_0} || 1 \rangle \right|^2}_{\textcircled{1}} + \underbrace{\langle 1 || x_{D_0} \rangle \langle x_{D_0} || 1' \rangle}_{\textcircled{2}} + \right. \\
& \quad \left. + \underbrace{\langle 1' || x_{D_0} \rangle \langle x_{D_0} || 1 \rangle}_{\textcircled{3}} + \underbrace{\left| \langle x_{D_0} || 1' \rangle \right|^2}_{\textcircled{4}} \right). \tag{8.15}
\end{aligned}$$

Anders als in (8.13) sind jetzt auch die Terme ② und ③ im Endergebnis enthalten. Es sind gerade diese „gemischten“ Terme, in denen sowohl 1 als auch 1' vorkommt, die die Selbstinterferenz des Photons beschreiben. Welchen Wert diese Terme haben, das hängt davon ab wie groß der Unterschied der Weglängen vom oberen bzw. unteren Spalt bis zur Position  $x$  des Detektors  $D_0$  ist. Wenn der Unterschied der Weglängen gleich

$$0, \pm\lambda, \pm2\lambda, \pm3\lambda, \dots$$

ist, wobei  $\lambda = 702,2 \text{ nm}$  die Wellenlänge des Photons ist, dann gibt es an dieser Stelle ein Interferenz-Maximum. Wenn der Unterschied der Weglängen jedoch gleich

$$\pm\lambda/2, \pm3\lambda/2, \pm5\lambda/2, \dots$$

ist, dann gibt es an dieser Stelle ein Interferenz-Minimum, siehe Abb. 2.4 auf Seite 28.

Zunächst scheint also Interferenz unmöglich, wenn die Photonen per SPDC erzeugt werden. Man kann jedoch mithilfe eines „Quantenradierers“ auch mit diesen Photonen Selbstinterferenz erhalten. Die Idee zu einem Quantenradierer hatte Marlan Scully (gemeinsam mit Kai Drühl) schon 1982 [62], aber erst siebzehn Jahre später gelang ihm (gemeinsam mit Kim, Yu, Kulik, Shih) die Realisierung durch das hier beschriebene Experiment.

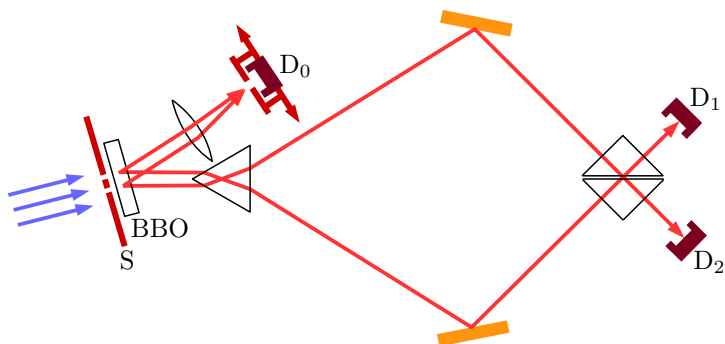


Abb. 8.8: Ein Quantenradierer

Die Experimentatoren lenkten  $\text{Photon}_2$  und  $\text{Photon}'_2$  durch die in Abb. 8.8 gelb gezeichneten Spiegel auf einen Strahlteiler. Es handelte sich nicht um einen polarisierenden, sondern einen gewöhnlichen Strahlteiler, der jedes Photon – egal wie es polarisiert ist – mit Wahrscheinlichkeit  $1/2$  transmittiert und mit Wahrscheinlichkeit  $1/2$  reflektiert. Hinter dem Strahlteiler wurden die Photonen mit den Detektoren  $D_1$  und  $D_2$  registriert.

Wenn  $D_1$  oder  $D_2$  ein Photon registriert, dann kann man wegen des Strahlteilers nicht wissen, ob es sich um ein  $\text{Photon}_2$  oder ein  $\text{Photon}'_2$  handelte. Der Strahlteiler hat diese Information, und damit auch die Information über den Entstehungsort des von  $D_0$  registrierten Partnerphotons ausradiert. Folglich steht der Interferenz von Photonen am Detektor  $D_0$  nichts mehr im Weg.

Nun ja, wirklich überzeugend klingt das nicht. Hatte ich nicht gerade gesagt, dass die Lokalisierung eine objektive Tatsache ist, egal ob jemand dieses Tatsache zur Kenntnis nimmt oder nicht? Wieso wird die Lokalisierung des Entstehungsorts der Photonen durch den Strahlteiler ausradiert, aber nicht ausradiert wenn man  $\text{Photon}_2$  bzw.  $\text{Photon}'_2$  unregistriert gegen die Wand laufen lässt?

Bevor wir versuchen das zu klären, schauen wir uns erstmal an,

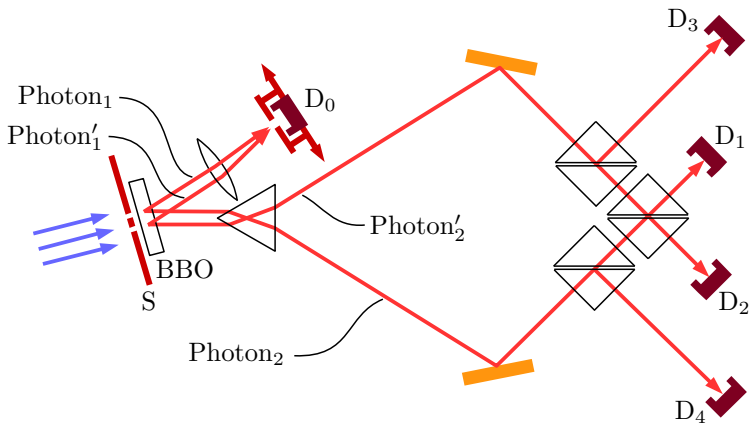


Abb. 8.9: Ein Quantenradierer mit verzögerter Wahl

was genau bei diesem Experiment beobachtet wurde. Zunächst ist zu bemerken, dass der Aufbau des Experiments noch etwas komplizierter gestaltet wurde, nämlich so wie in Abb. 8.9 skizziert. In den Strahlengang von  $\text{Photon}_2$  und  $\text{Photon}'_2$  wurde je ein weiterer Strahlteiler eingefügt, von dem die Photonen jeweils mit Wahrscheinlichkeit  $1/2$  zu den Detektoren  $D_3$  und  $D_4$  reflektiert werden. Wenn das geschieht, dann ist die Situation wieder die gleiche wie beim Aufbau von Abb. 8.6. Wenn  $D_3$  (bzw.  $D_4$ ) anspricht, dann wird der Ursprungsort des Photonenpaares im BBO-Kristall hinter dem unteren (bzw. oberen) Spalt genau lokalisiert, und folglich kann  $D_0$  in der Fokalebene der Linse keine Interferenz beobachten. Wenn dagegen  $D_1$  oder  $D_2$  anspricht, dann ist der Ursprungsort der Photonen nicht lokalisiert, und deshalb in der Fokalebene der Linse Interferenz möglich.

Die Wahl, ob nun der Ursprungsort der Photonen lokalisiert wird oder nicht, trifft bei diesem Aufbau nicht der Experimentator sondern die Natur selbst, indem das Photon am ersten Strahlteiler zufällig (mit Wahrscheinlichkeit  $1/2$ ) reflektiert oder zufällig

(mit Wahrscheinlichkeit  $1/2$ ) transmittiert wird. Die Wahl wird als „verzögert“ bezeichnet, falls sie erst getroffen wird nachdem der Detektor  $D_0$  das andere Photon des verschränkten Paares bereits registriert hat. Das war im Experiment von Kim et. al. der Fall, denn die ersten Strahlteiler waren etwa 2,3 m weiter vom BBO-Kristall entfernt als der Detektor  $D_0$ . Um diese Wegdifferenz zurückzulegen brauchen die Photonen

$$\frac{2,3 \text{ m}}{\text{Lichtgeschwindigkeit}} = \frac{2,3 \text{ m}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} \approx 7,7 \text{ ns} .$$

Die Ansprechzeit der Detektoren war dagegen kleiner als 1 ns. Also war tatsächlich jedes Photon schon längst vom Detektor  $D_0$  registriert worden, wenn die Natur (durch Reflektion oder Transmission des Partnerphotons am ersten Strahlteiler) entschied, ob der Ursprungsort der Photonen lokalisiert wurde oder nicht.

Die Detektoren  $D_1, D_2, D_3, D_4$  waren weitere 20 cm von den ersten Strahlteilern entfernt, so dass die Photonen diese Detektoren

$$\frac{2,5 \text{ m}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} \approx 8,3 \text{ ns}$$

später erreichten als ihre Partnerphotonen den Detektor  $D_0$ . Bei jedem Ansprechen des Detektors  $D_0$  wurde deshalb beobachtet, ob etwa 8 ns später einer der Detektoren  $D_1, D_2, D_3, D_4$  ansprach. Diese Koinzidenzen wurden gezählt<sup>8</sup> und in das Diagramm von Abb. 8.10 auf der nächsten Seite eingetragen.

Bei der Messung der Koinzidenzen von  $D_0$  und  $D_1$  (grüne Punkte im Diagramm) bzw.  $D_0$  und  $D_2$  (rote Quadrate im Diagramm) rasterte der Detektor  $D_0$  die Fokalebene der Linse in Schritten von 0,1 mm ab, bei der Messung der Koinzidenzen von  $D_0$  und  $D_3$

<sup>8</sup> Kim et.al. haben es leider versäumt, in ihrer Veröffentlichung [61] zu verraten, in welchem Zeitraum die Koinzidenzen gezählt wurden, ob pro Millisekunde oder pro Minute oder ...

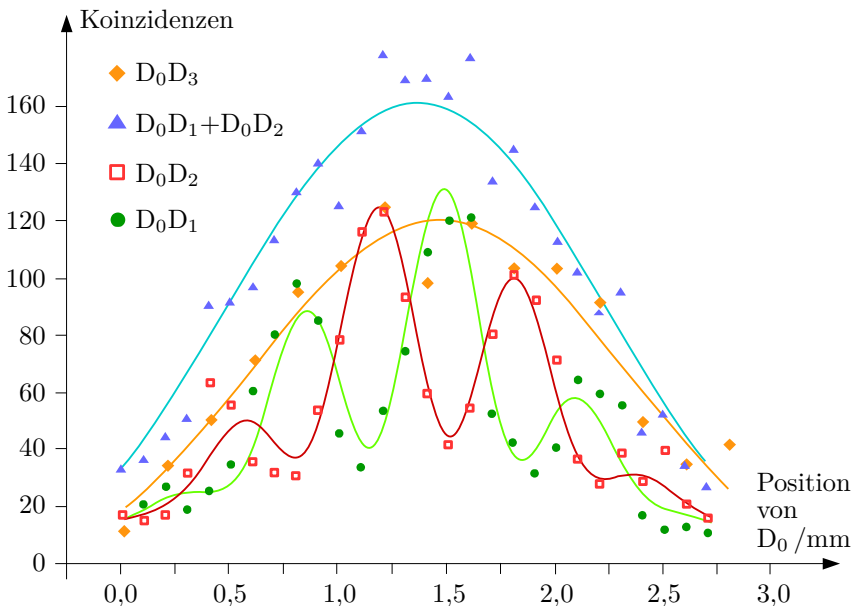


Abb. 8.10: Die Anzahl beobachteter Photonenpaare als Funktion der Position des Detektors  $D_0$

(gelbe Rauten im Diagramm) war die Schrittweite 0,2 mm. Die blauen Dreiecke sind einfach die Summe der grünen Punkte und der roten Quadrate.

Das einzige Ergebnis, das leicht zu verstehen ist, sind die gelben Rauten: Wenn der Detektor  $D_3$  anspricht, dann wird der Ursprungsort des Photonenpaares am unteren Spalt lokalisiert. Also erwartet man, dass der Detektor  $D_0$  nicht das Interferenzbild eines Doppelspalts beobachtet, sondern das **Beugungsbild** eines Einfachspalts mit Breite  $\stackrel{(8.10)}{=} 0,3$  mm, der vom Zentrum des Gesamtbildes  $0,35$  mm  $\stackrel{(8.10)}{=}$  (halber Spaltabstand) nach rechts versetzt ist. Diese Erwartung ist als gelbe Kurve eingezeichnet, und die gelben Rauten liegen in der Tat – abgesehen von den unvermeidlichen

experimentellen Schwankungen und Ungenauigkeiten – auf dieser Linie. Diese Linie entspricht dem **gelben** Term ④ in (8.13) bzw. (8.15).

Einigermaßen überraschend sind dagegen die drei anderen Kurven. Wenn einer der Detektoren  $D_1$  oder  $D_2$  anspricht, dann ist doch angeblich die Lokalisierung des Ursprungsorts des Photonenpaares „ausradiert“. Sollte der Detektor  $D_0$  in diesem Fall nicht ein Interferenzbild beobachten? Die blauen Dreiecke liegen aber einigermaßen gut auf der blauen Linie, die keinerlei Interferenzstrukturen enthält.

Erst wenn man die Koinzidenzen  $D_0D_1$  (grüne Punkte) und  $D_0D_2$  (rote Quadrate) separat betrachtet, taucht eine Struktur auf, die nach Interferenz am Doppelspalt aussieht. Aber die Maxima und Minima sind rätselhafterweise nach rechts und links verschoben. Das sieht man deutlich beispielsweise im Vergleich mit der Beugung von Neutronen am Einfachspalt und am Doppelspalt in Abb. 4.6 auf Seite 83. Bei der „normalen“ Beugung liegt das zentrale Maximum genau im Zentrum der Beugungsstruktur.

Um Abb. 8.10 zu verstehen, müssen wir die Zustandsvektoren und Projektionsamplituden der Photonen genauer betrachten. Wenn das Photon $'_2$  auf den ersten Strahlteiler trifft, dann wird es mit gleicher Wahrscheinlichkeit transmittiert oder zum Detektor  $D_3$  reflektiert. Sein Zustandsvektor hinter dem ersten Strahlteiler ist also

$$|2'\rangle \xrightarrow{\text{erster Strahlteiler}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |2'_{\text{transmittiert}}\rangle - i|2'_{D_3}\rangle \right). \quad (8.16)$$

Hier wird für den Zustandsvektor des Photons $'_2$ , das auf den Detektor  $D_3$  trifft, die Schreibweise  $|2'_{D_3}\rangle$  eingeführt. Der Faktor  $-i = -\sqrt{-1}$  kommt dadurch zustande, dass es an einem Strahlteiler stets einen Phasenversatz von einer viertel Wellenlänge zwischen dem transmittierten und dem reflektierten Teilchen gibt.<sup>3</sup> Dieser Phasenversatz wird laut (A.14) in der Theorie durch den Faktor  $-i$

repräsentiert. Das transmittierte Photon wird am zweiten Strahlteiler mit gleicher Wahrscheinlichkeit zum Detektor  $D_2$  transmittiert oder zum Detektor  $D_1$  reflektiert:

$$|2'_{\text{transmittiert}}\rangle \xrightarrow{\text{zweiter Strahlteiler}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |2'_{D_2}\rangle - i|2'_{D_1}\rangle \right) \quad (8.17)$$

Auch hier tritt wieder der Phasenversatz  $-i$  des reflektierten Photons auf. Wenn man (8.17) in (8.16) einsetzt, erhält man

$$|2'\rangle \xrightarrow{\text{beide Strahlteiler}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |2'_{D_2}\rangle - i|2'_{D_1}\rangle \right) - i|2'_{D_3}\rangle \right\},$$

und auf die gleiche Weise findet man

$$|2\rangle \xrightarrow{\text{beide Strahlteiler}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \left( | - i2_{D_2}\rangle + |2_{D_1}\rangle \right) - i|2_{D_4}\rangle \right\}.$$

Dies wir in den Zustandsvektor (8.11) des Photonenpaars eingesetzt:

$$\begin{aligned} |\text{Photonenpaar}\rangle &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ |1\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \left( + |2_{D_1}\rangle - i|2_{D_2}\rangle \right) - i|2_{D_4}\rangle \right\} \right. \\ &\quad \left. + |1'\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \left( - i|2'_{D_1}\rangle + |2'_{D_2}\rangle \right) - i|2'_{D_3}\rangle \right\} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle |2_{D_1}\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}} |1'\rangle |2'_{D_1}\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}} |1\rangle |2_{D_2}\rangle + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{2}} |1'\rangle |2'_{D_2}\rangle - i|1'\rangle |2'_{D_3}\rangle - i|1\rangle |2_{D_4}\rangle \right]. \end{aligned} \quad (8.18)$$

Die Eigenvektoren der Detektoren sind

$$|x_{D_0}\rangle |D_1\rangle, |x_{D_0}\rangle |D_2\rangle, |x_{D_0}\rangle |D_3\rangle, |x_{D_0}\rangle |D_4\rangle, \quad (8.19)$$

weil ja ausschließlich Koinzidenzen von  $D_0$  und einem der vier anderen Detektoren registriert werden.  $x_{D_0}$  symbolisiert wieder die

Position des Detektors  $D_0$  in der Fokalebene der Linse. Weil 28 verschiedene  $x$ -Positionen abgerastert wurden, handelt es sich bei (8.19) um  $4 \cdot 28 = 112$  verschiedene Vektoren. Die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Messergebnisses ist laut Born'scher Regel (5.19b) gleich dem Betragsquadrat der Projektionsamplitude von (8.18) auf den entsprechenden Eigenvektor der Detektoren. Beispielsweise ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass  $D_0$  an der Position  $x$  ein Photon detektiert, und etwa 8 ns später  $D_3$  das Partnerphoton detektiert, gleich

$$\begin{aligned}
 & \left| \langle x_{D_0} | \langle D_3 | | 8.18 \rangle \right|^2 = \\
 & = \left| \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} \langle x_{D_0} | | 1 \rangle \underbrace{\langle D_3 | | 2_{D_1} \rangle}_0 - \frac{i}{\sqrt{2}} \langle x_{D_0} | | 1' \rangle \underbrace{\langle D_3 | | 2'_{D_1} \rangle}_0 - \right. \right. \\
 & \quad - \frac{i}{\sqrt{2}} \langle x_{D_0} | | 1 \rangle \underbrace{\langle D_3 | | 2_{D_2} \rangle}_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \langle x_{D_0} | | 1' \rangle \underbrace{\langle D_3 | | 2'_{D_2} \rangle}_0 - \\
 & \quad \left. \left. - i \langle x_{D_0} | | 1' \rangle \underbrace{\langle D_3 | | 2'_{D_3} \rangle}_1 - i \langle x_{D_0} | | 1 \rangle \underbrace{\langle D_3 | | 2_{D_4} \rangle}_0 \right] \right|^2 = \\
 & = \frac{1}{4} \left| \langle x_{D_0} | | 1' \rangle \right|^2. \tag{8.20a}
 \end{aligned}$$

Hier wurde  $|-i|^2 = 1$  benutzt. Dies Ergebnis gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an dass ein Photon lokalisiert hinter dem unteren Spalt erschaffen wird, und den Detektor  $D_0$  an der Stelle  $x$  erreicht. (8.20a) ist als gelbe Kurve im Diagramm 8.10 eingezeichnet. (8.20a) entspricht dem Term ④ in (8.13) bzw. (8.15). Der unterschiedliche Faktor  $1/4$  bzw.  $1/2$  beruht darauf, dass die Summe der Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen Ergebnisse bei jedem Experiment 1 ergeben muss.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass  $D_0$  an der Position  $x$  ein Photon detektiert, und etwa 8 ns später  $D_4$  das Partnerphoton detektiert, ist gleich

$$\begin{aligned}
& \left| \langle x_{D0} | \langle D_4 | | 8.18 \rangle \right|^2 = \\
& = \left| \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} \langle x_{D0} | | 1 \rangle \underbrace{\langle D_4 | | 2_{D1} \rangle}_0 - \frac{i}{\sqrt{2}} \langle x_{D0} | | 1' \rangle \underbrace{\langle D_4 | | 2'_{D1} \rangle}_0 - \right. \right. \\
& \quad - \frac{i}{\sqrt{2}} \langle x_{D0} | | 1 \rangle \underbrace{\langle D_4 | | 2_{D2} \rangle}_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \langle x_{D0} | | 1' \rangle \underbrace{\langle D_4 | | 2'_{D2} \rangle}_0 - \\
& \quad \left. \left. - i \langle x_{D0} | | 1' \rangle \underbrace{\langle D_4 | | 2'_{D3} \rangle}_0 - i \langle x_{D0} | | 1 \rangle \underbrace{\langle D_4 | | 2_{D4} \rangle}_1 \right] \right|^2 = \\
& = \frac{1}{4} \left| \langle x_{D0} | | 1 \rangle \right|^2. \tag{8.20b}
\end{aligned}$$

Auch hier wurde  $|-i|^2 = 1$  benutzt. Dies Ergebnis gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an dass ein Photon lokalisiert hinter dem oberen Spalt erschaffen wird, und den Detektor  $D_0$  an der Stelle  $x$  erreicht. (8.20b) entspricht dem Term ① in (8.13) bzw. (8.15). Der unterschiedliche Faktor 1/4 bzw. 1/2 beruht darauf, dass die Summe der Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen Ergebnisse bei jedem Experiment 1 ergeben muss.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass  $D_0$  an der Position  $x$  ein Photon detektiert, und etwa 8 ns später  $D_1$  das Partnerphoton detektiert, ist gleich

$$\begin{aligned}
& \left| \langle x_{D0} | \langle D_1 | | 8.18 \rangle \right|^2 = \\
& = \left| \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} \langle x_{D0} | | 1 \rangle \underbrace{\langle D_1 | | 2_{D1} \rangle}_1 - \frac{i}{\sqrt{2}} \langle x_{D0} | | 1' \rangle \underbrace{\langle D_1 | | 2'_{D1} \rangle}_1 - \right. \right. \\
& \quad - \frac{i}{\sqrt{2}} \langle x_{D0} | | 1 \rangle \underbrace{\langle D_1 | | 2_{D2} \rangle}_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \langle x_{D0} | | 1' \rangle \underbrace{\langle D_1 | | 2'_{D2} \rangle}_0 - \\
& \quad \left. \left. - i \langle x_{D0} | | 1' \rangle \underbrace{\langle D_1 | | 2'_{D3} \rangle}_0 - i \langle x_{D0} | | 1 \rangle \underbrace{\langle D_1 | | 2_{D4} \rangle}_0 \right] \right|^2 =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{8} \left| \langle x_{D0} || 1 \rangle - i \langle x_{D0} || 1' \rangle \right|^2 = \\
(5.5j), (5.6c) \quad &\stackrel{=}{=} \frac{1}{8} \left( \langle 1 || x_{D0} \rangle + i \langle 1' || x_{D0} \rangle \right) \left( \langle x_{D0} || 1 \rangle - i \langle x_{D0} || 1' \rangle \right) = \\
&= \frac{1}{8} \left( \underbrace{\left| \langle x_{D0} || 1 \rangle \right|^2}_{\textcircled{1}} - i \underbrace{\langle 1 || x_{D0} \rangle \langle x_{D0} || 1' \rangle}_{\textcircled{2}} + \right. \\
&\quad \left. + i \underbrace{\langle 1' || x_{D0} \rangle \langle x_{D0} || 1 \rangle}_{\textcircled{3}} + \underbrace{\left| \langle x_{D0} || 1' \rangle \right|^2}_{\textcircled{4}} \right). \tag{8.20c}
\end{aligned}$$

Wieder wurde  $-i^2 = +1$  benutzt. Und schließlich ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass  $D_0$  an der Position  $x$  ein Photon detektiert, und etwa 8 ns später  $D_2$  das Partnerphoton detektiert, gleich

$$\begin{aligned}
&\left| \langle x_{D0} | \langle D_2 || 8.18 \rangle \right|^2 = \\
&= \left| \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} \langle x_{D0} || 1 \rangle \underbrace{\langle D_2 || 2_{D1} \rangle}_0 - \frac{i}{\sqrt{2}} \langle x_{D0} || 1' \rangle \underbrace{\langle D_2 || 2'_{D1} \rangle}_0 - \right. \right. \\
&\quad \left. - \frac{i}{\sqrt{2}} \langle x_{D0} || 1 \rangle \underbrace{\langle D_2 || 2_{D2} \rangle}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \langle x_{D0} || 1' \rangle \underbrace{\langle D_2 || 2'_{D2} \rangle}_1 - \right. \\
&\quad \left. - i \langle x_{D0} || 1' \rangle \underbrace{\langle D_2 || 2'_{D3} \rangle}_0 - i \langle x_{D0} || 1 \rangle \underbrace{\langle D_2 || 2_{D4} \rangle}_0 \right] \right|^2 = \\
&= \frac{1}{8} \left| \langle x_{D0} | \left( -i | 1 \rangle + | 1' \rangle \right) \right|^2 = \frac{1}{8} \left| -i \langle x_{D0} | \left( | 1 \rangle + i | 1' \rangle \right) \right|^2 = \\
&= \frac{1}{8} \left| \langle x_{D0} || 1 \rangle + i \langle x_{D0} || 1' \rangle \right|^2 = \\
(5.5j), (5.6c) \quad &\stackrel{=}{=} \frac{1}{8} \left( \langle 1 || x_{D0} \rangle - i \langle 1' || x_{D0} \rangle \right) \left( \langle x_{D0} || 1 \rangle + i \langle x_{D0} || 1' \rangle \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{8} \left( \underbrace{|\langle x_{D0} || 1 \rangle|^2}_{\textcircled{1}} + i \underbrace{\langle 1 || x_{D0} \rangle \langle x_{D0} || 1' \rangle}_{\textcircled{2}} - \right. \\
&\quad \left. - i \underbrace{\langle 1' || x_{D0} \rangle \langle x_{D0} || 1 \rangle}_{\textcircled{3}} + \underbrace{|\langle x_{D0} || 1' \rangle|^2}_{\textcircled{4}} \right). \tag{8.20d}
\end{aligned}$$

Auch hier wurde  $(-i)(+i) = 1$  und  $|-i|^2 = 1$  benutzt. Von (8.15) unterscheiden sich (8.20c) und (8.20d) zum einen durch die unterschiedlichen Faktoren  $1/8$  bzw.  $1/2$ . Diese Faktoren beruhen darauf, dass die Summe der Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen Ergebnisse bei jedem Experiment 1 ergeben muss. Wesentlich interessanter sind die Faktoren  $\pm i$ , die jetzt bei den Faktoren  $\textcircled{2}$  bzw.  $\textcircled{3}$  gegenüber (8.15) hinzu gekommen sind. Ein Faktor plus oder minus  $i$  entspricht laut (A.14) einem Phasenversatz von plus oder minus einer viertel Wellenlänge. (8.20c) und (8.20d) beschreiben also Interferenzstrukturen die so aussehen, als wäre der Unterschied der Weglängen vom oberen bzw. unteren Spalt zum Detektor  $D_0$  um eine viertel Wellenlänge größer oder kleiner als der tatsächliche geometrische Unterschied.

(8.20c) ist im Diagramm 8.10 als grüne Kurve eingezeichnet, (8.20d) als rote Kurve. Wegen des formalen zusätzlichen Unterschieds der Weglängen von plus oder minus  $1/4$  Wellenlänge sind die Interferenzstrukturen dieser beiden Kurven vom Zentrum nach links bzw. nach rechts verschoben.

Die blaue Kurve im Diagramm 8.10 stellt die Summe von (8.20c) und (8.20d) dar:

$$(8.20c) + (8.20d) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{8} \left( \underbrace{|\langle x_{D0} || 1 \rangle|^2}_{\textcircled{1}} - i \underbrace{\langle 1 || x_{D0} \rangle \langle x_{D0} || 1' \rangle}_{\textcircled{2}} + \right. \\
&\quad \left. + i \underbrace{\langle 1' || x_{D0} \rangle \langle x_{D0} || 1 \rangle}_{\textcircled{3}} + \underbrace{|\langle x_{D0} || 1' \rangle|^2}_{\textcircled{4}} \right) + \\
&\quad + \frac{1}{8} \left( \underbrace{|\langle x_{D0} || 1 \rangle|^2}_{\textcircled{1}} + i \underbrace{\langle 1 || x_{D0} \rangle \langle x_{D0} || 1' \rangle}_{\textcircled{2}} - \right. \\
&\quad \left. - i \underbrace{\langle 1' || x_{D0} \rangle \langle x_{D0} || 1 \rangle}_{\textcircled{3}} + \underbrace{|\langle x_{D0} || 1' \rangle|^2}_{\textcircled{4}} \right) \\
&= \frac{1}{4} \left( \underbrace{|\langle x_{D0} || 1 \rangle|^2}_{\textcircled{1}} + \underbrace{|\langle x_{D0} || 1' \rangle|^2}_{\textcircled{4}} \right) = (8.20b) + (8.20a) \quad (8.21)
\end{aligned}$$

Wegen des formalen zusätzlichen Unterschieds der Weglängen zwischen dem oberen bzw. unteren Spalt und dem Detektor  $D_0$  von  $\pm 1/4$  Wellenlänge kompensieren sich in diesem Fall die gemischten Terme  $\textcircled{2}$  und  $\textcircled{3}$ . Nur die Terme  $\textcircled{1}$  und  $\textcircled{4}$ , die nicht zur Interferenz beitragen, bleiben übrig. Also ist die blaue Kurve nicht nur die Summe der roten und der grünen Kurve, sondern zugleich auch die Summe der beiden Kurven (8.20a) und (8.20b), in denen der Ursprungsort von  $\text{Photon}_1$  bzw.  $\text{Photon}'_1$  genau lokalisiert ist, und deshalb keine Interferenz auftritt.

Aus diesem schönen Experiment kann man einiges darüber lernen, wie der Ort bzw. die Trajektorie von Quantenteilchen durch Messung erschaffen wird. Von meinen wiederholten Formulierungen der Art „die Lokalisierung ist eine objektive Tatsache, egal ob jemand den Ort oder die lokalisierte Trajektorie zur Kenntnis nimmt“ brauche ich nichts zurückzunehmen, aber ich sollte präziser sagen, zu welchem Zeitpunkt eine Lokalisierung stattgefunden hat, und zu welchem Zeitpunkt (noch) nicht.

- \* Der Entstehungsort des Photonenpaares ist lokalisiert, sobald  $\text{Photon}_2$  oder  $\text{Photon}'_2$  entweder von den Detektoren  $D_4$  bzw.  $D_3$  registriert wurde, oder unwiederbringlich verloren gegangen ist, z. B. dadurch dass es gegen eine Wand gelaufen oder in den Weltraum entwichen ist.
- \* Solange  $\text{Photon}_2$  bzw.  $\text{Photon}'_2$  weder registriert wurde noch unwiederbringlich verloren gegangen ist, ist der Entstehungsort des Photonenpaares *noch nicht* lokalisiert. Die Existenz von  $\text{Photon}_2$  bzw.  $\text{Photon}'_2$  bietet zwar die Möglichkeit, den Entstehungsort zu lokalisieren, diese Möglichkeit wurde aber noch nicht realisiert.
- \* Wenn es gelingt,  $\text{Photon}_2$  bzw.  $\text{Photon}'_2$  mit einer geeigneten Interferenzapparatur einzufangen und zu registrieren (in unserem Beispiel mit den Detektoren  $D_1$  oder  $D_2$ ), dann wird dadurch die Möglichkeit der Lokalisierung endgültig beseitigt. In diesem Fall war der Entstehungsort der beiden Photonen *zu keinem Zeitpunkt* lokalisiert, d. h. es gibt keine Lokalisierung, die „ausstrahlt“ werden könnte.

Wenn die Lokalisierung erst einmal erschaffen ist, dann kann auch der Quantenradierer sie nicht mehr ausradieren. Allenfalls könnte man sagen, dass der Quantenradierer die *Möglichkeit zur Lokalisierung* ausradiziert. Insofern ist der Name „Quantenradierer“ missverständlich und etwas unglücklich gewählt, aber aus Respekt vor den Entdeckern des Effekts (Marlan Skully und Kai Drühl [62]) haben die Physiker diesen Namen beibehalten.

An dieser Stelle sollten wir uns an Bohrs (oben als Annahme C formulierte) Mahnung zur ganzheitlichen Betrachtungsweise von Quantenphänomenen erinnern. Das *individuelle Quantenphänomen* der beiden SPDC-erzeugten Photonen ist noch nicht abgeschlossen, solange noch nicht beide Photonen entweder von (klassisch beschriebenen!) Messgeräten registriert wurden oder endgültig verloren gegangen sind. Solange das noch nicht geschehen ist, ist es auch

nicht sinnvoll von den Teilen des Quantenphänomens zu sprechen, und zu sagen dass das eine Photon durch das andere lokalisiert wird.

Interessant ist die Formulierung „... beide Photonen entweder ... registriert ... oder endgültig verloren gegangen“. Hier wird angedeutet, dass endgültiger Verlust eines Photons in gewisser Weise gleichwertig zur Registrierung durch ein Messgerät ist. Registrierung und endgültiger Verlust sind tatsächlich insofern gleichwertig, als beide unmöglich rückgängig gemacht werden können. Dieser Gesichtspunkt, der von Physikern unter dem Stichwort *Dekohärenz* diskutiert wird, ist für das Verständnis von Quantenphänomenen so wichtig dass ich später darauf zurückkommen und ihm den ganzen Abschnitt 9.4 widmen werde.

## 8.4 Die wechselwirkungsfreie Lichtschranke

In Abb. 8.11 ist eine einfache Lichtschranke dargestellt. In 8.11 (a) ist der Lichtweg frei, so dass der Detektor  $D_F$  das Licht registriert. Wenn  $D_F$  kein Licht registriert, dann kann man daraus schließen dass sich – wie in 8.11 (b) skizziert – zwischen der türkis gemalten Lichtquelle und dem Detektor ein Objekt befinden muss, das den Lichtweg blockiert.

Kann man eine Lichtschranke auch mit einem einzigen Photon betreiben? In Abb. 8.12 auf der nächsten Seite ist skizziert, wie eine 1-Photon-Lichtschränke aufgebaut werden könnte. Mithilfe des (in Abschnitt 3.5 erklärten) SPDC-Prozesses werden Photonenpaare

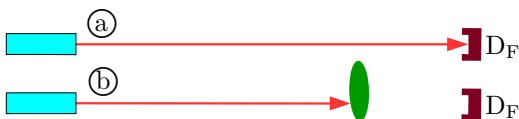


Abb. 8.11: Eine konventionelle Lichtschranke

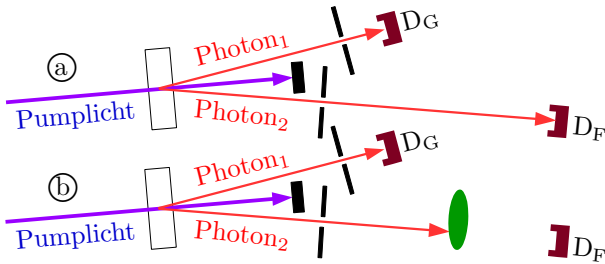


Abb. 8.12: Eine 1-Photon-Lichtschanke

erzeugt, die wir wie gewohnt  $\text{Photon}_1$  und  $\text{Photon}_2$  nennen. Wenn der Detektor  $D_G$   $\text{Photon}_1$  detektiert warten wir 10 ns lang, ob  $\text{Photon}_2$  von  $D_F$  detektiert wird, dann endet das Experiment.

Falls  $D_F$   $\text{Photon}_2$  innerhalb des 10 ns-Fensters nach dem Ansprechen von  $D_G$  detektiert, wissen wir dass der Lichtweg frei ist. Das umgekehrte gilt nicht: Wenn  $D_F$  nicht innerhalb des 10 ns-Fensters anspricht, könnte das entweder daran liegen dass ein Objekt den Lichtweg versperrt, oder es könnte daran liegen dass  $D_F$  nicht angesprochen hat, obwohl  $\text{Photon}_2$  den Detektor erreicht hat. Das kann nicht ausgeschlossen werden, weil die Effizienz von Photonendetektoren weit unter 100 % liegt.

Die 1-Photon-Lichtschanke ist also kein wirklich überzeugendes Gerät. Sie bringt aber einen bemerkenswerten Effekt mit sich, wenn sie noch etwas komplizierter aufgebaut wird, nämlich als Arm A der zwei Arme A und B eines Interferometers. Das wird in Abb. 8.13 auf der nächsten Seite dargestellt.

Das Interferometer wird zunächst sorgfältig so einjustiert, dass bei freiem Lichtweg – Abb. 8.13(a) –  $\text{Photon}_2$  immer zum Detektor  $D_F$  gelangt, der Detektor  $D_H$  spricht bei freiem Lichtweg niemals an. In Abschnitt 2.1 wurde erklärt, dass das beispielsweise dann der Fall ist, wenn die Lichtwege A und B exakt gleich lang sind. Dann interferiert die Teilwelle, die vom Weg A in den Weg F reflektiert

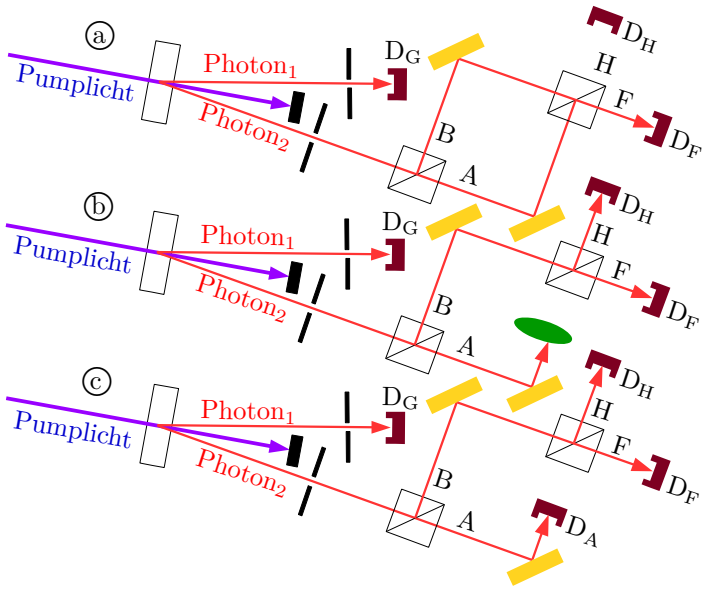


Abb. 8.13 : 1-Photon-Lichtschanke im Interferometer

wird, konstruktiv mit der Teilwelle, die vom Weg B in den Weg F transmittiert wird. Und die Teilwelle, die vom Weg A in den Weg H transmittiert wird, interferiert destruktiv mit der Teilwelle, die vom Weg B in den Weg H reflektiert wird.

Nachdem das Interferometer justiert ist, beginnt der Versuch: Wir warten ab, bis  $D_G$  zum ersten mal anspricht. Dann wird registriert, ob innerhalb von 10 ns auch  $D_F$  anspricht, oder  $D_H$ , oder ob keiner der beiden Detektoren anspricht. Damit endet der Versuch.

Wenn der Lichtweg frei ist, wie in 8.13(a) skizziert, dann wird – weil die Effizienz der Detektoren weit unter 100 % liegt – in einer Serie von Versuchsdurchläufen  $D_F$  manchmal ansprechen, manchmal wird kein Detektor ansprechen, aber niemals wird  $D_H$

ansprechen.

Wenn sich dagegen, wie in 8.13 (b), ein Hindernis im Lichtweg A befindet, dann wird manchmal auch der Detektor  $D_H$  ansprechen, weil jetzt die aus dem Weg A transmittierte Teilwelle entfällt, die zuvor für destruktive Interferenz im Weg H gesorgt hatte.

Wenn  $D_F$  anspricht, oder wenn keiner der Detektoren anspricht, dann ist das Ergebnis mehrdeutig: Vielleicht blockiert ein Hindernis die Lichtschranke (sprich den Weg A), vielleicht auch nicht. Eindeutig ist das Ergebnis jedoch, wenn  $D_H$  anspricht: Dies Resultat kann nur auftreten, wenn die Lichtschranke blockiert ist.

Weit verbreitet ist die folgende Interpretation I (die ich aber gleich kritisieren werde) von Versuchsdurchläufen, in denen  $D_H$  das Photon registriert:

**I** Das Ansprechen von  $D_H$  beweist, dass die Lichtschranke durch ein Hindernis blockiert wird. Also kann das Photon unmöglich über den Weg A zum Detektor gekommen sein, es muss eindeutig den Weg B genommen haben. Wie konnte dann aber die 1-Photon-Lichtschranke das Hindernis bemerken, obwohl das einzige Photon<sub>2</sub> das hier im Spiel war, dem Hindernis nicht einmal nahe gekommen ist?

Wenn man den Vorgang so interpretiert, dann ist es naheliegend die Lichtschranke als „wechselwirkungsfrei“ zu bezeichnen, da ja zwischen dem Photon und dem Hindernis anscheinend keine Wechselwirkung stattgefunden hat.

Die Idee dieser wechselwirkungsfreien Lichtschranke wurde 1993 von Avshalom Elitzur und Lev Vaidman veröffentlicht [63, 64]. 1995 prüften Kwiat et. al. [65] im Labor nach,<sup>9</sup> dass die Methode tatsächlich funktioniert. Dabei ersetzten die Experimentatoren das

<sup>9</sup> Elitzur und Vaidman [63] diskutierten das in Abb. 8.13 skizzierte Mach-Zehnder-Interferometer, während im Experiment von Kwiat et. al. [65] ein Michelson-Interferometer verwendet wurde. Der Unterschied ist aber für unsere Untersuchung belanglos.

in Abb. 8.13**ⓑ** grün gemalte Hindernis durch einen weiteren Photonendetektor  $D_A$ , wie in Abb. 8.13**ⓒ** skizziert. Der Vorteil ist, dass sich die Vorgänge mit diesem zusätzlichen Detektor noch genauer beobachten und überprüfen lassen. Deshalb werde ich die Lichtschranke im folgenden mit diesem zusätzlichen Detektor diskutieren.

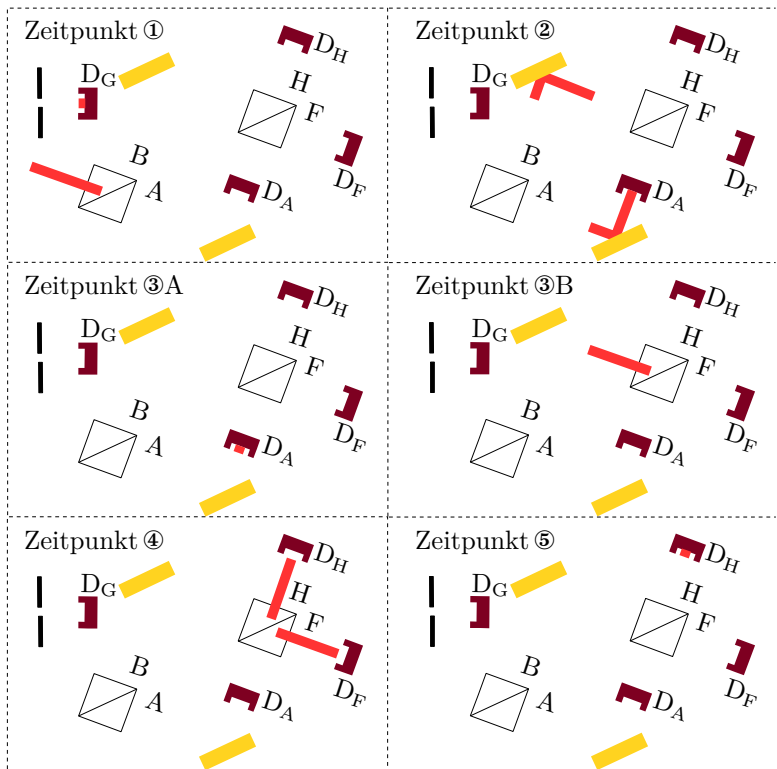
Die Interpretation **I** ist nicht alternativlos, und passt nicht mit den Vorstellungen zusammen, die in den vorangegangenen Kapiteln zur Deutung der Ein-Teilchen-Interferenz entwickelt wurden. Betrachten wir in diesem Zusammenhang nochmal die „Zeitpunkt-Skizzen“ von Abbildung 3.10 auf Seite 71.

Der aufgespaltene Ort des Photons bewegt sich dort auf die Detektoren  $D_R$  und  $D_T$  zu. Erst in dem Moment (Zeitpunkt **④**) wo das Photon von  $D_R$  registriert wird, schrumpft sein Ort schlagartig auf die aktive Fläche von  $D_R$  zusammen. Auf die gleiche Weise können wir schrittweise darstellen, wie sich der Ort von  $\text{Photon}_2$  durch die „wechselwirkungsfreie Lichtschranke“ bewegt. Das wird in Abb. 8.14 auf der nächsten Seite dargestellt.

Formulieren wir diese – zur Interpretation **I** alternative – Betrachtungsweise als Interpretation **J**:

**J** An den Strahlteilern wird der Ort von  $\text{Photon}_2$  auf beide möglichen Wege aufgespalten. Deshalb berührt ein Teil seines Ortes zeitweilig das Hindernis im Weg A (sprich den Detektor  $D_A$ ). Erst wenn der Detektor  $D_A$  nicht anspricht (und auch nicht das Photon absorbiert ohne anzusprechen) obwohl er von  $\text{Photon}_2$  berührt wurde, wird der Ort des Photons auf den Weg B eingeschränkt. Und erst wenn  $D_H$  anspricht (nicht vorher!) schrumpft der Ort von  $\text{Photon}_2$  schlagartig auf die aktive Fläche von  $D_H$  zusammen.

Beide Interpretationen sind verträglich mit dem tatsächlich beobachteten Resultat, dass nämlich die Lichtschranke das Hindernis

Abb. 8.14: Der Ort von Photon<sub>2</sub>

Zeitpunkt ①: In dem Moment wo  $D_G$  Photon<sub>1</sub> registriert, wird der rot skizzierte Ort von Photon<sub>2</sub> erschaffen.

Zeitpunkt ②: Der Ort von Photon<sub>2</sub> ist auf die Arme A und B des Interferometers aufgespalten. Er berührt bereits  $D_A$ , der Detektor hat aber (noch) nicht angesprochen.

Zeitpunkt ③A:  $D_A$  hat das Photon registriert, dadurch ist sein Ort auf die aktive Fläche von  $D_A$  zusammengeschrumpft. Der Versuch ist beendet.

Zeitpunkt ③B:  $D_A$  hat das Photon *nicht* registriert, dadurch ist sein Ort auf den Weg B zusammengeschrumpft.

Zeitpunkt ④: Der Ort des Photons ist auf die Wege F und H aufgespalten.

Zeitpunkt ⑤:  $D_H$  hat das Photon registriert, dadurch ist sein Ort auf die aktive Fläche von  $D_H$  zusammengeschrumpft.

durch Detektion des Photons mit dem Detektor  $D_H$  nachgewiesen hat. Insofern ist keine der beiden Interpretationen „falsch“.

Die Interpretation **J** hat den Vorteil dass sie uns ein unlösbares Rätsel erspart, nämlich die Frage wieso die Lichtschranke das Hindernis bemerken konnte, obwohl das einzige Photon nur auf dem Weg B unterwegs war. Als Vorteil von **I** könnte man anführen, dass diese Interpretation uns die Aufspaltung des Orts des Photons auf verschiedene Wege erspart. Das tut sie allerdings nur wenn sich ein Hindernis in der Lichtschranke befindet. Wenn die Lichtschranke frei ist, brauchen wir die Aufspaltung des Orts doch, um die Einzelteilchen-Interferenz deuten zu können. Deshalb erscheint mir die Interpretation **J** insgesamt wesentlich geschickter und plausibler.

Versuchen wir das, was in Abb. 8.14 durch Skizzen angedeutet wird, mit soliden quantentheoretischen Überlegungen zu untermauern: Am ersten Strahlteiler wird  $\text{Photon}_2$  mit gleicher Wahrscheinlichkeit transmittiert oder reflektiert, d. h. sein Zustandsvektor wird zu

$$|\text{Photon}_2\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}} \left( |A\rangle - i|B\rangle \right). \quad (8.22a)$$

$|A\rangle$  ist der Zustandsvektor eines Photons, das den Weg A nimmt.  $|B\rangle$  ist der Zustandsvektor eines Photons, das den Weg B nimmt. Der Faktor  $-i = -\sqrt{-1}$  kommt dadurch zustande, dass es an einem Strahlteiler stets einen Phasenversatz von einer viertel Wellenlänge zwischen dem transmittierten und dem reflektierten Teilchen gibt. Dieser Phasenversatz wird laut (A.14) in der Theorie durch den Faktor  $-i$  repräsentiert. Der Faktor  $\sqrt{1/2}$  ist erforderlich, damit die Projektionsamplitude dieses verschränkten Zustandsvektors auf sich selbst gleich 1 ist, wie es sein muss.

Auf dem Weg A trifft das Photon entweder auf  $D_A$  (falls dieser Detektor eingebaut ist), oder es wird sich ungestört weiter bewegen (falls  $D_A$  nicht eingebaut ist). Das lässt sich folgendermaßen schreiben:

$$|A\rangle = c_1|A, D_A\rangle + c_2|A\rangle \quad (8.22b)$$

mit  $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$

$|A, D_A\rangle$  ist der Zustandsvektor des Photons, das auf dem Weg A auf den Detektor  $D_A$  stößt. Wenn der Detektor den Weg A versperrt, dann ist  $c_1 = 1$  und  $c_2 = 0$ . Wenn der Weg A frei ist, dann ist  $c_1 = 0$  und  $c_2 = 1$ . Die allgemeinere Schreibweise (8.22b) erspart es uns, für jeden Fall separate Gleichungen aufschreiben zu müssen.

Wenn das Photon den zweiten Strahlteiler erreicht, dann wird es mit gleicher Wahrscheinlichkeit transmittiert oder reflektiert:

$$|A\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}} \left( |H_A\rangle - i|F_A\rangle \right) \quad (8.22c)$$

$$|B\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}} \left( |F_B\rangle - i|H_B\rangle \right) \quad (8.22d)$$

Der Faktor  $-i$  wurde bei (8.22a) erklärt.  $|F_A\rangle$  ist der Zustandsvektor eines Photons, das vom Weg A kommend in den Weg F reflektiert wurde.  $|F_B\rangle$  ist der Zustandsvektor eines Photons, das vom Weg B kommend in den Weg F transmittiert wurde.  $|H_A\rangle$  ist der Zustandsvektor eines Photons, das vom Weg A kommend in den Weg H transmittiert wurde.  $|H_B\rangle$  ist der Zustandsvektor eines Photons, das vom Weg B kommend in den Weg H reflektiert wurde.

Jetzt setzen wir die Gleichungen (8.22) zusammen:

$$\begin{aligned} |\text{Photon}_2\rangle &= \sqrt{\frac{1}{2}} \left[ c_1|A, D_A\rangle + \right. \\ &\quad \left. + c_2\sqrt{\frac{1}{2}} \left( |H_A\rangle - i|F_A\rangle \right) - i\sqrt{\frac{1}{2}} \left( |F_B\rangle - i|H_B\rangle \right) \right] = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}} c_1|A, D_A\rangle + \frac{1}{2} \left( c_2|H_A\rangle - ic_2|F_A\rangle - i|F_B\rangle - |H_B\rangle \right) \quad (8.23) \end{aligned}$$

Beim letzten Summanden wurde  $(-i)^2 \underline{\underline{(5.5e)}} - 1$  benutzt.

Die Effizienz von Photonendetektoren liegt weit unter 100 %, d. h. nicht jedes Photon das einen Detektor erreicht wird tatsächlich registriert. Einfachheitshalber nehmen wir vorläufig an, dass die drei Photonendetektoren doch eine Effizienz von 100 % hätten. Später müssen wir unsere Ergebnisse dann entsprechend korrigieren. Unter der Annahme 100%iger Effizienz ist die Wahrscheinlichkeit  $W(D_H)$  dafür dass der Detektor  $D_H$  das Photon registriert, nach der Born'schen Regel (5.19b) gleich dem Betragsquadrat der Projektionsamplitude von (8.23) auf den Eigenvektor  $|D_H\rangle$  dieses Detektors:

$$W(D_H) = \left| \langle D_H | \text{8.23} \rangle \right|^2 = \frac{1}{4} \left| \sqrt{2} c_1 \underbrace{\langle D_H | A, D_A \rangle}_0 + c_2 \langle D_H | H_A \rangle - \right. \\ \left. - i c_2 \underbrace{\langle D_H | F_A \rangle}_0 - i \underbrace{\langle D_H | F_B \rangle}_0 - \langle D_H | H_B \rangle \right|^2 \quad (8.24a)$$

Das Photon kann den Detektor  $D_H$  unmöglich erreichen wenn es vom Detektor  $D_A$  aus dem Verkehr gezogen wurde, oder wenn es am zweiten Strahlteiler den Weg F eingeschlagen hat. Deshalb sind drei Projektionsamplituden Null. Auf die gleiche Weise findet man die Wahrscheinlichkeit  $W(D_F)$  dafür, dass der Detektor  $D_F$  das Photon registriert, und die Wahrscheinlichkeit  $W(D_A)$  dafür, dass der Detektor  $D_A$  (sprich: das Hindernis in der Lichtschanke) das Photon registriert:

$$W(D_F) = \frac{1}{4} \left| \sqrt{2} c_1 \underbrace{\langle D_F | A, D_A \rangle}_0 + c_2 \underbrace{\langle D_F | H_A \rangle}_0 - \right. \\ \left. - i c_2 \langle D_F | F_A \rangle - i \langle D_F | F_B \rangle - \underbrace{\langle D_F | H_B \rangle}_0 \right|^2 \quad (8.24b)$$

$$W(D_A) = \frac{1}{4} \left| \sqrt{2} c_1 \underbrace{\langle D_A || A, D_A \rangle}_0 + c_2 \underbrace{\langle D_A || H_A \rangle}_0 - i c_2 \underbrace{\langle D_A || F_A \rangle}_0 - i \underbrace{\langle D_A || F_B \rangle}_0 - \underbrace{\langle D_A || H_B \rangle}_0 \right|^2 \quad (8.24c)$$

Wenn ein Hindernis den Weg A versperrt, dann ist  $c_1 = 1$  und  $c_2 = 0$ . Wenn kein Hindernis den Weg A versperrt, dann ist  $c_1 = 0$  und  $c_2 = 1$ . Also gilt

falls der Lichtweg A frei ist:

$$W(D_H) \stackrel{(8.24a)}{=} \frac{1}{4} \left| \underbrace{\langle D_H || H_A \rangle}_{=\langle D_H || H_A \rangle} - \underbrace{\langle D_H || H_B \rangle}_{=\langle D_H || H_B \rangle} \right|^2 = 0 \quad (8.25a)$$

$$\begin{aligned} W(D_F) &\stackrel{(8.24b)}{=} \frac{1}{4} \left| -i \underbrace{\langle D_F || F_A \rangle}_{=\langle D_F || F_A \rangle} - i \underbrace{\langle D_F || F_B \rangle}_{=\langle D_F || F_B \rangle} \right|^2 = \\ &= \frac{1}{4} \underbrace{|-i|^2}_1 \underbrace{|2|^2}_4 \underbrace{|\langle D_F || F_A \rangle|^2}_1 = 1 \end{aligned} \quad (8.25b)$$

$$W(D_A) \stackrel{(8.24c)}{=} 0 \quad (8.25c)$$

falls der Detektor  $D_A$  den Lichtweg A blockiert:

$$W(D_H) \stackrel{(8.24a)}{=} \frac{1}{4} \underbrace{|-1|^2}_1 \underbrace{|\langle D_H || H_B \rangle|^2}_1 = \frac{1}{4} \quad (8.25d)$$

$$W(D_F) \stackrel{(8.24b)}{=} \frac{1}{4} \underbrace{|-i|^2}_1 \underbrace{|\langle D_F || F_B \rangle|^2}_1 = \frac{1}{4} \quad (8.25e)$$

$$W(D_A) \stackrel{(8.24c)}{=} \frac{1}{4} \underbrace{|\sqrt{2}|^2}_2 \underbrace{|\langle D_A || A, D_A \rangle|^2}_1 = \frac{1}{2} \quad (8.25f)$$

Im Zustand  $|H_B\rangle$  wurde das Photon an beiden Strahlteilern reflektiert, während es im Zustand  $|H_A\rangle$  an beiden Strahlteilern

transmittiert wurde. Deshalb gibt es zwischen diesen beiden Zustandsvektoren einen Phasenversatz von einer halben Wellenlänge (destruktive Interferenz), die Ursache des Faktors  $-1$  in (8.25a) ist, vergleiche (A.14).

Im Zustand  $|F_B\rangle$  wurde das Photon am ersten Strahlteiler reflektiert und am zweiten Strahlteiler transmittiert, während es im Zustand  $|F_A\rangle$  am ersten Strahlteiler transmittiert und am zweiten Strahlteiler reflektiert wurde. Deshalb sind diese beiden Zustandsvektoren in Phase (konstruktive Interferenz), beide haben in (8.25b) wegen der einmaligen Reflektion den Phasenfaktor  $-i$ , vergleiche (A.14).

Man kann die quantentheoretische Beschreibung als Argument für die Interpretation **J** verstehen: Zwar kommt im Fall  $c_1 = 1, c_2 = 0$  (d. h. wenn der Lichtweg A durch ein Hindernis blockiert ist) in

$$W(D_H) \stackrel{(8.25d)}{=} \frac{1}{4} \underbrace{|-1|^2}_1 \underbrace{|\langle D_H || H_B \rangle|^2}_1 = \frac{1}{4}$$

nur der Zustandsvektor  $|H_B\rangle$  des Photons vor das über den Weg B zum Detektor  $D_H$  gelangt ist. Aber dieser Ausdruck ist erst dann relevant, wenn das Photon den Detektor  $D_H$  erreicht hat. Vorher ist der Zustandsvektor von Photon<sub>2</sub>

$$|\text{Photon}_2\rangle \stackrel{(8.23)}{=} \sqrt{\frac{1}{2}} |A, D_A\rangle + \frac{1}{2} \left( -i|F_B\rangle - |H_B\rangle \right).$$

In diesem Zustandsvektor ist auch der Zustandsvektor  $|A, D_A\rangle$  des Photons enthalten, das das Hindernis in der Lichtschanke (sprich den Detektor  $D_A$ ) erreicht. Dieser Zustandsvektor legt die Interpretation nahe, dass die Trajektorie von Photon<sub>2</sub> zunächst noch nicht auf den Weg B eingeschränkt ist, sondern sich über beide Arme des Interferometers erstreckt, wie in Abb. 8.14 skizziert.

Man könnte den Namen „wechselwirkungsfreie Lichtschanke“ auch im Rahmen der Interpretation **J** damit rechtfertigen, dass

das Hindernis in der Lichtschranke (der Detektor  $D_A$ ) in einem viertel der Versuchsdurchläufe durch Ansprechen von  $D_H$  eindeutig nachgewiesen wird, ohne dass  $D_A$  anspricht (sogar wenn die Detektoren eine Effizienz von 100 % haben!). Elitzur und Vaidman haben in ihrem Artikel [63] betont, dass sie den Begriff „wechselwirkungsfrei“ nicht im Sinn von „ $D_A$  wird vom Photon nicht berührt“ verstehen, sondern im Sinn von „der Detektor  $D_A$  spricht nicht an, obwohl er als Hindernis bemerkt wird“.

Aber warum spricht  $D_A$  selbst bei 100 %iger Detektor-Effizienz laut (8.25f) nur in der Hälfte der Versuchsdurchläufe an, obwohl laut Interpretation J der aufgespaltene Ort des Photons diesen Detektor in *jedem* Versuchsdurchlauf berührt? Das liegt daran dass nur die Hälfte des Ortes des Photons diesen Detektor berührt, die andere Hälfte befindet sich im Weg B. Ein halber Ort kann einen Detektor auch bei 100 %iger Detektor-Effizienz nur in der Hälfte der Versuchsdurchläufe auslösen.

Bei 100 %iger Detektor-Effizienz addieren sich die Wahrscheinlichkeiten zu Eins:

falls der Detektor  $D_A$  die Lichtschranke blockiert:

$$W(D_H) \stackrel{(8.25d)}{=} \frac{1}{4} \quad , \quad W(D_F) \stackrel{(8.25e)}{=} \frac{1}{4} \quad , \quad W(D_A) \stackrel{(8.25f)}{=} \frac{1}{2}$$

$$W(D_H) + W(D_F) + W(D_A) = 1$$

Demnach ist es unmöglich, dass zwei – oder gar alle drei – Detektoren im gleichen Versuchsdurchlauf ansprechen. Wenn mehr als ein Detektor im gleichen Versuchsdurchlauf ansprechen könnte, dann müsste die Summe der drei Wahrscheinlichkeiten größer als 1 sein. Die Natur kann die Korrelation bzw. Antikorrelation (bei 100 %iger Detektor-Effizienz muss in jedem Versuchsdurchlauf mindestens ein Detektor ansprechen, aber niemals dürfen zwei oder drei Detektoren ansprechen) nur realisieren, indem sie die drei Detektoren nicht-lokal koordiniert. Dass die Natur tatsäch-

lich nicht-lokal agiert, haben wir ja schon bei zahlreichen anderen Quantenphänomenen festgestellt.

## 9 Deutungen

Heisenberg und Schrödinger hatten 1925/26 durch geniales Raten den mathematischen Formalismus gefunden, der Quantenphänomene korrekt beschreibt. Aber nur wenige Physiker waren (und sind) mit einem abstrakten Formalismus restlos zufrieden. Die meisten wünschen sich deutlicher fassbare, anschauliche Erklärungen für die Phänomene. Solche anschaulicheren Erklärungen werden als *Deutungen* der Quantenphänomene bezeichnet.

### 9.1 Die Kopenhagener Deutung

Wir wissen, dass Elektronen keine Teilchen sind. Jedes Interferenz-Experiment mit Elektronen beweist das. Wir wissen auch dass Elektronen keine Wellen sind. Wenn man das Interferenzexperiment mit einem Doppelspalt in der Weise abändert, dass man je einen Detektor dicht hinter beide Spalte stellt, dann registriert immer nur einer der beiden Detektoren das vollständige Elektron. Niemals kommen Teile eines Elektrons an beiden Detektoren an, was doch geschehen müsste wenn das Elektron eine Welle wäre.

Es ist leicht zu sagen, was Elektronen *nicht* sind. Wesentlich schwieriger ist es offenbar, positiv zu sagen was Elektronen und andere Quantenobjekte denn dann sind. Heisenberg und Bohr kamen im Winter 1926/27 zu der Überzeugung dass es nicht nur schwierig, sondern schlichtweg unmöglich ist, positiv zu sagen was Quantenobjekte sind.

Knapp fünf Jahre früher, beim Spaziergang über den Hainberg bei Göttingen im Sommer 1922, hatte Heisenberg gefragt: „wenn

wir eigentlich keine Sprache besitzen, mit der wir über diese Strukturen reden könnten, werden wir dann die Atome überhaupt jemals verstehen?“ Und Bohr hatte geantwortet: „Doch, aber wir werden dabei erst lernen, was das Wort ‚verstehen‘ bedeutet.“ Damit machten die beiden Physiker jetzt ernst. Sie überlegten sich, was das Wort ‚verstehen‘ bei der Analyse von Quantenphänomenen vernünftigerweise bedeuten kann. Das Ergebnis ihrer Überlegungen, das als „Kopenhagener Deutung“ bezeichnet wird, sieht etwa folgendermaßen aus:

Wenn wir sagen dass wir etwas verstanden haben, dann meinen wir dass es uns gelungen ist, eine Brücke zu errichten zwischen dem objektiven Sachverhalt und unserem menschlichen Erkenntnisvermögen. Die Physikalische Theorie ist der formale Ausdruck unserer Erkenntnis. Die Theorie spiegelt einerseits den objektiven Sachverhalt wieder, andererseits die Eigenart menschlichen Denkens. Unser menschliches Denkvermögen wiederum ist nicht unvermittelt vom Himmel gefallen, sondern es hat sich in den vielen, vielen Millionen Jahren unserer Evolution entwickelt. Und es hat sich während dieser Zeit in der Auseinandersetzung mit unserer Umwelt bewährt, sonst wären wir heute nicht hier. Deshalb dürfen wir darauf vertrauen, dass unsere Art zu denken, unser Erkenntnisvermögen, und die Begriffe die wir in dieser langen Zeit entwickelt haben, zumindest diejenigen Phänomene unserer alltäglichen Umgebung gut repräsentieren, die während der Evolution wichtig waren. Die Begriffe der klassischen Physik sind die verfeinerte und präzisierte Form unserer Alltagsbegriffe, aber es sind nicht völlig andere. Nur diese passen in unser Gehirn, wir haben keine anderen, wir werden keine anderen bekommen, und wir müssen zusehen, wie wir aus unseren Denk- und Erkenntnismöglichkeiten das Beste machen.

Wenn man die Begriffe der Klassischen Physik auf Quantenobjekte anwendet, dann versagen sie. Die Selbstinterferenz von Elektronen, beispielsweise, lässt sich nicht in die Begriffe der Klas-

sischen Physik zwingen. Weil Bohr und Heisenberg überzeugt waren, dass andere als die klassischen Begriffe nicht in das Gehirn eines Menschen passen, hätten sie an dieser Stelle eigentlich aufgeben müssen – wenn ihnen nicht ein Trick eingefallen wäre.

Die Begriffe der Klassischen Physik passen zwar nicht auf Quantenobjekte, sie passen aber ausgezeichnet auf einen großen Teil der Welt. Sie passen insbesondere auf die Messgeräte (Detektoren, Spalte, Spiegel, Blenden, usw.), die bei der Beobachtung von Quantenobjekten verwendet werden. Obwohl diese Geräte allesamt aus Atomen bestehen, und deswegen mit den Methoden der Quantentheorie als Riesenmoleküle beschrieben werden könnten, müssen sie – dies ist der entscheidende Trick in der Kopenhagener Deutung – zwingend mit den Methoden und den Begriffen der Klassischen Physik beschrieben werden. Nur dadurch bekommen wir nach Ansicht von Heisenberg und Bohr Werkzeuge in die Hand, mit denen wir eine Analyse der Quantenphänomene versuchen können. Würden wir auch die Messgeräte als Quantenobjekte betrachten, dann würden wir den Ast absägen, auf dem wir sitzen. Dann bliebe kein Ansatzpunkt mehr für unser menschliches Erkenntnisvermögen, dann wären wir völlig hilflos.

In einem Vortrag [66] (dessen Lektüre ich übrigens allen Lesern dieses Buches, die sich aus erster Hand über die Kopenhagener Deutung informieren möchten, nur nachdrücklich empfehlen kann) erklärte Heisenberg 1955:

„Die Begriffe der klassischen Physik sind nur eine Verfeinerung der Begriffe des täglichen Lebens und bilden einen wesentlichen Teil der Sprache, die die Voraussetzung für alle Naturwissenschaften bildet. Unsere wirkliche Lage in der Naturwissenschaft ist so, daß wir tatsächlich die klassischen Begriffe für die Beschreibung unserer Experimente benützen und benützen müssen; denn sonst können wir uns nicht verständigen. Und die Aufgabe der Quantentheorie

bestand eben darin, die Experimente auf dieser Grundlage theoretisch zu deuten. Es hat keinen Sinn, zu erörtern, was getan werden könnte, wenn wir andere Wesen wären, als wir wirklich sind. An dieser Stelle müssen wir uns darüber klar werden, daß, wie v. Weizsäcker es formuliert hat, ‚die Natur früher ist als der Mensch, aber der Mensch früher als die Naturwissenschaft‘. Der erste Teil des Satzes rechtfertigt die klassische Physik mit ihrem Ideal der vollständigen Objektivität. Der zweite Teil erklärt uns, warum wir dem Paradoxon der Quantentheorie nicht entgehen können; warum wir nämlich nicht der Notwendigkeit entgehen können, die klassischen Begriffe zu verwenden.“

Zu Phänomenen<sup>1</sup> werden Quantenobjekte immer nur im Zusammenspiel mit Messgeräten. Gegebenenfalls kann es sich beim klassischen Messgerät auch um ein vordergründig so einfaches Gerät wie das menschliche Auge handeln.<sup>2</sup> Das gesamte Arrangement der Geräte, wie Spiegel, Spalte, Detektoren und so weiter, gehört untrennbar zum Quantenphänomen, genauso wie die Atome, Photonen und anderen Quantenobjekte, die sich in diesem Arrangement bewegen, und deren Existenz nur (!) mithilfe dieses Arrangements zur Kenntnis des Experimentators gelangt. Niemals hat ein Physiker es mit einem isolierten Quantenobjekt zu tun, immer und ausnahmslos sind Quantenobjekte in einen klassisch beschreibbaren Rahmen eingebettet, und werden nur dadurch zu Quantenphänomenen. Ohne diesen Rahmen wären sie eben keine Phänomene, und die Physik hätte keinen Anlass sich mit einem Quantenobjekt zu befassen, das nur phantasiert aber nicht beobachtet wird.

Wenn die Apparatur so aufgebaut wurde, dass ein Elektron

---

<sup>1</sup> Das griechische Wort „Phänomen“ bedeutet das „Erscheinende“ oder das „Sichtbare“.

<sup>2</sup> 2016 konnte erstmals nachgewiesen werden, dass ein gut adaptiertes menschliches Auge tatsächlich einzelne Photonen wahrnehmen kann. [67]

mit sich selbst interferiert, dann darf man es sich laut Kopenhagener Deutung als Welle vorstellen, und alle Begriffe verwenden, welche die Klassische Physik für Wellen entwickelt hat. Wenn es mit einem Teilchendetektor beobachtet wird, dann darf man es sich als Teilchen vorstellen, und alle Begriffe verwenden, welche die Klassische Physik für Teilchen entwickelt hat. In Heisenbergs Unbestimmtheitsrelation (8.1) kommt zum Ausdruck, dass dabei niemals Widersprüche auftreten können. Denn es ist unmöglich eine Apparatur zu konstruieren, die ein Quantenobjekt gleichzeitig als Teilchen mit präzise definiertem Ort ( $\Delta x \approx 0$ ) und als Welle mit präzise definierter Wellenlänge ( $\Delta p \stackrel{(4.2b)}{=} \Delta(h/\lambda) \approx 0$ ) erschafft. Nacheinander geht das schon: Im Experiment von Thorn et. al. wird das Photon zunächst als Welle erschaffen die sich am Strahlteiler aufspaltet. Anschließend wird es vom Detektor in ein Teilchen mit scharf definiertem Ort umgewandelt, siehe Abb. 3.10 auf Seite 71. Nacheinander geht das, aber eben nicht gleichzeitig.

Das in Abb. 9.1 dargestellte Unding soll diesen Gedanken illustrieren. Natürlich können wir den Begriff „Rohlken“ für dieses Unding definieren. Dann hat es einen Namen, aber was hilft uns das? Der Name macht es nicht weniger absurd. Wenn die Zeichnung aber so abgedeckt wird, dass nur der rechte Teil sichtbar ist, dann nimmt der Rohlken die Gestalt von drei vernünftigen Rohren an. Wenn nur der linke Teil sichtbar ist, dann nimmt der Rohlken die Gestalt von zwei vernünftigen Balken an.

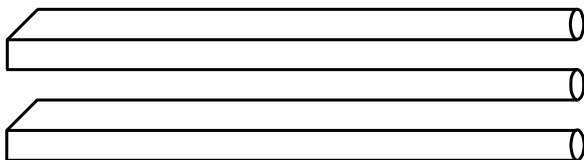


Abb. 9.1: Drei Rohre? Zwei Balken? Ein Rohlken!

Auch für die absurden Quantenobjekte haben wir Namen, z. B. „Elektron“ oder „Photon“ oder „Atom“. Diese Namen helfen uns so wenig wie der Name Rohlken. Um mit Elektronen oder Photonen oder Atomen „vernünftige“ Vorstellungen verknüpfen zu können, müssen wir sie in geeigneter Weise betrachten. Für die Betrachtung „in geeigneter Weise“ sorgen die Messgeräte automatisch, indem sie diesen Objekten entweder die Eigenschaften von Wellen oder die Eigenschaften von Teilchen aufprägen. Nach Heisenbergs Unbestimmtheitsrelation (8.1) können die Messgeräte entweder einen präzise definierten Ort des Quantenobjekts ( $\Delta x \approx 0$ ) erschaffen; dann hat es die Eigenschaften eines Teilchens. Oder sie können einen präzise definierten Impuls des Quantenobjekts – und damit zugleich eine präzise definierte Wellenlänge – des Quantenobjekts ( $\Delta p \stackrel{(4.2b)}{=} \Delta(h/\lambda) \approx 0$ ) erschaffen; dann hat es die Eigenschaften einer Welle. Aber nicht beides gleichzeitig.

Bohr betonte deshalb zeitlebens, dass Begriffe wie Welle und Teilchen bei der Beschreibung von Quantenphänomenen nicht widersprüchlich sondern *komplementär* seien. Nur durch die Kombination komplementärer Bilder und Begriffe, so sein *Credo*, können Menschen ihre evolutionsbedingt beschränkten Erkenntnismöglichkeiten so erweitern, dass sie die Quantenphänomene eben doch vollständig erfassen können.

Wenn man sich die klassische Apparatur wegdenkt und über das Wesen eines Elektrons philosophiert und wissen möchte, was denn das Elektron „an sich“ ist, dann steht man vor einem rätselhaften Mysterium. Das ist aber nach Ansicht von Heisenberg und Bohr eine unphysikalische Frage, denn ein Elektron, das nicht in eine klassische Apparatur eingebettet ist, kann kein Objekt physikalischer Beobachtung sein. Nur ein isoliertes Quantenobjekt ohne klassischen Rahmen müsste uns wohl unverständlich erscheinen. Aber alle beobachteten Quantenphänomene kann man eben wegen ihrer Beobachtbarkeit und im klassischen Rahmen, der ihre

Beobachtbarkeit bewirkt, auch verstehen.

Quantenphänomene müssen laut Kopenhagener Deutung grundsätzlich und immer ganzheitlich betrachtet werden (als *individuelle* Phänomene), einschließlich aller Apparate und Messgeräte. Wenn man Fragen stellt wie „ist ein Elektron eine Welle oder ein Teilchen?“ oder „wird ein Photon an einem Strahlteiler aufgespalten, oder entscheidet es sich für die eine oder die andere Richtung?“, ohne auf den gesamten experimentellen Aufbau Bezug zu nehmen und ihn in die Beschreibung einzubeziehen, dann landet man schnell in einem Sumpf von verwirrenden Absurditäten. Sobald man aber anerkennt, dass wir nur über Quantenphänomene als Ganzes sinnvoll sprechen können, lösen sich schlagartig alle scheinbaren Widersprüche.

Der klassisch beschriebene Rahmen, in den die Atome, Elektronen und Photonen eingebettet sind, ist ein integraler, nicht abtrennbarer Bestandteil jedes Quantenphänomens, in der Sprache des Aristoteles die „Form“ des Phänomens.<sup>3</sup> Darin kann man eine glückliche **Koinzidenz** erkennen: Alles, was wir beobachten können, das können wir auch verstehen. Und alles, was wir verstehen können, das können wir auch beobachten. In beiden Richtungen ist es der klassische Rahmen der Quantenphänomene, sprich die klassisch beschriebenen Messgeräte, welche die Beobachtbarkeit und die Verstehbarkeit der Quantenphänomene bewirken.

Ein Phänomen ohne Form ist ein genauso undenkbares Unding wie eine Medaille mit nur einer Seite. So etwas passt nicht in ein menschliches Gehirn, und es ist nach Ansicht von Bohr und Heisenberg auch kein vernünftiges Ziel, nach der Erkenntnis einer einseitigen Medaille oder einem Verständnis von Atomen, Elektronen, oder Photonen ohne klassischen Rahmen zu streben. Die individuellen Quantenphänomene sind die kleinsten Einheiten, mit denen wir

---

<sup>3</sup> Einen Essay über den Einfluss der Philosophie des Aristoteles auf die Kopenhagener Deutung der Quantenphänomene findet man hier: [68]

uns sinnvoll befassen können. Jede weitere gedankliche Aufspaltung unserer Forschungsobjekte führt laut Kopenhagener Deutung nicht zu weiterer Einsicht, sondern nur zu nutzloser Verwirrung.

Soweit ich die Kopenhagener Deutung bis hierher beschrieben habe erscheint es so, als ob die Klassische Beschreibung der Messgeräte nur ein Notbehelf wäre, eine Krücke, auf die Menschen aufgrund ihrer evolutionsbedingt beschränkten Erkenntnismöglichkeiten angewiesen sind. In seinem eben bereits zitierten Vortrag [66] aus dem Jahr 1955 führt Heisenberg aber auch ein positives Argument dafür an, dass die klassische Beschreibung der Messgeräte tatsächlich dem Sachverhalt besser angemessen ist als eine quantentheoretische Beschreibung von Messgeräten. Die Erklärung dieses Arguments, das in der physikalischen Diskussion unter dem Stichwort „Dekohärenz“ abgehandelt wird, werde ich in Abschnitt 9.4 nachholen.

In dem gleichen Vortrag [66] beschäftigt Heisenberg sich auch mit der Frage, ob bzw. in wieweit die Quantentheorie denn noch dem Ideal der Objektivität in der Wissenschaft entspricht. Denn man beobachtet bei der Untersuchung von Quantenphänomenen ja niemals die Natur „an sich“, sondern die Natur die – durch die vom Experimentator willkürlich getroffene Wahl von Art und Aufbau der Messinstrumente – unserer jeweiligen Fragestellung ausgesetzt ist. Die Messinstrumente stellen (in der Regel) nicht einfach fest was ohnehin schon der Fall war, sondern sie erschaffen die Wirklichkeit, die wir mit ihrer Hilfe feststellen. Heisenberg kommt zum Ergebnis, dass die Quantentheorie dem Ideal der Objektivität „so weit wie möglich“ entspricht, und das heißt im Klartext: Von diesem Ideal bleibt nicht viel übrig. Es ist nun mal unmöglich die Natur zu beobachten ohne sie zu beobachten. Bohr kleidete das gerne in die blumige Formulierung, dass wir „im Schauspiel des Lebens stets gleichzeitig Zuschauer und Mitwirkende sind.“

Man versteht die eigenartige Bedeutung, die Messungen für

Quantenphänomene spielen, wenn man sich überlegt welche Rollen Musiker und Zuhörer beim Phänomen der Musik spielen. Die Zuhörer entsprechen der Vorstellung, die sich die Klassische Physik von Messinstrumenten macht. Sie registrieren alles genau, ohne merklich auf das gemessene Objekt zurückzuwirken. Wenn man aber die Musik als Analogon für Quantenphänomene betrachtet, dann muss man die Musiker, und nicht die Zuhörer, als „Messinstrumente“ bezeichnen. Denn die Messinstrumente üben eine deutliche und nicht vernachlässigbare Wirkung aus, die das Erscheinungsbild des Quantenphänomens prägt, so wie die Musiker die Erscheinungsweise der Musik prägen.

Wenn die Musiker eines Streichquartetts beim Pizzicato die Bögen beiseite legen und die Saiten mit den Fingern zupfen, dann klingt die Musik auf einmal ganz anders. Trotzdem verlangt natürlich niemand, dass endlich einmal objektiv festgestellt werden möge, wie denn die „wahre“ oder „eigentliche“ Musik „an sich“ klingt, wenn sie weder durch die Erzeugung mithilfe von Geigenbögen noch durch die Erzeugung per Zupfen mit den Fingern geprägt wird. Denn die Musik entsteht ja überhaupt erst durch das Zusammenwirken von Musikinstrumenten und Bögen und Fingern der Musiker, und es wäre ganz sinnlos von Musik ohne diese Voraussetzungen zu sprechen. Genau so sinnlos wäre es laut Kopenhagener Deutung der Quantenphänomene zu fragen, welche Eigenschaften Elektronen oder andere Quantenobjekte denn „objektiv“ und „an sich“ haben, wenn ihnen nicht die Eigenschaften von Wellen oder Teilchen durch die Anwendung entsprechend konstruierter Messgeräte aufgeprägt werden.

Interessanterweise gibt es auch im Rahmen der Klassischen Physik Phänomene, die erst durch die Beobachtung erzeugt werden, und ohne Beobachtung nicht existieren. Ein bekanntes Beispiel ist der Regenbogen. Der objektive Tatbestand ist, dass Sonnenlicht in einen Regenschauer eingestrahlt wird, an jedem einzelnen Trop-

fen – je nach Einfallswinkel – gebrochen, in seine verschiedenen Farben zerlegt, und teilweise reflektiert wird. Sämtliche Farben werden mehr oder weniger gleichmäßig in sämtliche Richtungen gestreut. Ein „Bogen“ kommt in einer objektiven, vollständigen Beschreibung des Sachverhalts überhaupt nicht vor.

Ein Bogen entsteht erst dadurch, dass ein Beobachter von seinem Standpunkt aus selektiv nur einen winzigen Teil des Streulichts wahrnimmt. Und vom Standpunkt des Beobachters hängt es auch ab, an welchen Punkten der Erdoberfläche sich die Fußpunkte des Regenbogens befinden. Ein anderer Beobachter, der ein paar hundert Meter entfernt ist, sieht auch einen Regenbogen. Aber man kann eigentlich nicht sagen, dass es sich um den gleichen Regenbogen handelt, und auf jeden Fall sehen die beiden Beobachter die Fußpunkte ihrer jeweiligen Bögen an unterschiedlichen Stellen der Erdoberfläche. Wenn kein Beobachter da ist und hinschaut, dann können Sonne und Regentropfen sich anstrengen soviel sie wollen, sie bringen keinen Regenbogen zustande.<sup>4</sup>

Dennoch ist der Regenbogen ein rein klassisches Phänomen, weil man bis ins letzte Detail analysieren kann, was der objektive, von der Beobachtung unabhängige Sachverhalt ist – nämlich die Brechung des Sonnenlichts, und seine mehr oder weniger gleichmäßige Streuung in alle Richtungen –, und welche Eigenschaften durch die Beobachtung erzeugt werden – nämlich die Form eines Bogens, und die Position seiner Fußpunkte.

Dagegen ist es charakteristisch für Quantenphänomene, dass bei

---

<sup>4</sup> Auf Seite 206 habe ich aus Pais' Bericht zitiert: "Einstein suddenly stopped, turned to me and asked whether I really believed that the moon exists only when I look at it." [55, page 907] Wenn Pais in diesem Moment geantwortet hätte: "But remember the rainbow. This phenomenon only exists if somebody is looking at it.", dann hätte Einstein vielleicht doch anerkannt, dass manche Eigenschaften beobachteter Objekte – wie zum Beispiel die Bogen-Form eines Regenbogens oder der Ort eines Atoms – nicht vollkommen unabhängig von der Art der Beobachtung sind, und demzufolge auch nicht vollständig unabhängig von der Tatsache, dass sie beobachtet werden, existieren.

ihnen eine klare Unterscheidung zwischen objektivem Sachverhalt und Einwirkung des Beobachters bzw. der Messgeräte niemals möglich ist. Genau deshalb enthält der Zustandsvektor stets eine untrennbare Mischung von beidem. Es gibt unter Physikern eine bis heute andauernde Diskussion, ob eine vernünftige Theorie nicht wenigstens eine klare Trennung zwischen „objektiven“ und „subjektiven“ (durch die Beobachtung erzeugten) Aspekten der Phänomene ermöglichen sollte. Nach Ansicht von Heisenberg und Bohr ergibt sich die untrennbare Vermischung objektiver und subjektiver Bestandteile im Zustandsvektor jedoch aus der Natur der Sache, und ist absolut unvermeidlich.

## 9.2 John v. Neumanns Kollaps

Als [heuristisch](#) werden Methoden bezeichnet, bei denen man auf zweifelhaften oder gar fehlerhaften Wegen schließlich doch zur richtigen Lösung gelangt. Die heuristischen Tricks genialer Theoretischer Physiker haben zu jeder Zeit bei seriösen Mathematikern Missfallen erregt. Nicht anders war es bei der Entwicklung der jungen Quantentheorie. Was Heisenberg, Jordan, Dirac, Schrödinger, Pauli da im Lauf weniger Jahre hingezaubert hatten, schrie förmlich nach Konsolidierung durch einen mathematischen Fachmann.

Dieser Aufgabe widmete sich John<sup>5</sup> v. Neumann (1903–1957), nicht weniger genial begabt<sup>6</sup> als die zuvor genannten, aber eben kein Physiker sondern ein Mathematiker. 1932 veröffentlichte er sein Buch „Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik“ [69], das für viele Jahre das weltweit anerkannte Standardwerk dieses

---

<sup>5</sup> In seiner Jugend in Budapest hieß er János, während seines Studiums in der Schweiz und in Deutschland nannte er sich Johann. Den Vornamen John nahm er in den USA an, wo er zu einem bedeutenden Pionier der jungen Computertechnik wurde.

<sup>6</sup> Angeblich verblüffte der sechsjährige János seine Familie damit, dass er mit hoher Geschwindigkeit achtstellige Zahlen im Kopf dividieren konnte.

Gebiets blieb.

Von Neumann arbeitete die mathematische Struktur der Theorie aus, brauchte aber an den Ergebnissen der Physiker nicht viel zu korrigieren. Trotz zuweilen dubioser Methoden<sup>7</sup> hatten die Physiker im Wesentlichen alles richtig erraten. Nur an einem Punkt beschriftet v. Neumann völlig neue Wege: Das war beim Thema der Messung.

Heisenberg und Bohr hatten in ihrer Kopenhagener Deutung darauf bestanden, dass Messgeräte mit den Methoden der klassischen Physik beschrieben werden müssen. Das leuchtete v. Neumann überhaupt nicht ein. Schließlich bestehen auch Messgeräte aus Atomen, also sollte die Quantentheorie sie konsequenterweise als Riesenmoleküle beschreiben, zumindest im Prinzip.

In Gleichung (5.17) wurde der Zustandsvektor eines Neutrons angegeben, das nach der Durchquerung eines Doppelspalts einen Detektor erreicht, der den Ort des Neutrons an einer von 87 möglichen Positionen lokalisiert:

$$|\text{Neutron}\rangle \stackrel{(5.17)}{=} \sum_{j=1}^{87} |x_j\rangle \underbrace{\left( l \langle x_j || S_{2l} \rangle + r \langle x_j || S_{2r} \rangle \right)}_{c_j} \quad (9.1)$$

Hier wurde für die Projektionsamplituden die Abkürzung  $c_j$  eingeführt. Das Summationszeichen  $\sum$  wurde unterhalb von Gleichung (5.17) erklärt. Die Vektoren  $|x_j\rangle$  sind die 87 Eigenvektoren des Detektors. Wenn der Detektor beispielsweise an der Position  $x_{31}$  anspricht, dann präpariert er das Neutron im Zustand  $|x_{31}\rangle$ , d. h. er lokalisiert es an der Position  $x_{31}$ . Die Wahrscheinlichkeit  $W(x_{31})$

<sup>7</sup> für Physiker: Besonders Diracs Delta-Funktion verstörte die Mathematiker nachhaltig. Die mathematische Rechtfertigung dieser „uneigentlichen“ Funktion gelang den Mathematikern erst zwei Jahrzehnte später im Rahmen der Theorie der Distributionen. J. v. Neumann erwähnt die Delta-Funktion in seinem Buch nur ein einziges mal, nämlich in der Einleitung. Dort merkt er an, dass man die Quantentheorie auch ohne diese seltsame Konstruktion formulieren kann, und das tut er dann auch konsequent.

dafür, dass dies geschieht, ist nach der Born'schen Regel (5.19b) gleich dem Betragsquadrat der Projektionsamplitude des Zustandsvektors  $|\text{Neutron}\rangle$  auf den Eigenvektor  $|x_{31}\rangle$  des Messgeräts:

$$W(x_{31}) \stackrel{(5.18)}{=} |c_{31}|^2 = |l \langle x_{31} || S2_l \rangle + r \langle x_{31} || S2_r \rangle|^2 \quad (9.2)$$

Die Zustandsvektoren  $|x_{31}\rangle$  bzw. allgemein  $|x_j\rangle$  beschreiben nicht das Messgerät, sondern sie beschreiben das Neutron, das vom Messgerät in einem dieser Zustände präpariert wird. Für das Messgerät haben wir bisher überhaupt keinen Zustandsvektor definiert, denn es muss ja gemäß der Kopenhagener Deutung mit den Methoden der Klassischen Physik beschrieben werden.

Das machte v. Neumann anders. Er ordnete dem Messgerät, wenn es an der Position  $x_j$  anspricht, den Zustandsvektor  $|M_j\rangle$  zu. Vor der Messung, solange es noch überhaupt nichts registriert hat, ist das Gerät im Zustand  $|M_0\rangle$ . Die Messung läuft dann nach v. Neumanns Vorstellung in zwei Schritten ab. Im ersten Schritt werden die Zustandsvektoren von Messgerät und Objekt (sprich Neutron, in unserem Beispiel) miteinander verschränkt:

$$\left. \begin{array}{l} |\text{Neutron}\rangle \stackrel{(9.1)}{=} \sum_{j=1}^{87} c_j |x_j\rangle \\ |\text{Messgerät}\rangle = |M_0\rangle \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{1. Schritt}} \xrightarrow{\text{1. Schritt}} |\text{Neutron \& Messgerät}\rangle = \sum_{j=1}^{87} c_j |x_j\rangle |M_j\rangle \quad (9.3a)$$

Im allgemeinen sind mehrere oder alle Amplituden  $c_j$  von Null verschieden. Aber kein Mensch hat jemals ein Messgerät beobachtet, das verschiedene Werte  $M_j$  gleichzeitig anzeigt; jedes (korrekt funktionierende) Messgerät zeigt einen eindeutig bestimmten Wert  $M_k$  an. (Im eben genannten Beispiel war  $k=31$ .) Also muss es bei der Messung einen zweiten Schritt geben, in dem der verschränkte Zustandsvektor (9.3a) auf einen bestimmten Wert „kollabiert“:

$$\begin{aligned}
 |\text{Neutron \& Messgerät}\rangle &= \sum_{j=1}^{87} c_j |x_j\rangle |M_j\rangle \xrightarrow{\text{2. Schritt}} \\
 &\xrightarrow{\text{2. Schritt}} |x_k\rangle |M_k\rangle
 \end{aligned} \tag{9.3b}$$

Oft wird der 2. Schritt auch anhand der Projektionsamplituden formuliert:

$$c_j \xrightarrow{\text{2. Schritt}} \begin{cases} c_j = 1 \text{ falls } j = k \\ c_j = 0 \text{ falls } j \neq k \end{cases}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der verschränkte Zustandsvektor (9.3a) gerade auf den Vektor  $|x_k\rangle |M_k\rangle$  kollabiert, aber nicht auf irgend einen anderen Vektor, ist nach der Born'schen Regel

$$W(k) \stackrel{(5.18)}{=} |c_k|^2.$$

Im Beispiel (9.2) war  $k=31$ .

Aber warum tritt der Kollaps überhaupt auf? Was ist bei Messgeräten grundlegend anders als bei anderen Molekülen, bei denen kein Kollaps auftritt? v. Neumanns Antwort: An Messgeräten ist überhaupt nichts anders als an anderen Molekülen. (9.3b) ist nur eine abkürzende Schreibweise für einen viel komplizierteren Vorgang, der tatsächlich folgendermaßen abläuft. Nachdem im ersten Schritt

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned} |\text{Neutron}\rangle &\stackrel{(9.1)}{=} \sum_{j=1}^{87} c_j |x_j\rangle \\ |\text{Messgerät}\rangle &= |M_0\rangle \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{1. Schritt}} \\
 & \xrightarrow{\text{1. Schritt}} |\text{Neutron \& Messgerät}\rangle = \sum_{j=1}^{87} c_j |x_j\rangle |M_j\rangle
 \end{aligned} \tag{9.4a}$$

Neutron und Messgerät miteinander verschränkt wurden, blickt der Experimentator auf das Display des Geräts. Dabei entsteht

auf der Netzhaut seines Auges ein Abbild des Displays. Auch die Netzhaut wird, weil sie aus Atomen besteht, mithilfe der Quantentheorie beschrieben. Ihre Eigenvektoren nennen wir  $|N_j\rangle$ . Bevor der Experimentator aufs Display schaut, ist die Netzhaut seiner Augen im Zustand  $|N_0\rangle$ . Dadurch, dass auf der Netzhaut das Abbild des Displays erscheint, werden Display und Netzhaut miteinander verschränkt:

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{array}{l} |\text{Neutron \& Messgerät}\rangle \stackrel{(9.4a)}{=} \sum_{j=1}^{87} c_j |x_j\rangle |M_j\rangle \\ |\text{Netzhaut}\rangle = |N_0\rangle \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{1. Schritt}} \\
 & \xrightarrow{\text{1. Schritt}} |\text{Neutron \& Messgerät \& Netzhaut}\rangle = \\
 & \qquad \qquad \qquad = \sum_{j=1}^{87} c_j |x_j\rangle |M_j\rangle |N_j\rangle \quad (9.4b)
 \end{aligned}$$

Auch für einen Kollaps des Netzhaut-Zustandsvektors gibt es nach v. Neumanns Ansicht keinen Grund. Vielmehr wird der Netzhaut-Zustand durch Nerven ins Gehirn übertragen. Auch das Gehirn wird, weil es aus Atomen besteht, quantentheoretisch beschrieben. Die Zustandsvektoren des Bewusstseins des Experimentators nennen wir  $|B_j\rangle$ . Bevor die nervösen Signale seiner Netzhaut sein Bewusstsein erreichen, ist das Bewusstsein im Zustand  $|B_0\rangle$ . Wenn das Bewusstsein den Zustand der Netzhaut wahrnimmt, wird sein Zustandsvektor mit dem Zustandsvektor der Netzhaut verschränkt:

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{array}{l} |\text{Neutron \& Messgerät \& Netzhaut}\rangle \stackrel{(9.4b)}{=} \sum_{j=1}^{87} c_j |x_j\rangle |M_j\rangle |N_j\rangle \\ |\text{Bewusstsein}\rangle = |B_0\rangle \end{array} \right\} \\
 & \xrightarrow{\text{1. Schritt}} |\text{Neutron \& Messgerät \& Netzhaut \& Bewusstsein}\rangle = \\
 & \qquad \qquad \qquad = \sum_{j=1}^{87} c_j |x_j\rangle |M_j\rangle |N_j\rangle |B_j\rangle \quad (9.4c)
 \end{aligned}$$

Beim Bewusstsein endet nach v. Neumanns Überzeugung die Kette der Verschränkungen. Jetzt tritt der Kollaps

$$\begin{aligned} & |\text{Neutron \& Messgerät \& Netzhaut \& Bewusstsein}\rangle \stackrel{(9.4c)}{=} \\ & = \sum_{j=1}^{87} c_j |x_j\rangle |M_j\rangle |N_j\rangle |B_j\rangle \xrightarrow{2. \text{ Schritt}} \\ & \xrightarrow{2. \text{ Schritt}} |x_k\rangle |M_k\rangle |N_k\rangle |B_k\rangle \end{aligned} \quad (9.4d)$$

ein, was auch als

$$c_j \xrightarrow{2. \text{ Schritt}} \begin{cases} c_j = 1 \text{ falls } j = k \\ c_j = 0 \text{ falls } j \neq k \end{cases}$$

geschrieben werden kann. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der verschränkte Zustandsvektor (9.4c) nicht auf irgend einen anderen Vektor sondern gerade auf  $|x_k\rangle |M_k\rangle |N_k\rangle |B_k\rangle$  kollabiert, ist nach der Born'schen Regel

$$W(k) \stackrel{(5.18)}{=} |c_k|^2.$$

Der Kollaps (9.3b) ist laut v. Neumann nur eine abkürzende Schreibweise für den tatsächlichen Kollaps (9.4d).

Der Kollaps tritt laut v. Neumann also beim Bewusstsein auf. Wieso gerade dort? Um das zu erklären stellt v. Neumann fest, „daß das Messen, bzw. der damit verknüpfte Vorgang der subjektiven Apperzeption<sup>8</sup> eine gegenüber der physikalischen Umwelt neue, auf diese nicht zurückführbare Wesenheit ist. [...] Trotzdem ist es aber eine für die naturwissenschaftliche Weltanschauung fundamentale Forderung, das sog. Prinzip vom psychophysikalischen Parallelismus, daß es möglich sein muss, den in Wahrheit außerphysikalischen Vorgang der subjektiven Apperzeption<sup>8</sup> so

<sup>8</sup> Apperzeption = Wahrnehmung

zu beschreiben, als ob er in der physikalischen Welt stattfände – d. h. ihren Teilen physikalische Vorgänge in der objektiven Umwelt, im gewöhnlichen Raume, zuzuordnen.“ [69, Seite 223]

Versuchen wir, v. Neumanns Sätze in eine klare Sprache zu übersetzen: Die Messung und ihr Resultat (in unserem Beispiel: das Neutron wird an der Position  $x_{31}$  detektiert) ist etwas, das in der „physikalischen Umwelt“ geschieht. Aber die Wahrnehmung des Resultats durch den Experimentator, sprich der Vorgang in seinem Bewusstsein, ist „eine gegenüber der physikalischen Umwelt neue, auf diese nicht zurückführbare Wesenheit“. Im Bewusstsein findet der Kollaps statt. Und das Bewusstsein findet laut v. Neumann außerhalb der naturwissenschaftlich fassbaren Welt statt, die Gesetze der Physik sind auf das Bewusstsein nicht anwendbar.

Weil es aber nach dem „Prinzip vom psychophysikalischen Parallelismus“ möglich sein muss das Bewusstsein dennoch so zu beschreiben, *als ob* es in der physikalischen Welt stattfände, ordnet v. Neumann ihm die Zustandsvektoren  $|B_j\rangle$  zu. Es ist eine Erfahrungstatsache, dass kein Experimentator jemals ein korrekt funktionierendes Messgerät im „unentschiedenen“ Zustand  $\sum_j c_j |M_j\rangle$  wahrgenommen hat, sondern immer in einem bestimmten Zustand  $|M_k\rangle$ . v. Neumann kleidet das in die Worte: „Die Erfahrung macht nur Aussagen von diesem Typus: ein Beobachter hat eine bestimmte (subjektive) Wahrnehmung gemacht, und nie eine solche: eine physikalische Größe hat einen bestimmten Wert.“ [69, Seite 224] Auf deutsch: Man muss einfach hinnehmen dass es nun mal so ist wie es ist. Das Bewusstsein bringt – wie auch immer – verschränkte Zustandsvektoren zum Kollaps. Erklären kann man das nicht, weil das Bewusstsein außerhalb der Reichweite physikalischer Gesetze liegt.

Sind die Gesetze der Physik wirklich nicht auf das Bewusstsein anwendbar?

### 9.3 Viele Welten

Hugh Everett (1930–1982) und Bryce Seligman DeWitt (1923–2004) arbeiteten in den fünfziger und sechziger Jahren des vorigen Jahrhunderts eine Interpretation der Quantenphänomene aus, in der auch das Bewusstsein als Teil der physikalisch fassbaren Welt betrachtet wird. Außerdem nahmen sie an, dass *alle* Bestandteile der Welt, auch Messgeräte, Menschen, und deren Bewusstsein, mit den Methoden der Quantentheorie beschrieben werden müssen.

Folglich gelangten sie zu dem Schluss, dass beim Beispiel der Ortsmessung eines Neutrons, das bereits im vorigen Abschnitt benutzt wurde, nacheinander die Zustandsvektoren des Neutrons, des Messgeräts, und so weiter, und schließlich der Zustandsvektor des Bewusstseins des Experimentators miteinander verschränkt werden:

$$\left. \begin{array}{l} |\text{Neutron}\rangle = \sum_{j=1}^{87} c_j |x_j\rangle \\ |\text{Messgerät}\rangle = |M_0\rangle \\ |\text{Netzhaut}\rangle = |N_0\rangle \\ |\text{Bewusstsein}\rangle = |B_0\rangle \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{1. Schritt}}$$

$$\xrightarrow{\text{1. Schritt}} |\text{Neutron \& Messgerät \& Netzhaut \& Bewusstsein}\rangle = \sum_{j=1}^{87} c_j |x_j\rangle |M_j\rangle |N_j\rangle |B_j\rangle \quad (9.5)$$

v. Neumann hatte angenommen, dass das Bewusstsein nicht Teil der physikalischen Welt ist, hatte ihm aber gemäß seines „Prinzips des psychophysikalischen Parallelismus“ Zustandsvektoren  $|B_j\rangle$  zugeschrieben *als ob* das Bewusstsein ein Bestandteil der physikalischen Welt wäre. Nach der Betrachtungsweise von Everett und DeWitt ist das Bewusstsein dagegen ein ganz normaler Bestandteil der physikalischen Welt, genau so wie Neutronen, Atome, und

Messgeräte.

Das hat den Vorteil, dass Everett und DeWitt sich den obskuren „psychophysikalischen Parallelismus“ sparen konnten. Aber es hat den Nachteil, dass sie nun eine plausible Erklärung dafür finden mussten dass der Experimentator, wenn er auf das Display des Messinstruments schaut, einen ganz bestimmten Messwert  $M_k$  wahrnimmt, aber nicht eine diffuse Überlagerung  $\sum_j c_j M_j$  unterschiedlicher Messwerte. Gibt es einen Kollaps des verschränkten Zustandsvektors (9.5)? Wann und warum?

Everett und DeWitt präsentierten eine verblüffende Antwort: Sie postulierten, dass der Zustandsvektor des Bewusstseins genau so wenig kollabiert wie die Zustandsvektoren von Neutronen, Atomen, und Messgeräten. In ihrer Interpretation gibt es überhaupt nie und nirgends einen Kollaps von Zustandsvektoren.

Warum sieht man dann einen ganz bestimmten Messwert, und nicht eine Überlagerung verschiedener Messwerte? Man nimmt tatsächlich verschiedene Messwerte wahr, so die Antwort von Everett und DeWitt, aber man nimmt sie mit unterschiedlichen Komponenten seines Bewusstseins wahr, die nicht miteinander kommunizieren können. Mit der Komponente  $B_1$  seines Bewusstseins nimmt der Experimentator das Messergebnis  $M_1$  wahr, mit der Komponente  $B_2$  seines Bewusstseins nimmt er das Ergebnis  $M_2$  wahr, und so weiter, und mit der Komponente  $B_{87}$  seines Bewusstseins nimmt er das Ergebnis  $M_{87}$  wahr.

Wenn ich mit der Komponente  $B_{12}$  meines Bewusstseins das Ergebnis  $M_{12}$  wahrnehme, warum fällt mir dann nicht auf, dass die Komponente  $B_{53}$  meines Bewusstseins das Ergebnis  $M_{53}$  wahrnimmt, das vom Ergebnis  $M_{12}$  verschieden ist? Damit verschiedene Bewusstseinskomponenten etwas voneinander erfahren können, müssen sie miteinander kommunizieren. In der Quantentheorie beschreibt man die Kommunikation zwischen den Bewusstseinskomponenten  $B_{12}$  und  $B_{53}$  dadurch, dass man in die Projektions-

amplitude von  $|B_{12}\rangle$  auf  $|B_{53}\rangle$  eine bestimmte Funktion  $K$  einfügt:

$$\text{Kommunikation} = \langle B_{53} | K | B_{12} \rangle \stackrel{?}{\neq} 0 \quad (9.6a)$$

Nur wenn diese Projektionsamplitude von Null verschieden ist, kann Kommunikation stattfinden. Wenn diese Projektionsamplitude gleich Null ist, dann ist Kommunikation zwischen meinen Bewusstseinskomponenten  $B_{12}$  und  $B_{53}$  unmöglich.

Jetzt müssen wir uns daran erinnern, dass (9.6a) unvollständig ist. Die Zustandsvektoren  $B_{12}$  und  $B_{53}$  meines Bewusstseins haben ja keine eigenständige Existenz, sondern sie existieren nur als Bestandteile des verschränkten Zustandsvektors |9.5). Also müssen wir anstelle von (9.6a) die vollständige Projektionsamplitude benutzen:

$$\begin{aligned} \text{Kommunikation} &= \langle 9.5 | K | 9.5 \rangle = \\ &= \sum_{j=1}^{87} \sum_{n=1}^{87} c_j^* c_n \langle B_j | \langle N_j | \langle M_j | \langle x_j | K | x_n \rangle | M_n \rangle | N_n \rangle | B_n \rangle \stackrel{?}{\neq} 0 \end{aligned} \quad (9.6b)$$

Weil der Zustandsvektor (9.5) in dieser Projektionsamplitude zwei mal vorkommt, habe ich in einem von ihnen den Index  $j$  in  $n$  umbenannt, damit man die beiden Vektoren auseinander halten kann.

Die genauere Untersuchung dieser Projektionsamplitude ergibt

$$\langle B_j | \langle N_j | \langle M_j | \langle x_j | K | x_n \rangle | M_n \rangle | N_n \rangle | B_n \rangle \stackrel{\text{FAPP}}{=} 0 \text{ falls } j \neq n . \quad (9.7)$$

Das **Akronym** FAPP wurde von Bell (der auch die Bell'sche Ungleichung entdeckte) eingeführt [70], es bedeutet "for all practical purpose". Damit ist gemeint: Die gemischten Terme mit  $j \neq n$  sind nicht prinzipiell Null; es gibt kein Naturgesetz, das Kommunikation

zwischen Bewusstseinskomponenten ausschließt, die verschiedene Messergebnisse wahrgenommen haben. Aber in der Praxis wird diese Kommunikation trotzdem nicht gelingen. In der Praxis sind in (9.6b) nur Terme mit  $j = n$  von Null verschieden. Jede Bewusstseinskomponente kann nur mit sich selbst kommunizieren, aber nicht mit Bewusstseinskomponenten die andere Messergebnisse wahrgenommen haben. Warum das so ist, werde ich gleich erklären.

(9.7) beschreibt die perfekte **Schizophrenie**. Beim Beispiel mit der Positionsbestimmung des Neutrons werden laut Everett und DeWitt alle 87 möglichen Ergebnisse tatsächlich realisiert: Ein einzelnes Neutron wird an allen 87 Positionen  $x_j$  tatsächlich detektiert, das Messgerät zeigt tatsächlich alle 87 Ergebnisse  $M_j$  gleichzeitig an, auf der Netzhaut des Experimentators werden tatsächlich alle 87 unterschiedlichen Sinneseindrücke  $N_j$  gleichzeitig hervorgerufen, und lösen in seinem Gehirn alle 87 unterschiedlichen Bewusstseinszustände  $B_j$  gleichzeitig aus. Aber dank der perfekten Schizophrenie (9.7) bemerkt er davon nichts, sondern bildet sich mit jeder der 87 Komponenten seines Bewusstseins ein, dass ein eindeutiges Messergebnis eingetreten sei.

Jedes mal, wenn irgend jemand irgend wo irgend ein Ereignis wahrnimmt, spaltete sich die Realität in sämtliche alternativen Verläufe auf, die dieses Ereignis ebenfalls hätte nehmen können, und zwischen diesen alternativen Realitäten, die laut Everett und DeWitt allesamt gleichermaßen real sind, ist keine Kommunikation möglich. Es hat sich eingebürgert, die vielen Realitäten als viele Welten zu bezeichnen, und die Interpretation der Quantenphänomene von Everett und DeWitt als Viele-Welten-Interpretation.

Es ist höchste Zeit, die Begründung für (9.7) nachzuliefern. Zunächst betrachten wir den Fall, dass die Kommunikationsfunktion  $K$  nur auf einige, aber nicht alle, Bestandteile des verschränkten Systems (9.5) wirkt. Nehmen wir z. B. eine Kommunikationsfunk-

tion  $K$ , die nur auf  $|M_n\rangle$ ,  $|N_n\rangle$ , und  $|B_n\rangle$  wirkt, aber nicht auf die Vektoren  $|x_n\rangle$ . Dann kann der Anteil der Vektoren  $|x_j\rangle$  und  $|x_n\rangle$  an der Projektionsamplitude berechnet werden, auch wenn wir die genaue Form von  $K$  gar nicht kennen.

Falls  $K$  nicht auf die Vektoren  $|x_n\rangle$  wirkt:

$$(9.7) = \underbrace{\langle x_j | |x_n\rangle}_{(5.19c)} \langle B_j | \langle N_j | \langle M_j | K | M_n \rangle | N_n \rangle | B_n \rangle \quad (9.8)$$

$$\stackrel{=}{=} \begin{cases} 1 & \text{falls } j = n \\ 0 & \text{falls } j \neq n \end{cases}$$

Weil alle Eigenvektoren eines Messgeräts zueinander orthogonal sind, ist in diesem Fall Kommunikation nur bei  $j = n$  möglich, d. h. jede der 87 Bewusstseinskomponenten kann nur mit sich selbst kommunizieren, aber niemals können zwei Bewusstseinskomponenten, die unterschiedliche Messergebnisse wahrgenommen haben, miteinander kommunizieren.

Das gleiche Ergebnis findet man, wenn  $K$  nicht auf das Messgerät, oder nicht auf die Netzhaut, oder nicht auf das Bewusstsein wirkt, sondern nur auf die anderen Bestandteile des verschränkten Systems (9.5). Denn auch die verschiedenen Zustandsvektoren dieser Teilsysteme sind zueinander orthogonal.

Terme mit  $j \neq n$  in der Projektionsamplitude (9.7) können nur dann von Null verschieden sein, wenn  $K$  gleichzeitig auf *alle* Bestandteile des verschränkten Systems (9.5) in geeigneter Weise wirkt. Es genügt nicht, einfach eine Funktion  $K$  aufs Papier zu schreiben, die diese Bedingung erfüllt.  $K$  ist ja nur der mathematische Repräsentant eines Vorgangs, der tatsächlich „draußen“ real ablaufen soll, z. B. das Senden und Empfangen eines Funksignals, oder der Austausch elektrischer Signale zwischen verschiedenen Neuronen im Gehirn des Beobachters, usw. Man muss also, wenn der Kommunikationsversuch Aussicht auf Erfolg haben soll, ziemlich rabiat ins Gehirn des Beobachters eingreifen. Das

wird der Beobachter wohl kaum überleben.

Deshalb empfiehlt es sich, zunächst den Aufbau des Experiments einfacher zu gestalten. Dazu ersetzen wir den menschlichen Beobachter durch einen möglichst einfach gebauten Computer, der die Resultate der Messungen speichert. Anstelle von (9.5) erhalten wir dann

$$\left. \begin{aligned} |\text{Neutron}\rangle &= \sum_{j=1}^{87} c_j |x_j\rangle \\ |\text{Messgerät}\rangle &= |M_0\rangle \\ |\text{Computer}\rangle &= |C_0\rangle \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{1. Schritt}} \\ \xrightarrow{\text{1. Schritt}} |\text{Neutron \& Messgerät \& Computer}\rangle = \\ = \sum_{j=1}^{87} c_j |x_j\rangle |M_j\rangle |C_j\rangle, \quad (9.9)$$

und anstelle von (9.6b) ergibt sich

$$\begin{aligned} \text{Kommunikation} &= \langle 9.9 | K | 9.9 \rangle = \\ &= \sum_{j=1}^{87} \sum_{n=1}^{87} c_j^* c_n \langle C_j | \langle M_j | \langle x_j | K | x_n \rangle | M_n \rangle | C_n \rangle \stackrel{?}{\neq} 0. \quad (9.10) \end{aligned}$$

Auch dieses verschränkte System ist noch viel zu kompliziert, als dass die Experimentatoren heutzutage fähig wären einen Kommunikationsmechanismus so zu konstruieren, dass in (9.10) irgend ein Summand mit  $j \neq n$  von Null verschieden sein könnte. Aber vielleicht werden sie das in fünfzig Jahren können, oder in dreihundert Jahren?

An dieser Stelle müssen wir eine schwer wiegende Komplikation zur Kenntnis nehmen. Das Messgerät ist tatsächlich nicht nur mit dem Neutron und dem Computer verschränkt, sondern mit einem beträchtlichen Teil der Umwelt: Jedes Luftmolekül, das auf das Messgerät prallt, wird mit dem Gerät verschränkt, und in der Folge

auch alle anderen Luftmoleküle und alle anderen Gegenstände auf die diese Moleküle später prallen. Auch jedes Photon der Laborbeleuchtung, und jedes infrarote Photon der Wärmestrahlung, und jedes Photon der allgegenwärtigen kosmischen Hintergrundstrahlung, das vom Messgerät gestreut wird, wird mit ihm verschränkt. Bisher haben wir es versäumt, alle diese Myriaden von Quantenobjekten in den Zustandsvektor (9.9) einzutragen, obwohl auch sie Bestandteile des verschränkten Quantensystems sind.

Der Kommunikationsmechanismus muss alle diese Myriaden von Molekülen und Photonen in geeigneter Weise beeinflussen, damit sie nicht die Kommunikationsamplitude (9.10) zu Null machen, so wie es in (9.8) geschehen ist, weil der Kommunikationsmechanismus nicht auf den Ort  $x$  des Neutrons eingewirkt hat. Die Photonen und Luftmoleküle bilden in ihrer Gesamtheit gewissermaßen ein nachgeschaltetes Messgerät, das den Zustand des eigentlichen Messgeräts misst. Ein einzelnes gestreutes Molekül oder Photon dokumentiert nicht das komplette Messergebnis, und deswegen ist es nicht so schlimm wenn dem Kommunikationsmechanismus einige wenige Moleküle und Photonen durch die Lappen gehen. Aber ein paar Millionen von Molekülen oder Photonen, die vom Messgerät gestreut wurden, tragen zusammen schon eine ziemlich vollständige Information über das Messergebnis mit sich. Und es sind tatsächlich *viel mehr* als nur ein paar Millionen von Molekülen und Photonen, die im unmessbar kurzen Bruchteil einer Sekunde mit dem Messgerät wechselwirken!

Wenn wir die Myriaden von Molekülen und Photonen der Umgebung durch den Zustandsvektor  $|\text{Umgebung}\rangle = |U\rangle$  symbolisieren, dann wird die tatsächliche Situation nicht durch (9.9) und (9.10) beschrieben, sondern durch

$$\left. \begin{aligned}
 |\text{Neutron}\rangle &= \sum_{j=1}^{87} c_j |x_j\rangle \\
 |\text{Messgerät}\rangle &= |M_0\rangle \\
 |\text{Computer}\rangle &= |C_0\rangle \\
 |\text{Umgebung}\rangle &= |U_0\rangle
 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{1. Schritt}}$$

$$\xrightarrow{\text{1. Schritt}} |\text{Neutron \& Messgerät \& Computer \& Umgebung}\rangle =$$

$$= \sum_{j=1}^{87} c_j |x_j\rangle |M_j\rangle |C_j\rangle |U_j\rangle \quad (9.11)$$

und

$$\begin{aligned}
 \text{Kommunikation} &= \langle 9.11 | K | 9.11 \rangle = \\
 &= \sum_{j=1}^{87} \sum_{n=1}^{87} c_j^* c_n \underbrace{\langle U_j | | U_n \rangle}_{(5.19c)} \langle C_j | \langle M_j | \langle x_j | K | x_n \rangle | M_n \rangle | C_n \rangle \stackrel{?}{\neq} 0 .
 \end{aligned}$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{(5.19c)} \begin{cases} 1 \text{ falls } j = n \\ 0 \text{ falls } j \neq n \end{cases} \quad (9.12)$$

Die schiere Menge der vom Messgerät gestreuten Moleküle und Photonen wird es auch künftigen Experimentatoren mit beliebig hoch entwickelter technischer Kunstfertigkeit unmöglich machen einen Kommunikationsmechnismus zu bauen, der das verschränkte Quantensystem auch nur annäherungsweise kontrollieren kann. Deshalb sind alle Terme in (9.12) mit  $j \neq n$  FAPP Null.

Die Viele-Welten-Interpretation ist so bizarr, dass sie einem erst mal den Atem verschlägt. Trotzdem kann man sie nicht einfach als Unsinn abtun. Im Gegenteil, diese Interpretation hat mehrere bedeutende Vorteile. Der wichtigste ist sicherlich, dass die gesamte physikalische Wirklichkeit einheitlich mithilfe einer einzigen Theorie abgebildet wird. Man braucht nicht ständig die klassische und die Quantentheorie miteinander zu kombinieren, wie bei der Kopenhagener Interpretation. Außerdem ist die Viele-Welten-Interpretation, so abenteuerlich sie auch wirken mag, im Grunde sehr

einfach. Die Einfachheit einer Erklärung wird von Physikern stets als ein sehr starkes Argument anerkannt.

Hinsichtlich der Frage, ob Menschen sich kraft freien Willens für dieses oder jenes Handeln entscheiden können, oder ob das Weltgeschehen – einschließlich aller vermeintlich freier Entscheidungen von Menschen – in Wahrheit deterministisch vorherbestimmt ist, ergibt sich aus der Viele-Welten-Interpretation eine eigenartige Antwort: Entscheidungen sind weder frei, noch deterministisch vorherbestimmt, sondern es gibt überhaupt keine Entscheidungen! Wenn ich mir jetzt überlege vom Schreibtisch aufzustehen oder sitzenzubleiben, und mich kraft freien Willens fürs Sitzenbleiben entscheide, dann ist das aus Sicht der Viele-Welten-Interpretation nur eine naive Illusion meiner Bewusstseinskomponente  $|B_{\text{Sitzenbleiben}}\rangle$ . Tatsächlich beobachte ich nämlich laut Everett und DeWitt gleichzeitig mit der Komponente  $|B_{\text{Aufstehen}}\rangle$  meines Bewusstseins, dass ich mich fürs Aufstehen entschieden und diesen Entschluss auch in die Tat umgesetzt habe.

In Abschnitt 7.5 waren wir zu folgender Schlussfolgerung gelangt:

- \* Wenn die Annahmen  $A2_{\text{Peres}}$ ,  $A3_{\text{Peres}}$ ,  $A4_{\text{Peres}}$  alle drei richtig sind, dann beweist die Verletzung der Bell'schen Ungleichung dass das Ergebnis der Messung nicht durch irgendein bisher unbekanntes Naturgesetz bestimmt wird, sondern dass die Erschaffung des Messergebnisses im Moment der Messung tatsächlich ein **irrationaler** Akt der Natur ist, der der wissenschaftlichen Analyse für immer entzogen sein wird, dass bei der Erschaffung des Messergebnisses echter Zufall am Werk ist.

Die irrationale Entscheidung der Natur für ein bestimmtes Ergebnis im Moment der Messung ist die einzige(!) Stelle in der Physik, an der der Determinismus ausgehebelt wird. Diese Schlussfolgerung setzt ausdrücklich die Annahme

**A4**<sub>Peres</sub> : Messungen haben eindeutige Ergebnisse.

voraus, die in der Vielen-Welten-Interpretation nicht mehr gegeben ist. Im Viele-Welten-Szenario entscheidet sich die Natur nicht für ein bestimmtes Ergebnis, sondern realisiert in den verschiedenen Zweigen der Realität sämtliche möglichen Messergebnisse gleichzeitig. Laut Vieler-Welten-Interpretation leben wir in einer Welt (bzw. gleichzeitig in Vielen Welten), in der niemals irgend eine Entscheidung getroffen wird. Und wenn niemals eine Entscheidung getroffen wird, dann ist die Frage, ob Entscheidungen deterministisch vorherbestimmt sind, oder ob Menschen in ihren Entscheidungen frei sind, offensichtlich obsolet.

## 9.4 Dekohärenz

In Abb. 9.2 sind vier Wellenzüge A1, A2, B1, und B2 skizziert. Wenn die Wellenzüge A1 und A2 in einem Interferenz-Experiment überlagert werden, dann werden sie sich gegenseitig fast auslöschen, denn die Wellen sind gegeneinander um fast genau eine halbe Wellenlänge versetzt. Dagegen wird man keine Interferenzstrukturen erhalten, wenn die Wellenzüge B1 und B2 überlagert werden. Das liegt daran, dass schon zwischen den Teilwellen von B1 keine klare Phasenbeziehung besteht: Die Phasen (Wellenberge und Wellentäler) der Teilwellen sind chaotisch gegeneinander verschoben, außerdem haben die Teilwellen unterschiedlich Wellenlängen.

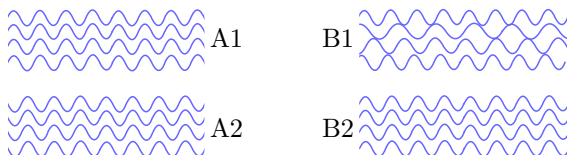


Abb. 9.2: Dekohärenz

Wenn zwischen verschiedenen Wellenzügen, oder zwischen den Teilwellen eines Wellenzugs, eine feste Phasenbeziehung besteht (z. B. „die Maxima des einen Wellenzugs sind gegen die Maxima des anderen Wellenzugs um  $0,27$  Wellenlängen verschoben“, oder so), dann kann man bei der Überlagerung dieser Wellen klare Interferenzstrukturen erwarten. Solche Wellen werden als *kohärent* bezeichnet.

Wenn zwischen zwei Wellenzügen, oder innerhalb eines oder beider Wellenzüge, keine feste Phasenbeziehung besteht, nennt man die Wellen *inkohärent*. In Abb. 9.2 ist der Wellenzug B1 schon in sich inkohärent, und deshalb auch inkohärent relativ zum Wellenzug B2. Wenn ursprünglich kohärente Wellen aus irgendeinem Grund ihre Kohärenz verlieren, bezeichnet man diesen Vorgang als *Dekohärenz*.

In Abschnitt 8.1 wurde die Möglichkeit diskutiert, die Trajektorie von Elektronen dadurch einzuengen, dass man Photonen an ihnen streut. Man könnte beispielsweise beim Doppelspalt-Experiment hinter einem Spalt einen senkrecht gerichteten Lichtstrahl einbauen der so intensiv ist, dass das Elektron mindestens ein Photon deutlich aus seiner Bahn ablenken („streuen“) wird, wenn es diesen Spalt benutzt. Dadurch wird die Trajektorie des Elektrons auf einen der beiden Spalte eingeschränkt: Wenn ein Photon deutlich gestreut wird, dann dokumentiert die Existenz des gestreuten Photons, dass das Elektron durch diesen Spalt geflogen ist. Wenn das Elektron den Detektor erreicht ohne dass ein Photon gestreut wurde, dann muss es den anderen Spalt durchquert haben. Wenn das Elektron ein Photon streut, dann ändert sich bei dem Zusammenstoß der Impuls des Elektrons, und demzufolge auch seine de Broglie-Wellenlänge

$$\lambda \stackrel{(4.2b)}{=} \frac{h}{p} = \frac{h}{\text{Impuls}}$$

um einen nicht vorhersagbaren Betrag. Dadurch ergibt sich genau der Zustand, der in Abb. 9.2 rechts skizziert ist: Die Wechsel-

wirkung mit der Lichtschranke hinter dem einen Spalt führt zur Dekohärenz der Elektronenwelle, folglich verschwindet die Interferenzstruktur in der Detektorebene der Elektronen.

Die Dekohärenz von Wellen bewirkt, dass Interferenzstrukturen verschwinden. Im Sprachgebrauch der Physiker wird der Begriff „Dekohärenz“ heute jedoch wesentlich weiter definiert: *Immer*, wenn Interferenzstrukturen verschwinden, bezeichnet man das als Dekohärenz, auch dann wenn das Verschwinden der Interferenz einen ganz anderen Grund als die Veränderung irgendeiner Wellenlänge oder Phasenbeziehung hat.

Beispielsweise verschwand im Experiment von Dürr et. al. mit Rubidium-Atomen, das ich in Abschnitt 8.2 geschildert habe, die Interferenz dadurch, dass die Atome unterschiedlich markiert wurden, wenn sie das Interferometer auf unterschiedlichen Wegen durchliefen. Ich habe betont, dass diese Art der Markierung auf die Länge und die Phase der Atomwellen keinen signifikanten Einfluss hatte. Die Interferenz verschwand vielmehr dadurch, dass in (8.7) Projektionsamplituden der Art

$$\langle 2||3 \rangle = \langle 3||2 \rangle = 0$$

auftauchten, die mit der Länge und der Phase der de Broglie-Welle der Rubidium-Atome überhaupt nichts zu tun haben. Dennoch wird auch in diesem Fall das Verschwinden der Interferenz als „Dekohärenz der Rubidium-Atome“ bezeichnet.

Genau den gleichen Effekt wie die bewusst herbeigeführte Markierung von Quantenobjekten hat auch die unbeabsichtigte, aber unter Umständen unvermeidliche Verschränkung eines Objekts mit den Photonen und Molekülen der Umgebung. Am Ende von Kapitel 4 habe ich geschrieben: „Man kennt keinen prinzipiellen Grund, warum Interferenzexperimente nicht mit beliebig schweren Objekten (zum Beispiel mit Lastwagen) möglich sein sollten. Es ist ‚nur‘ eine Frage der Kunstfertigkeit der Experimentatoren, die

technischen Schwierigkeiten zu überwinden.“ Beim heutigen Stand der Technik können die Experimentatoren nicht verhindern, dass ein so großes Objekt wie ein Lastwagen durch Wärmestrahlung aus der Umgebung lokalisiert wird, und auch durch Luftmoleküle, die an diesen Objekten gestreut werden. Selbst in einem sehr guten Vakuum werden an einem so großen Objekt noch viel zu viele Moleküle des Restgases gestreut, als dass Interferenzexperimente gelingen könnten. Wenn wir den Zustandsvektor des Lastwagens als  $|L\rangle$ , und den Zustandsvektor der Photonen und Moleküle, die am Lastwagen gestreut werden, als  $|U\rangle$  bezeichnen, dann ist der Zustandsvektor des Gesamtsystems, wenn der Lastwagen im Interferenz-Experiment durch den Doppelspalt fliegt, gleich

$$\frac{1}{2} \left( |L\rangle_{\text{links}} |U\rangle_{\text{links}} + |L\rangle_{\text{rechts}} |U\rangle_{\text{rechts}} \right). \quad (9.13)$$

Die Verschränkung des Lastwagens mit den Molekülen und Photonen der Umgebung hat genau die gleiche Wirkung wie die Markierung der Rubidium-Atome durch die Zustandsvektoren  $|2\rangle$  und  $|3\rangle$ . So wie die Trajektorie der Rubidium-Atome nicht mehr über die Wege A und B des Interferometers delokalisiert war, sondern durch die Markierung mit  $|2\rangle$  oder  $|3\rangle$  auf den Weg A oder B eingeschränkt wurde, so ist die Trajektorie des Lastwagens nicht mehr über beide Spalte delokalisiert, sondern wird durch die am rechten bzw. linken Spalt gestreuten Moleküle und Photonen der Umgebung auf den linken oder rechten Spalt eingeschränkt. Folglich verhindern jetzt Projektionsamplituden der Art

$$\text{rechts} \langle U || U \rangle_{\text{links}} = \text{links} \langle U || U \rangle_{\text{rechts}} = 0$$

die Selbstinterferenz des Lastwagens, genauso wie in (8.7) Projektionsamplituden der Art

$$\langle 2 || 3 \rangle = \langle 3 || 2 \rangle = 0$$

die Selbstinterferenz des markierten Rubidium-Atoms verhinderten.

Auch diese *unkontrollierte Verschränkung* des Zustandsvektors eines Objekts mit den Zustandsvektoren von Molekülen und Photonen der Umgebung wird als Dekohärenz bezeichnet.<sup>9</sup> Diese Art der Dekohärenz bewirkt, dass alle Gegenstände unserer alltäglichen Umgebung „klassisch“ erscheinen. Sie sind nicht zur Interferenz fähig, weder zur Interferenz mit sich selbst, noch zur Interferenz mit anderen Gegenständen. Ihr Ort ist jederzeit genau definiert, weil er zu jeder Zeit durch die Wechselwirkung mit zahllosen Molekülen und Photonen der Umgebung „gemessen“ wird, d. h. *durch Messung erschaffen* wird.

Damit sind wir bei dem bereits in Abschnitt 9.1 angekündigten zusätzlichen Argument der „Kopenhagener Deutung“ dafür angekommen, dass eine klassische Beschreibung von Messgeräten dem objektiven Sachverhalt tatsächlich besser angemessen ist als eine quantentheoretische Beschreibung. Messgeräte sind nicht nur aufgrund ihrer Größe und Komplexität unvermeidlicherweise immer unkontrolliert mit der Umgebung verschränkt; sie *müssen* auch mit der Umgebung verschränkt sein, damit der Beobachter das Ergebnis der Messung erfahren kann. Ein Messgerät, das – zwecks Verhinderung unkontrollierter Verschränkung mit der Umgebung – von der Umgebung perfekt isoliert wäre, wäre vollkommen nutzlos. Messgeräte sind deshalb niemals zur Interferenz fähige „kohärente“ Quantenobjekte, sondern sie sind notwendigerweise immer genau lokalisierte klassische Dinge. In seinem Vortrag [66] aus dem Jahr 1955 über die Kopenhagener Deutung der Quantenphänomene erklärt Heisenberg:

„[Die] Meßanordnung verdient diesen Namen [...] nur, wenn sie in enger Berührung steht mit der übrigen Welt, wenn es eine physikalische Wechselwirkung zwischen der Meßan-

---

<sup>9</sup> Physiker finden in [71] eine relativ einfache Einführung in den mathematischen Formalismus der Dekohärenz.

ordnung und dem Beobachter gibt. [...] Wenn die Meßanordnung von der übrigen Welt isoliert wäre, dann würde sie keine Meßanordnung [...] genannt werden können, und sie könnte nicht [...] in den Begriffen der klassischen Physik beschrieben werden. [...] Da die Anordnung [...] mit dem Rest der Welt verbunden sein muß, enthält sie tatsächlich die Unsicherheiten der mikroskopischen Struktur der ganzen Welt.<sup>10</sup> [...] Wir können sagen, daß der Übergang vom Möglichen zum Faktischen stattfindet, sobald die Wechselwirkung des Gegenstandes mit der Meßanordnung, und dadurch mit der übrigen Welt, ins Spiel gekommen ist. Der Übergang ist nicht verknüpft mit der Registrierung des Beobachtungsergebnisses im Geiste des Beobachters.“

Man beachte, dass Heisenberg sich im letzten Satz unmissverständlich von v. Neumanns Kollaps-Deutung, die ich in Abschnitt 9.2 geschildert habe, distanziert. Laut Kopenhagener Deutung (sprich nach Ansicht von Bohr und Heisenberg) bewirkt die unkontrollierte Verschränkung mit der Umgebung, die für einen großen Teil der Welt praktisch unvermeidlich und für Messgeräte sogar notwendig ist, dass dieser Teil der Welt durch die Klassische Physik korrekt beschrieben wird. Und zwar nicht erst nach einem „Kollaps“ des Zustandsvektors, sondern von Anfang an!

Eine Beschreibung von Messgeräten als Quantenobjekte, wie es z. B. v. Neumann in (9.4) versucht hat, ist nach diesem Verständnis nicht nur ungeschickt sondern geradezu falsch und irreführend, weil sie die unkontrollierte Verschränkung der Geräte mit der Umwelt ignoriert, obwohl doch gerade diese Verschränkung die Eigenschaften der Geräte entscheidend beeinflusst.

---

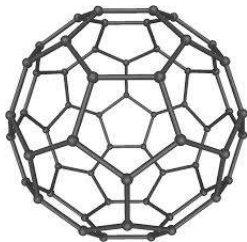
<sup>10</sup> Heisenberg hielt diesen Vortrag vor physikalischen Laien, die er nicht mit mathematischen Begriffen erschrecken wollte. Deshalb nennt er nicht „die unkontrollierte Verschränkung mit der Umwelt“ beim Namen, sondern beschwört etwas vage „die Unsicherheiten der mikroskopischen Struktur der ganzen Welt.“

Die Klassische Beschreibung desjenigen Teils der Welt, der mit der Umgebung unkontrolliert verschränkt ist, wird in der Kopenhagener Deutung deshalb nicht als Notbehelf aufgrund der unzulänglichen Erkenntnismöglichkeiten menschlicher Gehirne betrachtet, sondern als die *einzig*e dem objektiven Sachverhalt tatsächlich angemessene Art der Beschreibung.

Mit Elektronen, Neutronen, Atomen, und nicht allzu großen Molekülen sind Interferenzexperimente erfolgreich durchgeführt worden. Mit Objekten von sichtbarer Größe – oder gar Lastwagen – scheitern Interferenzexperimente bisher an der unkontrollierten Verschränkung mit der Umgebung. Interessant wäre es, im Grenzbereich dazwischen genau zu untersuchen, wie Dekohärenz einsetzt, und wie sie wirkt. So ein Experiment wurde im Jahr 2003 an der Universität Wien von Lucia Hackermüller et. al. [72] durchgeführt: Ein Strahl von  $C_{70}$ -Molekülen, deren de Broglie-Wellenlänge (4.2b) etwa 0,0026 nm betrug, wurde auf 3 hintereinander angeordnete, aus Gold gefertigte Gitter gerichtet. Der Abstand (Mitte zu Mitte) der Öffnungen der Gitter betrug 991 nm. Der Abstand vom ersten zum zweiten und vom zweiten zum dritten Gitter betrug jeweils 38 cm, siehe Abb. 9.4 auf der nächsten Seite. Das Gitter G3 konnte senkrecht zur Bewegungsrichtung der Moleküle verschoben

Abb. 9.3: Ein  $C_{70}$ -Molekül.

Jedes kleine Kügelchen soll ein Kohlenstoff-Atom andeuten. Die Atome sind auf der Oberfläche eines Ellipsoids in 25 Hexagonen und 12 Pentagonen so angeordnet, dass jedes Atom drei nächste Nachbarn im Abstand von etwa 0,14 nm hat. Ähnliche Strukturen verwendete der Architekt Richard Buckminster Fuller (1895 – 1983) bei der Konstruktion „geodätischer Kuppeln“, weshalb kugelförmige Kohlenstoff-Moleküle dieser Art als *Fullerene* oder – noch jovialer – als *Bucky-Balls* bezeichnet werden.



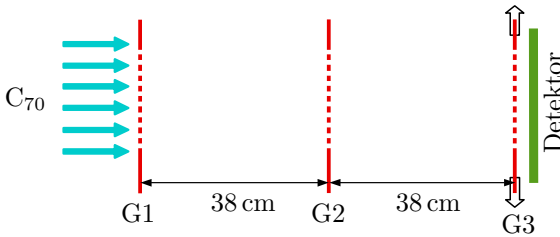
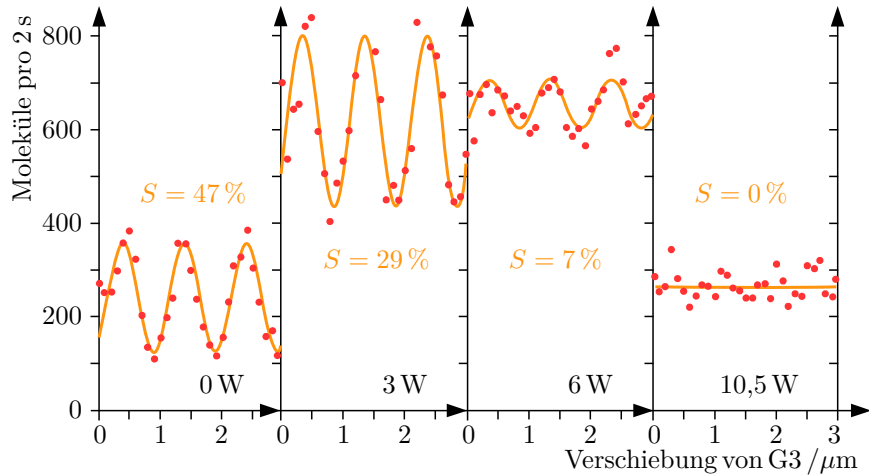


Abb. 9.4: Das Experiment von Hackermüller et. al. [72]

werden, wie durch die breiten Pfeile angedeutet. Hinter  $G_3$  wurden die  $C_{70}$ -Moleküle mit einem starken Laserstrahl **ionisiert**, so dass die geladenen Bestandteile leicht detektiert werden konnten. Der Detektor zählte die Moleküle, die hinter dem Gitter  $G_3$  ankamen, ohne sich darum zu kümmern an welcher Stelle die Moleküle durch  $G_3$  hindurch traten.

Man ahnt schon gefühlsmäßig, dass in diesem Experiment Interferenzerscheinungen auftreten werden. Der Aufbau unterscheidet sich aber deutlich von den Doppelspalt-Experimenten, die wir in den Abschnitten 4.3 bis 4.5 kennen gelernt haben. In den dort beschriebenen Experimenten wurde die sogenannte Fernfeld-Interferenz untersucht, während sich das Experiment von Hackermüller et. al. mit der Nahfeld-Interferenz befasst. Die Theorie der 1836 von William Henry Fox Talbot (1800–1877) entdeckten Nahfeld-Interferenz ist komplizierter und schwerer zu verstehen als die Theorie der Fernfeld-Interferenz. Für die Diskussion der Dekohärenz, die ja im Moment unser eigentliches Thema ist, genügt es aber festzustellen, dass tatsächlich offensichtlich Interferenz auftritt, wie im linken Diagramm von Abb. 9.5 auf der nächsten Seite dargestellt. In diesem Diagramm geben die roten Punkte die Zahl der  $C_{70}$ -Moleküle an, die bei unterschiedlicher seitlicher Verschiebung von  $G_3$  pro 2 Sekunden hinter  $G_3$  gezählt wurden.

Bei der Talbot-Interferenz ist der Abstand von einem Interferenz-

Abb. 9.5: Talbot-Interferenz der  $C_{70}$ -Moleküle

maximum zum nächsten genau so groß wie die Periode der Gitter, also 991 nm. Es scheint so, als ob – anders als bei der Fernfeld-Interferenz – die Wellenlänge der Moleküle keine Rolle spielte. Das stimmt aber nicht. Denn der Abstand

$$\frac{(\text{Gitterkonstante})^2}{\text{Wellenlänge}} = \frac{(991 \text{ nm})^2}{0,0026 \text{ nm}} \approx 38 \text{ cm}$$

von Gitter zu Gitter wurde nach der Theorie der Talbot-Interferenz sorgfältig auf die de Broglie-Wellenlänge der Moleküle abgestimmt.

Die gelbe Linie wurde mit der Theorie der Talbot-Interferenz berechnet und so angepasst, dass die roten Punkte im Mittel möglichst genau auf ihr liegen. Außerdem ist im Diagramm in gelber Schrift die

$$\text{Sichtbarkeit} = S = \frac{\text{Zählrate}_{\text{Maximum}} - \text{Zählrate}_{\text{Minimum}}}{\text{Zählrate}_{\text{Maximum}} + \text{Zählrate}_{\text{Minimum}}} \quad (9.14)$$

der Interferenzstruktur eingetragen, die aus der gelben Kurve (nicht aus den roten Punkten) berechnet wurde.

Die drei rechten Diagramme in Abb. 9.5 zeigen die Messergebnisse von Versuchen, bei denen die  $C_{70}$ -Moleküle unmittelbar vor dem ersten Gitter G1 bis zu 16 mal durch einen Laserstrahl flogen, der quer zu ihrer Bewegungsrichtung hin- und hergespiegelt wurde. Durch jedes Photon, das sie dabei absorbierten, wurden sie um etwa 150 Grad aufgeheizt, d. h. es wurden Vibrationsschwingungen der (in Abb. 9.3 skizzierten) Bucky-Balls angeregt. Unten in den Diagrammen ist die Leistung des Heizlasers eingetragen, nämlich 0 Watt, 3 Watt, 6 Watt, 10,5 Watt.

Bei Heizung mit 3 W und mit 6 W ist die durchschnittliche Zählrate zwei- bis dreimal so hoch wie bei 0 W. Die Experimentatoren erklären das damit, dass die Detektion der Moleküle hinter G3 effizienter funktioniert, weil die stark vibrierenden Moleküle leichter ionisiert werden können. Dann ist es allerdings rätselhaft, warum die durchschnittliche Zählrate bei Heizung mit 10,5 W wieder deutlich kleiner wird. Wie auch immer, das wichtige Ergebnis dieser Versuche ist das allmähliche Verschwinden der Sichtbarkeit  $S$  der Interferenz bei zunehmender Heizung.

Die de Broglie-Wellenlänge der  $C_{70}$ -Moleküle ändert sich durch die Heizung nahezu überhaupt nicht, dies ist nicht die Ursache für das Verschwinden der Interferenz. Man kann sich das Verschwinden der Interferenz vielmehr damit erklären, dass die heißen Moleküle, während sie zwischen den Gittern unterwegs sind, einen Teil der Vibrationsenergie als infrarote Photonen abstrahlen. Diese infraroten Photonen bewirken, dass die Trajektorie der  $C_{70}$ -Moleküle genauer lokalisiert wird. Denn man könnte diese Photonen detektieren, und analysieren aus welcher Richtung sie kommen.

Jetzt erkennt man die Ähnlichkeit mit dem Quantenradierer-Experiment, über das ich in Abschnitt 8.3 berichtet habe. Dort wurde der Entstehungsort der SPDC-erzeugten Photonen durch das davonfliegende Photon<sub>2</sub> bzw. Photon'<sub>2</sub> lokalisiert. Jetzt sind es die davonfliegenden infraroten Photonen, die die Trajektorie des

$C_{70}$ -Moleküls lokalisieren.

Anders als im Fall der SPDC-erzeugten Photonen reicht allerdings ein einziges infrarotes Photon nicht aus, um die Trajektorie eines  $C_{70}$ -Moleküls genau zu lokalisieren. Das liegt daran dass die Wellenlänge der infraroten Photonen viel größer ist als der Abstand (991 nm) zwischen den Öffnungen der Gitter. Aber wenn eine große Zahl infraroter Photonen abgestrahlt wird, dann legen sie in ihrer Gesamtheit die Trajektorie des  $C_{70}$ -Moleküls so präzise fest, dass die Interferenz verschwindet.

Deswegen ist in diesem Fall das Verschwinden der Interferenz ein allmählicher Prozess. Je heißer ein  $C_{70}$ -Molekül ist, desto mehr infrarote Photonen strahlt es während des Flugs zwischen den Gittern ab, und desto genauer wird seine Trajektorie lokalisiert. Die Lokalisierung der Trajektorie ist eine objektive Tatsache. Es ist nicht nötig dass jemand die Photonen detektiert und analysiert. Die Interferenz verschwindet auch dann, wenn die infraroten Photonen – wie im Experiment von Hackermüller et. al. – unregistriert entkommen.

Könnte man auch dieses Experiment mit einem Quantenradierer ausstatten? Also die Apparatur so erweitern, dass die abgestrahlten infraroten Photonen eingefangen und so geschickt verarbeitet werden, dass man doch wieder ein Interferenzergebnis herauskitzeln könnte? Im Prinzip sollte das möglich sein, aber in der Praxis wird es um so schwieriger, je mehr Photonen man unter Kontrolle halten muss.

Am Ende von Abschnitt 8.3 über den Quantenradierer habe ich betont, „dass endgültiger Verlust eines Photons in gewisser Weise gleichwertig zur Registrierung durch ein Messgerät ist. Registrierung und endgültiger Verlust sind tatsächlich insofern gleichwertig, als beide unmöglich rückgängig gemacht werden können.“ Das ist ein wichtiger Gesichtspunkt: **Es ist das definierende Merkmal einer Messung, dass sie einen *unumkehrbaren Vor-***

**gang darstellt.** *Kein* unumkehrbarer Vorgang ist zum Beispiel der Durchgang (Transmission oder Reflektion) eines Photons durch einen Strahlteiler. Man bräuchte ja nur Spiegel hinter die beiden Ausgänge des Strahlteilers zu stellen, und schon würde der Vorgang rückwärts ablaufen. Dagegen ist die Registrierung eines Photons mithilfe eines Diodendetektors unumkehrbar. Das Photon löst eine ganze Lawine von Elektronen in der Diode aus, und kein Experimentator ist in der Lage den Ablauf dieses Vorgangs umzukehren. Anders gesagt: Kein Experimentator ist fähig einen Quantenradierer zu konstruieren, mit dem die Elektronen der Lawine in der Diode irgendwie eingefangen und in geeigneter Weise zu einem Interferenzexperiment umgesteuert werden.

Es ist die Dekohärenz (= unkontrollierte Verschränkung mit der Umgebung) des Messgeräts, die bewirkt dass ein Messergebnis unumkehrbar ist. Nun hat ja die Kunstfertigkeit der Experimentatoren in den vergangenen Jahrzehnten und Jahrhunderten ganz beträchtliche Fortschritte gemacht, und man darf hoffen dass es in den kommenden Jahrzehnten und Jahrhunderten weitere bedeutende Fortschritte geben wird. Könnte es sein, dass zukünftige Experimentatoren eines Tages in der Lage sein werden, den Vorgang der Absorption eines Photons durch eine Diode samt ausgelöster Elektronenlawine umzukehren und rückwärts ablaufen zu lassen? Auch wenn das die heute verfügbare Technik weit überfordert: Man kennt keinen prinzipiellen Grund, warum das nicht in Zukunft einmal möglich sein sollte.

Dann wäre allerdings ein weiteres, nachgeschaltetes Messgerät erforderlich, damit der Beobachter überhaupt etwas von dem Vorgang erfahren kann. Weil nämlich – um das auf Seite 289 ff abgedruckte Heisenbergs-Zitat zu paraphrasieren – die Diode jetzt zwecks Verhinderung von Dekohärenz von der übrigen Welt isoliert ist, kann sie nicht „Meßanordnung“ genannt werden. Ein Messgerät trägt diesen Namen nur dann zu Recht, wenn es mit der übrigen

Welt in enger Berührung steht, und deshalb mit den Begriffen der klassischen Physik beschrieben werden kann (und muss!).

Ich habe in diesem Buch vielfach darauf hingewiesen, dass der Experimentator bei der Messung eines Quantenphänomens nicht einfach eine objektive Realität zur Kenntnis nimmt, sondern dass er diese Realität – zumindest teilweise – durch die Auswahl und Anordnung seiner Messinstrumente erschafft und prägt. Nun sehen wir, dass es auch von den technischen Fähigkeiten des Experimentators abhängt, was überhaupt eine Messung ist, und was nicht. Was eine Messung ist, und was lediglich ein umkehrbarer Vorgang, das ist nicht in Stein gemeißelt sondern hängt von der Kunstfertigkeit der Experimentatoren ab. Das Ideal der „Objektivität“, das in der Klassischen Physik als unantastbar galt, rückt damit beim Umgang mit Quantenphänomenen in noch weitere Ferne.

## 9.5 Viele Interpretationen

Im Lauf der Jahrzehnte wurden ungefähr ein dutzend verschiedene Interpretationen der Quantenphänomene vorgeschlagen. Man kann da keine genaue Zahl nennen, weil es kein klares Kriterium dafür gibt, wann eine Modifikation einer bekannten Interpretation als neue Interpretation, oder lediglich als Variante der alten Interpretation betrachtet werden soll. Eine auch nur halbwegs vollständige Beschreibung und Würdigung der verschiedenen Interpretationen würde ein eigenes Buch füllen, das *mindestens* so dick wäre wie dieses.<sup>11</sup>

Man kann nicht sagen dass die eine Deutung richtiger oder falscher ist als die andere. Denn ob etwas richtig oder falsch ist, das wird in der Physik durch Experimente entschieden. Wenn eine An-

---

<sup>11</sup> Eine kurz gefasste Übersicht über die gängigsten Interpretationen findet man in Wikipedia:

[https://de.wikipedia.org/wiki/Interpretationen\\_der\\_Quantenmechanik](https://de.wikipedia.org/wiki/Interpretationen_der_Quantenmechanik)

nahme experimentell widerlegt wurde, dann sind sich alle Physiker darüber einig, dass die Annahme falsch war. Die Interpretationen der Quantenphänomene können dagegen nicht experimentell überprüft werden. Denn alle Interpretationen basieren auf dem gleichen formalen Apparat, auf der gleichen mathematischen Maschinerie, mit der die Vorhersagen über die statistische Häufigkeit verschiedener Messergebnisse gemäß der Born'schen Regel hergeleitet werden.

Worin sich die Interpretationen voneinander unterscheiden, das sind die anschaulichen Bilder, die sie zum Formalismus hinzufügen, sozusagen die Begleitmusik zum Rattern der mathematischen Maschinerie. Braucht man so etwas überhaupt? Sollte man sich nicht damit zufrieden geben, dass man die Ergebnisse von Experimenten korrekt berechnen kann?

Nun, die Menschen sind verschieden. Es gibt durchaus Physiker, die mit abstrakten Formeln restlos zufrieden sind. Aber andere haben erst dann das Gefühl einen Sachverhalt wirklich zu verstehen, wenn sie mehr oder weniger anschauliche Bilder gefunden haben, die diesen Sachverhalt in einen plausiblen Zusammenhang einbetten.

# 10 Quantensysteme mit großer Teilchenzahl

## 10.1 Dinge, Bosonen, Fermionen

Wenn man einen starken Lichtstrahl auf einen Strahlteiler richtet, dann wird das Licht zur Hälfte transmittiert, und zur Hälfte reflektiert. Das wissen die Physiker schon seit Jahrhunderten, das wird durch die Klassische Elektrodynamik korrekt beschrieben, das ist leicht zu verstehen. Schwierig und rätselhaft wurde es erst, als die Physiker begannen das Verhalten einzelner Photonen am Strahlteiler zu untersuchen, siehe Abschnitte [3.5](#) und [3.6](#).

Man könnte glauben, dass es sich immer so verhält: Dass die rätselhaften Quantenphänomene auftreten, wenn man sich mit einzelnen Teilchen beschäftigt, aber dass sich die Quantenphänomene irgendwie ausmitteln und zu ganz normalen Klassischen Phänomenen werden, wenn das untersuchte System aus einer sehr großen Anzahl von Teilchen zusammengesetzt ist. Das ist jedoch keineswegs der Fall.

Quantenphänomene mit einzelnen Teilchen gibt es nur in den Laboratorien der Physiker. In technischen Anwendungen hat man es dagegen mit Quantensystemen zu tun, die zum Beispiel aus  $10^{20}$  oder noch mehr Teilchen bestehen. Es ist klar dass man den Zustandsvektor eines so großen Quantensystems unmöglich explizit berechnen kann. Quantensysteme, die aus sehr vielen Teilchen bestehen, können nur mit geeigneten statistischen Methoden beschrieben werden.

Quantenobjekte sind keine Dinge. Quantenobjekte sind etwas

grundlegend anderes, für das es in der menschlichen Sprache keine passenden Begriffe gibt. Der Unterschied tritt auch in der Statistik von Dingen und Quantenobjekten deutlich zutage.

Die Statistik der *Dinge* wird in der Physik als Maxwell-Boltzmann-Statistik bezeichnet, benannt nach James Clerk Maxwell (1831–1879) und Ludwig Boltzmann (1844–1906), die besonders wichtige Beiträge zur Entwicklung dieser Art der Statistik leisteten.

Im Fall von Quantenobjekten hat sich herausgestellt, dass es zwei grundlegend unterschiedliche Arten von Quantenobjekten gibt, die als *Bosonen* und *Fermionen* bezeichnet werden.

Für Bosonen gilt die Bose-Einstein-Statistik<sup>1</sup>, benannt nach Satyendranath Bose (1894–1974) und Albert Einstein. Für Fermionen gilt die Fermi-Dirac-Statistik, benannt nach Enrico Fermi (1901–1954) und Paul Dirac.

Jedes Quantenobjekt gehört eindeutig entweder zur Gruppe der Bosonen oder zur Gruppe der Fermionen. Beispielsweise sind Elektronen, Protonen, Neutronen, Quarks, und viele Atome und viele Moleküle Fermionen. Beispiele für Bosonen sind Photonen, Gluonen, und viele Atome und viele Moleküle. Auch Schallwellen in Festkörpern, und die Vibrationsschwingungen von Molekülen, sind Bosonen.<sup>2</sup>

Der Unterschied zwischen den drei verschiedenen Statistiken für Dinge, für Bosonen, und für Fermionen lässt sich am einfachsten am Beispiel von zwei Würfeln erklären. Würfel sind Dinge, für sie

---

<sup>1</sup> Kurioserweise wurde die Bose-Einstein-Statistik erstmals bereits im Jahr 1877 in einer Veröffentlichung [73] von Boltzmann angewendet. Boltzmann bezeichnete das aber ausdrücklich als eine lediglich „mathematische Fiktion“. Die wahre Bedeutung dieser Entdeckung erkannten damals weder Boltzmann selbst noch seine Leser. Eine (nur für Physiker geeignete) Darstellung der Entdeckung der Bose-Einstein-Statistik findet man in [74].

<sup>2</sup> Genau wie Lichtwellen in bestimmten Experimenten als Teilchen (nämlich Photonen) in Erscheinung treten, treten Schallwellen in Festkörpern in bestimmten Experimenten als Teilchen, die Phononen genannt werden, in Erscheinung.

gilt also die Maxwell-Boltzmann-Statistik. Wir nehmen an, dass die beiden Würfel wie üblich auf jeder ihrer sechs Seiten mit ein bis sechs Augen markiert sind. Wenn man beide Würfel gleichzeitig wirft, erhält man Ergebnisse zwischen 2 Augen und 12 Augen, siehe Tabelle 10.1.

Die 36 möglichen Ergebnisse	Augen	Wahrscheinlichkeit
	2	1/36
	3	2/36
	4	3/36
	5	4/36
	6	5/36
	7	6/36
	8	5/36
	9	4/36
	10	3/36
	11	2/36
	12	1/36

Tab. 10.1 : Mögliche Ergebnisse mit zwei Würfeln  
(Maxwell-Boltzmann-Statistik)

Jedes einzelne der 36 möglichen Ergebnisse kommt mit gleicher Wahrscheinlichkeit, nämlich  $1/36$ , vor. Das Ergebnis 7 Augen kann durch sechs verschiedene Kombinationen zustande kommen, das Ergebnis 2 Augen aber nur durch eine einzige Kombination. Also erwartet man, und findet es bei Nachprüfung<sup>3</sup> auch bestätigt, dass das Ergebnis 7 Augen beim Spiel mit zwei Würfeln sechs mal so häufig vorkommt wie das Ergebnis 2 Augen.

Das Beispielsystem „zwei Würfel“ besteht aus zwei Teilchen (nämlich den beiden Würfeln), die je sechs verschiedene Eigenschaften haben können (nämlich je sechs verschiedene Augenzahlen).

<sup>3</sup> Wer auch nur den geringsten Zweifel an der Richtigkeit von Tabelle 10.1 hat, sollte das durch ein paar hundert Würfe selbst nachprüfen!

Weil die Würfel Dinge sind, ist  $\begin{smallmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \square & \square \end{smallmatrix}$  ein anderer Zustand als  $\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \blacksquare & \blacksquare \end{smallmatrix}$ . Es macht einen Unterschied, ob der weiße Würfel 5 Augen zeigt und der schwarze Würfel 6, oder ob der weiße Würfel 6 Augen zeigt und der schwarze Würfel 5. Deshalb werden in Tabelle 10.1 bei der Berechnung der Wahrscheinlichkeit des Gesamtergebnisses 11 Augen  $\begin{smallmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \square & \square \end{smallmatrix}$  und  $\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \blacksquare & \blacksquare \end{smallmatrix}$  als unterschiedliche Zustände des Systems gezählt, so dass die Wahrscheinlichkeit für 11 Augen gleich  $2/36$  ist.

Die Erfahrung zeigt, dass für Quantenobjekte andere statistische Regeln gelten als für Dinge:

- \* Wenn in einem System gleichartiger Bosonen die Eigenschaften von zwei Teilchen miteinander vertauscht werden, dann ändert sich der Zustandsvektor des Gesamtsystems um den Faktor  $(+1)$ , d. h. er bleibt unverändert. Man sagt, dass der Zustandsvektor eines Systems gleichartiger Bosonen unter Vertauschungen *symmetrisch* ist. (10.1a)
- \* Wenn in einem System gleichartiger Fermionen die Eigenschaften von zwei Teilchen miteinander vertauscht werden, dann ändert sich der Zustandsvektor des Gesamtsystems um den Faktor  $(-1)$ . Man sagt, dass der Zustandsvektor eines Systems gleichartiger Fermionen unter Vertauschungen *antisymmetrisch* ist. (10.1b)

Warum ist das so? Die Physik kennt für (10.1) keine tiefer liegende Begründung. Es handelt sich um ein Naturgesetz, das aus der Analyse von Experimenten erraten wurde, und durch alle experimentellen Beobachtungen bestätigt wird.

Was (10.1) konkret bedeutet versteht man am leichtesten, wenn wir einmal annehmen wir könnten mit zwei Quantenwürfel würfeln, durch zahlreiche Versuche die Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen Ergebnisse ermitteln, und in einer Tabelle zusammenstellen.

Tatsächlich gibt es in der Natur keine Quantenwürfel, und bis heute ist kein Experimentator in der Lage, einen Quantenwürfel herzustellen. Trotzdem ist es nützlich einmal zu überlegen, welche Auswirkungen das Naturgesetz (10.1) auf die Ergebnisse beim Würfeln mit Quantenwürfeln hätte. In den Abschnitten 10.2 und 10.3 werden wir dann zwei realistischere Beispiele betrachten.

Wenn ein Würfel fünf Augen zeigt und der andere drei, dann kann der Zustandsvektor eines Quantensystems, das aus zwei Quantenwürfeln besteht, weder  $|\otimes\rangle|\otimes\rangle$  noch  $|\otimes\rangle|\otimes\rangle$  sein. Denn wenn die Augenzahlen der beiden Würfel miteinander vertauscht werden, dann ändern sich diese Zustandsvektoren weder um den Faktor (+1) noch um den Faktor (-1), sondern dann ändert sich der eine dieser Zustandsvektoren in den anderen, und der andere in den einen.

Der richtige Zustandsvektor ist vielmehr im Fall von

$$\text{Bosonen : } \sqrt{\frac{1}{2}} \left( |\otimes\rangle|\otimes\rangle + |\otimes\rangle|\otimes\rangle \right) \quad (10.2a)$$

$$\text{Fermionen : } \sqrt{\frac{1}{2}} \left( |\otimes\rangle|\otimes\rangle - |\otimes\rangle|\otimes\rangle \right) . \quad (10.2b)$$

Diese Zustandsvektoren haben bei Vertauschung der Augenzahlen der beiden Würfel das richtige Verhalten entsprechend (10.1):

$$\begin{aligned} \left( |\otimes\rangle|\otimes\rangle + |\otimes\rangle|\otimes\rangle \right) & \xrightarrow{\text{Vertauschung}} \left( |\otimes\rangle|\otimes\rangle + |\otimes\rangle|\otimes\rangle \right) = \\ & = + \left( |\otimes\rangle|\otimes\rangle + |\otimes\rangle|\otimes\rangle \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left( |\otimes\rangle|\otimes\rangle - |\otimes\rangle|\otimes\rangle \right) & \xrightarrow{\text{Vertauschung}} \left( |\otimes\rangle|\otimes\rangle - |\otimes\rangle|\otimes\rangle \right) = \\ & = - \left( |\otimes\rangle|\otimes\rangle - |\otimes\rangle|\otimes\rangle \right) \end{aligned}$$

Der Faktor  $\sqrt{1/2}$  in (10.2) ist erforderlich, damit die Projektionsamplitude der Zustandsvektoren auf sich selbst 1 ergibt, wie es sein muss:

$$\begin{aligned}
& \sqrt{\frac{1}{2}} \left( \langle \text{⊠} | \langle \text{⊠} | + \langle \text{⊠} | \langle \text{⊠} | \right) \sqrt{\frac{1}{2}} \left( | \text{⊠} \rangle | \text{⊠} \rangle + | \text{⊠} \rangle | \text{⊠} \rangle \right) = \\
& = \frac{1}{2} \left( \underbrace{\langle \text{⊠} | \langle \text{⊠} |}_{1} \underbrace{| \text{⊠} \rangle | \text{⊠} \rangle}_{1} + \underbrace{\langle \text{⊠} | \langle \text{⊠} |}_{0} \underbrace{| \text{⊠} \rangle | \text{⊠} \rangle}_{0} + \right. \\
& \quad \left. + \underbrace{\langle \text{⊠} | \langle \text{⊠} |}_{0} \underbrace{| \text{⊠} \rangle | \text{⊠} \rangle}_{0} + \underbrace{\langle \text{⊠} | \langle \text{⊠} |}_{1} \underbrace{| \text{⊠} \rangle | \text{⊠} \rangle}_{1} \right) = 1 \quad (10.3a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sqrt{\frac{1}{2}} \left( \langle \text{⊠} | \langle \text{⊠} | - \langle \text{⊠} | \langle \text{⊠} | \right) \sqrt{\frac{1}{2}} \left( | \text{⊠} \rangle | \text{⊠} \rangle - | \text{⊠} \rangle | \text{⊠} \rangle \right) = \\
& = \frac{1}{2} \left( \underbrace{\langle \text{⊠} | \langle \text{⊠} |}_{1} \underbrace{| \text{⊠} \rangle | \text{⊠} \rangle}_{1} - \underbrace{\langle \text{⊠} | \langle \text{⊠} |}_{0} \underbrace{| \text{⊠} \rangle | \text{⊠} \rangle}_{0} - \right. \\
& \quad \left. - \underbrace{\langle \text{⊠} | \langle \text{⊠} |}_{0} \underbrace{| \text{⊠} \rangle | \text{⊠} \rangle}_{0} + \underbrace{\langle \text{⊠} | \langle \text{⊠} |}_{1} \underbrace{| \text{⊠} \rangle | \text{⊠} \rangle}_{1} \right) = 1 \quad (10.3b)
\end{aligned}$$

Falls die beiden Würfel die gleiche Augenzahl („Pasch“) zeigen, beispielsweise zwei Einsen, ergeben die Zustandsvektoren (10.2) im Fall von

$$\text{Bosonen : } \sqrt{\frac{1}{2}} \left( | \text{⊠} \rangle | \text{⊠} \rangle + | \text{⊠} \rangle | \text{⊠} \rangle \right) = | \text{⊠} \rangle | \text{⊠} \rangle \quad (10.4a)$$

$$\text{Fermionen : } \sqrt{\frac{1}{2}} \left( | \text{⊠} \rangle | \text{⊠} \rangle - | \text{⊠} \rangle | \text{⊠} \rangle \right) = 0 . \quad (10.4b)$$

Dass die Faktoren  $\sqrt{1/2}$  und 1 im Fall des Bosonen-Paschs richtig sind, sieht man wenn man jeweils die Projektionsamplitude der rechten und der linken Seite von (10.4a) auf sich selbst berechnet. Bemerkenswert ist (10.4b): Weil der Zustandsvektor Null ist, ist seine Projektionsamplitude auf sich selbst erst recht Null, d. h. die Wahrscheinlichkeit eines Paschs ist bei fermionischen Würfeln Null. Fermionische Würfel haben aufgrund des Naturgesetzes (10.1b) *immer* unterschiedliche Augenzahlen.

In Tabelle 10.2 auf der nächsten Seite sind die möglichen Ergebnisse beim Würfeln mit zwei Bosonenwürfeln eingetragen. Es

Die 21 möglichen Ergebnisse	Augen	Wahrscheinlichkeit
	2	1/21
$(\text{white} + \text{black})$	3	1/21
$(\text{white} + \text{black})$ , $(\text{white} + \text{black})$	4	2/21
$(\text{white} + \text{black})$ , $(\text{white} + \text{black})$	5	2/21
$(\text{white} + \text{black})$ , $(\text{white} + \text{black})$ , $(\text{white} + \text{black})$	6	3/21
$(\text{white} + \text{black})$ , $(\text{white} + \text{black})$ , $(\text{white} + \text{black})$	7	3/21
$(\text{white} + \text{black})$ , $(\text{white} + \text{black})$ , $(\text{white} + \text{black})$	8	3/21
$(\text{white} + \text{black})$ , $(\text{white} + \text{black})$	9	2/21
$(\text{white} + \text{black})$ , $(\text{white} + \text{black})$	10	2/21
$(\text{white} + \text{black})$	11	1/21
$(\text{white} + \text{black})$	12	1/21

Tab. 10.2: Mögliche Ergebnisse mit zwei bosonischen Würfeln (Bose-Einstein-Statistik)

gibt nur noch 21 verschiedene Ergebnisse, im Gegensatz zu den 36 möglichen Ergebnissen, wenn es sich bei den Würfeln um Dinge handelt.

In den Zustandsvektoren

$$\underbrace{\sqrt{\frac{1}{2}} \left( |\text{white}| |\text{black}| + |\text{black}| |\text{white}| \right)}_{\text{Bosonen}} \quad \text{bzw.} \quad \underbrace{\sqrt{\frac{1}{2}} \left( |\text{white}| |\text{black}| - |\text{black}| |\text{white}| \right)}_{\text{Fermionen}} \quad (10.5)$$

haben die einzelnen Würfel ihre Identität verloren: Das System besteht eindeutig aus einem weißen und einem schwarzen Würfel. Und es ist eindeutig, dass die Gesamtzahl der Augen 8 ist, zusammengesetzt aus 5 Augen und 3 Augen der einzelnen Würfel. Aber die Eigenschaft 3 Augen bzw. 5 Augen kann nicht eindeutig dem weißen bzw. dem schwarzen Würfel zugeordnet werden.

Diese Eigenart von Quantensystemen in verschränkten Zuständen wurden in Kapitel 6 ausführlich untersucht. Auch (10.5) sind verschränkte Zustandsvektoren, die das Gesamtsystem in ganzheitlicher Weise beschreiben. Das Gesamtsystem hat genau definierte

Eigenschaften (hier: Augenzahlen), aber seine Bestandteile (hier: der weiße und der schwarze Würfel) existieren nur als Bestandteile des Gesamtsystems, haben keine eigenständige Existenz, und deshalb auch keine genau definierten Eigenschaften (hier: Augenzahlen).

Wenn man mit drei fermionischen Würfeln würfelt, dann ist ein mögliches Ergebnis 2 Augen, 3 Augen, 5 Augen. Der Zustandsvektor

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1}{6}} \left( & |\square\rangle|\blacksquare\rangle|\color{red}\square\rangle - |\square\rangle|\blacksquare\rangle|\color{red}\square\rangle - |\square\rangle|\blacksquare\rangle|\color{red}\square\rangle + |\blacksquare\rangle|\square\rangle|\color{red}\square\rangle + \\ & + |\square\rangle|\blacksquare\rangle|\color{red}\square\rangle - |\blacksquare\rangle|\square\rangle|\color{red}\square\rangle \right) \end{aligned} \quad (10.6)$$

erfüllt die Bedingung 10.1b: Der Zustandsvektor wechselt das Vorzeichen, egal ob man in jedem der sechs Summanden die Augenzahl des weißen und des schwarzen Würfels vertauscht, oder ob man die Augenzahl des weißen und des roten Würfels vertauscht, oder ob man die Augenzahl des schwarzen und des roten Würfels vertauscht. Wer mag kann als Übungsaufgabe nachrechnen, dass die Projektionsamplitude des Zustands (10.6) auf sich selbst 1 ergibt; der Faktor  $\sqrt{1/6}$  ist also richtig.

Niemals kann in einem System von fermionischen Würfeln die gleiche Augenzahl zweimal (oder gar noch öfter) vorkommen, denn dann ist der Zustandsvektor Null. Ein Beispiel ist das (unmögliche) Ergebnis 2 Augen, 5 Augen, 5 Augen. Der Zustandsvektor dieses Ergebnisses ist

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1}{6}} \left( & \underbrace{(|\square\rangle|\blacksquare\rangle|\color{red}\square\rangle - |\square\rangle|\blacksquare\rangle|\color{red}\square\rangle)}_0 - \underbrace{(|\blacksquare\rangle|\square\rangle|\color{red}\square\rangle + |\blacksquare\rangle|\square\rangle|\color{red}\square\rangle)}_0 + \right. \\ & \left. + \underbrace{(|\blacksquare\rangle|\blacksquare\rangle|\color{red}\square\rangle - |\blacksquare\rangle|\blacksquare\rangle|\color{red}\square\rangle)}_0 \right) = 0. \end{aligned} \quad (10.7)$$

Weil der Zustandsvektor Null ist, ist die Projektionsamplitude dieses Zustandsvektors auf sich selbst erst recht Null. Das bedeu-

Die 15 möglichen Ergebnisse	Augen	Wahrscheinlichkeit
$(\square \blacksquare - \square \blacksquare)$	3	1/15
$(\square \blacksquare - \square \blacksquare)$	4	1/15
$(\square \blacksquare - \square \blacksquare), (\square \blacksquare - \square \blacksquare)$	5	2/15
$(\square \blacksquare - \square \blacksquare), (\square \blacksquare - \square \blacksquare)$	6	2/15
$(\square \blacksquare - \square \blacksquare), (\square \blacksquare - \square \blacksquare), (\square \blacksquare - \square \blacksquare)$	7	3/15
$(\square \blacksquare - \square \blacksquare), (\square \blacksquare - \square \blacksquare)$	8	2/15
$(\square \blacksquare - \square \blacksquare), (\square \blacksquare - \square \blacksquare)$	9	2/15
$(\square \blacksquare - \square \blacksquare)$	10	1/15
$(\square \blacksquare - \square \blacksquare)$	11	1/15

Tab. 10.3: Mögliche Ergebnisse mit zwei fermionischen Würfeln (Fermi-Dirac-Statistik)

tet, dass die Wahrscheinlichkeit des Ergebnisses 2 Augen, 5 Augen, 5 Augen beim Würfeln mit fermionischen Würfeln Null ist, d. h. dass dies Ergebnis unmöglich ist.

Weil beim Würfeln mit fermionischen Würfeln niemals zwei Würfel die gleiche Augenzahl haben können (es gibt kein „Pasch“), bleiben im Fall von zwei Würfeln nur die 15 möglichen Ergebnisse, die in Tabelle 10.3 aufgelistet sind.

Was passiert, wenn man mit sieben fermionischen Würfeln würfelt? Müssen dann nicht mindestens zwei Würfel die gleiche Augenzahl zeigen, weil es ja insgesamt nur die Augenzahlen 1 bis 6 gibt? Nun, ich weiß es auch nicht. Vermutlich ist das Beispiel von fermionischen Quantenwürfeln allzu unrealistisch. Beschäftigen wir uns besser mit realistischen Fermionen-Systemen, zum Beispiel den Elektronen in einem Festkörper.

## 10.2 Halbleiter-Elektronik

Ein Kristall aus Silizium mit dem Volumen  $1 \text{ mm}^3$  enthält etwa  $2 \cdot 10^{22}$  Elektronen. Weil Elektronen Fermionen sind, können nicht zwei von ihnen identische Eigenschaften haben! Umgekehrt gesagt:

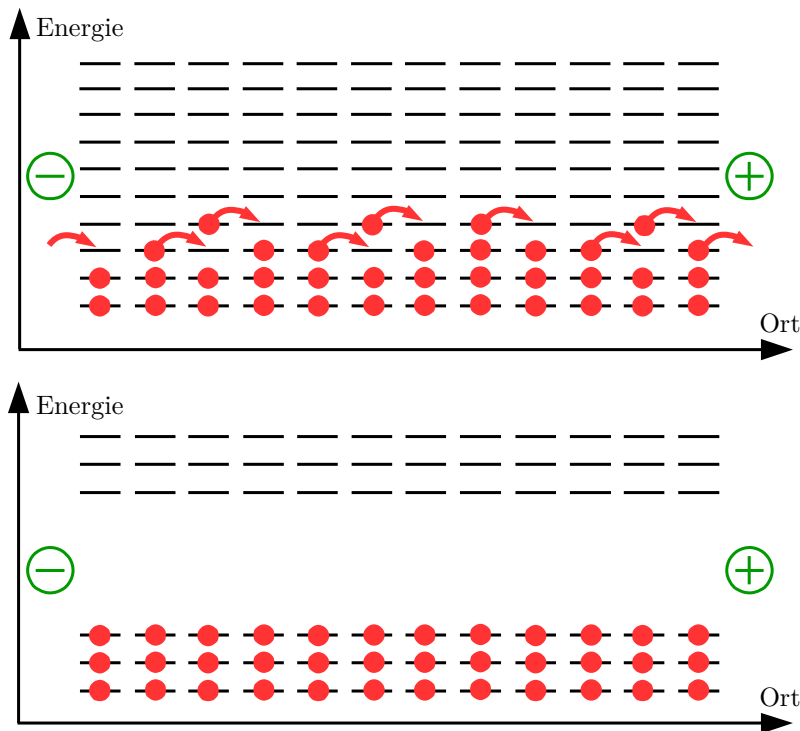


Abb. 10.1: Energieniveaus in einem guten Leiter (oben) und in einem Isolator (unten)

Jedes der  $2 \cdot 10^{22}$  Elektronen in diesem Kristall muss sich durch mindestens eine Eigenschaft von jedem anderen der Elektronen unterscheiden.

Unterschiedliche Eigenschaften, das bedeutet konkret z. B. unterschiedlicher Impuls, oder unterschiedlicher Ort, oder unterschiedliche Energie der einzelnen Elektronen. In Abb. 10.1 ist ein extrem vereinfachtes Modell skizziert: Die Elektronen, symbolisiert durch die roten Punkte, haben in diesem Modell nur zwei Eigenschaften, nämlich einen Ort längs einer bestimmten Raumachse und eine

bestimmte Energie. Jedes Elektron in diesem Modellkristall muss sich entweder durch seinen Ort oder durch seine Energie von jedem anderen Elektron unterscheiden, d. h. jeder der kleinen waagerechten Striche, die die möglichen Orte und Energien von Elektronen symbolisieren, darf nur von maximal einem Elektron belegt sein.

Die grün eingekreisten Plus- und Minuszeichen sollen eine elektrische Spannung symbolisieren, die rechts und links an die Oberflächen des Kristalls angelegt wird. Gleichnamige Ladungen stoßen sich ab, ungleichnamige Ladungen ziehen sich an. Elektronen sind negativ geladen, also bewegen sie sich, wie durch die roten Pfeile angedeutet, nach rechts in Richtung zum Pluspol – wenn sie können.

Bewegen können die Elektronen sich nur dann, wenn der Platz zu dem sie sich hinbewegen wollen, nicht bereits belegt ist. In der oberen Skizze gibt es dicht oberhalb der belegten Energieniveaus zahlreiche freie Energieniveaus. Der energetische Abstand zwischen den belegten und den freien Niveaus ist so klein, dass die Elektronen durch thermische Anregung (Energietransfer von den Gitterschwingungen des Kristalls zu den Elektronen) die freien Niveaus leicht erreichen können.<sup>4</sup> Dann steht ihrer Diffusion durch den Kristall Richtung Pluspol nichts mehr im Weg.

In der unteren Skizze von Abb. 10.1 gibt es zwischen den belegten und den freien Energieniveaus eine große Lücke. Die Energielücke ist viel größer als die thermische Energie. Deshalb wird kein Elektron in die freien Niveaus angeregt. Weil alle erreichbaren Nachbar-Niveaus belegt sind, kann sich keines der Elektronen von der Stelle rühren, dieser Kristall ist ein elektrischer Isolator.

---

<sup>4</sup> Tatsächlich ist – anders als in der Skizze – der energetische Abstand zwischen den belegten und den freien Energieniveaus in Metallen so winzig klein, dass er auch mit moderner Messtechnik nicht nachweisbar ist. Das hat zur Folge, dass in Metallen auch bei extremer Kühlung (beliebig nah am absoluten Nullpunkt der Temperatur) Elektronen thermisch in freie Niveaus angeregt werden können.

Aber könnten nicht die Elektronen, die in der unteren Skizze von Abb. 10.1 ganz rechts sitzen, in die (in der Skizze nicht sichtbare) metallische **Elektrode** diffundieren? Dann würden ihre Plätze frei, die nächsten Nachbarlektronen könnten nachrücken, und dann wiederum deren nächste Nachbarn, so dass schließlich doch ein Elektronenstrom durch den Isolator entstehen könnte. Ich werde gleich auf diese Frage zurückkommen; zunächst behaupte ich einfach, dass diese Art von Leitung nicht zustande kommt; der Isolator ist und bleibt ein Isolator.

Die Energielücke zwischen den von Elektronen belegten Energieniveaus und den freien Energieniveaus ist das Markenzeichen von Isolatoren. Das Markenzeichen von Metallen ist, dass bei ihnen zwischen belegten und freien Energieniveaus *keine* Energielücke klappt. Die in der Elektronik-Industrie verwendeten Halbleiter (am häufigsten wird Silizium eingesetzt) tragen ihren Namen zu Unrecht. Sie sind nicht schlecht leitende Metalle, sondern sie sind schlecht isolierende Isolatoren. Halbleiter sind Isolatoren, weil bei ihnen zwischen den belegten und den freien Energieniveaus eine Energielücke von erheblicher Größe besteht. Die Energielücke ist jedoch nicht groß genug, um thermische Anregung von Elektronen vollständig zu unterbinden; dadurch bleibt eine geringe Leitfähigkeit, die aber winzig klein ist im Vergleich zur Leitfähigkeit von Metallen.<sup>5</sup>

Man kann die Leitfähigkeit von Halbleitern deutlich erhöhen, indem man sie mit geeigneten Fremdatomen dotiert. Betrachten wir am Beispiel von Silizium, was das bedeutet. Silizium-Atome haben 14 Elektronen, Aluminium-Atome haben 13 Elektronen, und Phosphor-Atome haben 15 Elektronen. Wenn man einen Silizium-Kristall bei hoher Temperatur mit Strahlen von Al- oder P-Ionen beschießt, dann kann man erreichen dass beispielsweise

---

<sup>5</sup> Das gilt bei Raumtemperatur. Wenn man Silizium auf tiefe Temperatur abkühlt, wird es zu einem ausgezeichneten Isolator.

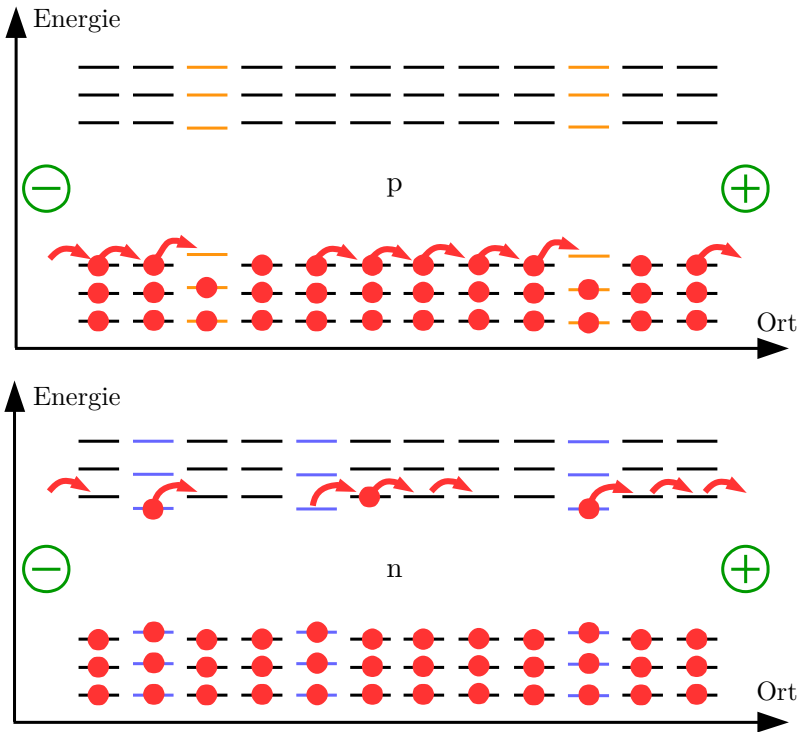


Abb. 10.2: Energieniveaus in p-dotiertem Silizium (oben) und in n-dotiertem Silizium (unten)

durchschnittlich jedes 10 000 ste Si-Atom im Kristall durch ein Al- oder P-Atom ersetzt wird. Die Folgen dieser Dotierung werden in Abb. 10.2 dargestellt. Die obere Skizze zeigt die Energieniveaus eines Aluminium-dotierten Silizium-Kristalls, die untere zeigt die Energieniveaus eines Phosphor-dotierten Silizium-Kristalls. Die Energieniveaus an den Orten der Al-Atome sind in gelber Farbe eingetragen, die Energieniveaus an den Orten der P-Atome in blauer Farbe.

Die Fremdatome versuchen, sich möglichst homogen in den Silizium-Kristall einzufügen. Das gelingt ihnen aber nur unvollkommen, weil sie ja ein Elektron zu viel oder zu wenig haben. Al-Atome haben ein Elektron weniger als Si-Atome. Wenn es einem Al-Atom gelingt, ein zufällig in der Nähe vorbeidiffundierendes Elektron einzufangen, dann kann es sich besser in den Si-Kristall einfügen. Aus diesem Grund ist nur sehr wenig Energie erforderlich, damit ein Elektron aus der Nachbarschaft zum Al-Atom wechselt, d. h. das unterste freie Energieniveau der Al-Atome liegt nur geringfügig höher als die höchsten besetzten Energieniveaus der benachbarten Si-Atome.

Deshalb kann ein Elektron eines Si-Atoms leicht thermisch dazu angeregt werden, zum Al-Atom zu wechseln und dadurch die Kristallstruktur um das Al-Atom herum zu perfektionieren. Wenn das geschieht, dann zieht es eine Kettenreaktion nach sich. Denn dann wird ja der ursprüngliche Platz dieses Elektrons frei, ein Nachbar-elektron kann auf diesen Platz wechseln und macht dabei seinen eigenen Platz frei, und so weiter. Jedes mal, wenn ein Elektron – wie durch die roten Pfeile angedeutet – um einen Platz nach rechts rückt, dann rückt der freie Platz nach links weiter. Die einzelnen Elektronen bewegen sich jeweils nur um einen einzigen Platz nach rechts. Aber der freie Platz, von den Halbleiter-Elektronikern prosaisch als *Loch* bezeichnet, bewegt sich nach und nach von rechts nach links durch den gesamten Kristall.

Im Effekt ist es so, als würde das *Loch* als positiv geladenes Teilchen von rechts nach links durch den Kristall diffundieren. Deshalb wird die Leitung mithilfe von Löchern als p-Leitung bezeichnet, und mit Al dotiertes Silizium als p-dotierter Halbleiter bzw. einfach p-Halbleiter. Das p steht für „positive Ladung“. Tatsächlich existiert positive Ladung nur in den Atomkernen, und die sind fest an ihrem jeweiligen Platz im Kristall eingebaut. Nur die negativ geladenen Elektronen sind beweglich. Das p in p-Halbleiter weist

lediglich darauf hin, dass es sich so verhält *als ob* sich positive Ladungen durch den Kristall bewegen.

P-Atome (nicht das P von Phosphor mit dem p von p-Halbleiter verwechseln!) können sich besser in den Silizium-Kristall einfügen, wenn sie ihr 15. Elektron abgeben (Si-Atome haben nur 14 Elektronen). Deshalb liegt das höchste belegte Energieniveau der P-Atome im Silizium-Kristall dicht unterhalb der ersten freien Energieniveaus der benachbarten Si-Atome, siehe die untere Skizze von Abb. 10.2. Die Energieniveaus der P-Atome sind dort blau dargestellt. Das 15. Elektron eines Phosphor-Atoms kann thermisch leicht in die freien Energieniveaus des Siliziums angeregt werden, und sich dann ungehindert bis zur + Elektrode bewegen. Weil die beweglichen Ladungen (sprich: die Elektronen) in diesem Fall negativ geladen sind, wird diese Art der Leitung als n-Leitung bezeichnet, und mit P dotiertes Silizium als n-dotierter Halbleiter bzw. einfach n-Halbleiter.

Jetzt ist es an der Zeit, auf die Frage mit den Elektroden zurück zu kommen, die ich oben einfach beiseite geschoben hatte: In der unteren Skizze von Abb. 10.2 habe ich durch einen Pfeil ganz links angedeutet, dass Elektronen von der Minus-Elektrode in die freien Energieniveaus des Si-Kristalls eingespeist werden. Das muss so sein, denn sonst wären bald alle 15. Elektronen der P-Atome zur Plus-Elektrode abgeflossen, und dann käme die n-Leitung zum Stillstand. Und in der oberen Skizze habe ich durch einen Pfeil ganz rechts angedeutet, dass Elektronen aus den obersten belegten Energieniveaus des Si-Kristalls in die Plus-Elektrode abfließen können, sprich dass Löcher von der Plus-Elektrode in die obersten belegten Energieniveaus des Si-Kristalls eingespeist werden. Das muss so sein, denn sonst wären bald alle Löcher zur Minus-Elektrode abgeflossen, und dann käme die p-Leitung zum Stillstand.

Wenn die Elektroden Löcher in den p-Halbleiter bzw. Elektronen

in den n-Halbleiter einspeisen, warum speisen sie dann weder Elektronen noch Löcher in den undotierten Si-Kristall von Abb. 10.1 auf Seite 308 ein? Das liegt daran, dass das in den Abbildungen 10.1 und 10.2 skizzierte Modell einen grundlegenden Fehler enthält – wie aufmerksame Leser längst bemerkt haben dürften. Elektronen „haben“ nicht einfach einen Ort, sondern sie bekommen einen Ort, wenn dieser Ort durch eine Messung erschaffen wird. Solange nicht der Ort eines Elektrons „etwa in der Mitte des Kristalls“ oder „ganz knapp links von der Plus-Elektrode“ oder wie auch immer durch eine Messung erschaffen wird, haben die Elektronen keinen Ort, d. h. sie sind (mindestens!) über den gesamten Kristall plus die beiden Elektroden delokalisiert.

Ein Modell mit delokalisierten Elektronen käme der Wahrheit näher; es wäre aber fürchterlich schwierig, mit dem verbesserten Modell den p-n-Übergang zu erklären. Das fehlerhafte Modell von Abb. 10.1 und 10.2 wird sich als gut geeignet zur Erklärung des p-n-Übergangs erweisen. Das liegt daran, dass es nicht nur falsche Züge (die Lokalisierung der Elektronen) sondern auch richtige Züge (das aus dem Naturgesetz (10.1b) folgende Verbot, einen Platz mit mehr als einem Elektron zu belegen) aufweist. Deshalb werden wir dies Modell trotz aller Bedenken doch weiterhin verwenden – mit der Vorsicht und Behutsamkeit, die bei einer **heuristischen** Argumentation geboten sind.<sup>6</sup>

Heuristische Überlegungen können dann zum richtigen Ergebnis führen, wenn falsche Annahmen (hier: die Lokalisierung der Elektronen) durch geeignete weitere Annahmen kompensiert werden. Die beiden zusätzlichen Annahmen, mit denen das heuristische

---

<sup>6</sup> Die Autoren von Lehrbüchern für Elektronik-Ingenieure versuchen häufig, die Unzulänglichkeiten des Modells zu übertünchen, mithilfe kunstreicher Kombinationen von delokalisierten und lokalisierten Elektronen, sowie Energiebändern die durch Raumladungen verbogen werden. Ich halte es für besser, den Lesern reinen Wein einzuschenken und ohne viel Herumgerede den heuristischen Charakter dieses Halbleitermodells zuzugeben.

Modell von Abb. 10.1 und 10.2 zu korrekten Ergebnissen führt, sind die folgenden:

- \* Metallische Elektroden können Elektronen in n-Halbleiter einspeisen, aber nicht in p-Halbleiter und nicht in undotierte Halbleiter.
- \* Metallische Elektroden können Löcher in p-Halbleiter einspeisen, aber nicht in n-Halbleiter und nicht in undotierte Halbleiter.

Mit diesen beiden zusätzlichen Annahmen im Hinterkopf betrachten wir jetzt den in Abb. 10.3 auf der nächsten Seite skizzierten p-n-Übergang. Es handelt sich um einen Halbleiter-Kristall, dessen rechter Teil p-dotiert ist, und dessen linker Teil n-dotiert ist. Die n- und p-dotierten Bereiche grenzen unmittelbar aneinander.

In der oberen Skizze wird an die linke Elektrode eine höhere Spannung angelegt als an die rechte Elektrode. Folglich fließen die beweglichen Elektronen des n-Bereichs zur linken Elektrode ab, und die Löcher des p-Bereichs fließen zur rechten Elektrode ab. Wie in den beiden Zusatzannahmen formuliert, können aber weder von der rechten Elektrode Elektronen in den p-Halbleiter eingespeist werden, noch Löcher von der linken Elektrode in den n-Halbleiter. Also können die abgeflossenen Elektronen und Löcher nicht von außen ersetzt werden, und der Stromfluss kommt zum Erliegen. Durch das + und – beim Übergang wird angedeutet, dass sich im linken Teil des p-n-Übergangs (auf der n-Seite) eine positive Raumladung aufbaut (Mangel an Elektronen), und dass sich im rechten Teil des p-n-Übergangs (auf der p-Seite) eine negative Raumladung aufbaut (Mangel an Löchern).

In der unteren Skizze wurden die Elektroden umgepolt. Jetzt fließen die beweglichen Elektronen von links nach rechts in den p-Bereich, und die abgeflossenen Elektronen werden von der linken Elektrode ersetzt. Die Löcher fließen von rechts nach links in den

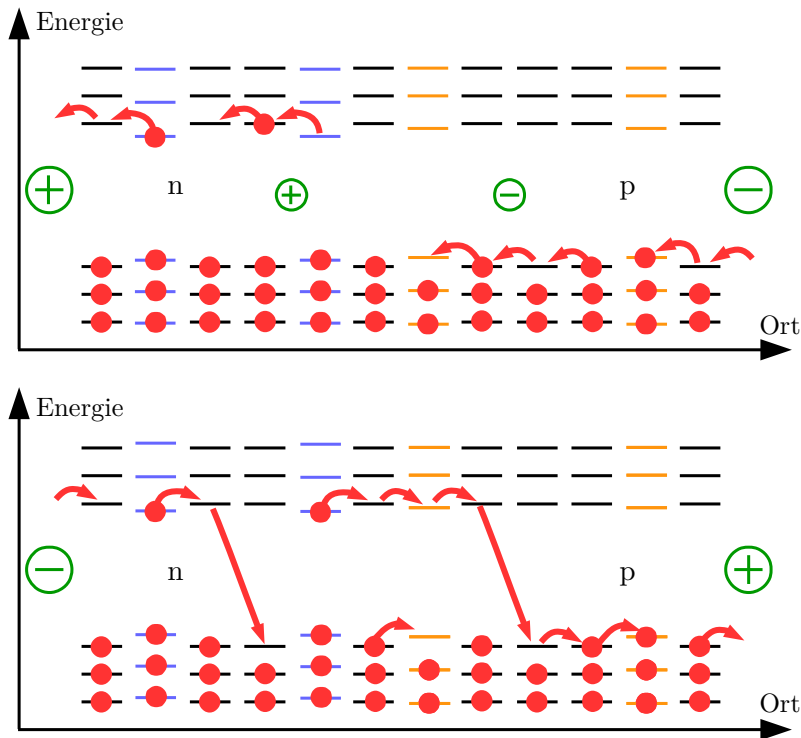


Abb. 10.3: p-n-Kontakt in Sperrrichtung (oben) und in Durchlassrichtung (unten)

n-Bereich, und die abgeflossenen Löcher werden von der rechten Elektrode ersetzt. Durch thermische Relaxation (Verlust von Energie durch Erzeugung von Vibrationen des Kristallgitters) werden die Elektronen früher oder später „in die Löcher herunterfallen“. Das stört den Stromtransport nicht, weil ständig neue Elektronen und Löcher von den Elektroden nachgeliefert werden.

Der p-n-Übergang wirkt also als ein Ventil für elektrische Ladung: Wenn der Pluspol am p-Halbleiter und der Minuspol am

n-Halbleiter liegt, dann wird Ladung durchgelassen, es fließt ein Strom. Bei umgekehrter Polung sperrt der p-n-Übergang, es fließt kein Strom. In der Elektrotechnik wird der p-n-Übergang als *Diode* bezeichnet.

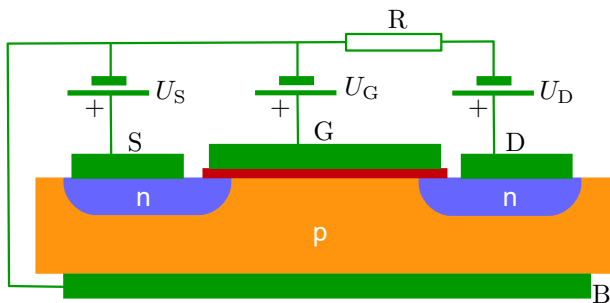


Abb. 10.4: Schnitt durch einen n-Kanal MOS-FET

In Abb. 10.4 ist ein Schnitt durch einen n-Kanal MOSFET (das **Akronym** steht für metal-oxide-semiconductor field-effect-transistor) gezeigt. In den gelb gemalten p-Halbleiter sind zwei blau gemalte Zonen mit n-Dotierung eindiffundiert. Es gibt vier grün gemalte Elektroden mit den Namen S = source, G = gate, D = drain, B = bulk.

Würde man an S eine negative und an B eine positive Spannung anlegen, dann hätte man eine Diode in Durchlassrichtung. Ebenso, wenn man an D eine negative und an B eine positive Spannung anlegen würde. Das tut man aber nicht, sondern man wählt die Source-Spannung  $U_S$ , die Drain-Spannung  $U_D$ , und die Gate-Spannung  $U_G$  stets

$$U_S \geq 0 \quad , \quad U_D \geq 0 \quad , \quad U_G \geq 0 .$$

Die Schaltzeichen oberhalb von Source, Gate, und Drain symbolisieren Spannungsquellen. Die Pluszeichen erinnern daran, dass  $U_S$ ,  $U_D$ , und  $U_G$  niemals negativ eingestellt werden. (Sie können aber

Null sein.) Das Schaltzeichen R symbolisiert einen Widerstand, der dafür sorgt dass der Transistor nicht überlastet wird.

Wozu sind die beiden Dioden gut, wenn sie stets gesperrt sind? Nun, der Clou bei der Sache ist die Gate-Elektrode. Sie ist durch eine dünne, dunkelrot gemalte Isolationsschicht, die in der Regel aus  $\text{SiO}_2$  = Siliziumdioxid besteht, vom Halbleiter getrennt. Dieser Aufbau des Gates aus den Schichten M = metal, O = oxide, S = semiconductor hat dem MOS-FET seinen Namen gegeben. Es gibt auch andere Arten von Feldeffekt-Transistoren, deren Gate anders konstruiert ist.

Solange  $U_G$  gleich Null ist fließt kein Strom, egal welche (positiven) Spannungen an Source und Drain gelegt sind. Denn die beiden Dioden sind ja stets gesperrt, es kann kein Strom durch die p-n-Übergänge fließen. Wenn aber  $U_G > 0$  eingestellt wird, dann passiert etwas bemerkenswertes:

Gleichnamige Ladungen stoßen sich ab, ungleichnamige Ladungen ziehen sich an. Das positiv geladene Gate stößt die Löcher des p-Halbleiters ab, und zieht die Elektronen an. Das führt dazu, dass in einer hauchdünnen Schicht unterhalb des Isolators ein Zustand eintritt, der in Abb. 10.5 auf der nächsten Seite dargestellt wird: Im p-Bereich sind sämtliche Löcher verschwunden. Sämtliche Plätze unterhalb der Energielücke sind von Elektronen belegt.

Diese Graphik entspricht nahezu der unteren Graphik von Abb. 10.2 auf Seite 311. Es gibt nur zwei kleine Unterschiede: Erstens sind die Atomkerne der Al-Atome nur 13-fach positiv geladen, es befinden sich aber bei jedem Al-Atom von Abb. 10.3 14 Elektronen. Der p-Bereich enthält also eine kleine negative Raumladung, die jedoch den Stromtransport zwischen Source und Drain nicht ernsthaft behindert. Und zweitens gibt es im p-Bereich keine P-Atome. Das stört den Stromtransport noch weniger.

Wenn an Source und Drain unterschiedliche Spannungen liegen, dann können Elektronen sich wie in einem reinen n-Halbleiter auf

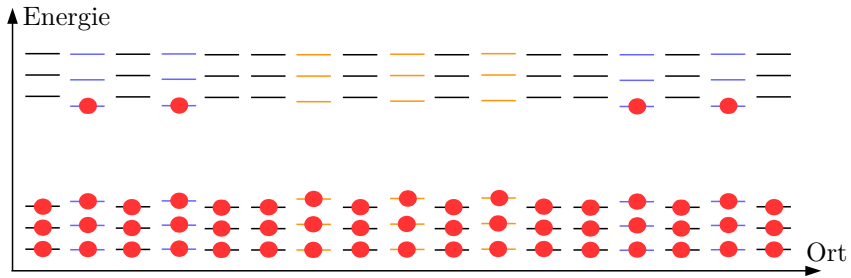


Abb. 10.5: Energieniveaus im n-Kanal

der einen Seite des Kristalls auf den Weg machen, und durch die freien Plätze oberhalb der Energielücke den langen Weg bis zur anderen Seite des Kristalls hinüber diffundieren. Es gibt keine Löcher, die die Elektronen einfangen könnten, denn sämtliche Plätze unterhalb der Energielücke sind bereits belegt.

Weil die Leitung des Stroms in der dünnen Schicht unter dem Isolator nahezu identisch mit der Stromleitung in einem reinen n-Halbleiter ist, wird diese Schicht als n-Kanal bezeichnet. Je nach Gatespannung ist der n-Kanal zwischen wenigen Nanometern und vielen hundert Nanometern dick. (In Leistungstransistoren kann der Kanal noch weitaus dicker sein.) Bei festgehaltener Differenz zwischen  $U_S$  und  $U_D$  wird der Strom zwischen Source und Drain um so größer, je dicker der n-Kanal ist. Durch das Gate fließt kein Strom, deshalb kann man durch Variation von  $U_G$  die Stromstärke zwischen Source und Drain nahezu verlustfrei regeln.<sup>7</sup> Ohne den Widerstand  $R$  würde der Transistor schnell Rauchzeichen geben und innerhalb weniger Sekunden zerstört sein. Man muss bei der Verwendung von Transistoren stets auf eine geeignet dimensionierte

<sup>7</sup> für Physiker: Die Regelung ist nur „nahezu“ verlustfrei, weil durch das Gate zwar kein Gleichstrom, wohl aber ein Wechselstrom fließt. In Hochfrequenz-Anwendungen sind die Schaltverluste des Gates ganz erheblich.

Beschaltung achten.

In jedem Prozessor eines Computers oder Smartphones sind viele Millionen von Feldeffekttransistoren zusammengeschaltet. Wären Elektronen nicht Fermionen (die der Fermi-Dirac-Statistik, sprich dem Naturgesetz (10.1b), unterliegen) sondern Dinge (die der Maxwell-Boltzmann-Statistik unterliegen), dann gäbe es keinen p-n-Übergang, keine Transistoren, keine Halbleiterelektronik.

## 10.3 Der Laser

Das Naturgesetz (10.1) hat zur Folge, dass beispielsweise zwei Elektronen (Elektronen sind Fermionen) in einem Festkörper niemals in allen Eigenschaften übereinstimmen können. Im Fall von Bosonen gibt es diese Einschränkung nicht. Das Licht eines Lasers besteht aus Photonen, Photonen sind Bosonen, und das Funktionsprinzip des Lasers besteht tatsächlich darin, dass eine gigantische Zahl von Photonen alle in genau dem gleichen Quantenzustand präpariert werden.

LASER ist ein **Akronym**: Es steht für Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation. Um zu verstehen, was es mit der stimulierten Emission auf sich hat, müssen wir uns zunächst an einige wichtige Ergebnisse von Kapitel 3 erinnern:

Zur Deutung von Lenard's in Abschnitt 3.1 geschilderten Experimenten stellte Einstein 1905 seine Lichtquanten-Hypothese auf, d. h. er postulierte dass Atome und Moleküle Licht in Form unteilbarer Energiekörner **absorbieren** oder **emittieren**. Darüber habe ich in Abschnitt 3.2 berichtet. Einstein bezeichnete die Energiekörner als Lichtquanten. Später bürgerte sich dafür der Name Photonen ein.

Auf Seite 51 wurde die Gleichung (3.3) angegeben, mit der Planck im Jahr 1900 erstmals die Energiedichte der „Schwarzen Strahlung“ korrekt beschreiben konnte:

$$\text{Energiedichte der Schwarzen Strahlung} \stackrel{(3.3)}{=} \frac{8\pi h\nu^3/c^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (10.8)$$

Was mit „Schwarzer Strahlung“ gemeint ist, wurde in den Absätzen vor (3.3) erklärt. Diese Gleichung besagt, dass die Energiedichte der Strahlung mit der Frequenz  $\nu$  in einem Ofen nur von der Temperatur  $T$  des Ofens abhängt. Alle anderen Faktoren in (10.8) sind Konstanten.

Bei der Veröffentlichung der Lichtquantenhypothese hatte Einstein darauf hingewiesen, dass diese Hypothese und Planck's Gleichung genau dann miteinander verträglich sind, wenn jedes Photon die Energie  $h\nu$  hat, wobei  $\nu$  die Frequenz des Lichts und  $h$  die Planck'sche Konstante ist. „Energiedichte“ bedeutet „Energie pro Volumen“. Man kann Planck's Strahlungsformel also auch als

$$\frac{N_{\text{Phot}} h\nu}{V} \stackrel{(10.8)}{=} \frac{8\pi h\nu^3/c^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (10.9)$$

schreiben, mit  $N_{\text{Phot}}$  gleich Anzahl der Photonen mit der Energie  $h\nu$ , die sich im Volumen  $V$  des Ofens befinden.

Im Jahr 1916 beschäftigte Einstein sich wieder einmal mit dieser merkwürdigen Formel. Dabei fiel ihm Folgendes auf [75]<sup>8</sup>:

In Abbildung 10.6 auf der nächsten Seite wird der Vorgang von Absorption und Emission eines Photons symbolisch dargestellt. Die blaue Wellenlinie links symbolisiert ein Photon, das auf ein Atom in der Wand des Ofens trifft. Vereinfachend nehmen wir an, dass das Atom nur zwei unterschiedliche Zustände annehmen kann, in denen es die Energie  $E_j$  bzw.  $E_k$  hat. Die beiden möglichen Energien werden durch die schwarzen Striche dargestellt. Wenn das Atom die Energie  $E_j$  hat, ist der schwarze Strich  $j$  mit einem roten Punkt markiert; wenn es die Energie  $E_k$  hat, ist der Strich  $k$  markiert.

<sup>8</sup> Physiker finden in [76] eine elementare Darstellung von Einstein's Überlegungen.

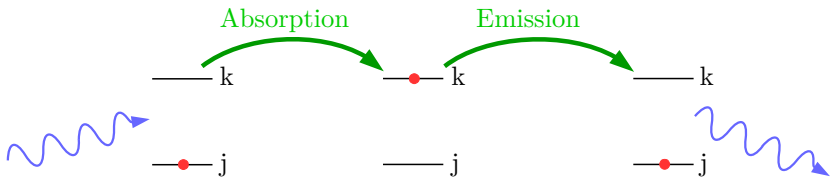


Abb. 10.6: Absorption und Emission eines Photons

Zwei Bedingungen müssen erfüllt sein, damit das Atom das Photon absorbieren kann: Erstens muss das Atom im Zustand  $j$  sein. Wenn es bei Ankunft des Photons bereits im Zustand  $k$  ist kann es kein Photon absorbieren, weil es in unserem einfachen Modell keinen möglichen Zustand mit noch größerer Energie als  $E_k$  gibt. Zweitens muss das Photon die passende Energie  $h\nu = E_k - E_j$  haben.

Wenn beide Bedingungen erfüllt sind, dann *kann* das Atom das Photon absorbieren. Es wird das aber nicht mit Sicherheit tun, sondern nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit, die von der Art des Atoms abhängt. Die Wahrscheinlichkeit  $W_{jk}$  dafür, dass in einer Sekunde irgendeines der Atome in den Wänden des Ofens ein Photon absorbiert ist **proportional** zur Zahl  $N_j$  dieser Atome, die sich gerade im Zustand  $j$  befinden, und proportional zur Dichte  $N_{\text{Phot}}/V$  der Photonen mit der passenden Energie  $h\nu = E_k - E_j$  im Ofen. Die **Proportionalitätskonstante** nannte Einstein  $B_{jk}$ :

$$W_{jk} = B_{jk} N_j \frac{N_{\text{Phot}}}{V} \quad (10.10a)$$

Wenn das Atom das Photon absorbiert hat, dann hat es die Energie  $E_k$ . Nach einiger Zeit wird es ein Photon mit der Energie  $h\nu = E_k - E_j$  emittieren, und anschließend nur noch die Energie  $E_j$  haben. Die Wahrscheinlichkeit  $W_{kj}$  dafür, dass in einer Sekunde irgendeines der Atome in der Wand des Ofens ein Photon emittiert,

ist proportional zur Zahl  $N_k$  der Atome, die sich gerade im Zustand  $k$  befinden. Die Proportionalitätskonstante, die ebenfalls von der Art der Atome abhängt, nannte Einstein  $A_{kj}$ :

$$W_{kj} = A_{kj} N_k \quad (10.10b)$$

Eine wichtige Eigenschaft des sogenannten Absorptionskoeffizienten  $B_{jk}$  und des Emissionskoeffizienten  $A_{kj}$  ist, dass beide nicht von der Temperatur abhängen. Das war bereits damals aus spektroskopischen Untersuchungen zuverlässig bekannt, und ist für Einstein's Schlussfolgerungen bedeutsam.

Wenn mehr Photonen von den Wänden des Ofens absorbiert als emittiert werden, dann nimmt die Zahl  $N_{\text{Phot}}$  der Photonen im Ofen ab. Umgekehrt nimmt die Zahl  $N_{\text{Phot}}$  der Photonen im Ofen zu, wenn die Wände mehr Photonen emittieren als absorbieren. Planck's Gleichung (10.9) beschreibt einen als „thermodynamisches Gleichgewicht“ bezeichneten Zustand, bei dem sich die Zahl der Photonen (bei konstanter Temperatur  $T$ ) nicht verändert, d. h. es werden ständig gleich viel Photonen absorbiert und emittiert.

thermodynamisches Gleichgewicht:

$$B_{jk} N_j \frac{N_{\text{Phot}}}{V} \stackrel{(10.10a)}{=} W_{jk} = W_{kj} \stackrel{(10.10b)}{=} A_{kj} N_k \quad (10.11)$$

Aus dieser Gleichung folgt

thermodynamisches Gleichgewicht:

$$\frac{N_k}{N_j} \stackrel{(10.11)}{=} \frac{B_{jk} N_{\text{Phot}}/V}{A_{kj}} \quad (10.12)$$

Es gibt für das Verhältnis von  $N_k$  zu  $N_j$  im thermodynamischen Gleichgewicht eine weitere Relation, die damals ebenfalls bereits wohlbekannt und fest etabliert war:

thermodynamisches Gleichgewicht:

$$\frac{N_k}{N_j} = e^{-(E_k - E_j)/(kT)} \begin{cases} < 1 & \text{bei } T < \infty \\ \rightarrow 1 & \text{bei } T \rightarrow \infty \end{cases} \quad (10.13)$$

Leser, die die Exponentialfunktion nicht kennen, sollten einfach glauben dass die Temperaturabhängigkeit so ist, wie hier angegeben: Bei jeder endlichen Temperatur ist im thermodynamischen Gleichgewicht  $N_k/N_j < 1$ , und das Verhältnis  $N_k/N_j$  kommt der 1 um so näher, je höher die Temperatur ist.

Die Anzahl der Photonen im Ofen steigt nach Planck's Gleichung mit zunehmender Temperatur  $T$  immer weiter an, und erreicht bei  $T \rightarrow \infty$  beliebig große Werte:

$$\frac{N_{\text{Phot}}}{V} \stackrel{(10.9)}{=} \frac{1}{h\nu} \cdot \frac{8\pi h\nu^3/c^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \infty \quad (10.14)$$

(Wieder sollten Leser, die die Exponentialfunktion  $e^{\frac{h\nu}{kT}}$  nicht kennen, das einfach glauben.) Mit diesem Ergebnis folgt aus (10.12)

thermodynamisches Gleichgewicht:

$$\frac{N_k}{N_j} \stackrel{(10.12)}{=} \frac{B_{jk} N_{\text{Phot}}/V}{A_{kj}} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \infty. \quad (10.15)$$

Hier stimmt etwas nicht! Laut (10.13) kann das Verhältnis  $N_k/N_j$  im thermodynamischen Gleichgewicht niemals größer als 1 sein, aber laut (10.15) wird es bei hoher Temperatur beliebig groß.

Wo steckt der Fehler? Einstein wollte – zu Recht, wie wir heute wissen – weder an der Relation (10.13) noch an Planck's Gleichung (10.14) zweifeln. Bleiben als mögliche Fehlerquellen nur noch die beiden Gleichungen (10.10a) und (10.10b). Einstein tippte auf (10.10b), und zeigte dass alle Unstimmigkeiten verschwinden wenn man diese Gleichung durch

$$W_{kj} = A_{kj}N_k + B_{kj}N_k \frac{N_{\text{Phot}}}{V} \quad (10.16)$$

ersetzt. Der Term  $A_{kj}N_k$  war bereits in (10.10b) enthalten. Er wird als „spontane Emission“ bezeichnet, und ist im rechten Teil von Abb. 10.6 auf Seite 322 symbolisiert. Neu hinzugekommen ist der Term  $B_{kj}N_k N_{\text{Phot}}/V$ , der als „stimulierte Emission“ bezeichnet und in Abb. 10.7 veranschaulicht wird.

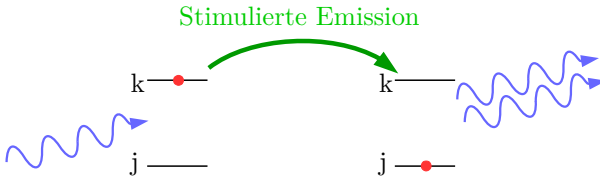


Abb. 10.7: Stimulierte Emission eines Photons

Bei der stimulierten Emission trifft ein Photon auf ein Atom, das sich bereits im angeregten Zustand  $k$  befindet. Also kann das Atom das Photon nicht absorbieren. Oben haben wir angenommen dass das Atom das Photon einfach ignoriert, aber Einstein postulierte dass das nicht stimmt. Vielmehr spürt das angeregte Atom die Anwesenheit des Photons, und wird dadurch zur Emission eines weiteren Photons stimuliert. Die Wahrscheinlichkeit  $W_{kj}$  dafür, dass das in einer Sekunde irgendwo an den Wänden des Ofens geschieht, ist proportional zur Anzahl  $N_k$  der Atome, die sich gerade im Zustand  $k$  befinden, und proportional zur Dichte  $N_{\text{Phot}}/V$  der Photonen im Ofen, die die Energie  $h\nu = E_k - E_j$  haben. Die Proportionalitätskonstante nannte Einstein  $B_{kj}$ .

Mit (10.16) erhält man im thermodynamischen Gleichgewicht anstelle von (10.11)

thermodynamisches Gleichgewicht:

$$\begin{aligned}
 B_{jk}N_j \frac{N_{\text{Phot}}}{V} &\stackrel{(10.10a)}{=} W_{jk} = W_{kj} \stackrel{(10.16)}{=} A_{kj}N_k + B_{kj}N_k \frac{N_{\text{Phot}}}{V} \\
 \implies \frac{N_k}{N_j} &= \frac{B_{jk}}{A_{kj}/(N_{\text{Phot}}/V) + B_{kj}} \quad (10.17)
 \end{aligned}$$

Jeder der drei Koeffizienten  $A_{kj}$ ,  $B_{jk}$ , und  $B_{kj}$  ist größer als Null, und von der Temperatur unabhängig. Die Photonendichte  $N_{\text{Phot}}/V$  ist ebenfalls größer als Null, und steigt bei  $T \rightarrow \infty$  gegen unendlich an. Also hat (10.17) die richtige, mit (10.13) übereinstimmende Temperaturabhängigkeit, wenn die Koeffizienten für Absorption und für stimulierte Emission gleich sind:

$$B_{jk} = B_{kj} \quad (10.18)$$

Einstein konnte zeigen<sup>9</sup> dass man von der gut bekannten Eigenschaft (10.13) des thermodynamischen Gleichgewichts direkt zur Struktur (10.9) der Planck'schen Gleichung gelangt, wenn man annimmt dass es stimulierte Emission mit der Eigenschaft (10.18) gibt. Das war ein bedeutender Fortschritt, weil dies die erste plausible Erklärung dieser Gleichung war, die Planck im Jahr 1900 als „glücklich erratene Interpolationsformel“ gefunden hatte.

Einstein gab sich mit diesem wissenschaftlichen Erfolg zufrieden. Eine technische Nutzung der stimulierten Emission zog damals niemand in Betracht. Das geschah erst seit den fünfziger Jahren. 1953 realisierten Charles Townes (1915–2015) und James Gordon (1928–2013) einen Laser, der jedoch keinen Lichtstrahl sondern einen Strahl von Mikrowellen erzeugte, und deshalb als Maser

---

<sup>9</sup> für Physiker:  $\frac{N_k}{N_j} \stackrel{(10.13)}{=} e^{-(E_k - E_j)/(kT)} \stackrel{(10.17)}{=} \frac{B_{jk}}{A_{kj}/(N_{\text{Phot}}/V) + B_{kj}}$   
 $\implies \frac{N_{\text{Phot}}}{V} = \frac{A_{kj}/B_{jk}}{e^{+(E_k - E_j)/(kT)} - B_{kj}/B_{jk}}$

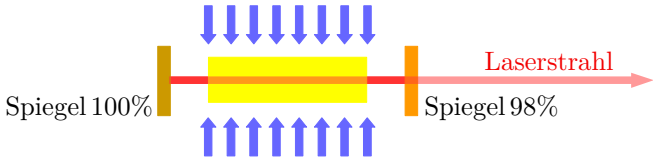


Abb. 10.8: Das Funktionsprinzip eines Lasers

bezeichnet wurde. Den ersten sichtbaren Laserstrahl erzeugte im Jahr 1960 Theodore Maiman (1927 – 2007).

In Abb. 10.8 ist skizziert, wie ein Laser im Prinzip funktioniert. Zwischen zwei Spiegeln befindet sich das (hier gelb angedeutete) Laser-Medium. Das Medium kann ein Gas sein, oder eine Flüssigkeit, oder ein Festkörper. Durch die blauen Pfeile wird die Anregung des Mediums angedeutet, die zum Beispiel durch externe Beleuchtung oder durch eine elektrische Gasentladung realisiert werden kann.

Was dann geschieht, kann man aus Gleichung (10.17) ablesen:

$$B_{jk}N_j \frac{N_{\text{Phot}}}{V} = W_{jk} \stackrel{(10.17)}{=} W_{kj} = A_{kj}N_k + B_{kj}N_k \frac{N_{\text{Phot}}}{V}$$

Die angeregten Atome des Mediums emittieren spontan — proportional zum Faktor  $A_{kj}$  — Photonen. Die meisten Photonen fliegen in irgend eine Richtung davon und gehen verloren. Aber bald wird eines der Photonen zufällig so auf die Spiegel treffen, dass es ins Medium zurückgespiegelt wird, und vielfach zwischen den beiden Spiegeln hin und her reflektiert wird. Dies Photon wird dann — proportional zum Faktor  $B_{kj}N_k$  — die Emission eines weiteren Photons stimulieren. Oder es wird — proportional zum Faktor  $B_{jk}N_j$  — von einem Atom des Mediums absorbiert werden.

Was man gerne möchte ist, dass das zwischen den Spiegeln hin und her fliegende Photon möglichst viele angeregte Atome zur Emission eines weiteren Photons stimuliert. Diese sollen dann ebenfalls zwischen den Spiegeln hin und her fliegen und weitere angeregte Atome zur Emission weiterer Photonen stimulieren, so dass man

insgesamt eine lawinenartige Verstärkung des Photonenstrahls zwischen den Spiegeln erhält. Das wird aber im thermodynamischen Gleichgewicht nicht geschehen, denn dann ist ja laut (10.13) stets  $N_k/N_j \leq 1$ . Folglich ist im

thermodynamischen Gleichgewicht:

$$\frac{\text{Wahrscheinlichkeit für stimulierte Emission}}{\text{Wahrscheinlichkeit für Absorption}} =$$

$$\stackrel{(10.17)}{=} \frac{B_{kj}N_k}{B_{jk}N_j} \stackrel{(10.18)}{=} \frac{N_k}{N_j} \stackrel{(10.13)}{<} 1 \quad (10.19)$$

Das zwischen den Spiegeln hin und her fliegende Photon wird mit höherer Wahrscheinlichkeit gleich wieder absorbiert, als dass es eine stimulierte Emission auslöst. Eine Verstärkung des Lichtstrahls zwischen den Spiegeln kann es nur mit  $N_k > N_j$  geben, d. h. wenn *kein* thermodynamisches Gleichgewicht besteht.

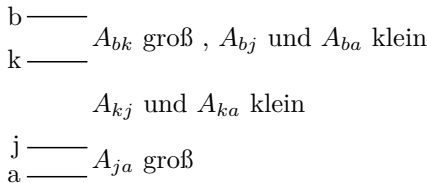


Abb. 10.9: Ein 4-Niveau Lasermedium

Man kann sich von der störenden Einschränkung durch das thermodynamische Gleichgewicht befreien, wenn man zur Anregung des Mediums durch die äußere Lichtquelle oder die elektronische Entladung andere Energieniveaus wählt als für die stimulierte Emission. In Abb. 10.9 wird das Prinzip eines 4-Niveau-Lasers gezeigt. Man regt möglichst viele Atome aus dem Grundzustand  $a$  in den Zustand  $b$  an. Wenn die Koeffizienten für spontane Emission so sind wie in Abb. 10.9 eingetragen, dann werden zwar wie beim 2-Niveau-System stets mehr Atome im Zustand  $a$  als im Zustand  $b$

sein ( $N_a > N_b$ ), aber zugleich werden mehr Atome im Zustand  $k$  als im Zustand  $j$  sein ( $N_j < N_k$ ). Denn der Zustand  $k$  ist langlebig (wegen  $A_{kj}$  und  $A_{ka}$  klein), und wird (wegen  $A_{bk}$  groß,  $A_{bj}$  klein,  $A_{ba}$  klein) ständig aus dem Zustand  $b$  effizient bevölkert. Dagegen ist der Zustand  $j$  kurzlebig (wegen  $A_{ja}$  groß), und wird ständig effizient in den Zustand  $a$  entleert.

Dank der sogenannten Besetzungsinversion  $N_j < N_k$  bewirken Photonen mit der Energie  $h\nu = E_k - E_j$  häufiger stimulierte Emission, als dass sie selbst absorbiert werden:

$$\frac{\text{Wahrscheinlichkeit für stimulierte Emission}}{\text{Wahrscheinlichkeit für Absorption}} =$$

$$\stackrel{(10.17)}{=} \frac{B_{kj}N_k}{B_{jk}N_j} \stackrel{(10.18)}{=} \frac{N_k}{N_j} > 1 \text{ im System Abb. 10.9} \quad (10.20)$$

Also wird man eine Verstärkung des Laserlichts mit der Photonenenergie  $h\nu = E_k - E_j$  erhalten.

Das durch Stimulation emittierte Photon hat den gleichen Quantenzustand wie das Photon, das die stimulierte Emission bewirkt hat. An dieser Stelle ist wichtig, dass Photonen als Bosonen dem Naturgesetz (10.1a) unterliegen. Wenn Photonen Fermionen wären, dann könnten laut (10.1b) niemals zwei von ihnen den gleichen Quantenzustand haben. Die beiden Photonen haben den gleichen Quantenzustand, bewegen sich also im Takt, mit Wellenberg bei Wellenberg und Wellental bei Wellental, und in die gleiche Richtung, wie rechts in Abb. 10.7 auf Seite 325 angedeutet.

Bei jedem Durchgang durch das Lasermedium stimulieren diese Photonen die Emission weiterer Photonen, so dass nach kurzer Zeit der Raum zwischen den beiden Spiegeln mit einer gigantischen Menge von Photonen gefüllt ist, die (fast) alle im Takt schwingen, und (fast) alle die gleiche Energie  $h\nu = E_k - E_j$  haben. Ein kleiner Teil dieser Photonen (z. B. 2% im Beispiel von Abb. 10.8) wird durch einen der beiden Spiegel ausgekoppelt, und bildet den nutzbaren Laserstrahl.

Weil die Wellenberge und Wellentäler der Photonen im Laserstrahl aneinander ausgerichtet sind, wird Laserlicht in populären Darstellungen zuweilen als „kohärent“ bezeichnet, im Gegensatz zum Licht beispielsweise der Sonne oder von Glühlampen, das „inkohärent“ sei. In dieser Sprechweise wird der Sachverhalt bis ins Unsinnige vereinfacht.

Es ist nicht so, dass manche Sorten von Licht „kohärent“ und andere Sorten „inkohärent“ sind. Sondern jedes Licht hat eine bestimmte *Kohärenzlänge*, die man mit einem Interferometer, wie es in Abb. 2.2 auf Seite 26 dargestellt wurde, ausmessen kann. Dazu justiert man den beweglichen Schlitten S zunächst so ein, dass die Wege A und B genau gleich lang sind. Dann beginnt man den Schlitten zu verschieben. Dabei beobachtet man dass die Lichtintensität, die von den Detektoren  $D_G$  und  $D_H$  gemessen wird, zunächst variiert wie in Abb. 2.3 dargestellt. Aber bei größerer Weglängendifferenz werden die Interferenzen immer undeutlicher, und schließlich beobachten beide Detektoren nur noch gleichmäßig die halbe Gesamtintensität, unabhängig von der weiteren Verschiebung des Schlittens.

Die maximale Weglängendifferenz, bei der die Interferenzen noch klar erkennbar<sup>10</sup> sind, ist die Kohärenzlänge des Lichts. Jedes Licht, auch Laserlicht, hat nur eine endliche Kohärenzlänge. Das liegt daran, dass im Lasermedium die spontane Emission zwar wesentlich seltener vorkommt als die stimulierte Emission, aber nicht völlig verschwunden ist. Und jedes Licht, auch das Licht der Sonne und das Licht von Glühlampen, hat<sup>11</sup> eine Kohärenzlänge  $> 0$ . Das liegt daran dass auch ein Photon, das sich nur einmal durch das strahlende Medium bewegt, eine kleine Chance hat stimulierte Emission bei anderen angeregten Atomen zu bewirken.

<sup>10</sup> Man muss natürlich ein präzises quantitatives Kriterium dafür definieren, was mit „klarer Erkennbarkeit“ genau gemeint ist.

<sup>11</sup> Mit Licht der Kohärenzlänge = 0 würde kein optisches Instrument funktionieren, nicht einmal eine einfache Lesebrille.

Wenn man bei der Messung der Kohärenzlänge von Sonnenlicht als Detektor einfach sein menschliches Auge verwendet, dann findet man als Kohärenzlänge etwa  $1 \mu\text{m}$ . Wenn man dagegen Detektoren verwendet, die auch infrarotes und ultraviolettes Licht wahrnehmen, dann wird die Kohärenzlänge kleiner. Größer wird die Kohärenzlänge, wenn man vor den Detektor einen Farbfilter hält, der z. B. nur grünes Licht oder nur rotes Licht durchlässt.

Es gibt demnach einen eindeutigen Zusammenhang zwischen der Bandbreite des (wahrgenommenen) Lichts und seiner Kohärenzlänge: Je **monochromatischer** das Licht ist (d. h. je kleiner seine wahrgenommene Bandbreite ist), desto größer ist die Kohärenzlänge. Wenn die Bandbreite des Detektors größer ist als die Bandbreite des untersuchten Lichts, dann wird die Kohärenzlänge allein durch die Bandbreite des untersuchten Lichts bestimmt. Das ist z. B. der Fall, wenn man mit dem menschlichen Auge als Detektor die Kohärenzlänge des Lichts ausmisst, das Gase bei niedrigem Druck in elektrischen Entladungen emittieren.



Den „Weltrekord“ der Kohärenzlängen hielt vor der Entwicklung der Laser das rote Licht der Cäsium-Gasentladung mit etwa 2 m. Mit stabilen Lasern kann man Kohärenzlängen von vielen Dutzenden von Kilometern erreichen. Das zeigt dass Laser unglaublich schmalbandiges (monochromatisches) Licht emittieren können.

Man könnte schmalbandiges Licht auch dadurch herstellen, dass man breitbandiges Licht durch einen Filter schickt, der nur Licht mit einer sehr schmalen Bandbreite durchlässt. Aber dies Licht wäre ziemlich schwach, weil ja der größte Teil der Intensität im Filter absorbiert wird. Bei Laserlicht braucht man keine Kompromisse zu schließen: Man kann ohne Filterverluste sehr, sehr schmalbandiges Licht mit sehr, sehr hoher Intensität bekommen. Viele Anwendungen der Lasertechnik in Wissenschaft, Kommunikationstechnik, und Vermessungstechnik beruhen auf dieser einzigartigen Kombination von schmaler Bandbreite und hoher Intensität.

# Lexikon

## Mathematische Zeichen:

$=$	ist gleich	$>$	ist größer als
$\approx$	ist ungefähr gleich	$\geq$	ist gleich oder größer als
$\sim$	ist proportional zu	$\gtrsim$	ist gleich oder wenig größer als
$\hat{=}$	entspricht	$<$	ist kleiner als
$\infty$	unendlich	$\leq$	ist gleich oder kleiner als
		$\lesssim$	ist gleich oder wenig kleiner als

zurück mit der   Tastenkombination oder dem Rücksprung-Button des Readers

$5^{-3}$  : Man spricht  $a^b$  als „ $a$  hoch  $b$ “. Die hochgestellte Zahl ist der **Exponent**. Der Exponent gibt an, wie oft die untere Zahl mit sich selbst multipliziert werden soll:


$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$$

$$17 \cdot 10^7 = 17 \cdot 10\,000\,000 = 170\,000\,000$$

Wenn der Exponent ein negatives Vorzeichen hat, ist der Kehrwert gemeint:



$$5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{1}{125}$$

$$67\,258 \cdot 10^{-2} = \frac{67\,258}{10^2} = \frac{67\,258}{100} = 672,58$$



zurück mit der   Tastenkombination oder dem Rücksprung-Button des Readers

**Mikro-,Kilo-,Giga-,...** Vorsilben für Zehnerfaktoren:



Silbe	Zeichen	Faktor	Beispiel
Nano-	n	$10^{-9}$	5,4 nm = 5,4 Nanometer = 0,000 000 005 4 m
Mikro-	$\mu$	$10^{-6}$	2,7 $\mu$ s = 2,7 Mikrosekunden = 0,000 002 7 s
Milli-	m	$10^{-3}$	3 mm = 3 Millimeter = 0,003 m
Zenti-	c	$10^{-2}$	9,1 cm = 9,1 Zentimeter = 0,091 m
Dezi-	d	$10^{-1}$	2 dl = 2 Deziliter = 0,2 l
Hekto-	h	$10^2$	1013 hPa = 1013 Hektopascal = 101 300 Pa
Kilo-	k	$10^3$	4,1 kg = 4,1 Kilogramm = 4 100 g
Mega-	M	$10^6$	1,3 MW = 1,3 Megawatt = 1 300 000 W
Giga-	G	$10^9$	12 GHz = 12 Gigahertz = 12 000 000 000 Hz

zurück mit der   Tastenkombination oder dem Rücksprung-Button des Readers

**absorbieren:** (lateinisch) absorbere = aufsaugen, verschlingen

zurück mit der   Tastenkombination oder dem Rücksprung-Button des Readers

**äquivalent:** (lateinisch) aequus = gleich ; (lateinisch) valens = kraftvoll, wirksam, mächtig  
 → äquivalent = gleichwertig

zurück mit der   Tastenkombination oder dem Rücksprung-Button des Readers

**Akronym:** (griechisch) akron = Spitze, Gipfel, (griechisch) onoma = Name


Ein Akronym ist ein Kurzwort, das aus den Anfangsbuchstaben mehrerer Wörter zusammengesetzt ist. Beispiele:

EDV = Elektronische Datenverarbeitung

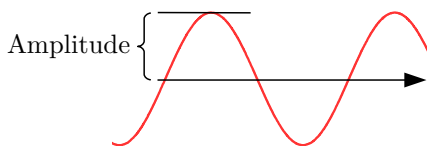
PC = personal computer



TÜV = Technischer Überwachungsverein

SPDC = spontaneous parametric down conversion

zurück mit der   Tastenkombination oder dem Rücksprung-Button des Readers



**Amplitude:** Die Amplitude ist der Maximalwert einer Welle.



zurück mit der   Tastenkombination oder dem Rücksprung-Button des Readers



**anisotrop:** (griechisch) iso = gleich, tropos = Drehung, Richtung, an- = un- (Verneinung).

Isotrop bedeutet, dass alle Richtungen im Raum gleich(wertig) sind. Anisotrop bedeutet das Gegenteil.

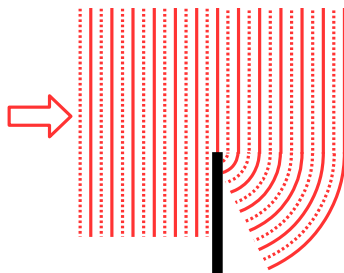
zurück mit der   Tastenkombination oder dem Rücksprung-Button des Readers


$\alpha, \beta, \gamma, \dots$  Griechische Buchstaben:

$\alpha$ = alpha	$\iota$ = iota	$\Pi$ = Pi
$\beta$ = beta	$\kappa$ = kappa	$\rho$ = rho
$\gamma$ = gamma	$\lambda$ = lambda	$\sigma$ = sigma
$\Gamma$ = Gamma	$\Lambda$ = Lambda	$\Sigma$ = Sigma
$\delta$ = delta	$\mu$ = mü	$\tau$ = tau
$\Delta$ = Delta	$\nu$ = nü	$\phi, \varphi$ = phi
$\epsilon, \varepsilon$ = epsilon	$\xi$ = ksi	$\chi$ = chi
$\zeta$ = zeta	$\Xi$ = Ksi	$\psi$ = psi
$\eta$ = eta	$o$ = omikron	$\omega$ = omega
$\theta, \vartheta$ = theta	$\pi$ = pi	$\Omega$ = Omega

zurück mit der   Tastenkombination oder dem Rücksprung-Button des Readers



**Beugung:** Als Beugung wird die Ablenkung von Wellen an einem Hindernis bezeichnet. In der Skizze sollen die durchgezogenen Linien Wellenberge andeuten, die gestrichelten Linien Wellentäler. Die Welle breitet sich von links nach rechts aus. Hinter dem schwarz gezeichneten Hindernis breitet sie sich durch *Beugung* in den Raumbereich aus, der auf geradem Weg durch das Hindernis versperrt wäre. Die Beugung kommt durch konstruktive bzw. destruktive Interferenz von Teilwellen zustande, die unterschiedlich weit oberhalb vom Hindernis passieren.



zurück mit der   Tastenkombination oder dem Rücksperr-Button des Readers


### **Credo:**

(lateinisch) credo = ich glaube


zurück mit der   Tastenkombination oder dem Rücksperr-Button des Readers

**dezidiert:** (lateinisch) decidere = eine Entscheidung treffen

→ dezidiert = entschieden

zurück mit der   Tastenkombination oder dem Rücksperr-Button des Readers

**determinieren:** (lateinisch) (de)terminare = abgrenzen, bestimmen

zurück mit der   Tastenkombination oder dem Rücksprung-Button des Readers



**diskret, kontinuierlich:**

(lateinisch) discretum = abgesondert, getrennt

(lateinisch) continens = zusammenhängend, angrenzend

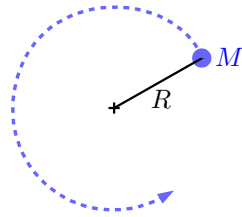
Die Worte kontinuierlich und diskret werden in der Physik im Sinn ihres lateinischen Ursprungs verwendet. Diskret ist das Gegenteil von kontinuierlich.

Die alternative Bedeutung Diskretion = taktvolle Zurückhaltung, Verschwiegenheit entstand erst in der Neuzeit, und hat mit dem physikalischen Gebrauch des Wortes diskret nichts zu tun.



zurück mit der   Tastenkombination oder dem Rücksprung-Button des Readers

**Drehimpuls:** Wenn ein Objekt mit Masse  $M$  sich mit der Geschwindigkeit  $v$  auf einer Kreisbahn mit Abstand  $R$  um das Zentrum bewegt, dann hat sein Drehimpuls  $\mathbf{J}$  den Wert


$$|\mathbf{J}| = R \cdot \text{Impuls} = R \cdot M \cdot v .$$




Wie der **Impuls** hat auch der Drehimpuls einen Wert und eine Richtung im Raum, und wird deshalb in der Theorie durch einen Vektor repräsentiert und mit Fettdruck gekennzeichnet. Als Richtung des Drehimpulses definiert man *nicht* die Richtung des Impulses (denn die ändert sich ja auf der Kreisbahn ständig), sondern die Richtung der Drehachse. Und zwar so wie die Bewegungsrichtung einer Rechtsschraube: Wenn ich die Schraube in Richtung der gestrichelten Linie der Skizze drehe, dann kommt sie aus dem Brett heraus und bewegt sich auf mich zu. Dementsprechend steht  $\mathbf{J}$  beim Beispiel der Skizze senkrecht auf der Papierebene und ist zum Betrachter hin gerichtet. Wenn ich die Schraube dagegen im Uhrzeigersinn drehe, dann bewegt sie sich von mir weg ins Brett hinein. Dementsprechend ist  $\mathbf{J}$  vom Betrachter weg senkrecht in die Papierebene gerichtet, wenn  $M$  sich im Uhrzeigersinn bewegt. Der Drehimpuls eine Erhaltungsgröße, genau wie der Impuls. Viele Leute kennen das vom Karussell: Wenn man auf der rotierenden Plattform von außen nach innen (zur Drehachse hin) geht, dann dreht sich das Karussell schneller. Wenn man von der Drehachse weg nach außen geht, dann dreht sich das Karussell langsamer. Wenn der Abstand  $R$  kleiner wird muss die Geschwindigkeit  $v$  größer werden, und umgekehrt, damit der Drehimpuls  $|\mathbf{J}| = R \cdot M \cdot v$  stets gleich bleibt.

zurück mit der   Tastenkombination oder dem Rücksperr-Button des Readers

**Einkristall:** In einem einkristallinen Festkörper ist die regelmäßige Anordnung der Atome über das gesamte Volumen ausgedehnt, während ein polykristalliner Festkörper aus einer meist sehr großen Anzahl von Kristalliten zusammengesetzt ist. Innerhalb eines Kristalliten sind die Atome regelmäßig angeordnet, aber die verschiedenen Kristallite sind zueinander regellos verdreht und versetzt.

zurück mit der   Tastenkombination oder dem Rücksprung-Button des Readers



**elastisch:** Man bezeichnet einen Stoß als „elastisch“, wenn dabei keine Bewegungsenergie in Wärme umgewandelt wird. Das Gegenteil ist ein „inelastischer“ Stoß, bei dem – Beispiel: kollidierende Automobile – ein mehr oder weniger großer Teil der Bewegungsenergie in Wärme umgewandelt wird, oder bei dem – Beispiel: kollidierende Atome – ein mehr oder weniger großer Teil der Bewegungsenergie in „innere Freiheitsgrade“ (Anregung von Elektronen) umgewandelt wird.

zurück mit der   Tastenkombination oder dem Rücksprung-Button des Readers

**Elektrode:** (griechisch) odos = Weg, Straße



→ Elektrode = „Weg der Elektrizität“

Elektroden sind also Drähte oder Schienen, die elektrischen Strom gut leiten. Meistens werden sie aus Metallen gefertigt.



zurück mit der   Tastenkombination oder dem Rücksprung-Button des Readers

**eV:** 1 eV = 1 Elektronenvolt ist die Bewegungsenergie eines Elektrons, das zuvor mit einer Spannung von 1 V = 1 Volt beschleunigt wurde, bzw. das durch eine Gegenspannung von 1 V zum Stillstand gebracht werden kann.

$$1 \text{ eV} = 6,62606876 \cdot 10^{-34} \text{ Joule} = 6,62606876 \cdot 10^{-34} \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2}$$



zurück mit der   Tastenkombination oder dem Rücksprung-Button des Readers

**emittieren:** (lateinisch) emittere = aussenden

zurück mit der   Tastenkombination oder dem Rücksprung-Button des Readers

**empirisch:** (griechisch) Empeiria = Erfahrung

→ empirisch = auf Erfahrung beruhend, aus Erfahrung abgeleitet

zurück mit der   Tastenkombination oder dem Rücksprung-Button des Readers

**ex cathedra:** (lateinisch) ex cathedra = aus dem Lehrstuhl. Eine Kathedrale ist ein Kirchenbau, in dem ein Bischof aus seinem Lehrstuhl ewige Wahrheiten verkündet. Wenn etwas „ex cathedra“ verkündet wird, dann behält man etwaige Zweifel besser für sich, sonst könnte man schnell auf dem Scheiterhaufen landen.

zurück mit der   Tastenkombination oder dem Rücksprung-Button des Readers



### heuristisch:

(griechisch) ἐυρίσκω (sprich: heurisko) = ich entdecke, ich finde  
Eine Methode wird als heuristisch bezeichnet, wenn sie durch geschickte Kombination von zweifelhaften oder sogar falschen Annahmen schließlich doch zur richtigen Lösung führt.

zurück mit der   Tastenkombination oder dem Rücksprung-Button des Readers

### Hexagon:

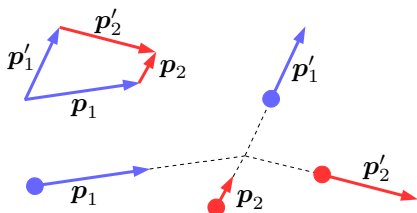
(griechisch) hex = sechs ; (griechisch) gonia = Ecke, Winkel  
→ Hexagon = Sechseck

zurück mit der   Tastenkombination oder dem Rücksprung-Button des Readers

**Impuls:** Wenn ein Objekt mit Masse  $M$  sich mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  bewegt, dann ist sein

$$\text{Impuls:} \quad \mathbf{p} = M \cdot \mathbf{v}$$

Der Impuls ist eine Erhaltungsgröße. Wenn das blaue und das rote Teilchen mit den Impulsen  $\mathbf{p}_1$  und  $\mathbf{p}_2$  zusammenstoßen, dann gilt für ihre Impulse  $\mathbf{p}'_1$  und  $\mathbf{p}'_2$  nach dem Stoß aufgrund der



Impulserhaltung:

$$\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$$

Bei der Erhaltung der Impulse muss man nicht nur ihren Betrag (dargestellt durch die Länge der Pfeile), sondern auch ihre Richtungen beachten, d. h. die Pfeile müssen geometrisch addiert werden wie in der Skizze links oben gezeigt. Zur Erinnerung daran werden die Impulse  $\mathbf{p}$  fett gedruckt.

Bei der Masse  $M$  der Objekte handelt es sich um die relativistische Masse. Sie hängt mit der Masse  $M_0$  der ruhenden Teilchen durch

$$M = \frac{M_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$



zusammen, wobei  $v^2$  das Quadrat der Geschwindigkeit des Teilchens und  $c^2$  das Quadrat der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist. Solange  $v < 0,1 \cdot c \approx 3 \cdot 10^7 \text{ m/s}$  ist, ist der Unterschied zwischen  $M$  und  $M_0$  winzig klein, und kann in der Regel vernachlässigt werden.

zurück mit der   Tastenkombination oder dem Rücksperr-Button des Readers

**Ion:** Ein Elektron hat die elektrische Ladung  $-1,6 \cdot 10^{-19}$  Coulomb, ein Proton die elektrische Ladung  $+1,6 \cdot 10^{-19}$  C. Wenn die Zahl der Elektronen in der Hülle eines Atoms gleich groß ist wie die Zahl der Protonen in seinem Kern (das ist der Normalfall), dann ist das Atom insgesamt elektrisch neutral. Wenn man  $n = 1, 2, 3, \dots$  Elektronen von einem Atom entfernt, dann ist seine Ladung  $+n \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}$  C, es wird als  $n$ -fach positiv geladenes Ion bezeichnet. Wenn man  $n$  Elektronen zu einem Atom hinzufügt, dann ist seine Ladung  $-n \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}$  C, es wird als  $n$ -fach negativ geladenes Ion bezeichnet. Als freie Teilchen sind negativ geladene Ionen sehr selten, weil äußerst instabil. Als Bestandteile von chemischen Verbindungen kommen sie aber häufig vor.

zurück mit der   Tastenkombination oder dem Rücksprung-Button des Readers

**Isotop:** Die Kerne von Atomen sind aus Protonen und Neutronen zusammengesetzt. Jedes Proton hat die elektrische Ladung  $+1,6 \cdot 10^{-19}$  Coulomb. Neutronen sind elektrisch neutral. Viele Elemente kommen mit unterschiedlicher Neutronenzahl vor. Beispielsweise hat der Atomkern von Chlor stets 17 Protonen, aber manchmal 18 und manchmal 20 Neutronen. Zur Unterscheidung dieser beiden *Isotope* wird die Gesamtzahl von Protonen und Neutronen (also im Fall von Chlor 35 oder 37) hochgestellt vor das chemische Zeichen des Elements gesetzt, also im Fall von Chlor  $^{35}\text{Cl}$  oder  $^{37}\text{Cl}$ .

zurück mit der   Tastenkombination oder dem Rücksprung-Button des Readers

**kohärent:** (lateinisch) cohaerere = zusammenhängen, verbunden sein

⇒ kohärent = zusammenhängend. inkohärent ist das Gegenteil von kohärent. Den Verlust von Kohärenz bezeichnet man als Dekohärenz.

zurück mit der   Tastenkombination oder dem Rücksprung-Button des Readers

**Koinzidenz:** (lateinisch) incidere = sich ereignen, (lateinisch) co = zusammen-

Als Koinzidenz bezeichnet man das zeitliche und/oder räumliche Zusammenfallen von Sachverhalten oder Ereignissen.

zurück mit der   Tastenkombination oder dem Rücksprung-Button des Readers



**kompensieren:** (lateinisch) compensare = ausgleichen, aufwiegen

zurück mit der   Tastenkombination oder dem Rücksprung-Button des Readers



**Korrelation:** (lateinisch) (co)relatio = Zusammenhang, Beziehung

zurück mit der   Tastenkombination oder dem Rücksprung-Button des Readers

**longitudinal:** (lateinisch) longitudo = Länge → longitudinal = in Längsrichtung

zurück mit der   Tastenkombination oder dem Rücksprung-Button des Readers



**Mess-Okular:** (lateinisch) oculus = Auge. Als Okular wird beim Mikroskop (und auch beim Fernrohr) die Linse – bzw. in modernen Geräten das Linsensystem – bezeichnet, das dem Auge des Beobachters zugewandt ist, im Gegensatz zum Objektiv, das dem betrachteten Objekt zugewandt ist. Ein Mess-Okular ist ein Okular, in das eine Skala geritzt oder geätzt ist, mit der die Größe des betrachteten Objekts gemessen werden kann.

zurück mit der   Tastenkombination oder dem Rücksprung-Button des Readers

**monochromatisch:** (griechisch) monos = allein, einsam . (griechisch) chroma = Farbe .

⇒ monochrom oder monochromatisch = einfarbig

Monochromatische Strahlung hat eine einzige, genau bestimmte Wellenlänge. (Das ist eine lediglich theoretische Aussage. In der Realität gibt es keine monochromatische Strahlung, sondern allenfalls Strahlung mit schmaler Bandbreite, wie am Ende von Abschnitt [10.3](#) erklärt.)

zurück mit der   Tastenkombination oder dem Rücksprung-Button des Readers

**nm, ns:**

1 nm = 1 Nanometer =  $10^{-9}$ m = 1 milliardstel Meter

1 ns = 1 Nanosekunde =  $10^{-9}$ s = 1 milliardstel Sekunde

zurück mit der   Tastenkombination oder dem Rücksprung-Button des Readers

**orthogonal:** (griechisch) orthos = gerade, richtig ;



(griechisch) gonia = Ecke, Winkel → orthogonal = rechtwinklig

zurück mit der   Tastenkombination oder dem Rücksprung-Button des Readers

**Pentagon:**

(griechisch) pente = fünf ; (griechisch) gonia = Ecke, Winkel

→ Pentagon = Fünfeck

zurück mit der   Tastenkombination oder dem Rücksprung-Button des Readers



**Phänomen:**

(griechisch) phenomenon = das Erscheinende, das Sichtbare

zurück mit der   Tastenkombination oder dem Rücksprung-Button des Readers

**piezoelektrischer Aktuator:** (griechisch) piezein = drücken, pressen ; (lateinisch) actio = Ausführung, Tat . Das ie in piezo wird getrennt gesprochen: piezo = piëzo = pi-ezo

Wenn man auf bestimmte Kristalle oder Keramiken Druck ausübt, dann erscheint auf der einen Oberfläche eine positive elektrische Ladung, und auf der gegenüberliegenden Oberfläche eine gleich große negative Ladung. Wenn man umgekehrt von außen eine elektrische Spannung an die Oberflächen dieser Festkörper legt, dann schrumpfen sie zusammen oder werden gestreckt, und zwar abhängig von der Höhe der angelegten Spannung um bis zu etwa einem Promille ihrer Dicke. In piezoelektrischen Aktuatoren wird der Effekt technisch genutzt.

zurück mit der   Tastenkombination oder dem Rücksprung-Button des Readers



**proportional:** Eine Größe  $A$  ist proportional zu einer Größe  $B$  (Formelschreibweise:  $A \sim B$ ), wenn

$$A = f \cdot B \quad \text{mit } f = \text{konstant}$$

gilt. Der Faktor  $f$  wird als Proportionalitätskonstante bezeichnet. Beispiel: Wenn man einen Stein zu Boden fallen lässt, dann ist seine Geschwindigkeit proportional zur Zeitdauer seit dem Beginn des Falls:


$$\text{Geschwindigkeit} = g \cdot \text{Zeit seit Beginn des Falls}$$

$$\text{mit } g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \text{konstant}$$

zurück mit der   Tastenkombination oder dem Rücksprung-Button des Readers

### **Radioaktivität:**

(lateinisch) radiare = strahlen  $\longrightarrow$  radioaktiv = strahlungsaktiv

zurück mit der   Tastenkombination oder dem Rücksprung-Button des Readers

**rational, irrational:** (lateinisch) ratio = Verstand, oder Verhältnis, Beziehung. irratio = das Gegenteil von ratio

Das Fremdwort rational (bzw. irrational) wird mit beiden unterschiedlichen Bedeutungen verwendet.

ratio = Verstand: Das Verhalten oder die Argumente eines Menschen sind rational (und dadurch berechenbar), wenn sie vernünftigen (d. h. verstehbaren) Regeln folgen. Andernfalls sind sie irrational. Ein Vorgang in der Natur ist rational, wenn er gemäß von Naturgesetzen abläuft, die im Prinzip entdeckt werden können, so dass der Vorgang berechnet werden kann. Wenn der Vorgang von keinem Naturgesetz gesteuert wird, dann ist er prinzipiell unberechenbar, und wird als irrational bezeichnet.


ratio = Verhältnis: Eine Zahl  $r$  heißt rational, wenn sie der Bruch (das Verhältnis)

$$r = \frac{m}{n} \quad \text{mit } m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$



von zwei ganzen Zahlen  $m$  und  $n$  ist. Zahlen, die nicht der Bruch zweier ganzer Zahlen sind, heißen irrational. Beispiel: die Wurzel von 2 ist eine irrationale Zahl.

zurück mit der   Tastenkombination oder dem Rücksprung-Button des Readers

**reflektieren:** (lateinisch) re = zurück, flectere = biegen. Die Vorsilbe re wird in der Physik traditionell nicht so eng interpretiert. Auch wenn das Licht nur seitlich abgelenkt wird, spricht man von Reflektion.



zurück mit der   Tastenkombination oder dem Rücksprung-Button des Readers

**rhetorisch:** (lateinisch) rhetor = der Redner. Wenn der Redner eine rhetorische Frage stellt, dann will er nicht eine Antwort hören, denn die gibt er gleich selbst. Die Frage ist nur ein Trick, um die Aufmerksamkeit der Zuhörer zu steigern.

zurück mit der   Tastenkombination oder dem Rücksprung-Button des Readers



**Schizophrenie:** (griechisch) schizein = zerspalten, (griechisch) phren = Geist, Gemüt

Schizophrenie wird (nach meinem unmaßgeblichen Eindruck) in der modernen Psychiatrie dann diagnostiziert, wenn eine offensichtliche psychische Störung durch alle Begriffsraaster fällt und sich in keine andere Schublade einordnen lässt.

zurück mit der   Tastenkombination oder dem Rücksprung-Button des Readers

**Syntax und Semantik:** (griechisch) sema = Zeichen, (griechisch) syn- = zusammen-, (griechisch) taxis = Ordnung



Syntax ist die Lehre von der richtigen Anordnung der Zeichen, Semantik ist die Lehre von der Bedeutung der Zeichen.

zurück mit der   Tastenkombination oder dem Rücksprung-Button des Readers


**Streuung:** Man spricht von „Streuung“, wenn eine Strahlung oder ein Projektil durch ein Hindernis in eine andere Richtung abgelenkt wird. Zum Beispiel wird beim Billard-Spiel eine Kugel an einer anderen Billardkugel gestreut.

zurück mit der   Tastenkombination oder dem Rücksprung-Button des Readers


**synchron:** (griechisch) syn- = zusammen-, (griechisch) chronos = die Zeit, → synchron = gleichzeitig

zurück mit der   Tastenkombination oder dem Rücksprung-Button des Readers



**Synthese:** (griechisch) syn- = zusammen-, (griechisch) syntese = Zusammensetzung

zurück mit der   Tastenkombination oder dem Rücksprung-Button des Readers

**transmittieren:** (lateinisch) trans = hindurch, mittere = lassen

zurück mit der   Tastenkombination oder dem Rücksprung-Button des Readers



**transversal:** (lateinisch) transversus = seitwärts, quer

zurück mit der   Tastenkombination oder dem Rücksprung-Button des Readers

**Wahrscheinlichkeit:** Ein Ereignis, das völlig sicher ist, tritt mit der Wahrscheinlichkeit 1 ein. Ein Ereignis, das völlig unmöglich ist, tritt mit der Wahrscheinlichkeit 0 ein. Die Wahrscheinlichkeit von Ereignissen, die möglicherweise aber nicht sicher eintreten, ist größer als Null und kleiner als Eins.

Den Begriff „Wahrscheinlichkeit“ zu definieren ohne dabei in Zirkelschlüsse zu verfallen, gehört zu den schwierigsten Problemen überhaupt. Philosophen, Mathematiker, und Naturwissenschaftler haben dicke Bücher darüber geschrieben, und konnten sich trotzdem bis heute nicht völlig einig werden.

Manchmal ist unbefangene Naivität von Vorteil, und in diesem Fall ganz gewiss. Wir werden den Begriff „Wahrscheinlichkeit“ in diesem Buch so verwenden, wie jede einigermaßen intelligente Hausfrau das tut: Wir definieren diesen Begriff überhaupt nicht, denn „wir wissen schon, was damit gemeint ist“. Mit dieser pragmatischen Einstellung werden wir hervorragend zurecht kommen.

zurück mit der   Tastenkombination oder dem Rücksprung-Button des Readers

# Anhang

## A.1 Sind Photonen teilbare Wellenpakete?

Wenn Licht aus teilbaren Wellenpaketen zusammengesetzt wäre, dann müsste

$$(3.13) = \frac{N_{\text{GTR}}N_{\text{G}}}{N_{\text{GT}}N_{\text{GR}}} \geq 1$$

sein, und zwar aus folgendem Grund. Die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung<sup>1</sup>, die wir ohne Erklärung der mathematischen Formelsammlung entnehmen, besagt dass der Mittelwert des Quadrats einer beliebigen Größe  $I_{\text{E}}$  stets größer oder gleich dem Quadrat ihres Mittelwerts ist:

$$\overline{I_{\text{E}} \cdot I_{\text{E}}} \geq \overline{I_{\text{E}}} \cdot \overline{I_{\text{E}}} .$$

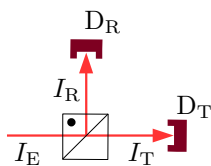
Das kann man auch als

$$\frac{\overline{I_{\text{E}} \cdot I_{\text{E}}}}{\overline{I_{\text{E}}} \cdot \overline{I_{\text{E}}}} \geq 1 \tag{A.1}$$

schreiben. Der Querstrich soll den Mittelwert symbolisieren.

Jetzt nehmen wir versuchsweise an, dass Licht aus teilbaren Wellenpaketen besteht. Die Intensität (zur Erinnerung: Die Intensität ist die pro Zeit vom Licht transportierte Energie) des in den Strahlteiler einlaufenden Lichts nennen wir  $I_{\text{E}}$ . Am Strahlteiler wird das Licht zur Hälfte transmittiert und zur Hälfte reflektiert:

<sup>1</sup> Diese Ungleichung wurde von Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) und Hermann Amandus Schwarz (1843–1921) bewiesen.



$$I_T = \frac{1}{2} I_E \quad (\text{A.2a})$$

$$I_R = \frac{1}{2} I_E \quad (\text{A.2b})$$

$$I_T \cdot I_R = \frac{1}{4} I_E \cdot I_E \quad (\text{A.2c})$$

$I_T$  ist die Intensität des transmittierten Lichts,  $I_R$  ist die Intensität des reflektierten Lichts. Damit kann man die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung (A.1) folgendermaßen schreiben:

$$1 \leq \frac{\overline{I_T \cdot I_E}}{\overline{I_T} \cdot \overline{I_E}} = \frac{4 \overline{I_T \cdot I_R}}{2 \overline{I_T} \cdot 2 \overline{I_R}} \quad (\text{A.3})$$

Wenn die Energie erhalten ist (d. h. wenn keine Energie aus dem Nichts auftauchen und keine Energie ins Nichts verschwinden kann, woran ohne zwingenden Grund kein Physiker zweifeln will), dann muss die Wahrscheinlichkeit  $W_T$  dafür, dass in einem 2,5 ns-Zeitfenster der Detektor  $D_T$  anspricht, proportional sein zur durchschnittlichen Intensität des Lichts, das diesen Detektor während dieses Zeitfensters erreicht:

$$W_T \sim \overline{I_T} \quad (\text{A.4a})$$

Dementsprechend muss auch die Wahrscheinlichkeit  $W_R$  dafür, dass im gleichen Zeitintervall der Detektor  $D_R$  anspricht, und die Wahrscheinlichkeit  $W_{TR}$  dafür, dass im gleichen Zeitintervall beide Detektoren gleichzeitig ansprechen, gleich

$$W_R \sim \overline{I_R} \quad (\text{A.4b})$$

$$W_{TR} \sim \overline{I_T \cdot I_R} \quad (\text{A.4c})$$

sein. Das setzen wir in (A.3) ein:

$$1 \leq \frac{\overline{I_T \cdot I_R}}{\overline{I_T} \cdot \overline{I_R}} = \frac{W_{TR}}{W_T \cdot W_R} \quad (\text{A.5})$$

$W_T$  ist gleich der Anzahl  $N_T$  der vom Detektor  $D_T$  registrierten Ereignisse, geteilt durch die Anzahl  $N_G$  der insgesamt geöffneten 2,5 ns-Zeitfenster. Entsprechendes gilt für  $W_R$  und  $W_{TR}$ :

$$W_T = N_T/N_G \quad (\text{A.6a})$$

$$W_R = N_R/N_G \quad (\text{A.6b})$$

$$W_{TR} = N_{TR}/N_G \quad (\text{A.6c})$$

Damit wird (A.5) zu

$$1 \leq \frac{W_{TR}}{W_T \cdot W_R} = \frac{N_{TR}/N_G}{(N_T/N_G) \cdot (N_R/N_G)} = (\text{3.13}) . \quad (\text{A.7})$$

(3.13) müsste  $\geq 1$  sein, wenn Licht aus teilbaren Wellenpaketen zusammengesetzt wäre. Gemessen wurde aber

$$(\text{3.13}) = 0,0177 \pm 0,0026 .$$

Durch das experimentelle Ergebnis wird die Hypothese teilbarer Wellenpakete definitiv widerlegt.

## A.2 Berechnung der Wahrscheinlichkeiten (6.20)

Die vier Wahrscheinlichkeiten (6.20) sind die Betragsquadrate der Projektionsamplituden der vier Eigenvektoren (6.19)

$$\begin{aligned} |\downarrow\rangle_{\gamma_D} |\uparrow\rangle_{\gamma_E} & , \quad |\downarrow\rangle_{\gamma_D} |\downarrow\rangle_{\gamma_E} & , \\ |\uparrow\rangle_{\gamma_D} |\uparrow\rangle_{\gamma_E} & , \quad |\uparrow\rangle_{\gamma_D} |\downarrow\rangle_{\gamma_E} \end{aligned}$$

der Stern-Gerlach-Magneten auf den verschränkten Zustandsvektor

$$\begin{aligned} |D\&E\rangle & \stackrel{(6.15)}{=} r |\downarrow\rangle_D |\uparrow\rangle_E + s |\uparrow\rangle_D |\downarrow\rangle_E \\ \text{mit } |r|^2 & = |s|^2 = \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (\text{6.15})$$

der Atome D und E. Die Bedeutung der Pfeile  $\uparrow$  und  $\downarrow$  in den Eigenvektoren der Magneten ist klar: In  $|\downarrow\rangle_{\gamma_D}$  bedeutet der Pfeil

„antiparallel zum Magnetfeld des Magneten, mit dem Atom D gemessen wird“, in  $|\uparrow\rangle_{\gamma_E}$  bedeutet der Pfeil „parallel zum Magnetfeld des Magneten, mit dem Atom E gemessen wird“, und so weiter. Diese Richtungen sind durch die Winkeleinstellungen  $\gamma_D$  und  $\gamma_E$  eindeutig definiert. Dagegen ist die Richtung der Pfeile in (6.15) völlig unbestimmt. Diese Gleichung besagt lediglich dass die Atome in entgegengesetzte Richtungen abgelenkt werden, wenn  $\gamma_D = \gamma_E$  eingestellt wird, und dass die Atome in die gleiche Richtung abgelenkt werden, wenn  $\gamma_D = \gamma_E + 180^\circ$  eingestellt wird. Damit wir mit 6.15 Berechnungen durchführen können, definieren wir

$$|\downarrow\rangle_D = |\downarrow\rangle_E = |\downarrow\rangle_{\alpha+\gamma_D} = e^{i\alpha} |\downarrow\rangle_{\gamma_D} \quad (\text{A.8a})$$

$$|\uparrow\rangle_D = |\uparrow\rangle_E = |\uparrow\rangle_{\alpha+\gamma_D} = e^{i\alpha} |\uparrow\rangle_{\gamma_D} \quad (\text{A.8b})$$

mit beliebigem Winkel  $\alpha$ .

Nur Physiker werden verstehen, wieso hier auf einmal die  $e$ -Funktion mit komplexem Exponenten auftaucht. Alle anderen Leser mögen dies einfach mal als mathematische Zauberformel hinnehmen, und glauben dass (A.8) wirklich richtig ist. Wegen  $|e^{i\alpha}|^2 = 1$  wird die  $e$ -Funktion auch gleich wieder aus unseren Formeln verschwinden. Mit (A.8) wird die Zustandsfunktion des Atompaars vor der Messung

$$|D\&E\rangle \stackrel{(6.15)}{=} e^{i\alpha} r |\downarrow\rangle_{\gamma_D} |\uparrow\rangle_{\gamma_D} + e^{i\alpha} s |\uparrow\rangle_{\gamma_D} |\downarrow\rangle_{\gamma_D}$$

mit  $|r|^2 = |s|^2 = \frac{1}{2}$ , und mit  $\alpha$  beliebig. (A.9)

Damit, und mit

$$\gamma_D \langle \uparrow | | \uparrow \rangle_{\gamma_D} = \gamma_D \langle \downarrow | | \downarrow \rangle_{\gamma_D} \stackrel{(5.19c)}{=} 1$$

$$\gamma_D \langle \downarrow | | \uparrow \rangle_{\gamma_D} = \gamma_D \langle \uparrow | | \downarrow \rangle_{\gamma_D} \stackrel{(5.19c)}{=} 0$$

sowie mit  $|r|^2 \stackrel{(6.15)}{=} |s|^2 \stackrel{(6.15)}{=} 1/2$  und  $|e^{i\alpha}|^2 = 1$  erhalten die Wahrscheinlichkeiten (6.20) die einfache Form

$$W(\downarrow_D \uparrow_E) \stackrel{(6.20a)}{=} \frac{1}{2} \left| \gamma_E \langle \uparrow \parallel \uparrow \rangle_{\gamma_D} \right|^2 \quad (\text{A.10a})$$

$$W(\downarrow_D \downarrow_E) \stackrel{(6.20b)}{=} \frac{1}{2} \left| \gamma_E \langle \downarrow \parallel \uparrow \rangle_{\gamma_D} \right|^2 \quad (\text{A.10b})$$

$$W(\uparrow_D \uparrow_E) \stackrel{(6.20c)}{=} \frac{1}{2} \left| \gamma_E \langle \uparrow \parallel \downarrow \rangle_{\gamma_D} \right|^2 \quad (\text{A.10c})$$

$$W(\uparrow_D \downarrow_E) \stackrel{(6.20d)}{=} \frac{1}{2} \left| \gamma_E \langle \downarrow \parallel \downarrow \rangle_{\gamma_D} \right|^2. \quad (\text{A.10d})$$

Zur weiteren Auswertung stellen wir fest, dass

$$\gamma_E \langle \downarrow \mid = (\gamma_E + 180^\circ) \langle \uparrow \mid \quad \text{und} \quad \mid \downarrow \rangle_{\gamma_D} = \mid \uparrow \rangle_{(\gamma_D + 180^\circ)} \quad (\text{A.11})$$

ist. Denn man muss einen Stern-Gerlach-Magneten um  $180^\circ$  drehen, damit aus seinem Eigenvektor  $\mid \uparrow \rangle$  sein Eigenvektor  $\mid \downarrow \rangle$  wird.

Zur Berechnung von  $\gamma_E \langle \uparrow \parallel \uparrow \rangle_{\gamma_D}$  definieren wir die zunächst unbekannte Funktion  $f(\gamma_E - \gamma_D)$  folgendermaßen:

$$\left| \gamma_E \langle \uparrow \parallel \uparrow \rangle_{\gamma_D} \right|^2 = \left| f(\gamma_E - \gamma_D) \right|^2 \quad (\text{A.12a})$$

Nach (5.19c) muss für die verschiedenen Eigenvektoren eines Messgeräts immer gelten:

$$\gamma_E \langle \uparrow \parallel \uparrow \rangle_{\gamma_E} \stackrel{(5.19c)}{=} 1 \stackrel{(A.12a)}{=} f(\gamma_E - \gamma_E) = f(0) \quad (\text{A.12b})$$

$$\begin{aligned} \gamma_E \langle \downarrow \parallel \uparrow \rangle_{\gamma_E} &\stackrel{(A.11)}{=} (\gamma_E + 180^\circ) \langle \uparrow \parallel \uparrow \rangle_{\gamma_E} \stackrel{(5.19c)}{=} \\ &\stackrel{(5.19c)}{=} 0 \stackrel{(A.12a)}{=} f(\gamma_E + 180^\circ - \gamma_E) = f(180^\circ) \end{aligned} \quad (\text{A.12c})$$

(A.12b) und (A.12c) werden beide erfüllt durch

$$\left| f(\gamma_E - \gamma_D) \right|^2 = \left| \gamma_E \langle \uparrow \parallel \uparrow \rangle_{\gamma_D} \right|^2 = \cos^2(\gamma_E/2 - \gamma_D/2). \quad (\text{A.12d})$$

Anders als in (5.7) tauchen in (A.12d) auf einmal *halbe* Winkel auf. Das liegt daran, dass die verschiedenen Eigenvektoren eines Messgeräts im abstrakten mathematischen Raum dieser Eigenvektoren

stets zueinander orthogonal sind, also die Projektionsamplitude Null haben. D. h. im abstrakten mathematischen Raum der Eigenvektoren ist der Winkel zwischen  $|\downarrow\rangle_{\gamma_D}$  und  $|\uparrow\rangle_{\gamma_D}$  beziehungsweise  $|\downarrow\rangle_{\gamma_E}$  und  $|\uparrow\rangle_{\gamma_E}$  gleich  $90^\circ$ . Dagegen muss man die Stern-Gerlach-Magnete im dreidimensionalen Ortsraum um  $180^\circ$  drehen, damit aus ihren Eigenvektoren  $|\uparrow\rangle_{\gamma_D}$  bzw.  $|\uparrow\rangle_{\gamma_E}$  ihre Eigenvektoren  $|\downarrow\rangle_{\gamma_D}$  bzw.  $|\downarrow\rangle_{\gamma_E}$  werden. Die Winkel im abstrakten Raum der Eigenvektoren sind also im Fall der Stern-Gerlach-Magneten nur halb so groß wie die Winkel im dreidimensionalen Ortsraum.

Mit (A.12d) und (A.11) werden die Wahrscheinlichkeiten (A.10) zu

$$\begin{aligned} W(\downarrow_D \uparrow_E) &= \frac{1}{2} \left| \gamma_E \langle \uparrow | \uparrow \rangle_{\gamma_D} \right|^2 = \\ &= 0,5 \cos^2(\gamma_E/2 - \gamma_D/2) \end{aligned} \quad (\text{A.13a})$$

$$\begin{aligned} W(\downarrow_D \downarrow_E) &= \frac{1}{2} \left| \gamma_E \langle \downarrow | \uparrow \rangle_{\gamma_D} \right|^2 = \frac{1}{2} \left| (\gamma_E+180^\circ) \langle \uparrow | \uparrow \rangle_{\gamma_D} \right|^2 = \\ &= 0,5 \cos^2(\gamma_E/2 + 90^\circ - \gamma_D/2) \end{aligned} \quad (\text{A.13b})$$

$$\begin{aligned} W(\uparrow_D \uparrow_E) &= \frac{1}{2} \left| \gamma_E \langle \uparrow | \downarrow \rangle_{\gamma_D} \right|^2 = \frac{1}{2} \left| \gamma_E \langle \uparrow | \uparrow \rangle_{(\gamma_D+180^\circ)} \right|^2 = \\ &= 0,5 \cos^2(\gamma_E/2 - \gamma_D/2 - 90^\circ) \end{aligned} \quad (\text{A.13c})$$

$$\begin{aligned} W(\uparrow_D \downarrow_E) &= \frac{1}{2} \left| \gamma_E \langle \downarrow | \downarrow \rangle_{\gamma_D} \right|^2 = \frac{1}{2} \left| (\gamma_E+180^\circ) \langle \uparrow | \uparrow \rangle_{(\gamma_D+180^\circ)} \right|^2 = \\ &= 0,5 \cos^2(\gamma_E/2 - \gamma_D/2) . \end{aligned} \quad (\text{A.13d})$$

Es ist offensichtlich  $W(\downarrow_D \uparrow_E) = W(\uparrow_D \downarrow_E)$ . Tatsächlich ist aber auch  $W(\downarrow_D \downarrow_E) = W(\uparrow_D \uparrow_E)$ , weil die Differenz zwischen  $(\gamma_E/2 - \gamma_D/2 + 90^\circ)$  und  $(\gamma_E/2 - \gamma_D/2 - 90^\circ)$  genau  $180^\circ$  beträgt, der  $\cos^2$  dieser Winkel also laut der roten Linie im Diagramm 7.5 auf Seite 173 identisch ist.

Die Wahrscheinlichkeiten (A.13) sind in Abb. 6.8 auf Seite 153 eingetragen.

### A.3 Drehimpuls und Polarisation von Photonen

Abb. 7.2 mit dem Term-Schema des Calcium-Atoms ist hier nochmal abgedruckt. Neben den Strichen sind die Drehimpuls-Quantenzahlen<sup>2</sup> des Atoms in diesen drei Zuständen angegeben. Drehimpuls kann weder aus dem Nichts auftauchen noch ins Nichts verschwinden. Wenn sich der Drehimpuls des Atoms bei den beiden Übergängen der Lumineszenzkaskade ändert, dann müssen die emittierten Lumineszenz-Photonen den fehlenden Drehimpuls mitgenommen haben. Und ein Photon, dessen Drehimpuls von Null verschieden ist, ist zirkular polarisiert.

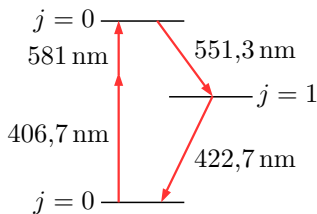


Abb. 7.2 : Eine Lumineszenz-Kaskade des Calcium-Atoms

In Abb. A.1 auf der nächsten Seite wird erklärt, was zirkuläre Polarisation ist. In dieser Graphik sind verschiedene Wellen gezeichnet. In jedem Diagramm ist die Summe der gestrichelt gezeichneten und der gepunktet gezeichneten Welle als dicke durchgezogene Linie dargestellt. In den Diagrammen auf der rechten Seite sieht man die gleichen Wellen, aber jetzt mit Blickrichtung parallel zur  $z$ -Achse.

Die gestrichelte und die gepunktete Welle schwingen stets in einer Richtung: Die gestrichelte Welle parallel zur  $y$ -Achse, die gepunktete Welle parallel zur  $x$ -Achse. Diese Art der Polarisation wird als „linear“ bezeichnet und mit dem Buchstaben  $L$  gekennzeichnet. Die gestrichelte Welle ist  $L_0$ -polarisiert, denn der Winkel zwischen ihrer Schwingungsrichtung und der  $y$ -Achse ist  $0^\circ$ . Die ge-

<sup>2</sup> In Gleichung (6.1) wurde angegeben, wie der Wert des Drehimpulses  $\mathbf{J}$  von der Quantenzahl  $j$  abhängt.

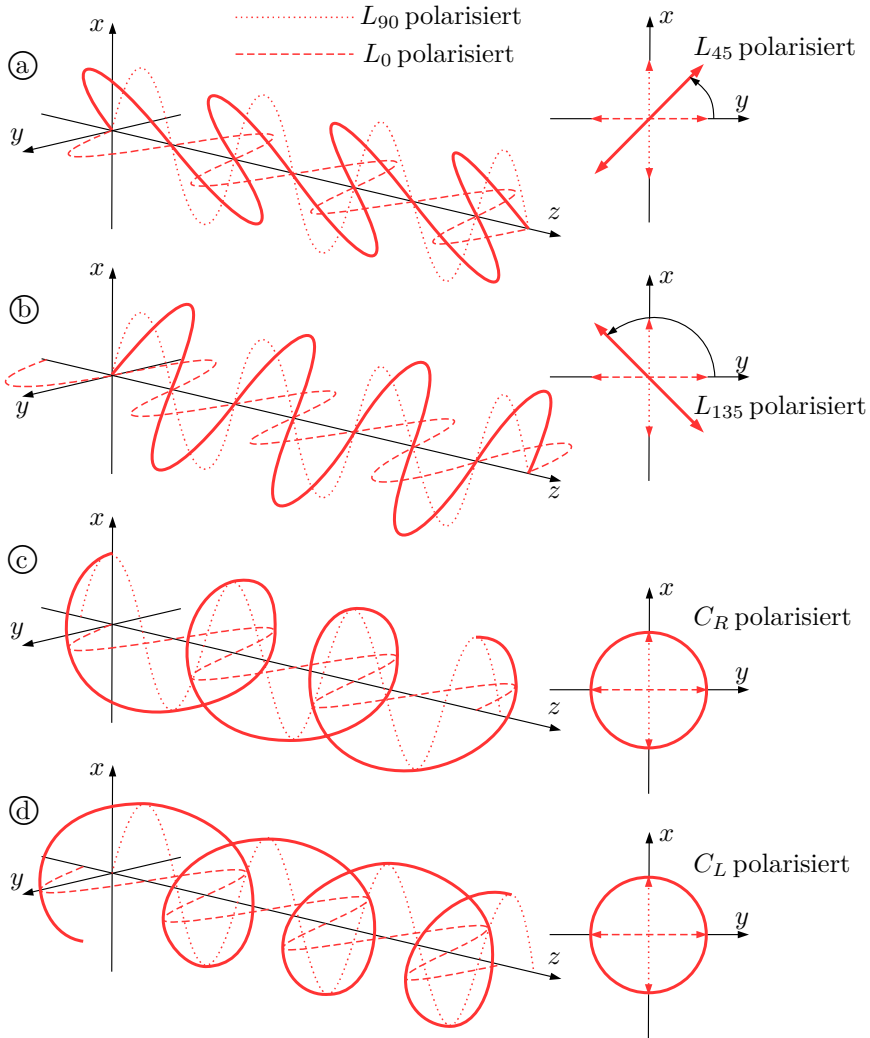


Abb. A.1: Linear und zirkular polarisierte Wellen

punktete Welle ist  $L_{90}$ -polarisiert, denn der Winkel zwischen ihrer Schwingungsrichtung und der  $y$ -Achse ist  $90^\circ$ . In den beiden oberen Diagrammen auf der rechten Seite von Abb. A.1 erkennt man, wie der Winkel zwischen der  $y$ -Achse und der Schwingungsrichtung von Wellen definiert ist, nämlich gemessen von der positiven  $y$ -Achse gegen den Uhrzeigersinn.

In Diagramm A.1(a) schwingen die gestrichelte  $L_0$ -Welle und die gepunktete  $L_{90}$ -Welle „in Phase“. Das bedeutet, dass beide Wellen ihre Maxima, Minima, und Nulldurchgänge jeweils an den gleichen Stellen der  $z$ -Achse haben. Ihre Summe, die als durchgezogene Linie gezeichnete  $L_{45}$ -Welle, ist ebenfalls linear polarisiert.

In Diagramm A.1(b) läuft die gepunktete Welle der gestrichelten um eine halbe Wellenlänge nach, falls sich die Welle in positiver  $z$ -Richtung ausbreitet (bei  $z = 0$  hat die  $L_0$ -Welle ihr Maximum bereits eine viertel Wellenlänge hinter sich, während die  $L_{90}$ -Welle ihr Maximum noch eine viertel Wellenlänge vor sich hat), bzw. um eine halbe Wellenlänge voraus, falls sich die Welle in negativer  $z$ -Richtung ausbreitet (bei  $z = 0$  hat die  $L_{90}$ -Welle ihr Maximum bereits eine viertel Wellenlänge hinter sich, während die  $L_0$ -Welle ihr Maximum noch eine viertel Wellenlänge vor sich hat). Auch in diesem Fall ist die Summe der beiden Teilwellen eine linear polarisierte Welle, aber jetzt eine Welle mit  $L_{135}$ -Polarisation.

In Diagramm A.1(c) läuft die gepunktete Welle der gestrichelten um eine viertel Wellenlänge voraus, falls sich die Welle in positiver  $z$ -Richtung ausbreitet (bei  $z = 0$  hat die  $L_{90}$ -Welle ihr Maximum bereits erreicht, während die  $L_0$ -Welle ihr Maximum noch eine viertel Wellenlänge vor sich hat), bzw. um eine viertel Wellenlänge hinterher, falls sich die Welle in negativer  $z$ -Richtung ausbreitet (bei  $z = 0$  hat die  $L_0$ -Welle ihr Maximum bereits eine viertel Wellenlänge hinter sich, während die  $L_{90}$ -Welle ihr Maximum gerade erst erreicht). In diesem Fall bildet die Summe der beiden Teilwel-

len eine Rechtsschraube. Man<sup>3</sup> bezeichnet diese Welle als „rechts-zirkular“ polarisiert bzw.  $C_R$ -polarisiert.<sup>4</sup>

In Diagramm A.1 (d) schließlich ist eine links-zirkular polarisierte ( $C_L$ -polarisierte) Welle dargestellt. Sie entsteht, wenn die  $L_{90}$ -polarisierte Teilwelle der  $L_0$ -polarisierten Teilwelle um eine viertel Wellenlänge hinterher läuft falls die Welle sich in positiver  $z$ -Richtung ausbreitet (bei  $z = 0$  hat die  $L_{90}$ -Welle ihr Maximum bereits eine viertel Wellenlänge hinter sich, während die  $L_0$ -Welle ihr Maximum gerade erst erreicht), bzw. um eine viertel Wellenlänge voraus läuft falls sich die Welle in negativer  $z$ -Richtung ausbreitet (bei  $z = 0$  hat die  $L_{90}$ -Welle ihr Maximum bereits eine viertel Wellenlänge hinter sich, während die  $L_0$ -Welle ihr Maximum gerade erst erreicht).

Wie ein Phasenversatz in Bildern zu malen ist, sieht man in Abb. A.1. Aber wie wird ein Phasenversatz mathematisch in unsere Zustandsvektoren eingefügt? Da verkünde ich einfach mal **ex cathedra** folgende Regel:<sup>5</sup>

---

<sup>3</sup> „Man“ ist jeder Mensch, der schon mal eine Schraube in ein Brett geschraubt hat. Diese Erfahrung kann man bei Theoretischen Physikern nicht unbedingt voraussetzen. Bei der theoretischen Analyse des Vorgangs haben einige Theoretiker sich überlegt, dass man ja auch die Schraube still halten und stattdessen das Brett drehen kann, um die Schraube einzudrehen. Folglich bezeichnen sie eine Schraube als Rechtsschraube, wenn man das Brett rechts herum drehen muss, damit es die Schraube in sich einsaugt. Und sie bezeichnen eine Schraube als Linksschraube, wenn man das Brett links herum drehen muss, damit es die Schraube in sich einsaugt. Konsequenterweise verwenden sie dann auch die Bezeichnungen rechts-zirkular und links-zirkular umgekehrt wie wir. Hinweis: Wenn ein Theoretiker noch niemals eine Schraube in ein Brett geschraubt hat beweist das noch lange nicht, dass sein Optik-Lehrbuch schlecht ist.

<sup>4</sup> Der Buchstabe  $C$  steht für (lateinisch) circus = Kreis.

<sup>5</sup> für Physiker: Die allgemeine Regel ist: Phasenversatz  $\varphi \longleftrightarrow$  Faktor  $e^{i\varphi}$

$$\begin{aligned}
\text{Phasenversatz } + 1/4 \text{ Wellenlänge} &\longleftrightarrow \text{Faktor } + \sqrt{-1} = +i \\
\text{Phasenversatz } - 1/4 \text{ Wellenlänge} &\longleftrightarrow \text{Faktor } - \sqrt{-1} = -i \\
\text{Phasenversatz } \pm 1/2 \text{ Wellenlänge} &\longleftrightarrow \text{Faktor } - 1 \\
\text{Phasenversatz } 0 &\longleftrightarrow \text{Faktor } + 1 \quad (\text{A.14})
\end{aligned}$$

Hier wird die Zahl  $i = \sqrt{-1}$  verwendet, die in (5.5) erklärt wurde.

Also kann man den Zustandsvektor  $|L_{45}\rangle$  eines  $L_{45}$ -polarisierten Photons als Summe eines  $L_0$ -polarisierten Photons und eines  $L_{90}$ -polarisierten Photons mit Phasenversatz Null folgendermaßen schreiben:

$$|L_{45}\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}} \left( |L_0\rangle + |L_{90}\rangle \right) \quad (\text{A.15a})$$

Der Faktor  $\sqrt{1/2}$  ist erforderlich, damit die Projektions-Amplitude dieses Zustandsvektors auf sich selbst 1 ist, wie es sein muss. Prüfen wir es nach:

$$\begin{aligned}
\langle L_{45} || L_{45} \rangle &= \\
&= \frac{1}{2} \left( \underbrace{\langle L_0 || L_0 \rangle}_1 + \underbrace{\langle L_0 || L_{90} \rangle}_0 + \underbrace{\langle L_{90} || L_0 \rangle}_0 + \underbrace{\langle L_{90} || L_{90} \rangle}_1 \right) = 1
\end{aligned}$$

Mit den Phasenversatz-Faktoren (A.14) sind die Zustandsvektoren von Photonen mit  $L_{135}$ -,  $C_{R-}$ , und  $C_L$ -Polarisation:

$$|L_{135}\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}} \left( |L_0\rangle - |L_{90}\rangle \right) \quad (\text{A.15b})$$

$$|C_R\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}} \left( |L_0\rangle + i|L_{90}\rangle \right) \text{ falls das} \quad (\text{A.15c})$$

Photon sich in  $+z$ -Richtung bewegt

$$|C_R\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}} \left( |L_0\rangle - i|L_{90}\rangle \right) \text{ falls das} \quad (\text{A.15d})$$

Photon sich in  $-z$ -Richtung bewegt

$$|C_L\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}} \left( |L_0\rangle - i|L_{90}\rangle \right) \text{ falls das} \quad (\text{A.15e})$$

Photon sich in  $+z$ -Richtung bewegt

$$|C_L\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}} \left( |L_0\rangle + i|L_{90}\rangle \right) \text{ falls das} \quad (\text{A.15f})$$

Photon sich in  $-z$ -Richtung bewegt

Wer als Übungsaufgabe nachprüfen will, ob auch die Projektionsamplituden dieser Zustandsvektoren auf sich selbst gleich 1 sind, muss beachten dass im linken Faktor von Projektionsamplituden das Vorzeichen von  $i$  umgedreht wird, und dass  $(+i) \cdot (-i) \stackrel{\text{(5.5g)}}{=} +1$  ist:

$$\langle C_R || C_R \rangle \stackrel{\text{(A.15c)}}{=} \sqrt{\frac{1}{2}} \left( \langle L_0 | - i \langle L_{90} | \right) \sqrt{\frac{1}{2}} \left( |L_0\rangle + i|L_{90}\rangle \right)$$

$$\langle C_R || C_R \rangle \stackrel{\text{(A.15d)}}{=} \sqrt{\frac{1}{2}} \left( \langle L_0 | + i \langle L_{90} | \right) \sqrt{\frac{1}{2}} \left( |L_0\rangle - i|L_{90}\rangle \right)$$

$$\langle C_L || C_L \rangle \stackrel{\text{(A.15e)}}{=} \sqrt{\frac{1}{2}} \left( \langle L_0 | + i \langle L_{90} | \right) \sqrt{\frac{1}{2}} \left( |L_0\rangle - i|L_{90}\rangle \right)$$

$$\langle C_L || C_L \rangle \stackrel{\text{(A.15f)}}{=} \sqrt{\frac{1}{2}} \left( \langle L_0 | - i \langle L_{90} | \right) \sqrt{\frac{1}{2}} \left( |L_0\rangle + i|L_{90}\rangle \right)$$

Damit zurück zum Term-Schema von Caesium auf Seite 360. Beim Übergang vom obersten zum mittleren Zustand und beim Übergang vom mittleren zum unteren Zustand emittiert das Atom jeweils ein Photon, wobei sich seine Drehimpuls-Quantenzahl um  $\pm 1$  ändert. Man sieht es den zirkular polarisierten Wellen A.1 © und A.1 ④ schon intuitiv an, dass ihr Drehimpuls von Null verschieden ist, und dieser intuitive Eindruck ist auch völlig richtig. Ohne Beweis teile ich hier mit, dass die Emission eines zirkular polarisierten Photons tatsächlich die Drehimpuls-Quantenzahl  $j$  eines Atoms um  $\pm 1$  ändert. Die beiden Lumineszenz-Photonen Photon<sub>1</sub> und Photon<sub>2</sub> müssen also  $C_R$ - oder  $C_L$ -polarisiert sein. Die Kaskade der zwei Lumineszenz-Photonen startet und endet

bei einem Zustand des Atoms mit Drehimpuls-Quantenzahl  $j = 0$ . Also müssen sich die Drehimpulse von  $\text{Photon}_1$  und  $\text{Photon}_2$  gerade **kompensieren**. Da liegt die Vermutung nahe, dass eines der Photonen  $C_R$ -polarisiert ist, und das andere  $C_L$ -polarisiert ist.

Aber Halt! Das gilt nur wenn die beiden Lumineszenz-Photonen sich in gleicher Richtung bewegen. Aspect et. al. untersuchten jedoch den Fall, in dem die beiden Lumineszenz-Photonen in genau entgegengesetzten Richtungen emittiert werden, siehe Abb. 7.1 auf Seite 165. In diesem Fall müssen entweder beide Photonen rechtszirkular polarisiert oder beide linkszirkular polarisiert sein, damit sich ihre Drehimpulse zu Null addieren. Ein anschauliches Beispiel sind zwei Leute, die gleichzeitig von gegenüberliegenden Seiten jeder eine Schraube in das gleiche Brett drehen. Wenn der eine eine Rechtsschraube verwendet und der andere eine Linksschraube, dann müssen sie das Brett festhalten damit es sich nicht mitdreht. Aber wenn beide eine Rechtsschraube oder beide eine Linksschraube verwenden und **synchron** mit gleicher Kraft schrauben, dann bleibt das Brett in Ruhe, auch wenn es nicht festgehalten wird. Ebenso ist die Summe der Drehimpulse von zwei zirkular polarisierten Photonen, die sich in entgegengesetzter Richtung bewegen, genau dann Null, wenn entweder beide  $C_R$ -polarisiert oder beide  $C_L$ -polarisiert sind.

Wegen dieser Korrelation (beide  $C_R$ -polarisiert oder beide  $C_L$ -polarisiert) wird das Gesamtsystem der zwei Lumineszenz-Photonen in der Quantentheorie durch den verschränkten Zustandsvektor

$$|\text{Photon}_1 \& \text{Photon}_2\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}} \left( |C_R\rangle_1 |C_R\rangle_2 + |C_L\rangle_1 |C_L\rangle_2 \right) \quad (\text{A.16a})$$

beschrieben. Hier wurden die Indizes von  $\text{Photon}_1$  und  $\text{Photon}_2$  an die Vektoren  $|C_R\rangle$  und  $|C_L\rangle$  angefügt, damit man erkennt welcher Vektor zu welchem Photon gehört.

In (A.15) wurden die Vektoren  $|C_R\rangle$  und  $|C_L\rangle$  als Kombinationen von  $|L_0\rangle$  und  $|L_{90}\rangle$  geschrieben. Das setzen wir in den verschränkten

Zustandsvektor (A.16a) ein:

$$\begin{aligned}
|\text{Photon}_1\&\text{Photon}_2\rangle &\stackrel{\text{(A.16a)}}{=} \sqrt{\frac{1}{2}} \left[ |C_R\rangle_1 |C_R\rangle_2 + |C_L\rangle_1 |C_L\rangle_2 \right] = \\
&= \sqrt{\frac{1}{2}} \left[ \sqrt{\frac{1}{2}} \left( |L_0\rangle_1 + i|L_{90}\rangle_1 \right) \sqrt{\frac{1}{2}} \left( |L_0\rangle_2 - i|L_{90}\rangle_2 \right) + \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{\frac{1}{2}} \left( |L_0\rangle_1 - i|L_{90}\rangle_1 \right) \sqrt{\frac{1}{2}} \left( |L_0\rangle_2 + i|L_{90}\rangle_2 \right) \right] = \\
&= \sqrt{\frac{1}{2}} \left[ \frac{1}{2} \left( |L_0\rangle_1 |L_0\rangle_2 - i|L_0\rangle_1 |L_{90}\rangle_2 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + i|L_{90}\rangle_1 |L_0\rangle_2 - i^2 |L_{90}\rangle_1 |L_{90}\rangle_2 \right) + \frac{1}{2} \left( |L_0\rangle_1 |L_0\rangle_2 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + i|L_0\rangle_1 |L_{90}\rangle_2 - i|L_{90}\rangle_1 |L_0\rangle_2 - i^2 |L_{90}\rangle_1 |L_{90}\rangle_2 \right) \right] = \\
&= \sqrt{\frac{1}{2}} \left[ \frac{1}{2} \left( |L_0\rangle_1 |L_0\rangle_2 + |L_{90}\rangle_1 |L_{90}\rangle_2 \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \left( |L_0\rangle_1 |L_0\rangle_2 + |L_{90}\rangle_1 |L_{90}\rangle_2 \right) \right] = \\
&= \sqrt{\frac{1}{2}} \left( |L_0\rangle_1 |L_0\rangle_2 + |L_{90}\rangle_1 |L_{90}\rangle_2 \right) \tag{A.16b}
\end{aligned}$$

Hier wurde  $-i^2 \stackrel{\text{(5.5g)}}{=} +1$  benutzt. Jetzt müssen wir noch eine Verallgemeinerung einfügen: Aus Abb. A.1 erkennt man, dass wir genau die gleichen Wellen mit zirkularer Polarisation  $C_R$  und  $C_L$  als Kombination von zwei linear polarisierten Wellen mit Polarisation  $L_{\gamma+0}$  und  $L_{\gamma+90}$  erhalten könnten, mit beliebigem Winkel  $\gamma$ . Es kommt nur darauf an, dass der Winkel zwischen den beiden linear polarisierten Wellen genau  $90^\circ$  ist. Statt A.16b müssen wir also die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned}
|\text{Photon}_1\&\text{Photon}_2\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}} \left( |L_\gamma\rangle_1 |L_\gamma\rangle_2 + |L_{\gamma+90}\rangle_1 |L_{\gamma+90}\rangle_2 \right) \\
&\text{mit beliebigem } \gamma \tag{A.16c}
\end{aligned}$$

einsetzen.

Der Gesamt-Zustandsvektor von zwei Photonen, die in entgegengesetzte Richtung fliegen und entweder beide rechtszirkular oder beide linkszirkular polarisiert sind, ist also identisch mit dem Gesamt-Zustandsvektor von zwei Photonen, die in entgegengesetzte Richtung fliegen und entweder beide linear  $L_\gamma$ -polarisiert oder beide linear  $L_{\gamma+90}$ -polarisiert sind, mit beliebigem Winkel  $\gamma$  bzw.  $\gamma + 90^\circ$  zwischen der y-Achse und der Polarisationssebene der Photonen.<sup>6</sup> Außerdem müssen die Teilwellen  $|L_\gamma\rangle$  und  $|L_{\gamma+90}\rangle$  um genau eine viertel Wellenlänge gegeneinander versetzt sein, damit sie in der Summe eine zirkular polarisierte Welle ergeben, siehe Abb. A.1. Für die Auswertung des Experiments von Aspect et. al. genügt aber die Messung der linearen Polarisation der Photonen und ihrer Korrelation gemäß (A.16c), den Phasenversatz kann man ignorieren.

#### A.4 Berechnung der Wahrscheinlichkeiten (7.5)

Wir wollen die Wahrscheinlichkeiten

$$W_{RR} \stackrel{(7.5a)}{=} \frac{1}{2} \left| \langle a_1 || L_\gamma \rangle_1 \langle a_2 || L_\gamma \rangle_2 + \langle a_1 || L_{\gamma+90} \rangle_1 \langle a_2 || L_{\gamma+90} \rangle_2 \right|^2$$

$$W_{RT} \stackrel{(7.5b)}{=} \frac{1}{2} \left| \langle a_1 || L_\gamma \rangle_1 \langle b_2 || L_\gamma \rangle_2 + \langle a_1 || L_{\gamma+90} \rangle_1 \langle b_2 || L_{\gamma+90} \rangle_2 \right|^2$$

$$W_{TR} \stackrel{(7.5c)}{=} \frac{1}{2} \left| \langle b_1 || L_\gamma \rangle_1 \langle a_2 || L_\gamma \rangle_2 + \langle b_1 || L_{\gamma+90} \rangle_1 \langle a_2 || L_{\gamma+90} \rangle_2 \right|^2$$

<sup>6</sup> Es lohnt sich, darüber etwas genauer nachzudenken. Emittiert das Atom die beiden Photonen nun „in Wirklichkeit“ mit zirkularer oder mit linearer Polarisation? Die Antwort der Quantentheorie lautet: Weder noch. Die Polarisation der Photonen wird erst durch die Messung erschaffen. Wenn man Messgeräte verwendet die lineare Polarisation erschaffen, dann werden die Photonen nach der Messung linear polarisiert sein, und ihre Polarisation wird gemäß (A.16c) korreliert sein. Wenn man Messgeräte verwendet die zirkulare Polarisation erschaffen, dann werden die Photonen nach der Messung zirkular polarisiert sein, und ihre Polarisation wird gemäß (A.16a) korreliert sein.

$$W_{TT} \stackrel{(7.5d)}{=} \frac{1}{2} \left| \langle b_1 || L_\gamma \rangle_1 \langle b_2 || L_\gamma \rangle_2 + \langle b_1 || L_{\gamma+90} \rangle_1 \langle b_2 || L_{\gamma+90} \rangle_2 \right|^2$$

der vier möglichen Messergebnisse berechnen. Dazu stellen wir zunächst fest, dass

$$|L_\gamma\rangle = e^{i\gamma}|L_0\rangle \quad \text{und} \quad |L_{\gamma+90}\rangle = e^{i\gamma}|L_{90}\rangle \quad (\text{A.18})$$

ist. Ich weiß, dass die Exponentialfunktion mit imaginärem Exponenten hier ziemlich unvermittelt kommt. Nicht-Physiker mögen bitte einfach mal glauben, dass (A.18) tatsächlich korrekt ist. Außerdem können wir  $|L_0\rangle$  bzw.  $|L_{90}\rangle$  durch die Einheitsvektoren  $|y\rangle$  bzw.  $|x\rangle$  in Richtung der Koordinatenachsen  $y$  bzw.  $x$  ersetzen, denn so wurden die Polarisationsvektoren ja definiert, siehe Abb. 7.3 auf Seite 167. Die Indizes 1 und 2, mit denen die Zugehörigkeit der Funktionen zu Photon<sub>1</sub> und Photon<sub>2</sub> spezifiziert werden, sind nicht mehr erforderlich nachdem sie mit den jeweils passenden Gegenstücken zu Projektionsamplituden zusammengefasst wurden. Eine weitere Vereinfachung ergibt sich daraus, dass  $|e^{i\gamma}|^2 = 1$  ist. Also können die Wahrscheinlichkeiten folgendermaßen geschrieben werden:

$$W_{RR} = \frac{1}{2} \left| \langle a_1 || y \rangle \langle a_2 || y \rangle + \langle a_1 || x \rangle \langle a_2 || x \rangle \right|^2 \quad (\text{A.19a})$$

$$W_{RT} = \frac{1}{2} \left| \langle a_1 || y \rangle \langle b_2 || y \rangle + \langle a_1 || x \rangle \langle b_2 || x \rangle \right|^2 \quad (\text{A.19b})$$

$$W_{TR} = \frac{1}{2} \left| \langle b_1 || y \rangle \langle a_2 || y \rangle + \langle b_1 || x \rangle \langle a_2 || x \rangle \right|^2 \quad (\text{A.19c})$$

$$W_{TT} = \frac{1}{2} \left| \langle b_1 || y \rangle \langle b_2 || y \rangle + \langle b_1 || x \rangle \langle b_2 || x \rangle \right|^2 \quad (\text{A.19d})$$

Die Einheitsvektoren  $|a_1\rangle$ ,  $|b_1\rangle$ ,  $|a_2\rangle$ ,  $|b_2\rangle$ ,  $|x\rangle$ ,  $|y\rangle$  sind alle reell. In Gleichung (5.7) auf Seite 111 hatten wir festgestellt, dass für solche Vektoren gilt:

falls  $\langle h || g \rangle$  reell ist:

$$\langle h || g \rangle \stackrel{(5.7)}{=} \langle g || h \rangle \stackrel{(5.7)}{=} \cos \sphericalangle(h, g) \quad (\text{A.20})$$

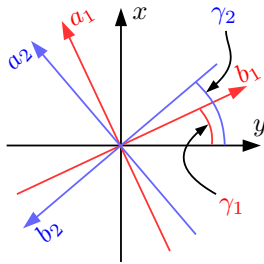


Abb. A.2: Die drei Koordinatensysteme

Damit wir von (A.20) Gebrauch machen können, sind in Abb. A.2 die drei Koordinatensysteme von Abb. 7.4 noch einmal gezeichnet, aber jetzt alle drei mit Blickrichtung parallel zur  $z$ -Achse, und durch unterschiedliche Farben deutlicher hervorgehoben. Mithilfe dieser Grafik erkennt man:<sup>7</sup>

$$\begin{aligned} \langle a_1 || y \rangle &= \cos(\gamma_1 + 90^\circ) \\ \langle a_2 || y \rangle &= \cos(\gamma_2 + 90^\circ) \\ \langle a_1 || x \rangle &= \langle b_1 || y \rangle = \cos(\gamma_1) \\ \langle a_2 || x \rangle &= \cos(\gamma_2) \\ \langle b_2 || y \rangle &= \cos(\gamma_2 + 180^\circ) \stackrel{\text{Abb. 5.4}}{=} -\cos(\gamma_2) \\ \langle b_2 || x \rangle &= \cos(\gamma_2 + 90^\circ) \end{aligned}$$

<sup>7</sup> In (A.12d) hatten wir in die Projektionsamplituden Winkel eingesetzt, die nur halb so groß waren wie die Winkel im Ortsraum, weil man einen Stern-Gerlach-Magneten um  $180^\circ$  drehen muss damit sein Eigenvektor  $|\uparrow\rangle$  in seinen Eigenvektor  $|\downarrow\rangle$  übergeht, während der Winkel zwischen  $|\uparrow\rangle$  und  $|\downarrow\rangle$  im abstrakten mathematischen Raum der Eigenvektoren  $90^\circ$  beträgt. Dagegen muss man die Polarisatoren nur um  $90^\circ$  im Ortsraum drehen, damit ihre Eigenvektoren  $|a\rangle$  in die Eigenvektoren  $|b\rangle$  übergehen. Im abstrakten mathematischen Raum der Eigenvektoren ist der Winkel zwischen  $|a\rangle$  und  $|b\rangle$  ebenfalls  $90^\circ$ . In diesem Fall sind also die Winkel im Ortsraum und im abstrakten Vektorraum identisch.

$$\langle b_1 || x \rangle = \cos(90^\circ - \gamma_1) \stackrel{\text{Abb. 5.4}}{=} -\cos(90^\circ + \gamma_1)$$

Also kann man (A.19) folgendermaßen schreiben:

$$W_{RR} = \frac{1}{2} \left| \cos(\gamma_1 + 90^\circ) \cos(\gamma_2 + 90^\circ) + \cos(\gamma_1) \cos(\gamma_2) \right|^2 \quad (\text{A.22a})$$

$$W_{RT} = \frac{1}{2} \left| -\cos(\gamma_1 + 90^\circ) \cos(\gamma_2) + \cos(\gamma_1) \cos(\gamma_2 + 90^\circ) \right|^2$$

$$W_{TR} = \frac{1}{2} \left| \cos(\gamma_1) \cos(\gamma_2 + 90^\circ) - \cos(90^\circ + \gamma_1) \cos(\gamma_2) \right|^2$$

$$W_{TT} = \frac{1}{2} \left| -\cos(\gamma_1) \cos(\gamma_2) - \cos(90^\circ + \gamma_1) \cos(\gamma_2 + 90^\circ) \right|^2$$

Offensichtlich ist

$$W_{RT} = W_{TR} , \quad (\text{A.23a})$$

und wegen  $|-1|^2 = +1$  auch

$$W_{TT} = W_{RR} . \quad (\text{A.23b})$$

Weil jedes gültige Ergebnis mit Sicherheit (also mit Wahrscheinlichkeit  $W = 1$ ) eines der vier möglichen sein muss, gilt schließlich auch noch

$$1 = W_{RR} + W_{RT} + W_{TR} + W_{TT} \\ \stackrel{(\text{A.23a}), (\text{A.23b})}{=} 2W_{RR} + 2W_{RT}$$

$$\frac{1}{2} = W_{RR} + W_{RT}$$

$$W_{RT} = \frac{1}{2} - W_{RR} \quad (\text{A.23c})$$

$$W_{TR} \stackrel{(\text{A.23a})}{=} \frac{1}{2} - W_{RR} . \quad (\text{A.23d})$$

Man braucht also nur  $W_{RR}$  zu berechnen, dann kennt man mithilfe von (A.23) auch die anderen drei Wahrscheinlichkeiten.

Im Folgenden brauchen wir zwei Formeln aus der Formelsammlung:

$$\cos(\gamma + 90^\circ) = -\sin(\gamma) \quad (\text{A.24a})$$

$$\sin(\gamma_1) \sin(\gamma_2) + \cos(\gamma_1) \cos(\gamma_2) = \cos(\gamma_1 - \gamma_2) \quad (\text{A.24b})$$

Damit erhält man:

$$\begin{aligned} W_{RR} &\stackrel{(\text{A.22a})}{=} \frac{1}{2} \left| \cos(\gamma_1 + 90^\circ) \cos(\gamma_2 + 90^\circ) + \cos(\gamma_1) \cos(\gamma_2) \right|^2 \\ &\stackrel{(\text{A.24a})}{=} \frac{1}{2} \left| \sin(\gamma_1) \sin(\gamma_2) + \cos(\gamma_1) \cos(\gamma_2) \right|^2 \\ &\stackrel{(\text{A.24b})}{=} \frac{1}{2} \cos^2(\gamma_1 - \gamma_2) \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

## A.5 Die Zustände $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$ des Beryllium-Ions

Beryllium existiert fast ausschließlich als stabiles Isotop  ${}^9\text{Be}$ . Sein Kern besteht aus 4 Protonen und 5 Neutronen. Das neutrale Atom hat vier Elektronen, das  $\text{Be}^+$  Ion nur drei. Ein kleiner Ausschnitt aus dem Termschema des einfach positiv geladenen  $\text{Be}^+$  Ions wird in Abb. A.3 auf der nächsten Seite gezeigt.<sup>8</sup>

Im Grundzustand (dem Zustand mit niedrigster Energie) hat die Elektronenhülle des  $\text{Be}^+$  Ions die Drehimpuls-Quantenzahl  $j_{\text{Elektronen}} = 1/2$ . Die Drehimpuls-Quantenzahl des Atomkerns ist  $j_{\text{Kern}} = 3/2$ . Also kann die Drehimpuls-Quantenzahl des Atoms insgesamt  $j = 3/2 + 1/2 = 2$  oder  $j = 3/2 - 1/2 = 1$  sein. Die Projektion des Drehimpulses auf die Richtung eines Magnetfelds kann nur einen der diskreten Werte

$$J_{\parallel} \stackrel{(6.5)}{=} j \hbar, (j-1) \hbar, (j-2) \hbar, \dots, -j \hbar \quad (\text{A.26})$$

<sup>8</sup> Zur Erinnerung:  $\hbar = h/(2\pi)$

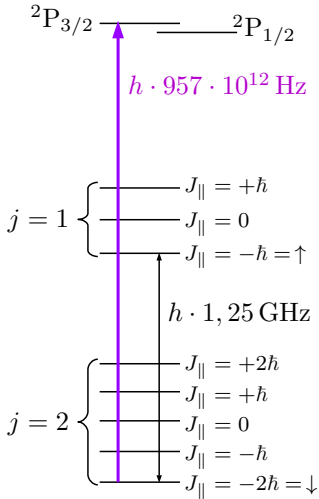


Abb. A.3: Term-Schema von  $^9\text{Be}^+$ . Die Energiedifferenzen sind nicht maßstabsgerecht gezeichnet!

annehmen. Die möglichen Werte von  $J_{||}$  sind für  $j = 1$  und  $j = 2$  in Abb. 6.4 auf Seite 136 dargestellt. Im Fall des  $\text{Be}^+$  Ions hat der Zustand mit  $j = 2$  und  $J_{||} = -2\hbar$  die niedrigste Energie.

Im Zustandsvektor (7.14) sind die beiden Zustandsvektoren

$$|\uparrow\rangle = |j = 1, J_{||} = -\hbar\rangle \quad (\text{A.27a})$$

$$|\downarrow\rangle = |j = 2, J_{||} = -2\hbar\rangle \quad (\text{A.27b})$$

der einzelnen  $\text{Be}^+$  Ionen miteinander verschränkt. Es handelt sich also um die jeweils untersten Zustände des Triplets ( $j = 1$ ) und des Quintetts ( $j = 2$ ) im Termschema A.3. Man könnte gegen die Benennung  $\uparrow$  und  $\downarrow$  einwenden, dass doch die Projektionen  $J_{||} = -\hbar$  und  $J_{||} = -2\hbar$  beider Drehimpulse die gleiche Richtung haben, siehe Abb. 6.4. Aber genau wie im Gedankenexperiment von Bohm, siehe Abb. 6.7 auf Seite 144, gilt auch im Experiment mit den zwei  $\text{Be}^+$  Ionen

$$J_{||}(\uparrow) - J_{||}(\downarrow) = \hbar,$$

und so gesehen ist es durchaus angemessen, die Schreibweise der Zustandsvektoren  $|\uparrow\rangle$  und  $|\downarrow\rangle$  auch jetzt wieder zu verwenden.

## A.6 Die Drehung der verschränkten Zustandsvektoren des Beryllium-Ions

Die Drehungen

$$|\uparrow\rangle_1 \xrightarrow{\text{Drehung um } \varphi_1} a_1 |\uparrow\rangle_1 + b_1 |\downarrow\rangle_1 \quad (\text{A.28a})$$

$$|\downarrow\rangle_1 \xrightarrow{\text{Drehung um } \varphi_1} c_1 |\uparrow\rangle_1 + d_1 |\downarrow\rangle_1 \quad (\text{A.28b})$$

$$|\uparrow\rangle_2 \xrightarrow{\text{Drehung um } \varphi_2} a_2 |\uparrow\rangle_2 + b_2 |\downarrow\rangle_2 \quad (\text{A.28c})$$

$$|\downarrow\rangle_2 \xrightarrow{\text{Drehung um } \varphi_2} c_2 |\uparrow\rangle_2 + d_2 |\downarrow\rangle_2, \quad (\text{A.28d})$$

der Zustände, in denen die Amplituden  $a_1, b_1, c_1, d_1$  von einem variabel wählbaren Winkel  $\varphi_1$  abhängen, und die Amplituden  $a_2, b_2, c_2, d_2$  von einem variabel wählbaren Winkel  $\varphi_2$  abhängen<sup>9</sup>, führten Rowe et. al. folgendermaßen aus:

Nachdem sie den verschränkten Zustand (7.16) erzeugt hatten, schossen sie einen weiteren kurzen Laserpuls auf die beiden  $\text{Be}^+$  Ionen. Mit diesem Puls wurde den Ionen eine Phasenverschiebung aufgeprägt, wie in Abb. A.4 auf der nächsten Seite gezeigt. Die beiden türkisen Punkte symbolisieren die Positionen der beiden Ionen. In A.4(b) ist die Wellenlänge des Laserpulses etwas größer als in A.4(a), und in A.4(c) nochmals etwas größer. Dadurch erhält das  $\text{Ion}_2$  in A.4(b) einen Phasenversatz von einer achteil Wellenlänge, und in A.4(c) einen Phasenversatz von einer viertel Wellenlänge gegenüber A.4(a).

Eine zweite Möglichkeit zur Variation des Phasenversatzes besteht darin, die positive Spannung der vier äußeren kleinen Elektro-

<sup>9</sup> für Physiker: Rowe et. al. definierten  $a_j = c_j = \sqrt{1/2}$ ,  $b_j = -i\sqrt{1/2}e^{-i\varphi_j}$ ,  $d_j = -i\sqrt{1/2}e^{+i\varphi_j}$  für  $j = 1$  und  $j = 2$ .






	$\varphi_1$	$\varphi_2$
(a) 	0	0
(b) 	0	$+45^\circ \cong +\lambda/8$
(c) 	0	$+90^\circ \cong +\lambda/4$
(d) 	$-45^\circ \cong -\lambda/8$	$+135^\circ \cong +3\lambda/8$
(e) 	$-90^\circ \cong -\lambda/4$	$\pm 180^\circ \cong \pm \lambda/2$


Abb. A.4: Die Einstellung von  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$ 

den der Falle (siehe Abb. 7.6 auf Seite 178) noch weiter zu erhöhen. Dann werden die Ionen noch enger ins Zentrum der Falle gedrückt, und man erhält den in A.4(d) und A.4(e) skizzierten Phasenversatz. Da man zwei voneinander unabhängige Stellschrauben (Änderung der Wellenlänge des Lasers, Änderung der Elektroden Spannung) hat, kann man jede gewünschte Phasenverschiebung für  $\text{Ion}_1$  und für  $\text{Ion}_2$  einstellen.






Wenn man ein Objekt um  $360^\circ$  dreht, dann hat es genau die gleiche Stellung wie vor der Drehung. Eine Drehung um  $360^\circ$  hat also den gleichen Effekt wie eine Drehung um  $0^\circ$ . Und ein Phasenversatz von einer ganzen Wellenlänge hat genau den gleichen Effekt wie überhaupt kein Phasenversatz. In diesem Sinn entspricht (das Zeichen  $\cong$  bedeutet „entspricht“, und  $\lambda$  ist die Wellenlänge) eine Phasenverschiebung von  $\pm\lambda$  einer Drehung um  $\pm 360^\circ$ , eine Phasenverschiebung von  $\pm\lambda/2$  einer Drehung um  $\pm 180^\circ$ , eine Phasenverschiebung von  $\lambda/8$  entspricht einer Drehung um  $45^\circ$ , und so weiter.

## Literatur








 diese Files sind im Internet kostenpflichtig



 diese Files sind im Internet kostenlos









Einige der kostenlosen Links sind „instabil“, d. h. die Dokumente verschwinden nach einigen Jahren von den Servern, oder die komplette Website wird eingestellt. In solchen Fällen finden Suchmaschinen das Dokument oft auf einem anderen (kostenfreien) Server, wenn man sie nach dem Namen des Autors und dem Titel suchen lässt. Falls dieses Problem auftritt, bitte ich um Rückmeldung. [mailto: gerold.gruendler@astrophys-neunhof.de](mailto:gerold.gruendler@astrophys-neunhof.de)











- [1] Claudius Ptolemaeus: *Syntaxis Mathematica* Vol. I & II (B. G. Teubner, Leipzig, 1898) Griechischer Text, herausgegeben von J. L. Heiberg. Volume I:  <http://www.wilbourhall.org/millionbookspdfs/pt1claudiptolemaei01ptoluoft.pdf> ; Volume I & II:  <http://www.wilbourhall.org/pdfs/HeibergAlmagestComplete.pdf>  
Deutsche Übersetzung (B. G. Teubner, Leipzig, 1912):  <http://www.wilbourhall.org/index.html#ptolemy>
- [2] Isaac Newton: *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (Guil. & Joh. Innys, London, 3<sup>rd</sup> ed. 1726)  
 <http://dx.doi.org/10.3931/e-rara-1235> ,  
deutsche Übersetzung:  <https://archive.org/details/mathematischepr00newtgoog>







- [3] Pierre Simon Laplace: *Essai philosophique sur les probabilités* (1814), enthalten in Samburski: *Der Weg der Physik* (Deutscher Taschenbuch Verlag, München, 1978)
- [4] A. Beckermann: *Haben wir einen freien Willen?*, Philosophie verständlich (2005),  
 <http://www.philosophieverstaendlich.de/freiheit>
- [5] *Evaneszente Elektromagnetische Felder*  
APIN Mitteilung sd91013 (2014)  
 <http://astrophys-neunhof.de/mtlg/sd91013.pdf>
- [6] F. Hénault: *Quantum physics and the beam splitter mystery*, Proc. SPIE 9570, VI, 95700Q (2015),  
 <http://dx.doi.org/10.1117/12.2186291>  
arxiv: 1509.00393 (2015)  <http://arxiv.org/abs/1509.00393>
- [7] Th. Young: *Experiments and Calculations Relative to Physical Optics*, Phil. Trans. Roy. Soc. London **94**, 1 – 16 (1804)  
 <http://dx.doi.org/10.1098/rstl.1804.0001>
- [8] P. Lenard: *Ueber die lichtelektrische Wirkung*, Ann. Phys. (Leipzig) **8**, 149 – 198 +Taf.I (1902),  
 <http://dx.doi.org/10.1002/andp.19023130510> oder  
 [https://grundpraktikum.physik.uni-saarland.de/gpalt/Anleitungen/Ergaenzungen/J1\\_Papers/Photoeffekt%20-%20Lenard\\_1.pdf](https://grundpraktikum.physik.uni-saarland.de/gpalt/Anleitungen/Ergaenzungen/J1_Papers/Photoeffekt%20-%20Lenard_1.pdf)
- [9] A. Einstein: *Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt*, Ann. Phys. (Leipzig) **17**, 132–148 (1905)  
 <http://dx.doi.org/10.1002/andp.19053220607>









- [10] A. Einstein: *Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen*,  
Ann. Phys. (Leipzig) **17**, 549 – 560 (1905),  
 <http://dx.doi.org/10.1002/andp.19053220806>
- [11] A. Einstein: *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*,  
Ann. Phys. (Leipzig) **17**, 891 – 920 (1905),  
 <http://dx.doi.org/10.1002/andp.19053221004>
- [12] Max Planck: *Die Entstehung und bisherige Entwicklung der Quantentheorie*, Nobelvortrag 2. Juni 1920  
(J. A. Barth, Leipzig, 1920)  
English translation:  [http://nobelprize.org/nobel\\_prizes/physics/laureates/1918/planck-lecture.html](http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1918/planck-lecture.html)
- [13] *Irrationale Zahlen*, APIN Mitteilung sd01311 (2010)  
 <http://astrophys-neunhof.de/mtlg/sd01311.pdf>
- [14] R. A. Millikan: *A direct photoelectric determination of Planck's  $h$* , Phys. Rev. **7**, 355 – 388 (1916),  
 <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRev.7.355>
- [15] A. H. Compton: *A Quantum Theory of the Scattering of X-rays by Light Elements*, Phys. Rev. **21**, 483 – 502 (1923),  
 <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRev.21.483>
- [16] G. I. Taylor: *Interference fringes with feeble light*,  
Proc. Cambridge Phil. Soc. **15**, 114 – 115 (1909),  <http://www.biodiversitylibrary.org/item/97262#page/142/mode/1up>

- [17] J. J. Thorn, M. S. Neel, V. W. Donato, G. S. Bergreen, R. E. Davies, M. Beck: *Observing the quantum behavior of light in an undergraduate laboratory*, Am. J. Phys. **72**, 1210 – 1219 (2004),  
 <http://dx.doi.org/10.1119/1.1737397> or:  [http://people.whitman.edu/~beckmk/QM/grangier/Thorn\\_ajp.pdf](http://people.whitman.edu/~beckmk/QM/grangier/Thorn_ajp.pdf)
- [18] E. J. Galvez, C. H. Holbrow, M. J. Pysher, J. W. Martin, N. Courtemanche, L. Heilig, J. Spencer: *Interference with correlated photons: Five quantum mechanics experiments for undergraduates*, Am. J. Phys. **73**, 127 – 140 (2005),  
 <http://dx.doi.org/10.1119/1.1796811>  
 <https://pdfs.semanticscholar.org/2a78/6840af9225061c185f364090ddec6d78bb78.pdf>
- [19] Christian Morgenstern: *Alle Galgenlieder* (Insel Verlag, Frankfurt am Main, 1972)
- [20] A. Zeilinger, R. Gähler, C. G. Shull, W. Treimer, W. Mampe: *Single- and double-slit diffraction of neutrons*, Rev. Mod. Phys. **60**, 1067 – 1073 (1988),  
 <http://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.60.1067> or:  
 <http://members.ift.uam-csic.es/bellido/cuantica/articulos/RevModPhys.60.1067.pdf>
- [21] S. Frabboni, G. C. Gazzadi, G. Pozzi: *Nanofabrication and the realization of Feynman's two-slit experiment*, Appl. Phys. Lett. **93**, 073108 (3pp) (2008),  
 <http://dx.doi.org/10.1063/1.2962987>  
 [http://wiki.epfl.ch/mep/documents/MEP\[08-09\]\\_DOWNLOAD/applphyslett\\_93\\_073108\\_feynman\\_exp.pdf](http://wiki.epfl.ch/mep/documents/MEP[08-09]_DOWNLOAD/applphyslett_93_073108_feynman_exp.pdf)







- [22] R. Bach, D. Pope, S. H. Liou, H. Batelaan : *Controlled double-slit electron diffraction*,  
New J. Phys. **15**, 033018 (7pp) (2013),  
 <http://dx.doi.org/10.1088/1367-2630/15/3/033018>
- [23] R. Bach, D. Pope, S. H. Liou, H. Batelaan :  
*Supplement to: Controlled double-slit electron diffraction*,  
New J. Phys. **15**, (2013),  <http://iopscience.iop.org/1367-2630/15/3/033018/media/njp458349suppdata.pdf>
- [24] O. Carnal, J. Mlynek : *Young's double-slit experiment with atoms: A simple atom interferometer*,  
Phys. Rev. Lett. **66**, 2689 (1991),  
 <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.66.2689> or:  
 <http://elib.bsu.by/bitstream/123456789/154548/1/1991-066%20PRL%20Carnal%20%26%20Mlynek%20-%20Young%E2%80%99s%20double-slit%20experiment%20with%20atoms%20-%20a%20simple%20atom%20interferometer.pdf>
- [25] F. Shimizu, K. Shimizu, H. Takuma : *Double-slit interference with ultracold metastable neon atoms*,  
Phys. Rev. A **46**, R17 – R20 (1992),  
 <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.46.R17> or:  
 [alternative\\_link](#)
- [26] Galileo Galilei : *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* (Elsevier, Leiden, 1638),  
 [http://www.liberliber.it/mediateca/libri/g/galilei/discorsi\\_e\\_dimostrazioni/pdf/discor\\_p.pdf](http://www.liberliber.it/mediateca/libri/g/galilei/discorsi_e_dimostrazioni/pdf/discor_p.pdf)  
deutsche Übersetzung: *Unterredungen und mathematische Demonstrationen* (W. Engelmann, Leipzig, 1890),  
 [https://openlibrary.org/works/OL5458481W/Unte\\_rredungen\\_und\\_mathematische\\_Demonstrationen](https://openlibrary.org/works/OL5458481W/Unte_rredungen_und_mathematische_Demonstrationen)

- [27] M. S. Chapman, C. R. Ekstrom, T.D. Hammond, R.A. Rubenstein, J. Schmiedmayer, S. Wehinger, D. E. Pritchard : *Optics and Interferometry with Na<sub>2</sub> Molecules*, Phys. Rev. Lett. **74**, 4783–4786 (1995),  
 <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.74.478> or:  
 [http://chapmanlabs.gatech.edu/papers/molecular\\_fm\\_prl95.pdf](http://chapmanlabs.gatech.edu/papers/molecular_fm_prl95.pdf)
- [28] K. Hornberger, S. Gerlich, P. Haslinger, S. Nimmrichter, M. Arndt : *Colloquium: Quantum interference of clusters and molecules*, Rev. Mod. Phys. **84**, 157–173 (2012),  
 <http://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.84.157> arXiv:  
 <http://arxiv.org/abs/1109.5937>
- [29] S. Eibenberger, S. Gerlich, M. Arndt, M. Mayor, J. Tüxen : *Matter-wave interference of particles selected from a molecular library with masses exceeding 10 000 amu*, Phys. Chem. Chem. Phys. **15**, 14696–14700 (2013),  
 <https://doi.org/10.1039/C3CP51500A>
- [30] Galileo Galilei : *Il Saggiatore* (1623)  [http://www.libreriaeditrice.it/mediateca/libri/g/galilei/il\\_saggiatore/pdf/il\\_saggiatore\\_p.pdf](http://www.libreriaeditrice.it/mediateca/libri/g/galilei/il_saggiatore/pdf/il_saggiatore_p.pdf) english translation (parts only):  
 <http://www.princeton.edu/~hos/h291/assayer.htm>
- [31] M. Born : *Zur Quantenmechanik der Stoßvorgänge*, Zeits. Phys. **37**, 863–867 (1926),  <http://dx.doi.org/10.1007/BF01397477> oder:  [http://www.psiquadra.t.de/downloads/born26\\_stossvorgaenge.pdf](http://www.psiquadra.t.de/downloads/born26_stossvorgaenge.pdf)
- [32] N. Bohr : *On the Constitution of Atoms and Molecules*, Philos. Mag. **26**, 1–24 (1913)  <https://www.bibnum.education.fr/sites/default/files/bohr-texte.pdf>










- [33] Werner Heisenberg: *Der Teil und das Ganze*  
(Piper Verlag, München, 1969)
- [34] E. Schrödinger: *Discussion of Probability Relations between Separated Systems*,  
Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **31**, 555 – 563 (1935),  
 <http://dx.doi.org/10.1017/S0305004100013554> or:  
 <http://www.informationphilosopher.com/solutions/scientists/schrodinger/Schrodinger-1935.pdf>
- [35] W. Gerlach, O. Stern: *Der experimentelle Nachweis der Richtungsquantelung im Magnetfeld*,  
Z. Phys. **9**, 349 – 352 (1922),  
 <http://dx.doi.org/10.1007/BF01326983>
- [36] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen: *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?*,  
Phys. Rev. **47**, 777 – 780 (1935)  
 <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRev.47.777>
- [37] David Bohm: *Quantum Theory*  
(Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA, 1951)
- [38] N. Bohr: *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete?*,  
Phys. Rev. **48**, 696–702 (1935)  
 <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRev.48.696>
- [39] J. S. Bell: *On the Einstein Podolski Rosen Paradox*,  
Physics **1**, 195 – 200 (1964)  [https://cds.cern.ch/record/111654/files/vol1p195-200\\_001.pdf](https://cds.cern.ch/record/111654/files/vol1p195-200_001.pdf)

- [40] A. Peres: *Unperformed experiments have no results*,  
Am. J. Phys. **46**, 745 – 747 (1978),  
 <http://dx.doi.org/10.1119/1.11393> or:  [http://www.ifufrj.br/~pef/aulas\\_seminarios/notas\\_de\\_aula/carlos\\_2012\\_1/seminariosTemasMQ/teoremaBell/teoremaBell\\_Peres\\_AJP1978.pdf](http://www.ifufrj.br/~pef/aulas_seminarios/notas_de_aula/carlos_2012_1/seminariosTemasMQ/teoremaBell/teoremaBell_Peres_AJP1978.pdf)
- [41] J. S. Bell: *The Theory of local Beables*,  
CERN Report TH-2053, 14 pp (1975)  
 <https://cds.cern.ch/record/980036/files/197508125.pdf>
- [42] J. G. Cramer: *Generalized absorber theory and the Einstein-Podolsky-Rosen paradox*,  
Phys. Rev. D **22**, 362 – 376 (1980)  
 <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.22.362>
- [43] R. E. Kastner: *The Transactional Interpretation and its Evolution into the 21st Century: An Overview*,  
Philos. Comp. **11**, 923 – 932 (2016),  
 <http://dx.doi.org/10.1111/phc3.12360>  
arXiv: 1608.00660 (2016)  <https://arxiv.org/abs/1608.00660>
- [44] A. Aspect, P. Grangier, G. Roger: *Experimental Tests of Realistic Local Theories via Bell's Theorem*,  
Phys. Rev. Lett. **47**, 460 – 463 (1981),  
 <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.47.460>
- [45] A. Aspect, P. Grangier, G. Roger: *Experimental Realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment: A New Violation of Bell's Inequalities*,  
Phys. Rev. Lett. **49**, 91 – 94 (1982),  
 <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.49.91>







- [46] M. A. Rowe, D. Kielpinski, V. Meyer, C. A. Sackett, W. M. Itano, C. Monroe, D. J. Wineland: *Experimental violation of a Bell's inequality with efficient detection*, Nature **409**, 791 – 794 (2001),  
 <http://dx.doi.org/10.1038/35057215>
- [47] C. A. Sackett, D. Kielpinski, B. E. King, C. Langer, V. Meyer, C. J. Myatt, M. Rowe, Q. A. Turchette, W. M. Itano, D. J. Wineland, C. Monroe: *Experimental entanglement of four particles*, Nature **404**, 256 – 259 (2000),  
 <http://dx.doi.org/10.1038/35005011> or:  <http://qude.v.phys.ethz.ch/content/courses/QSIT07/pdfs/Sackett00.pdf>
- [48] *Wechselwirkung von 2-Niveau-Systemen mit elektromagnetischer Strahlung*, APIN Mitteilung sd14211 (2016)  
 <http://www.astrophys-neunhof.de/mtlg/sd14211.pdf>
- [49] P. G. Kwiat, K. Mattle, H. Weinfurter, A. Zeilinger, A. V. Sergienko, Y. Shih: *New High-Intensity Source of Polarization-Entangled Photon Pairs*, Phys. Rev. Lett. **75**, 4337 – 4341 (1995),  
 <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.113.120405> or:  
 [http://research.physics.illinois.edu/QI/Photonics/papers/My Collection.Data/PDF/New high-intensity source of polarization-entangled photon pairs.pdf](http://research.physics.illinois.edu/QI/Photonics/papers/My%20Collection/Data/PDF/New%20high-intensity%20source%20of%20polarization-entangled%20photon%20pairs.pdf)
- [50] G. Weihs, T. Jennewein, C. Simon, H. Weinfurter, A. Zeilinger: *Violation of Bell's Inequality under Strict Einstein Locality Conditions*, Phys. Rev. Lett. **81**, 5039 – 5043 (1998),  
 <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.81.5039>  
arXiv:  <https://arxiv.org/pdf/quant-ph/9810080.pdf>

- [51] B. Hensen, H. Bernien, A. E. Dréau, A. Reiserer, N. Kalb, M. S. Blok, J. Ruitenbergh, R. F. L. Vermeulen, R. N. Schouten, C. Abellán, W. Amaya, V. Pruneri, M. W. Mitchell, M. Markham, D. J. Twitchen, D. Elkouss, S. Wehner, T. H. Taminiau, R. Hanson : *Loophole-free Bell inequality violation using electron spins separated by 1.3 kilometres*, Nature **526**, 682 – 686 (2015)  
 <http://dx.doi.org/10.1038/nature15759>  
arXiv: 1508.05949  <http://arxiv.org/abs/1508.05949>
- [52] M. Giustina, M. A. M. Versteegh, S. Wengerowsky, J. Handsteiner, A. Hochrainer, K. Phelan, F. Steinlechner, J. Kofler, J. A. Larsson, C. Abellán, W. Amaya, V. Pruneri, M. W. Mitchell, J. Beyer, T. Gerrits, A. E. Lita, L. K. Shalm, S. W. Nam, T. Scheidl, R. Ursin, B. Wittmann, A. Zeilinger : *Significant-loophole-free test of Bell's theorem with entangled photons*, Phys. Rev. Lett. **115**, 250401 (2015)  
 <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.115.250401>  
arXiv: 1511.03190  <https://arxiv.org/abs/1511.03190>
- [53] L. K. Shalm, E. Meyer-Scott, B. G. Christensen, P. Bierhorst, M. A. Wayne, M. J. Stevens, T. Gerrits, S. Glancy, D. R. Hamel, M. S. Allman, K. J. Coakley, S. D. Dyer, C. Hodge, A. E. Lita, V. B. Verma, C. Lambrocco, E. Tortorici, A. L. Migdall, Y. Zhang, D. R. Kumor, W. H. Farr, F. Marsili, M. D. Shaw, J. A. Stern, C. Abellán, W. Amaya, V. Pruneri, T. Jennewein, M. W. Mitchell, P. G. Kwiat, J. C. Bienfang, R. P. Mirin, E. Knill, S. W. Nam : *A strong loophole-free test of local realism*, Phys. Rev. Lett. **115**, 250401 (2015)  
 <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.115.250402>  
arXiv: 1511.03189  <https://arxiv.org/abs/1511.03189>

- [54] W. Rosenfeld, D. Burchardt, R. Garthoff, K. Redeker, N. Ortegel, M. Rau, H. Weinfurter: *Event-ready Bell-test using entangled atoms simultaneously closing detection and locality loopholes*, Phys. Rev. Lett. **119**, 010402 (2017)  
 <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.119.010402>
- [55] A. Pais: *Einstein and the quantum theory*, Rev. Mod. Phys. **51**, 863 – 914 (1979),  
 <http://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.51.863>
- [56] Max Planck: *Wissenschaftliche Selbstbiographie* (Johann Ambrosius Barth, Leipzig, 1948)  
Auszug daraus in: Phys. Blätter **14**, 145 – 152 (1958),  
 <http://dx.doi.org/10.1002/phbl.19580140401>
- [57] W. Heisenberg: *Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik*, Z. Phys. **43**, 172 – 198 (1927),  
 <http://dx.doi.org/10.1007/BF01397280> oder:  
 [https://www.uni-trier.de/fileadmin/fb1/PHI/Jaeckels\\_-\\_Dokumente/Heisenberg\\_Unbestimmtheitsrelation.pdf](https://www.uni-trier.de/fileadmin/fb1/PHI/Jaeckels_-_Dokumente/Heisenberg_Unbestimmtheitsrelation.pdf)
- [58] *Robertson's Berechnung der Unbestimmtheitsrelation*, APIN Mitteilung sd95311 (2010)  
 <http://www.astrophys-neunhof.de/mtlg/sd95311.pdf>
- [59] S. Dürr, T. Nonn, G. Rempe: *Origin of quantum-mechanical complementarity probed by a 'which-way' experiment in an atom interferometer*, Nature **395**, 33 – 37 (1998),  
 <http://dx.doi.org/10.1038/25653> or:  
 <https://qudev.phys.ethz.ch/static/content/courses/phys4/studentspresentations/atomint/1998NaturePaper.pdf>

- [60] S. Kunze, S. Dürr, G. Rempe : *Bragg scattering of slow atoms from a standing light wave*, Europhys. Lett. **34**, 343 – 348 (1996),  
 <http://stacks.iop.org/0295-5075/34/i=5/a=343>
- [61] Y.-H. Kim, R. Yu, S. P. Kulik, Y. Shih, M. O. Scully : *Delayed “Choice” Quantum Eraser*, Phys. Rev. Lett. **84**, 1 – 5 (2000),  
 <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.84.1> or:  <http://sites.ifi.unicamp.br/aguiar/files/2014/11/scully2000.pdf>  
arxiv: quant-ph/9903047 (1999)  
 <https://arxiv.org/abs/quant-ph/9903047>
- [62] M. O. Scully, K. Drühl : *Quantum eraser: A proposed photon correlation experiment concerning observation and “delayed choice” in quantum mechanics*, Phys. Rev. A **25**, 2208 – 2213 (1982),  
 <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.25.2208>
- [63] A. C. Elitzur, L. Vaidman : *Quantum mechanical interaction-free measurements*, Found. Phys. **23**, 987 – 997 (1993),  
 <http://dx.doi.org/10.1007/BF00736012>  
arxiv: hep-th/9305002 (1993)  
 <https://arxiv.org/abs/hep-th/9305002>
- [64] L. Vaidman : *The Meaning of the Interaction-Free Measurements*, Found. Phys. **33**, 491 – 510 (2003),  
 <http://dx.doi.org/10.1023/A:1023767716236> or:  
 <http://www.tau.ac.il/~vaidman/lvhp/m87.pdf>

- [65] P. Kwiat, H. Weinfurter, T. Herzog, A. Zeilinger, M. A. Kasevich: *Interaction-Free Measurement*, Phys. Rev. Lett. **74**, 4763 – 4766 (1995),  
 <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.74.4763>  
or:  <http://www.rle.mit.edu/qem/documents/kwiat-prl-74-4763.pdf>
- [66] Werner Heisenberg: *Physik und Philosophie*  
Gifford Lectures, Univ. St. Andrews, Schottland, 1955/56  
(Hirzel Verlag, Stuttgart, 1959)  
Kap. III: *Die Kopenhagener Deutung der Quantentheorie*,  
 [http://www.astrophys-neunhof.de/serv/Heisenberg\\_1955.pdf](http://www.astrophys-neunhof.de/serv/Heisenberg_1955.pdf)
- [67] J. N. Tinsley, M. I. Molodtsov, R. Prevedel, D. Wartmann, J. Espigulé-Pons, M. Lauwers, A. Vaziri: *Direct detection of a single photon by humans*, Nature Com. **7**, 12172 (2016)  
 <http://dx.doi.org/10.1038/ncomms12172>
- [68] *Möglichkeit und Form*, APIN Mitteilung sd00211 (2011)  
 <http://www.astrophys-neunhof.de/mtlg/sd00211.pdf>
- [69] Johann v. Neumann: *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* (Springer, Berlin, 1932)  
 <http://gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/load/toc/?PID=PPN379400774>
- [70] J. S. Bell: *Against 'Measurement'*,  
Physics World **3**, 33 – 40 (Aug. 1990)  
 <http://stacks.iop.org/2058-7058/3/i=8/a=26> or  <http://www.tau.ac.il/~quantum/Vaidman/IQM/BellAM.pdf>
- [71] *Dekohärenz*, APIN Mtlg. sd91319 (2013)  
 <http://www.astrophys-neunhof.de/mtlg/sd91319.pdf>

- [72] L. Hackermüller, K. Hornberger, B. Brezger, A. Zeilinger, M. Arndt: *Decoherence of matter waves by thermal emission of radiation*, Nature **427**, 711 – 714 (2004),  
 <http://dx.doi.org/10.1038/nature02276>  
arXiv quant-ph/0402146 (2004)  
 <https://arxiv.org/abs/quant-ph/0402146>
- [73] L. Boltzmann: *Über die Beziehung zwischen dem zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie und der Wahrscheinlichkeitsrechnung respektive den Sätzen über das Wärmegleichgewicht*. Wien. Ber. **76**, 373 – 435 (1877)  
auch in: L. Boltzmann: *Wissenschaftliche Abhandlungen* Band II (J. A. Barth, Leipzig, 1909)  
 <https://phaidra.univie.ac.at/view/o:63651>
- [74] *Die Entdeckung der Bose-Einstein-Statistik*, APIN Mitteilung sd99331 (2011)  
 <http://www.astrophys-neunhof.de/mtlg/sd99331.pdf>
- [75] A. Einstein: *Strahlungs-Emission und -Absorption nach der Quantentheorie*, Verh. Deutsch. Phys. Ges. **18**, 318 – 323 (1916)  
 <https://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol6-doc/392>
- [76] *Quantensprünge*, (APIN, Nürnberg, 2010)  
 <https://www.astrophys-neunhof.de/mtlg/sd67113.pdf>