

Nullpunktsenergie und Casimir-Effekt

Die wesentlichen Argument für und gegen die Annahme einer physikalisch wirksamen Nullpunktsenergie

Gerold Gründler¹

Übersicht

Seit der Erfindung der Nullpunktsenergie im Jahr 1911 ist umstritten, ob sie tatsächlich experimentell nachweisbar oder lediglich ein eigenartiger Artefakt der Theorie ist. Der historische Ablauf der Diskussion und die wesentlichen Argumente, die für und gegen die Annahme einer Nullpunktsenergie angeführt wurden, werden nachgezeichnet. Der Artikel konzentriert sich dabei besonders auf den Casimir-Effekt, der oft als überzeugendstes Indiz für die messbare Existenz der Nullpunktsenergie genannt wird.

Inhalt

1. Planck erfindet die Nullpunktsenergie	2
2. Argumente für die Nullpunktsenergie	5
3. Kollision mit der ART	9
4. Der Casimir-Effekt	15
5. Wie Casimir den Effekt entdeckte	32
6. Was beweist der Casimir-Effekt?	35
7. Sind Nullpunktsschwingungen physikalisch wirksam?	41
Literatur	43

¹ <mailto:gerold.gruendler@astrophys-neunhof.de>

1. Planck erfindet die Nullpunktenergie

Durch Interpolation fand Planck im Jahr 1900 die Formel [1]

$$\frac{\text{Energie}}{\text{Volumen} \cdot \text{Frequenzintervall}} = \frac{8\pi h\nu^3/c^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \quad (1)$$

für die Energie pro Volumen im Frequenzintervall $(\nu, \nu + d\nu)$ eines elektromagnetischen Feldes, das bei der Temperatur T mit Materie im thermodynamischen Gleichgewicht steht. c ist die Lichtgeschwindigkeit, $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ die Boltzmann-Konstante, und $h = 6.63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ ist das hier erstmals in die Physik eingeführte Planck'sche Wirkungsquantum.

Abweichend von der Annahme der Maxwell-Boltzmann-Statistik, die Energie pro Freiheitsgrad im thermodynamischen Gleichgewicht sei $\frac{1}{2}k_B T$, folgt aus Plancks Strahlungsgesetz (1), dass die

$$\frac{\text{Energie}}{\text{Freiheitsgrad}} = \frac{h\nu/2}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \quad (2)$$

beträgt, siehe z.B. [2]. Die Energie pro Freiheitsgrad ist also nicht nur – wie von der Klassischen Thermodynamik angenommen – von der Temperatur abhängig, sondern auch von der Frequenz. Freiheitsgrade mit hoher Frequenz erhalten – weil die Exponentialfunktion im Nenner mit zunehmender Frequenz wesentlich schneller ansteigt als der lineare Faktor im Zähler – weniger Energie als Freiheitsgrade mit niedriger Frequenz. Nur im Grenzfall $\frac{h\nu}{k_B T} \ll 1$ ist die Energie pro Freiheitsgrad

$$\begin{aligned} \frac{h\nu/2}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} &= \frac{h\nu/2}{1 + \frac{h\nu}{k_B T} + \frac{1}{2}\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right)^2 + \dots - 1} = \frac{k_B T/2}{1 + \frac{1}{2}\frac{h\nu}{k_B T} + \dots} = \\ &\approx \frac{1}{2}\left(k_B T - \frac{h\nu}{2}\right) \approx \frac{1}{2}k_B T \quad \text{falls } \frac{h\nu}{k_B T} \ll 1. \end{aligned} \quad (3)$$

Planck stellte sich die Wände des Ofens, mit denen das elektromagnetische Strahlungsfeld im thermodynamischen Gleichgewicht steht, als eine große Menge von eindimensionalen Hertzschen Dipolen vor. Weil der eindimensionale Oszillator zwei Freiheitsgrade hat (kinetische und potentielle Energie sind als je ein Freiheitsgrad zu betrachten), ist die durchschnittliche Energie U eines Oszillators mit Eigenfrequenz ν bei der Temperatur T

$$U = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} . \quad (4a)$$

Ein Jahrzehnt später, am 3. Februar 1911, trug Planck vor der Physikalischen Gesellschaft in Berlin die Hypothese vor [3], dass die oszillierenden Dipole zusätzlich zur Energie (4a) eine von der Temperatur unabhängige weitere Energie der durchschnittlichen Größe $h\nu/2$ haben könnten:

$$U = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} + \frac{h\nu}{2} \quad (4b)$$

Während der erste Summand im Grenzfall $T \rightarrow 0$ verschwindet, weil die Exponentialfunktion divergiert, beschreibt der zweite Summand eine Nullpunktsenergie der durchschnittlichen Größe $h\nu/2$, welche die Oszillatoren auch am absoluten Nullpunkt der Temperatur behalten. Wir betonen, dass der Wert $h\nu/2$, genau wie der Wert U , der Mittelwert einer großen Menge von Oszillatoren ist. Ein einzelner Oszillator sollte nach Plancks neuer Hypothese die Energie

$$\hat{U} = n \cdot h\nu + R \quad \text{mit } 0 \leq R < h\nu , \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

haben.

Planck ließ sich bei dieser Hypothese von dem Wunsch leiten, die Maxwell'sche Elektrodynamik unverändert beizubehalten. Dazu

gehört insbesondere die Annahme, dass die Energie im elektromagnetischen Strahlungsfeld kontinuierlich verteilt und nicht in Quanten (die später als Photonen bezeichnet wurden) gebündelt ist. Unter dieser Voraussetzung kann ein materieller Oszillator dem Strahlungsfeld nicht in unendlich kurzer Zeit (in Form eines „Quantensprungs“) die Energie $h\nu$ entziehen. Vielmehr muss die Akkumulation von Strahlungsenergie im materiellen Oszillator ein kontinuierlicher Vorgang sein. Deshalb ordnete Planck jedem Oszillator zu jeder Zeit eine Energie der Größe (5) zu. Nur die Emission, bei der der materielle Oszillator Energie an das Strahlungsfeld abgibt, sollte in Paketen der Größe $h\nu$ vor sich gehen. Planck zeigte, dass diese Annahme zur Herleitung der Strahlungsformel (1) ausreicht. Wenn die Temperatur auf $T = 0$ abgesenkt wurde, dann konnte der Oszillator nach Planck's neuer Theorie nur seine n Energiequanten der Größe $h\nu$ emittieren, aber die restliche Vibrationsenergie von $0 \leq R < h\nu$ blieb auch bei $T = 0$ erhalten.

Natürlich kannte Planck die starken Argumente für die quantenhafte Natur der elektromagnetischen Strahlung, auf die Einstein [4] bereits 1905 hingewiesen hatte. Im Vortrag erwähnte Planck insbesondere die Eigenschaften der Kathodenstrahlen (Lichtelektrischer Effekt) als schwer wiegenden Anlass zu Zweifeln an der vollständigen Korrektheit von Maxwells Theorie. Aber er war damals eher bereit, solche Probleme beiseite zu schieben, als ernsthaft fundamentale Änderungen der Elektrodynamik in Erwägung zu ziehen.

Darüber ist die Zeit hinweg gegangen. Plancks Vortrag vom 3. Februar 1911 ist dennoch bemerkenswert, weil hier erstmals, lange vor der Entdeckung der Quantenmechanik, die Möglichkeit einer Nullpunktsenergie von Oszillatoren deutlich ausgesprochen wurde, und weil Planck zeigte, dass sein Strahlungsgesetz verträglich ist mit einer Nullpunktsenergie, wie sie dann 15 Jahre später durch die Quantenmechanik tatsächlich postuliert wurde.

Obwohl die meisten Physiker in den folgenden Jahren ihren Widerstand gegen die Quantisierung des elektromagnetischen Feldes aufgaben, und dadurch das Motiv entfiel, das Planck zum Postulat einer Nullpunktsenergie materieller Oszillatoren bewegen hatte, verschwand die Nullpunktsenergie nicht von der Bildfläche, sondern entwickelte sich zu einem festen Bestandteil der Quantenphysik. Im folgenden Abschnitt werden die wesentlichen Argumente dafür aufgezählt.

2. Argumente für die Nullpunktsenergie

Beim Vortrag seiner neuen Hypothese (5) im Februar 1911 betonte Planck, dass es nicht einfach sein würde die Existenz der Nullpunktsenergie experimentell zu bestätigen oder zu widerlegen. Die ältere Formel (4a) war in den vorangegangenen Jahren mit Erfolg anhand der spezifischen Wärme von Materie überprüft worden. Aber auf diese Ergebnisse hat der zusätzliche Summand in (4b) keinen Einfluss, weil er bei der Ableitung dU/dT verschwindet. Immerhin konnte Planck als Indiz für eine endliche Nullpunktsenergie die Tatsache erwähnen, dass die Zerfallsrate radioaktiver Stoffe auch dann nicht messbar abnimmt, wenn man sie auf beliebig tiefe Temperatur abkühlt.

Anfang 1913 veröffentlichten Einstein und Stern zwei weitere Argumente [5] für die Existenz der Nullpunktsenergie. Erstens wiesen sie darauf hin, dass der letzte Näherungsschritt in (3) allzu grob ist. Wenn man die Exponentialfunktion im Nenner der Planck'schen Strahlungsformel in einer Reihe nach Potenzen $h\nu/(k_B T)$ entwickelt, dann sollte man diese Entwicklung erst nach dem quadratischen Glied abbrechen. Dann ergibt der Ausdruck (4b) für die Energie eines Oszillators im Fall $h\nu \ll k_B T$ folgende Näherung:

$$\begin{aligned}
 U &\stackrel{(4b)}{\approx} \frac{h\nu}{\frac{h\nu}{k_B T} \left(1 + \frac{h\nu}{2k_B T}\right)} + \frac{h\nu}{2} \approx \\
 &\approx \left(k_B T - \frac{h\nu}{2}\right) + \frac{h\nu}{2} = k_B T \text{ für } \frac{h\nu}{k_B T} \ll 1 \quad (6)
 \end{aligned}$$

Dies Ergebnis entspricht für hohe Temperaturen der Erwartung der klassischen Physik, weicht aber für $T \rightarrow 0$ um den Betrag $h\nu/2$ von der klassischen Physik ab. Umgekehrt erhält man aus der Formel (4a) ohne Nullpunktsenergie bei $T \rightarrow 0$ das klassisch erwartete Ergebnis, jedoch bei hoher Temperatur ein Resultat, das um $-h\nu/2$ vom klassisch erwarteten Wert abweicht. Da die klassische Theorie im 19. Jahrhundert aus Beobachtungen bei hoher Temperatur abgeleitet worden war, während die Untersuchung des Bereichs $T \rightarrow 0$ im Jahr 1913 noch in den Kinderschuhen steckte (erst 1908 war es Kamerlingh Onnes erstmals gelungen, Helium – seine Siedetemperatur ist 4.2 K – zu verflüssigen), konnte man nach Einsteins und Sterns Meinung schlussfolgern dass diejenige der beiden Formeln, die bei hohen Temperaturen mit der klassischen Physik übereinstimmt, also (4b) mit der Nullpunktsenergie $h\nu/2$, die korrekte Formel sein muss.

Das zweite Argument von Einstein und Stern, das in der gleichen Veröffentlichung enthalten ist, bezieht sich auf die von Arnold Eucken [6] gemessene spezifische Wärme des Wasserstoffmoleküls. Euckens Messwerte ließen sich mit der aus (4b) berechneten spezifischen Wärme gut erklären, waren aber vollkommen unverträglich mit der aus (4a) berechneten spezifischen Wärme. Dies zweite Argument ist aus heutiger Sicht in der Form, wie Einstein und Stern es 1913 benutzten, nicht völlig korrekt. Denn Einstein und Stern vermuteten offenbar nicht nur für die Vibration, sondern auch für die Rotation des Wasserstoffmoleküls eine endliche Nullpunktsenergie. Aus der 1925 entdeckten Quantenmechanik folgt, dass der Drehimpuls L rotierender Moleküle quantisiert ist, und L^2 nur die

Werte

$$L^2 = \hbar^2 J(J + 1) \quad \text{mit } J = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (7)$$

annehmen kann. Die mögliche Rotationsenergie eines Moleküls ist deshalb

$$E_{\text{rot}} = \frac{\hbar^2}{2I} J(J + 1) \quad \text{mit } J = 0, 1, 2, 3, \dots \quad , \quad (8)$$

wobei I das Trägheitsmoment des Moleküls ist. Im Fall $J = 0$ hat ein Molekül die Rotationsenergie Null. Eine Nullpunktsenergie der endlichen Größe $h\nu/2$ gibt es nur für die Vibration, aber nicht für die Rotation des Wasserstoff-Moleküls.

Überzeugende Argumente für die Existenz einer Nullpunktsenergie ergaben sich in den folgenden Jahren aus der präzisen Untersuchung der Vibrations-Spektren von Molekülen. Die beobachteten Wellenzahlen $\tilde{\nu}$ der Absorption konnten durch Formeln der Art

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = A + \left(B_1 n' - B_2 (n')^2 \right) - \left(C_1 n'' - C_2 (n'')^2 \right)$$

mit $n' = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \dots$ und $n'' = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \dots$ (9)

mit empirisch bestimmten Konstanten A, B_1, B_2, C_1, C_2 gut reproduziert werden. A wird als Wellenzahl der elektronischen Anregung interpretiert, n' ist die Quantenzahl der Vibration im angeregten Zustand, n'' ist die Quantenzahl der Vibration im Grundzustand. Wenn die Moleküle harmonische Oszillatoren wären, dann könnte man aus den Vibrations-Spektren nur die ganzzahligen Differenzen $n' - n''$ erschließen, aber nicht die absoluten Werte von n' und n'' . Weil die Vibrations-Potentiale der Moleküle aber nicht harmonisch sind, sondern einen messbaren anharmonischen Anteil haben, sind die Koeffizienten B_2 und C_2 der nicht-linearen Terme von Null

verschieden, und der Rückschluss von den Absorptions-Spektren auf die absoluten Werte von n' und n'' wird möglich.

Mulliken, der die Korrektheit der halbzahligen Quantenzahlen (9) anhand des Vibrations-Rotations-Spektrums von Boroxid nachwies [7], bemerkte dazu: “This result cannot be accomplished by any other assignment of minimum values of n' and n'' , if we restrict ourselves to the possibilities 0, $+1/2$, $+1$. Since half-integral values of n' and n'' with a minimum value $+1/2$ are by far more probable than a large electronic isotope effect or other serious failure in the theory, they may be quite definitely accepted — unless one wishes to entertain the possibility of fractional values other than $1/2$.” [7, Seite 280]²

Weitere experimentelle Beweise für die physikalische Existenz der Nullpunktsenergie ergaben sich in den folgenden Jahren beispielsweise aus der Streuung von Röntgenstrahlen oder Neutronen an Kristallen bei sehr tiefen Temperaturen (die reduzierte Intensität der Strukturen lässt direkt erkennen, dass die Atome des Kristalls nicht regungslos an einem Punkt verharren), sowie aus der Tatsache, dass ⁴He bei normalem Druck auch bei tiefsten Temperaturen flüssig bleibt (die Nullpunktsenergie der Helium-Atome in einem Kristall wäre größer als die Bindungsenergie durch van der Waals Wechselwirkung zwischen den Atomen, die bei schwereren Edelgasen zur Kristallisation bei tiefer Temperatur führt).

Als Heisenberg im Sommer 1925 die Quantenmechanik erfand [8], waren harmonische und anharmonische Oszillatoren die ersten Systeme, auf die er seinen neuartigen Formalismus anwandte. In

² „Dies Resultat kann nicht erreicht werden wenn man n' und n'' irgend einen anderen Minimalwert zuordnet, solange man sich auf die Möglichkeiten 0, $+1/2$, $+1$ beschränkt. Da halbzahlige Werte von n' und n'' mit einem Minimalwert von $+1/2$ weitaus wahrscheinlicher sind als ein großer elektronischer Isotopie-Effekt oder ein anderer ernsthafter Fehler in der Theorie, sollte man sie als ziemlich sicher akzeptieren – wenn man nicht die Möglichkeit anderer gebrochener Werte als $1/2$ in Erwägung ziehen will.“

Gleichung (23) seiner Abhandlung erhielt er als Energie eines harmonischen Oszillators im n -ten Quantenzustand

$$W = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{h\omega_0}{2\pi} \quad (10)$$

mit $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Damit war die Nullpunktsenergie $h\omega_0/(4\pi) = h\nu/2$ von harmonischen Oszillatoren Mitte der zwanziger Jahre sowohl in der experimentellen wie in der theoretischen Physik fest etabliert – allerdings nur im Hinblick auf Systeme mit endlich vielen Schwingungs-Freiheitsgraden, wie beispielsweise Moleküle oder Festkörper (die man als riesengroße, aber keinesfalls unendlich große Moleküle betrachten kann). Dagegen gab (und gibt) es schwerwiegende Argumente gegen die Annahme, dass auch kontinuierliche Felder, wie beispielsweise das elektromagnetische Feld oder das Elektron/Positron-Feld, als deren Quanten die Quantenfeldtheorie die Photonen oder Elektronen und Positronen betrachtet, eine Nullpunktsenergie haben. Mit diesen Gegenargumenten werden wir uns im folgenden Abschnitt beschäftigen.

3. Kollision mit der ART

Wenn man kontinuierliche Felder kanonisch quantisiert, dann erhält man regelmäßig eine unendlich große Nullpunktsenergie. Denn jede einzelne der unendlich vielen Schwingungsmoden, die dem kontinuierlichen Feld prinzipiell zugänglich sind, wird in der Quantenfeldtheorie durch einen harmonischen Oszillator repräsentiert, der nach (10) die Nullpunktsenergie $\pm h\nu/2$ hat. Das Pluszeichen gilt für bosonische Felder, das Minuszeichen für fermionische Felder. Siehe zum Beispiel [9, Kapitel 14-17] oder jedes andere Lehrbuch der Quantenfeldtheorie.

Als konkretes Beispiel betrachten wir ein evakuiertes Volumen der Größe $V = X \cdot Y \cdot Z$ mit materiellen Wänden. Bei der Temperatur T enthält dieses Volumen ein elektromagnetisches Feld,

das mit den Wänden im thermodynamischen Gleichgewicht steht. Die geometrisch möglichen Schwingungsmoden (sprich stehenden Wellen) des Strahlungsfeldes haben die Wellenzahlen

$$k_{lmn} = \frac{2\pi\nu_{lmn}}{c} = \sqrt{\left(\frac{l\pi}{X}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{Y}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{Z}\right)^2} \quad (11a)$$

mit $l, m, n = 0, 1, 2, 3, \dots$, jedoch in jeder Mode maximal ein Index gleich Null.

k ist die Wellenzahl, ν die Frequenz der Strahlungsmoden. Bei der Temperatur $T = 0$ enthält das elektromagnetische Feld ausschließlich die Nullpunktsschwingungen, die jeweils die Energie $h\nu_{lmn}/2$ haben. Die gesamte Nullpunktenergie U_0 im Volumen V ist

$$U_0 = 2 \sum_{l,m,n=0}^{\infty} \frac{\hbar c k_{lmn}}{2} = \sum_{l,m,n=0}^{\infty} \hbar c \sqrt{\left(\frac{l\pi}{X}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{Y}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{Z}\right)^2} = \infty. \quad (11b)$$

Der Faktor 2 stammt daher, dass das elektromagnetische Feld zwei Freiheitsgrade der Polarisation hat. Der Strich' soll daran erinnern, dass die Strahlungsmoden mit einer Null in den Indizes nur mit einer Polarisation vorkommen, und deswegen in (11b) einen Faktor 1/2 erhalten. Weil es unendlich viele Schwingungsmoden gibt, ist die Nullpunktenergie unendlich groß.

Die irritierende Tatsache, dass die Nullpunktenergie von Quantenfeldern divergiert, war den Erforschern der jungen Quantenmechanik von Anfang an bewusst. Im November 1925 reichten Born, Heisenberg, und Jordan eine Arbeit [10] zur Veröffentlichung bei der Zeitschrift für Physik ein, in der sie die Quantisierung eines eindimensionalen skalaren Feldes untersuchten. In ihrer Gleichung (36') erhielten sie die Nullpunktenergie $C = \frac{1}{2}\hbar \sum_k \nu_k$, und merkten dazu an: Die Nullpunktenergie „wäre insbesondere im

Grenzfall unendlich vieler Freiheitsgrade unendlich groß.“ Die Wortwahl „wäre . . . im Grenzfall . . . unendlich groß“ lässt erkennen, dass die Autoren erhebliche Zweifel hatten, ob dies Ergebnis physikalisch ernst zu nehmen ist, oder ob es sich lediglich um einen eigenartigen Artefakt der Theorie handelt. Ihre Arbeit enthält keinen weiteren Kommentar zu diesem beunruhigenden Sachverhalt.

Dagegen äußerten sich Jordan und Pauli zwei Jahre später sehr dezidiert zur Thematik der divergierenden Nullpunktsenergie, und zwar in einer Veröffentlichung [11], deren Thema die relativistisch invariante Quantisierung des Elektromagnetischen Feldes war: „Verschiedene Erwägungen scheinen uns dafür zu sprechen, daß im Gegensatz zu den Eigenschwingungen im Kristallgitter (wo sowohl theoretische als auch empirische Gründe für das Vorhandensein einer Nullpunktsenergie sprechen) bei den Eigenschwingungen der Strahlung jener „Nullpunktsenergie“ $h\nu/2$ pro Freiheitsgrad keine physikalische Realität zukommt. Da man es nämlich bei dieser mit streng harmonischen Oszillatoren zu tun hat und da jene „Nullpunktsstrahlung“ weder absorbiert noch zerstreut oder reflektiert werden kann, scheint sie sich, einschließlich ihrer Energie oder Masse, jeder Möglichkeit eines Nachweises zu entziehen. Es ist deshalb wohl die einfachere und befriedigendere Auffassung, daß beim elektromagnetischen Felde jene Nullpunktsstrahlung überhaupt nicht existiert.“ [11, Seite 154]

Den vorletzten Satz formulierte Pauli in seinem Artikel [12] über die Wellenmechanik im Handbuch der Physik noch deutlicher: Die Nullpunktsenergie ist „prinzipiell unbeobachtbar, da sie weder emittiert, absorbiert oder gestreut wird, also nicht in Wände eingeschlossen werden kann, und da sie, wie aus der Erfahrung evident ist, auch kein Gravitationsfeld erzeugt.“ [12, Seite 250]

Als Pauli diesen Satz schrieb, entging ein subtiler Punkt seiner Aufmerksamkeit: Zwar kann die Nullpunktsenergie tatsächlich „nicht in Wände eingeschlossen werden“, sie könnte aber

durch Wände aus bestimmten Volumina verdrängt und dadurch beobachtbar werden. Das ist der Casimir-Effekt, den wir in den nächsten Abschnitten eingehend diskutieren werden. Zuvor befassen wir uns aber mit Pauli's weiterem Argument, dass die Nullpunktenergie, „wie aus der Erfahrung evident ist, auch kein Gravitationsfeld erzeugt.“ Dies ist ein sehr wichtiges und schwerwiegendes Argument, das sich auf eine Unstimmigkeit zwischen QFT = Quantenfeldtheorie und ART = Allgemeiner Relativitätstheorie bezieht:

Im Jahr 1915 hatte Einstein die grundlegenden Gleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie [13, 14] veröffentlicht. Die Feldgleichung der ART beschreibt, in welcher Weise die Geometrie der vierdimensionalen Raumzeit durch die in ihr enthaltene Energiedichte deformiert wird. Je größer die Energiedichte in einem bestimmten Volumen der Raum-Zeit ist, desto stärker ist die Raum-Zeit in diesem Volumen gekrümmt. Da im Volumen V von Gleichung (11b) die unendlich große Energie der Nullpunktsschwingungen enthalten ist, ist die Energiedichte – und demzufolge auch die Krümmung der Raum-Zeit in diesem Volumen – unendlich groß.

Das ist offensichtlich Unsinn. Ursache des falschen Ergebnisses könnte sein, dass die Quantenelektrodynamik nur der niederenergetische Grenzfall einer allgemeineren, bisher unbekanntem Theorie ist. Dann wäre es möglicherweise richtig, die Summe in (11b) nicht bis zu unendlich hohen Wellenzahlen auszuführen, sondern nur bis zu einer maximalen Wellenzahl K , deren Wert derzeit noch nicht bekannt ist. Man weiß über K nichts weiter, als dass diese Wellenzahl größer sein muss als die Wellenzahlen, für die die Quantenelektrodynamik bis heute (2013) überprüft und für gut befunden wurde, dass also $K > 10^{18} \text{m}^{-1}$ gelten muss. Damit folgt für die Summe in (11b):

$$\frac{U_0}{V} > \sum_{|k_{l,m,n}| \leq K} \hbar c k_{lmn} \approx 4 \cdot 10^{47} \text{Jm}^{-3} \quad \text{mit } K = 10^{18} \text{m}^{-1} \quad (12)$$

Dies ist die minimale Nullpunktsenergie des elektromagnetischen Feldes, das ein bosonisches Feld mit zwei Freiheitsgraden der Polarisation ist. Die heute bekannten elementaren fermionischen Felder (negative Nullpunktsenergie) haben insgesamt 90 Freiheitsgrade, die elementaren bosonischen Felder (positive Nullpunktsenergie) haben, je nachdem wie viele Higgs-Felder man annimmt, insgesamt etwa 30 Freiheitsgrade. Wir nehmen für die folgende Abschätzung an, dass die Nullpunktsenergie aller Felder zusammengenommen etwa -30 mal so groß ist wie (12), also etwa

$$\frac{U_0}{V} < -1.2 \cdot 10^{49} \text{Jm}^{-3} \quad \text{mit } K = 10^{18} \text{m}^{-1} \quad (13a)$$

beträgt. Wenn Astronomen ihre Beobachtungen mithilfe der Allgemeinen Relativitätstheorie interpretieren, dann kommen sie aufgrund der Kleinheit der durchschnittlichen Krümmung (die auch exakt Null sein könnte) des intergalaktischen Raumes zu dem Schluss, dass die Energiedichte des Vakuums allenfalls etwa 10^{-9}Jm^{-3} betragen kann, mit dem wahrscheinlichsten Wert

$$\frac{U_{\text{Vakuum}}}{V} \approx 6.8 \cdot 10^{-10} \text{Jm}^{-3} . \quad (13b)$$

Aus den beiden Gleichungen (13) ergibt sich das Verhältnis

$$\frac{\text{Theorie}}{\text{Beobachtung}} = \frac{(13a)}{(13b)} < -2 \cdot 10^{58} . \quad (14)$$

Eine wahrhaft astronomische Diskrepanz! Dennoch gibt es in der ART ein Schlupfloch zur Rettung der Nullpunktsenergie: Die Kosmologische Konstante [15]. Die Kosmologische Konstante ist ein additiver Term in der Feldgleichung der ART, dessen Wert frei gewählt

werden kann. Die Diskrepanz zwischen Theorie und Beobachtung ist beseitigt, wenn man ihn proportional zu $(U_0/V - 6.8 \cdot 10^{-10} \text{ Jm}^{-3})$ wählt.

Aber niemand hat bei dieser hemdsärmligen „Lösung“ des Problems ein gutes Gefühl. Willkürlich und ohne physikalische Begründung eine Konstante einzuführen, die auf mehr als 58 Dezimalstellen genau einjustiert sein muss, wäre ein so kruder Eingriff in die Theorie, wie er in der Geschichte der neuzeitlichen Physik noch nicht vorgekommen ist. Die rätselhafte Feinabstimmung auf mehr als 58 Dezimalstellen genau wird in der Literatur als das „Problem der Kosmologischen Konstante“ bezeichnet. Der bekannteste Review über dies Thema wurde 1989 von Weinberg verfasst [16]. Ein jüngerer Review ist [17].

Es überrascht nicht dass Pauli, der als exzellenter Kenner³ der Allgemeinen Relativitätstheorie das Schlupfloch der Kosmologischen Konstante natürlich kannte, von diesem Mittel keinen Gebrauch machte, sondern ohne weitere Diskussion feststellte, dass die Nullpunktsenergie, „wie aus der Erfahrung evident ist, auch kein Gravitationsfeld erzeugt.“

Nicht alle Wissenschaftler empfanden die unendlich große Nullpunktsenergie als Problem. Für Walther Nernst war sie vielmehr eine höchst willkommene Idee. Nernst wollte sich nicht damit abfinden, dass die Welt unausweichlich dem „Wärmetod“ entgegen geht. Dieses Schicksal hatte Boltzmann der Welt vorhergesagt. Denn nach dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik nimmt die Entropie eines abgeschlossenen Systems stets zu, so dass alle chemischen Prozesse schließlich zum Erliegen kommen müssen und die Welt einen unveränderlichen, toten Zustand erreicht.

Anders verhält es sich bei offenen Systemen. Insbesondere be-

³ Der Artikel über die ART, den Pauli im Alter von 19 Jahren für das Handbuch der Physik verfasst hatte, war von Einstein persönlich in den allerhöchsten Tönen gerühmt worden.

wirkt der gewaltige Zustrom von Sonnenenergie, dass auf der Erde die biologischen Prozesse des Lebens stattfinden können, die durch eine Abnahme der Entropie gekennzeichnet sind. Da aber die Sonnenenergie endlich ist, kann sie den Wärmetod der Erde nur hinauszögern, aber nicht dauerhaft verhindern.

Das könnte nur eine unendlich große Energiequelle. Genau dieses unendlich große, unerschöpfliche Energie-Reservoir, das Nernst zur Bekämpfung des Wärmetodes des Universums suchte, hatte Planck ihm in Form der Nullpunktsschwingungen an die Hand gegeben! Die Nullpunktenergie ist die Basis eines kosmologischen Modells ohne Wärmetod, das Nernst am 18. Januar 1916 der staunenden Physikalischen Gesellschaft in Berlin vorstellte [18]. Nernsts Modell wurde von den meisten Fachkollegen sehr skeptisch betrachtet und fand nur wenige Anhänger. Heute wird es nur noch in esoterischen Zirkeln diskutiert. In einem Artikel von Kragh [19] findet man eine kurz gefasste Darstellung der Rezeptionsgeschichte der Nernst'schen Kosmologie, und darüber hinaus eine Fülle von lesenswerten Informationen zur historischen Entwicklung des Themas „Nullpunktenergie“.

4. Der Casimir-Effekt

Im vorigen Abschnitt wurde Pauli mit den Worten zitiert, dass die Nullpunktenergie unter anderem deshalb nicht experimentell nachweisbar sei, weil sie „nicht in Wände eingeschlossen werden“ kann. Aber am 29. Mai 1948 stellte Hendrik Casimir in einem Vortrag [20] vor der Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen die verblüffende Idee vor, die Nullpunktenergie (genauer gesagt: kleine Teile der Nullpunktenergie) durch Wände aus bestimmten Volumina zu verdrängen, und dadurch doch beobachtbar zu machen.

Um den Grundgedanken von Casimir's Vorschlag zu erläutern,

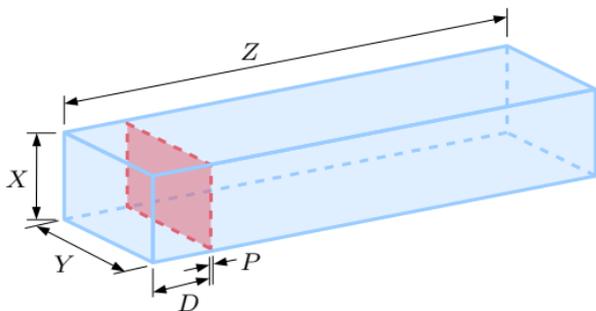


Abb. 1: Resonator mit beweglicher Zwischenwand

betrachten wir den in Abbildung 1 skizzierten rechteckigen Resonator mit elektrisch leitfähigen metallischen Wänden. Seine Größe ist $X \times Y \times Z$. Im Inneren des Resonators befindet sich eine ebenfalls elektrisch leitfähige Platte mit Dicke P , die parallel zu den XY -Außenwänden des Resonators orientiert und entlang der Z -Achse beweglich ist. Die Platte unterteilt den Resonator in zwei Resonatoren der Größe $X \times Y \times D$ und $X \times Y \times (Z - D - P)$. Nullpunktsschwingungen, deren halbe Wellenlänge in Z -Richtung größer als D , jedoch kleiner als $Z - D - P$ ist, können sich laut Gleichung (11) in der linken Kavität nicht ausbilden, wohl aber in der rechten Kavität. Wenn die bewegliche Zwischenwand um ein kleines Stückchen in Z -Richtung verschoben wird, dann ändert sich in beiden Kavitäten das Spektrum der Nullpunktschwingungen, und damit der Energieinhalt U_0 der Kavität. Also wirkt auf die bewegliche Zwischenwand eine Kraft

$$F_{\text{Casimir}} = -\frac{dU_{0,\text{linke Kavität}}}{dD} + \frac{dU_{0,\text{rechte Kavität}}}{dD} \quad (15)$$

nach rechts. Bei der im Folgenden durchgeführten detaillierten Berechnung wird sich herausstellen, dass die Casimir-Kraft F_{Casimir} negativ ist. Deshalb wird die bewegliche Platte nach links, d.h. zur näher gelegenen Außenwand gedrückt. Weil die Herleitung in der

gedruckten Version von Casimirs Vortrag nur recht knapp skizziert wird hat es sich als hilfreich erwiesen, die ausführliche Darstellung in [21, chapter 5] zu Rate zu ziehen.

Wir berechnen zunächst das elektromagnetische Feld in der linken Kavität. Bei der Temperatur $T = 0$ besteht es ausschließlich aus den Nullpunktsschwingungen, und die gesamte Nullpunktenergie U_0 ist

$$U_0 \stackrel{(11b)}{=} \sum'_{l,m,n=0} \hbar c k_{lmn} = \sum'_{l,m,n=0} \hbar c \sqrt{\left(\frac{l\pi}{D}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{X}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{Y}\right)^2} = \infty . \quad (16)$$

Damit die folgenden Umformungen durchgeführt werden können, erzwingen wir die Konvergenz der Summe dadurch, dass wir einen Faktor

$$\exp\{-k_{lmn}/k_M\} \quad (17)$$

mit einer endlichen Wellenzahl k_M einfügen. Später werden wir dann den Grenzfall $k_M \rightarrow \infty$ betrachten, um zu (16) zurückzukehren. Casimir wies in seinem Vortrag darauf hin, dass der Abschneide-Term $\exp\{-k_{lmn}/k_M\}$ nicht nur ein mathematischer Trick ist, sondern auch physikalisch gerechtfertigt werden kann. Denn für sehr hohe Frequenzen werden alle Metalle durchsichtig (das werden wir auf den Seiten 26 bis 31 genauer quantifizieren), sodass ohnehin nur Strahlung mit endlich großer Frequenz durch die Wände der Kavität beeinflusst werden kann.

Außerdem nehmen wir $X \rightarrow \infty$ und $Y \rightarrow \infty$ an. Dann können die Summen über die diskreten Zahlen m und n durch Integrale ersetzt werden. Nur die Summe über l betrachten wir weiterhin als diskret. In dieser Näherung können die bei (11b) definierten und durch den Strich' angedeuteten Einschränkungen hinsichtlich der Moden mit Indizes $m = 0$ und $n = 0$ ignoriert werden.

Nur die Summe über l behält den Strich' zur Erinnerung daran, dass der Summand mit $l = 0$ einen Faktor $1/2$ bekommt. Die Integrationsvariablen und ihre Integrale sind

$$k_x \equiv \frac{m\pi}{X} \quad , \quad k_y \equiv \frac{n\pi}{Y} \quad (18)$$

$$\frac{1}{2X} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2Y} \sum_{n=0}^{\infty} \xrightarrow{X,Y \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{dk_x}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{dk_y}{2\pi} .$$

Das führt zum Ausdruck

$$U_0 = \frac{\hbar c XY}{\pi^2} \sum_{l=0}^{\infty} ' \int_0^{\infty} dk_x \int_0^{\infty} dk_y \sqrt{\left(\frac{l\pi}{D}\right)^2 + k_x^2 + k_y^2} \cdot$$

$$\cdot \exp \left\{ -\frac{1}{k_M} \sqrt{\left(\frac{l\pi}{D}\right)^2 + k_x^2 + k_y^2} \right\} . \quad (19)$$

Weil k_x und k_y nur in der Form $k_r^2 \equiv k_x^2 + k_y^2$ vorkommen, empfiehlt sich der Wechsel zu Polarkoordinaten mit Radialkomponente k_r und Winkelkomponente ϕ . Da nur über positive k_x und k_y (also nur über den ersten Quadranten der $k_x k_y$ -Ebene) integriert wird, läuft die Integration über ϕ nur über einen Viertelkreis:

$$\int_0^{\infty} dk_x \int_0^{\infty} dk_y = \int_0^{\infty} dk_r \int_0^{\pi/2} k_r d\phi = \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} dk_r k_r \quad (20)$$

Der Summand $l = 0$ kann direkt berechnet werden:

$$C \equiv \frac{1}{2} \frac{\hbar c XY}{\pi^2} \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} dk_r k_r \sqrt{k_r^2} \exp \left\{ -\frac{1}{k_M} \sqrt{k_r^2} \right\} =$$

$$= \frac{\hbar c XY}{4\pi} \left[\left(-k_M k_r^2 - 2k_M^2 k_r - 2k_M^3 \right) \exp \left\{ -\frac{k_r}{k_M} \right\} \right]_0^{\infty} =$$

$$= \frac{\hbar c XY k_M^3}{2\pi} \quad (21)$$

Also ist

$$U_0 = C + \frac{\hbar cXY}{2D} \sum_{l=1}^{\infty} l \int_0^{\infty} dk_r k_r \sqrt{1 + \left(\frac{Dk_r}{l\pi}\right)^2} \cdot \exp \left\{ -\frac{l\pi}{Dk_M} \sqrt{1 + \left(\frac{Dk_r}{l\pi}\right)^2} \right\}. \quad (22)$$

Es ist nützlich, die Länge

$$\eta \equiv \frac{\pi}{k_M} \quad (23)$$

zu definieren. Mithilfe der Substitution

$$u \equiv \sqrt{\left(1 + \frac{Dk_r}{l\pi}\right)^2} \implies \int_0^{\infty} dk_r k_r = \left(\frac{l\pi}{D}\right)^2 \int_1^{\infty} du u \quad (24)$$

erhält man

$$U_0 = C + \frac{\pi^2 \hbar cXY}{2D^3} \sum_{l=1}^{\infty} l^3 \int_1^{\infty} du u^2 \exp \left\{ -\eta \frac{lu}{D} \right\}. \quad (25)$$

Die dritte Ableitung der Exponentialfunktion nach η ist

$$\frac{d^3}{d\eta^3} \exp \left\{ -\eta \frac{lu}{D} \right\} = -\frac{l^3 u^3}{D^3} \exp \left\{ -\eta \frac{lu}{D} \right\}. \quad (26)$$

Damit lässt sich U_0 folgendermaßen schreiben:

$$U_0 = C - \frac{\pi^2 \hbar cXY}{2} \int_1^{\infty} du \frac{1}{u} \frac{d^3}{d\eta^3} \sum_{l=1}^{\infty} \exp \left\{ -\eta \frac{lu}{D} \right\}. \quad (27)$$

Weil das Integral konvergiert, durften die Reihenfolge von Integration und Summation vertauscht werden. Jetzt kann man die Summe über l mithilfe der Formel

$$\sum_{j=0}^{\infty} A^j = \frac{1}{1-A} \quad \text{falls } |A| < 1 \quad (28)$$

für die unendliche geometrische Reihe berechnen:

$$\begin{aligned} U_0 &= C - \frac{\pi^2 \hbar c XY}{2} \int_1^{\infty} du \frac{1}{u} \frac{d^3}{d\eta^3} \left(\frac{1}{1 - \exp\{-\eta u/D\}} - 1 \right) \\ &= C - \frac{\pi^2 \hbar c XY}{2} \frac{d^2}{d\eta^2} \int_1^{\infty} du \frac{1}{u} \underbrace{\frac{d}{d\eta} \left(\frac{1}{\exp\{+\eta u/D\} - 1} \right)}_{\frac{-(u/D) \exp\{\eta u/D\}}{(\exp\{\eta u/D\} - 1)^2}} \quad (29) \end{aligned}$$

Mit der weiteren Substitution

$$w \equiv \exp\{\eta u/D\} - 1 \implies \int_1^{\infty} du = \int_{\exp\{\eta/D\}-1}^{\infty} dw \frac{D}{\eta(w+1)}$$

erhält man

$$\begin{aligned} U_0 &= C + \frac{\pi^2 \hbar c XY}{2} \frac{d^2}{d\eta^2} \frac{1}{\eta} \int_{\exp\{\eta/D\}-1}^{\infty} dw \frac{1}{w^2} \\ &= C - \frac{\pi^2 \hbar c XY}{2} \frac{d^2}{d\eta^2} \frac{1}{\eta} \left[\frac{1}{w} \right]_{\exp\{\eta/D\}-1}^{\infty} \\ &= C + \frac{\pi^2 \hbar c XY}{2} \frac{d^2}{d\eta^2} \frac{D}{\eta^2} \underbrace{\frac{\eta}{D} \frac{1}{\exp\{\eta/D\} - 1}}_{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_j}{j!} \left(\frac{\eta}{D} \right)^j} \quad (30) \end{aligned}$$

In der zum Schluss angegebenen Reihenentwicklung sind die Koeffizienten B_j die Bernulli-Zahlen. Sie werden implizit definiert durch die erzeugende Funktion

$$\frac{A}{\exp\{A\} - 1} = \sum_{j=0}^{\infty} B_j \frac{A^j}{j!} \quad \text{mit } A \in \mathbb{R}, A \neq 0, |A| < 2\pi, j \in \mathbb{N} .$$

Aus dieser Definition ergeben sich die folgenden Bernulli-Zahlen:

$$\begin{aligned} B_0 &= 1 & B_1 &= -\frac{1}{2} \\ B_2 &= \frac{1}{6} & B_3 &= 0 \\ B_4 &= -\frac{1}{30} & B_5 &= 0 \\ B_j &= -\sum_{n=0}^{j-1} \frac{j!}{n!(j-n)!} \frac{B_n}{j-n+1} \quad \text{für } j > 2 \end{aligned} \quad (31)$$

Wenn man die zweifache Ableitung nach η durchführt, anschließend wieder $k_M \stackrel{(23)}{=} \pi/\eta$ einsetzt, und $C = (21)$ einsetzt, erhält man

$$\begin{aligned} U_0 &= \frac{\pi^2 \hbar c X Y}{2} \left(\frac{k_M^3}{\pi^3} + \frac{6 D k_M^4}{\pi^4} - \frac{k_M^3}{\pi^3} - \frac{1}{360 D^3} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=6}^{\infty} \frac{B_j}{j!} \frac{(j^2 - 5j + 6) \pi^{j-4}}{k_M^{j-4} D^{j-1}} \right) . \end{aligned} \quad (32)$$

Bisher haben wir nur die Nullpunktsenergie in der linken Kavität von Abbildung 1 betrachtet. Die Energie in der rechten Kavität erhält man aus der letzten Formel, indem man überall D durch $Z - D - P$ ersetzt. Damit ist die gesamte Nullpunktsenergie in beiden Kavitäten des Resonators

$$\begin{aligned}
U_{0,\text{gesamt}} = & \frac{\pi^2 \hbar c XY}{2} \left(\frac{6(Z-P)k_M^4}{\pi^4} - \frac{1}{360(Z-D-P)^3} - \right. \\
& \left. - \frac{1}{360D^3} + \sum_{j=6}^{\infty} \frac{B_j}{j!} \frac{(j^2 - 5j + 6)}{k_M^{j-4} \pi^{4-j}} \left(\frac{1}{D^{j-1}} + \frac{1}{(Z-D-P)^{j-1}} \right) \right). \quad (33)
\end{aligned}$$

Der Term $\sim k_M^4$ bewirkt, dass die Energie im Grenzfall $k_M \rightarrow \infty$ nach wie vor divergiert. Daran haben unsere Umformungen (selbstverständlich) nichts geändert.

Die Ableitung von $U_{0,\text{gesamt}}$ nach D ist gleich der Kraft, die auf die bewegliche Platte zwischen den beiden Kavitäten wirkt:

$$\begin{aligned}
-\frac{dU_{0,\text{gesamt}}}{dD} = & -\frac{\pi^2 \hbar c XY}{2} \left(-\frac{1}{120(Z-D-P)^4} + \frac{1}{120D^4} + \right. \\
& \left. + \sum_{j=6}^{\infty} \frac{B_j}{j!} \frac{(j^2 - 5j + 6)}{k_M^{j-4} \pi^{4-j}} \left(\frac{1-j}{D^j} + \frac{j-1}{(Z-D-P)^j} \right) \right). \quad (34)
\end{aligned}$$

Jetzt schränkte Casimir die Untersuchung auf den Fall

$$(Z-D-P)^4 \gg D^4 \quad (35a)$$

$$\text{und } k_M \rightarrow \infty \quad (35b)$$

ein, und erhielt die einfache Formel:

$$\boxed{F_{\text{Casimir}} = -\frac{dU_{0,\text{gesamt}}}{dD} = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240} \frac{XY}{D^4}} \quad (36)$$

Die Casimir-Kraft drückt die bewegliche Wand zur linken Seitenwand des Resonators. Der Grenzübergang $k_M \rightarrow \infty$ bedeutet die Annahme unendlich großer Leitfähigkeit des Metalls. Diese Annahme bewirkt, dass die Formel (36) der Casimir-Kraft nicht vom Material der Wände abhängig. Die Casimir-Kraft ist proportional

zur Fläche XY der beweglichen Platte, und umgekehrt proportional zur vierten Potenz des Abstands D zwischen der beweglichen Platte und der linken Seitenwand des Resonators von Abbildung 1.

Im letzten Satz seiner Publikation bemerkte Casimir: “Although the effect is small, an experimental confirmation seems not unfeasible”.⁴ Um diese Einschätzung zu belegen, berechnen wir die Größe der Kraft für die Parameter

$$\begin{aligned} X \cdot Y &= 1 \text{ mm}^2, \quad D = 1 \mu\text{m} \implies \\ \implies F_{\text{Casimir}} &\stackrel{(36)}{=} -1.3 \cdot 10^{-9} \text{ N}. \end{aligned} \quad (37)$$

Wenn man 1% Genauigkeit erreichen will, muss bei diesen Parametern der Messfehler kleiner als 10 pico-Newton sein. Darüber hinaus wird meist mit kleineren Flächen als 1 mm^2 gearbeitet, so dass man Kräfte von 1 pN und weniger auflösen muss. Die Messung von Kräften in dieser Größenordnung ist tatsächlich nicht unmöglich, aber überaus anspruchsvoll, und verlangt außerordentliche Kunstfertigkeit der Experimentatoren. In der einfachen Form, die in Abbildung 1 skizziert und in (36) berechnet wurde, ist die Casimir-Kraft nie gemessen worden. Es sind eine ganze Reihe von Modifikationen erforderlich, damit der Effekt experimentell zugänglich wird. Im Folgenden gehen wir die Modifikationen Schritt für Schritt durch:

Vereinfachter Resonator: Da wir für die in Abbildung 1 dargestellte Geometrie $Z \gg D$ vorausgesetzt haben, kann man den Grenzübergang $Z \rightarrow \infty$ durchführen, d.h. die rechte Wand des Resonators komplett entfernen. Wenn man darüber hinaus $X \gg D$ und $Y \gg D$ annimmt, können ohne merkbliche Änderung auch die Seitenwände des Resonators entfernt werden. Es bleiben dann nur

⁴ „Obwohl der Effekt klein ist, scheint eine experimentelle Bestätigung nicht unmöglich“.

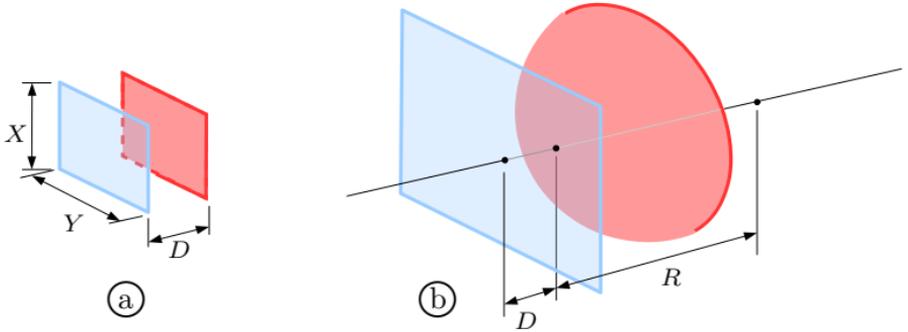


Abb. 2: Zwei realistischere Geometrien des Resonators

die beiden in Abbildung 2Ⓐ skizzierten Platten übrig. Dies ist die Geometrie, die in den ersten Experimenten zur Messung der Casimir-Kraft verwendet wurde.

Veränderte Geometrie: Es ist überaus schwierig, zwei makroskopische Platten bei einer Spaltbreite von $D \approx 1 \mu\text{m}$ parallel auszurichten (die Platten müssen ja relativ zueinander beweglich sein). Wegen $F_{\text{Casimir}} \sim D^{-4}$ führt eine sehr kleine Verkippung bereits zu einem sehr großen Fehler. Deshalb verwenden viele Experimente die in Abbildung 2Ⓑ dargestellte Geometrie, bei der eine der Platten durch eine Kugeloberfläche mit Radius R ersetzt wird. Für Kugel-Platte Geometrie gilt [22, (3)]

$$F_{KP} = F_{PP} \cdot \frac{D}{3} \cdot \frac{2\pi R}{X^2} = -\frac{\pi^3 \hbar c}{360} \frac{R}{D^3} \quad \text{falls } R \gg D. \quad (38)$$

Endliche Temperatur: Die experimentellen Untersuchungen des Casimir-Effekts finden in der Regel bei Raumtemperatur statt, während unsere Herleitung von (36) auf der Annahme $T = 0$ basiert. Bei endlicher Temperatur ändert sich die Formel (16)

folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
 U_0 = U_{T=0} &\stackrel{(16)}{=} 2 \sum_{l,m,n=1}^{\infty} \frac{\hbar c k_{lmn}}{2} \xrightarrow{T \neq 0} \\
 \xrightarrow{T \neq 0} U_{T \neq 0} &= 2 \sum_{l,m,n=1}^{\infty} \hbar c k_{lmn} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\exp\{\hbar c k_{lmn}/(k_B T)\} - 1} \right) \quad (39)
 \end{aligned}$$

k_B ist die Boltzmann-Konstante. Der zweite Summand beschreibt die Wahrscheinlichkeit, mit der nach der Bose-Einstein-Statistik bei der Temperatur T eine Schwingungsmode mit der Wellenzahl k_{lmn} thermisch angeregt wird.

Es ist nicht erstaunlich, dass lange Zeit kein signifikanter Einfluss des zusätzlichen Terms für $T \approx 300$ K experimentell beobachtet werden konnte. Denn die Casimir-Kraft wird dominiert von Wellenlängen, die beim Plattenabstand D gerade noch in den Resonator passen, bei einer infinitesimalen Verkleinerung auf $D - dD$ aber nicht mehr. Das sind Wellen mit Z -Komponente $n \cdot \lambda_Z/2 \approx D$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Weil bei 300 K das Maximum des Planck'schen Strahlungsspektrums bei der Wellenlänge $17 \mu\text{m}$ liegt, ist ein merklicher Effekt der thermischen Strahlung nur bei einem Plattenabstand D von mehreren Mikrometern zu erwarten. Die meisten der älteren Experimente wurden aber mit viel kleinerem D (nämlich typisch $0.5 \mu\text{m} \dots 1 \mu\text{m}$) durchgeführt, weil die Casimir-Kraft laut (36) mit D^{-4} vom Plattenabstand abhängt, und die Experimente nicht sensitiv genug waren, um bei größerem D überhaupt noch eine Kraft signifikant zu messen.

Im Jahr 2010 wurden experimentelle Ergebnisse publiziert [23], die den Bereich $D = 0.7 \mu\text{m} \dots D = 7 \mu\text{m}$ abdecken. Die Experimentatoren sind überzeugt, den Einfluss der endlichen Temperatur nachgewiesen zu haben. Wenn man allerdings die Unsicherheit der beträchtlichen Korrekturfaktoren betrachtet, die zur Aufbereitung der Daten erforderlich waren, wird man diese Schlussfolgerung

mit Zurückhaltung betrachten und weitere experimentelle Befunde abwarten.

Endliche Leitfähigkeit der Oberflächen: Bei der Herleitung von (36) wurde angenommen, dass die Eindringtiefe der Strahlung in die Wände des Resonators null ist und die Strahlung zu 100 % reflektiert wird. Diese Annahme hat sich als zu grobe Näherung erwiesen. Zufriedenstellende Übereinstimmung zwischen den Experimenten und der Theorie kann nur erreicht werden wenn berücksichtigt wird, dass die Reflektivität der Oberflächen von Platten und Kugeln, die bei der Messung der Casimir-Kraft verwendet werden, erstens kleiner als eins und zweitens frequenzabhängig ist. Mit dieser Korrektur geht die trügerische Universalität der einfachen Formel (36) verloren: Die Casimir-Kraft ist *nicht* unabhängig vom Material der Wände.

Das Modell der elektrischen Leitfähigkeit von Metallen, das Drude schon 1900 veröffentlichte, ist trotz seiner Einfachheit für die Analyse des Casimir-Effekts geeignet. Besonders für Metalle, deren Atome genau 1 Valenzelektron in der s-Schale haben, also für die Alkali-Metalle, sowie für die Edelmetalle Kupfer, Silber, und Gold, liefert dies Modell erstaunlich gute Ergebnisse. Die genannten Edelmetalle werden in den Experimenten bevorzugt für die Oberflächen der Resonatoren verwendet.

Die folgende Herleitung der für den Casimir-Effekt wichtigen Formeln des Drude-Modells orientiert sich an [24, chapter 1] und [25, Kapitel 11.2]. Diese Formeln enthalten genau vier freie Parameter, die experimentell bestimmt werden müssen: Die effektive Masse m der Leitungselektronen, die Relaxationszeit τ , die Plasmafrequenz ω_P , und die frequenzabhängige relative Dielektrizitätskonstante ϵ_ω .

Ein von außen an das Metall angelegtes statisches Feld der Stärke \mathbf{E}_0 bewirkt im Metall eine Stromdichte

$$\mathbf{j} = -nev = \sigma_0 \mathbf{E}_0, \quad (40)$$

die gleich dem Produkt der Anzahl n der Leitungselektronen pro Volumen, ihrer Ladung $-e$, und ihrer durchschnittlichen Geschwindigkeit \mathbf{v} ist. σ_0 ist die DC-Leitfähigkeit des Metalls. Auf ihrem Weg durch das Metall werden die Leitungselektronen immer wieder an den Ionen des Kristallgitters gestreut. Das durchschnittliche Zeitintervall zwischen zwei Streuungen des gleichen Elektrons wird als Relaxationszeit τ bezeichnet. Bei dem Stoß wird das Leitungselektron in eine beliebige Richtung gestreut, so dass seine Geschwindigkeit unmittelbar nach einem Stoß *im Mittel* Null ist. Dann wird es durch die Kraft $-e\mathbf{E}$ beschleunigt. Wenn der Stoß zur Zeit $t = 0$ geschah, dann hat das Elektron zur Zeit τ *im Mittel* die Geschwindigkeit

$$\langle \mathbf{v}_{\text{einzel}} \rangle_{t=\tau} = \int_0^\tau dt \frac{d\mathbf{v}_{\text{einzel}}}{dt} = - \int_0^\tau dt \frac{e\mathbf{E}_0}{m} = - \frac{e\mathbf{E}_0}{m} \tau. \quad (41)$$

Die Masse m ist nicht die Masse eines freien Elektrons, sondern seine sogenannte effektive Masse, also einer der vier freien Parameter des Drude-Modells. Aus (41) folgt, dass die mittlere Geschwindigkeit aller Leitungselektronen

$$\mathbf{v} = - \frac{e\mathbf{E}_0}{m} \tau \quad (42)$$

ist⁵. Diese Geschwindigkeit wird in (40) eingesetzt:

$$\mathbf{j} = + \frac{ne^2\tau}{m} \mathbf{E}_0 = \sigma_0 \mathbf{E}_0 \quad (43)$$

⁵ Intuitiv würde man im ersten Moment $\mathbf{v} = \langle \mathbf{v}_{\text{einzel}} \rangle_{t=\tau}/2$ vermuten, ein Fehler, der auch Drude unterlief. Um uns den korrekten Wert (42) plausibel zu machen, betrachten wir die Extremfälle eines Elektrons, das genau rückwärts gestreut wird, und eines Elektrons, das beim Stoß fast garnicht aus der Vorwärts-Richtung abgelenkt wird. Wenn beide Elektronen vor dem Stoß die Geschwindigkeit \mathbf{v} haben, dann hat das rückwärts gestreute Elektron

Die Leitfähigkeit σ_0 ist eine Konstante. Die Stöße bewirken also, dass die Leitungselektronen unter dem Einfluss der Kraft $-e\mathbf{E}$ nicht grenzenlos beschleunigt werden, sondern *im Mittel* die endliche, konstante Geschwindigkeit \mathbf{v} haben. Man kann die Wirkung der Stöße als eine zur Geschwindigkeit proportionale Reibungskraft $-\mathbf{v}/\tau$ modellieren, die zusätzlich zur Kraft $-e\mathbf{E}$ in die Bewegungsgleichung der *mittleren* Geschwindigkeit \mathbf{v} der Leitungselektronen eingesetzt wird:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\mathbf{v}}{\tau} - \frac{e\mathbf{E}_0}{m} \stackrel{(42)}{=} 0 \quad (44)$$

Legt man anstelle des statischen Feldes ein Wechselfeld $\mathbf{E}_\omega = \hat{\mathbf{E}} \exp\{-i\omega t\}$ an das Metall an, so wird die durchschnittliche Geschwindigkeit der Leitungselektronen $\mathbf{v}_\omega = \hat{\mathbf{v}} \exp\{-i\omega t\}$. Weil \mathbf{v}_ω im Gegensatz zu \mathbf{v} variabel ist, ist Gleichung (44) nicht mehr Null, sondern wird zu

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}_\omega}{dt} &= -i\omega\mathbf{v}_\omega = -\frac{\mathbf{v}_\omega}{\tau} - \frac{e\mathbf{E}_\omega}{m} \\ \mathbf{v}_\omega &= -\frac{e\mathbf{E}_\omega}{m(-i\omega + 1/\tau)}. \end{aligned} \quad (45)$$

Für die Stromdichte und die Leitfähigkeit folgen daraus die Werte

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_\omega &\stackrel{(40)}{=} +\frac{ne^2\mathbf{E}_\omega}{m(-i\omega + 1/\tau)} = \sigma_\omega\mathbf{E}_\omega \\ \sigma_\omega &= \frac{ne^2\tau}{m(1 - i\omega\tau)} \stackrel{(43)}{=} \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau}. \end{aligned} \quad (46)$$

unmittelbar nach dem Stoß die Geschwindigkeit $-\mathbf{v}$, und nach der weiteren Zeit τ die Geschwindigkeit 0. Das vorwärts gestreute Elektron hat unmittelbar nach dem Stoß die Geschwindigkeit \mathbf{v} , und nach der weiteren Zeit τ die Geschwindigkeit $\mathbf{v} - e\mathbf{E}/m = 2\mathbf{v}$. Der Mittelwert der beiden Extremfälle ist \mathbf{v} , in Übereinstimmung mit (42).

Die Leitfähigkeit σ_ω , und damit die Reflektivität des Metalls, nimmt entsprechend (46) mit zunehmender Frequenz ab. Am Phasenfaktor i im Dämpfungsterm $i\omega\tau$ erkennt man, dass es sich um einen dissipativen Vorgang handelt. Der nicht reflektierte Anteil der Strahlung wird im Metall in Wärme umgewandelt.

Die DC-Leitfähigkeit σ_0 und die AC-Leitfähigkeit σ_ω können leicht gemessen werden. Damit kann man aus der rechten Seite von (46) die Relaxationszeit τ berechnen, und anschließend aus dem mittleren Term dieser Gleichung (da n und e bekannt sind) die effektive Masse m . Damit sind zwei der vier freien Parameter des Drude-Modells experimentell festgelegt.

Die bis hierher entwickelten Formeln des Drude-Modells reichen aus zur Beschreibung der Leitfähigkeit von Metallen von der Frequenz 0 (DC) bis etwa 10^{12} Hz. Bei höheren Frequenzen, also dem Bereich infraroten Lichts bis etwa $4 \cdot 10^{14}$ Hz und noch deutlicher im Frequenzbereich des sichtbaren Lichts von etwa $(4 \dots 7) \cdot 10^{14}$ Hz und darüber tritt eine Änderung ein. Zur Untersuchung der Materialeigenschaften in diesem Frequenzbereich benutzen wir die Maxwell'schen Gleichungen

$$\nabla \times \mathbf{E}_\omega = -\frac{\partial \mathbf{B}_\omega}{\partial t} \quad (47a)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}_\omega = \mu_0 \mu_\omega \mathbf{j}_\omega + \frac{\mu_\omega \epsilon_\omega}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}_\omega}{\partial t}. \quad (47b)$$

Mit dem Index ω wird angedeutet, dass wir weiterhin nach Lösungen mit der gleichen Zeitabhängigkeit wie in (46) suchen, d.h. wir machen den Lösungsansatz

$$\mathbf{E}_\omega = \hat{\mathbf{E}} \exp\{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)\}. \quad (48)$$

ϵ_0 ist die Dielektrizitätskonstante des Vakuums, ϵ_ω ist die relative Dielektrizitätskonstante des Metalls bei der Frequenz $\omega = 2\pi\nu$. μ_0 ist die magnetische Permeabilität des Vakuums, μ_ω ist die relative

Permeabilität des Metalls bei der Frequenz $\omega = 2\pi\nu$. Für nicht-magnetische Metalle, die uns hier ausschließlich interessieren, ist $\mu_\omega = 1$. $c = (\epsilon_0\mu_0)^{-1/2}$ ist die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum. Wir bilden die Rotation von (47a), setzen (47b) ein, und setzen den Ausdruck (46) für \mathbf{j}_ω ein:

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_\omega &= -\mu_0\sigma_\omega \frac{\partial \mathbf{E}_\omega}{\partial t} - \frac{\epsilon_\omega}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}_\omega}{\partial t^2} = \\ &= \underbrace{\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}_\omega)}_0 - \Delta \mathbf{E}_\omega\end{aligned}\quad (49)$$

Wir setzen voraus, dass die Wellenlänge von \mathbf{E}_ω groß gegen die Gitterkonstante des Metalls ist, so dass auf dieser Skala das Metall elektrisch neutral bleibt und $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}_\omega)$ gleich Null gesetzt werden kann. Wegen (48) gilt

$$\frac{\partial \mathbf{E}_\omega}{\partial t} = \frac{+i}{\omega} \frac{\partial^2 \mathbf{E}_\omega}{\partial t^2}, \quad (50)$$

womit man die Wellengleichung

$$\Delta \mathbf{E}_\omega = \underbrace{\left(\epsilon_\omega + \frac{i\sigma_\omega}{\omega\epsilon_0} \right)}_{\text{komplexe relative Dielektrizitätskonstante}} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}_\omega}{\partial t^2} \quad (51)$$

erhält. Das ist – abgesehen von der komplexen relativen Dielektrizitätskonstanten – eine normale Wellengleichung. Einsetzen von (48) ergibt die Dispersionsrelation

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_\omega + \frac{i\sigma_\omega}{\omega\epsilon_0}} \quad \text{mit } k = \sqrt{\mathbf{k}^2}. \quad (52)$$

Man definiert die Plasmafrequenz

$$\omega_P \equiv \sqrt{\frac{ne^2}{m\epsilon_0}}. \quad (53)$$

Wenn ω von gleicher Größenordnung wie ω_P ist, dann gilt in guter Näherung:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\omega &\stackrel{(46)}{=} \frac{ne^2\tau}{-i\omega\tau m(1/(-i\omega\tau) + 1)} \approx + \frac{ine^2}{m\omega} \\ k &\stackrel{(52)}{=} \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_\omega - \frac{ne^2}{m\omega^2\epsilon_0}} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_\omega - \frac{\omega_P^2}{\omega^2}} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{falls } \omega \text{ in der} \\ \text{Größenord-} \\ \text{nung von } \omega_P \\ \text{liegt} \end{array} \quad (54)$$

Wenn $\omega < \omega_P/\sqrt{\epsilon_\omega}$ ist, dann ist die Wellenzahl k imaginär, und die Amplitude der Lösungen (48) der Wellengleichung (51) geht im Inneren des Metalls exponentiell gegen Null. Die Eindringtiefe ist endlich, aber nicht vernachlässigbar klein. Wenn dagegen die Frequenz ω so groß wird, dass $\omega > \omega_P/\sqrt{\epsilon_\omega}$ ist, dann wird k reell, und es können sich Wellen im Metall ausbreiten. Das Metall wird transparent, und die Reflektivität geht gegen Null.

In der Definition $\omega_P = (53)$ der Plasmafrequenz wird nur die Dichte n der Leitungselektronen berücksichtigt. Die Rumpfelektronen, die an die Ionen des Kristallgitters gebunden sind, werden ignoriert. Das ist bei hohen Frequenzen eine schlechte Näherung. Auch die frequenzabhängige relative Dielektrizitätskonstante wird stark durch die Rumpfelektronen beeinflusst. Deshalb ist es besser, diese beiden Parameter nicht mit dem Drude-Modell zu berechnen, sondern experimentell zu bestimmen. Man findet sie durch die frequenzabhängige Messung der Reflektion und Absorption elektromagnetischer Strahlung. Die Plasmafrequenzen der Alkali-metalle liegen im nahen UV von etwa $\nu_P = \omega_P/2\pi \approx 7 \cdot 10^{14}\text{Hz}$ bis $\nu_P \approx 15 \cdot 10^{14}\text{Hz}$ [24, Table 1.5] dicht oberhalb des sichtbaren Spektrums. Die Plasmafrequenz von Gold liegt mit $\nu_P \approx 22 \cdot 10^{14}\text{Hz}$ [26] nicht sehr viel höher.

Elektrostatistische Flecken: Selbst wenn eine Oberfläche geometrisch plan ist, so ist sie doch im Allgemeinen keine perfekte Äqui-

potentialfläche. Denn weil der Übergangswiderstand zwischen den Mikrokristallen der Oberfläche nicht homogen ist, tragen sie unterschiedliche elektrostatische Ladungen. Daraus resultiert eine „Spannungs-Rauigkeit“ der Oberfläche. Dieser Effekt wird durch Kontamination der Oberfläche mit Adsorbaten reduziert. Referenzen zur Literatur über dies Thema findet man in [27]. Weil die elektrostatische Kraft aufgrund der Flecken sehr schwer zu kontrollieren und außerdem von gleicher Größenordnung wie die Casimir-Kraft ist, stellt sie ein sehr ernsthaftes Problem für die Interpretation und Zuverlässigkeit der Messdaten dar und ist eine hartnäckige Quelle systematischer Fehler.

In [28] wird über ein Experiment berichtet, in dem erstmals der Versuch gemacht wurde, die Flecken direkt zu messen und ihren Einfluss bei der Extraktion der Casimir-Kraft aus den Messdaten detailliert zu berücksichtigen. Die Kritik [29] anderer Autoren an der Interpretation dieses Ergebnisses zeigt, wie schwer es nach wie vor ist, die systematischen Fehlerquellen bei der Messung der Casimir-Kraft zu identifizieren und zu quantifizieren.

5. Wie Casimir den Effekt entdeckte

Der Weg, auf dem Casimir zu seiner Formel (36) gelangte ist deshalb interessant, weil sie ein bezeichnendes Licht auf die Beweiskraft dieses Effekts für die physikalische Existenz der Nullpunktsenergie wirft, die im nächsten Abschnitt diskutiert wird.

Zur Vorgeschichte der Casimir-Kraft gehört ein 1930 von Fritz London veröffentlichter einflussreicher Artikel „Zur Theorie und Systematik der Molekularkräfte“ [30]. London untersuchte in quantenmechanischer Störungsrechnung zweiter Ordnung Atome und Moleküle, die durch van der Waals-Kräfte miteinander wechselwirken. Er betrachtete unter anderem die paarweise Wechselwirkung von Molekülen, die kein permanentes elektrisches Dipol- oder Qua-

drupolmoment haben. Wenn eines der Moleküle durch kurzzeitige Fluktuation (so etwas gibt es nur in der Quantentheorie, nicht in der klassischen Theorie) ein momentanes Dipolmoment erhält, dann induziert es im anderen Molekül ebenfalls ein Dipolmoment. London fand das Ergebnis, dass die Wechselwirkungsenergie zwischen den beiden Molekülen $\sim R^{-6}$ ist, falls ihr Abstand R deutlich größer ist als der Durchmesser der Moleküle nach Bohr's altem Atommodell. Zwischen den beiden Molekülen besteht eine anziehende Kraft $\sim R^{-7}$, die London Dispersionskraft nannte.

1947 wurden Casimir und Polder von einem Experimentator um Rat gefragt, der untersuchte, wie sich in Kolloiden die Kraft zwischen den Molekülen bei Änderung ihres Abstands R ändert. Eigentlich sollte London's Theorie der Dispersionskräfte auf dieses System passen. Beobachtet wurde aber eine Abnahme der Kraft, die eher $\sim R^{-8}$ als $\sim R^{-7}$ (dem nach London's Theorie erwarteten Wert) zu sein schien. Bei der Suche nach einem möglichen Fehler in Londons Theorie richtete der Verdacht sich bald darauf, dass London die Wechselwirkung zwischen den Molekülen statisch berechnet und die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Wechselwirkung vernachlässigt hatte.

Diese Näherung war tatsächlich zu grob. Die Berechnung von Casimir und Polder [31], in der die Retardierung der Wechselwirkung berücksichtigt wurde, ergab als van der Waals-Kraft zwischen zwei Atomen ohne permanentes elektrisches Moment bei großem Abstand R

$$F = -\frac{161\hbar c\beta_1\beta_2}{4\pi R^8}. \quad (55)$$

β_1 und β_2 sind die statischen Polarisierbarkeiten der beiden Atome.

Das Ergebnis sieht einfach aus, seine Herleitung erwies sich aber als ziemlich anspruchsvoll und kompliziert. Um sich systematisch an die Lösung heranzuarbeiten, untersuchten Casimir und Polder deshalb zunächst eine einfachere Anordnung, bei der sich ein

einzelnes polarisierbares Atom im Abstand R von einer unendlich leitfähigen ebenen Metallfläche befindet. Nach der klassischen Theorie sollte es eine Wechselwirkung zwischen dem Atom und seinem Spiegelbild geben. Das war im Wesentlichen auch der Fall. Was die Theoretiker aber überraschte war die Einfachheit, mit der sich das Ergebnis

$$F = -\frac{3\hbar c\beta}{2\pi R^5} \quad (56)$$

berechnen ließ. β ist die statische Polarisierbarkeit des Atoms. Die Herleitung dieses Resultats ist nahezu identisch mit derjenigen, die Casimir später zur Berechnung der Kraft zwischen zwei Metallplatten benutzte. Der einzige – physikalisch allerdings sehr wichtige – Unterschied besteht darin, dass in diesem Fall das Atom das elektrische Feld mitbringt, das die Wechselwirkung zwischen Atom und Metallplatte bewirkt, während beim Casimir-Effekt (scheinbar, siehe folgender Abschnitt) keine elektrischen Ladungen im Spiel sind, so dass die Nullpunktsschwingungen das erforderliche elektromagnetische Feld beisteuern müssen.

Den entscheidenden Hinweis darauf, dass man im Fall zweier Metallplatten eine Wirkung der Nullpunktenergie in Betracht ziehen könnte, bekam Casimir übrigens, als er sich in jenen Tagen einmal mit Bohr über seine aktuellen Aktivitäten unterhielt. „Bohr mumbled something about zero-point energy”⁶, erinnerte Casimir sich viele Jahre später [32]. Dieser Fingerzeig genügte Casimir, um nach der Vorarbeit mit Polder, gegenüber der er ja nur das Atom durch die bewegliche Platte zu ersetzen brauchte, innerhalb kürzester Zeit den Casimir-Effekt zu berechnen.

⁶ „Bohr murmelte etwas von Nullpunktenergie“.

6. Was beweist der Casimir-Effekt?

Sechs Jahrzehnte nach Casimir's grundlegender Veröffentlichung kann man sicherlich feststellen, dass die Casimir-Kraft eindeutig existiert, experimentell unzweifelhaft nachgewiesen wurde, und quantitativ durch (36) näherungsweise korrekt beschrieben wird, zumindest bei Plattenabständen im Bereich $D \approx 0.2 \mu\text{m} \dots 5 \mu\text{m}$.

Aber ist die Existenz der Casimir-Kraft ein zwingender Beweis für eine messbare Wirkung der Nullpunkts-Oszillationen des elektromagnetischen Feldes? Bemerkenswerterweise nicht. Casimir hat zwar gezeigt, dass die Formel (36) aus der Annahme von Nullpunktsoszillationen hergeleitet werden kann, er hat aber nicht gezeigt, dass dies die einzig mögliche Deutung der Messergebnisse ist.

Die gemeinsam mit Polder durchgeführte Berechnung der anziehenden Kraft zwischen einer Metallplatte und einem polarisierbaren Atom deutet bereits auf eine bessere Interpretation der Beobachtungen hin. Die verblüffende formale Ähnlichkeit der Herleitungen der beiden Formeln (56) und (36) legt die Vermutung nahe, dass auch die Ursache der anziehenden Kraft in beiden Fällen die gleiche ist, dass also die Casimir-Kraft durch langreichweitige van der Waals-Wechselwirkung zwischen den Atomen zustande kommt, welche die Oberflächen der beiden Metallplatten bilden.

Lifshitz [33] leitete schon 1956 eine Kontinuumstheorie für die retardierte van-der-Waals-Kraft zwischen zwei parallelen Platten mit relativen Dielektrizitätskonstanten ϵ_1 und ϵ_3 her, wobei der Raum zwischen den Platten von einem Material mit der relativen Dielektrizitätskonstanten ϵ_2 erfüllt ist:

$$\epsilon_1 \quad \left| \quad \epsilon_2 \quad \left| \quad \epsilon_3 \quad (57a)$$

Casimir's Aufbau wäre in dieser Notation durch

$$\epsilon_1 \rightarrow \infty \quad \left| \quad \epsilon_2 \rightarrow 1 \quad \left| \quad \epsilon_3 \rightarrow \infty \quad (57b)$$

zu repräsentieren. Wenige Jahre später verfeinerten Dzyaloshinskii, Lifshitz, und Pitaevskii [34] diese Theorie, und untermauerten sie mit den Methoden der Quantenelektrodynamik. Schwinger, DeRaad, und Milton [35] reproduzierten 1978 das Ergebnis von Lifshitz et al. mit einem eleganteren (aber nicht einfacheren) mathematischen Verfahren. Während die Herleitung sehr kompliziert ist, sieht das Ergebnis relativ einfach aus. Wenn in einem Aufbau mit drei Platten der Größe $X \times Y$ mit relativen Dielektrizitätskonstanten $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ entsprechend (57a) die Dicke D der mittleren Platte so klein gegen X und Y ist, dass Randeffekte vernachlässigt werden können, dann wirkt zwischen den äußeren Platten nach der Theorie von Lifshitz folgende Kraft:

$$\begin{aligned}
 F_{\text{Lifshitz}} = & -\frac{\hbar c XY}{2\pi^2} \int_0^\infty d\xi \int_0^\infty dk \kappa_2 k \cdot \\
 & \cdot \left(\left(\frac{\kappa_2 + \kappa_1}{\kappa_2 - \kappa_1} \cdot \frac{\kappa_2 + \kappa_3}{\kappa_2 - \kappa_3} \cdot \exp\{2\kappa_2 D\} - 1 \right)^{-1} + \right. \\
 & \left. + \left(\frac{\kappa'_2 + \kappa'_1}{\kappa'_2 - \kappa'_1} \cdot \frac{\kappa'_2 + \kappa'_3}{\kappa'_2 - \kappa'_3} \cdot \exp\{2\kappa_2 D\} - 1 \right)^{-1} \right) \\
 \kappa_j^2 = & k^2 + \epsilon_j \xi^2, \quad \kappa'_j = \frac{\kappa_j}{\epsilon_j}, \quad k, \xi \in \mathbb{R}, \quad [k] = [\xi] = \text{m}^{-1}
 \end{aligned} \quad (58)$$

Die beiden Integrationsvariablen ξ und k haben die Dimension von Wellenzahlen. Man beachte, dass κ_2 in beiden Exponentialfunktionen keinen Strich hat.

Zunächst untersuchen wir, welches Ergebnis die Lifshitz-Formel für zwei unendlich leitfähige Metallplatten vorhersagt, die durch

einen Vakuum-Spalt der Breite D getrennt sind. Wegen

$$\epsilon_1 = \epsilon_3 = \infty, \epsilon_2 = 1 \implies \kappa_1 = \kappa_3 = \infty, \kappa'_1 = \kappa'_3 = 0 \quad (59)$$

vereinfacht sich die Formel in diesem Fall beträchtlich:

$$F_{\text{Lifshitz}} = -\frac{\hbar c XY}{2\pi^2} \int_0^\infty d\xi \int_0^\infty dk \frac{2\kappa_2 k}{\exp\{2\kappa_2 D\} - 1} \quad (60)$$

Wir definieren Polarkoordinaten r, ϕ durch

$$r \cos \phi \equiv k, \quad r \sin \phi \equiv \xi.$$

Das Integral über den ersten Quadranten der $k\xi$ -Ebene ist

$$\int_0^\infty dk \int_0^\infty d\xi = \int_0^\infty dr \int_0^{\pi/2} r d\phi. \quad (61)$$

Außerdem wird $\kappa_2 = \sqrt{k^2 + \xi^2} = r$ in (60) eingesetzt:

$$F_{\text{Lifshitz}} = -\frac{\hbar c XY}{8\pi^2 D^3} \underbrace{\int_0^{\pi/2} d\phi \cos \phi}_1 \int_0^\infty dr \frac{2^3 r^3 D^3}{\exp\{2rD\} - 1} \quad (62)$$

Hier wurde der Bruch mit $2^2 D^3$ erweitert. Mit der weiteren Substitution

$$x \equiv 2rD, \quad dr = \frac{dx}{2D}$$

folgt⁷

$$F_{\text{Lifshitz}} = -\frac{\hbar c XY}{16\pi^2 D^4} \underbrace{\int_0^\infty dx \frac{x^3}{\exp\{x\} - 1}}_{\Gamma(4) \zeta(4) = 3! \pi^4/90 = \pi^4/15} = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240} \frac{XY}{D^4}, \quad (63)$$

⁷ Das Integral über x hat in [36] die Nummer 3.411.1

was mit Casimir's Formel (36) identisch ist.

Die Theorie von Lifshitz wurde mehrfach experimentell überprüft und bestätigt. Das elegante und beeindruckende Experiment von Sabisky und Anderson [37] verdient in diesem Zusammenhang besondere Beachtung. In diesem Experiment wurde ein Szenario realisiert, das Dzyaloshinskii, Lifshitz, und Pitaevskii bereits in der zuvor zitierten Arbeit berechnet hatten: Der untersuchte Schichtaufbau bestand aus einem Substrat aus CaF oder SrF oder BaF (entspricht in (57a) ϵ_1), einem Film aus flüssigem Helium mit einer Dicke von 1 nm bis 25 nm (entspricht in (57a) ϵ_2), und einer darüber liegenden Wolke aus gesättigtem gasförmigem Helium (entspricht in (57a) ϵ_3). Die Messungen bestätigten die Theorie von Lifshitz mit eindrucksvoller Präzision.

Der entscheidende Punkt ist nun, dass in der Theorie von Lifshitz von Nullpunktsschwingungen überhaupt keine Rede ist. Berechnet wird vielmehr die direkte, durch ein elektromagnetisches Feld vermittelte Wechselwirkung zwischen der polarisierbaren dielektrischen Materie der beiden äußeren Platten.

Jaffe [38] kritisierte Casimir's Herleitung von (36) als „heuristisch“, weil sie inkonsistent ist: Einerseits verwendet Casimir die Nullpunktsschwingungen, die ein Resultat der Quantenfeldtheorie sind. Andererseits berechnet er die Wechselwirkung dieser Schwingungen mit den Wänden des Resonators nicht mit den Methoden der Quantenfeldtheorie, sondern in einer idealisierenden Weise: Die Annahme unendlich großer Leitfähigkeit der Metalle bewirkt, dass die Feinstrukturkonstante

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx \frac{1}{137}, \quad (64)$$

deren Größe in der Quantenelektrodynamik die Stärke der Wechselwirkung zwischen dem elektromagnetischen Feld und elektrisch geladener Materie bestimmt, in der Formel (36) überhaupt nicht

vorkommt. Casimir's Annahme

$$\sigma_\omega \stackrel{(46)}{=} \frac{ne^2\tau}{m(1-i\omega\tau)} = \frac{\sigma_0}{1-i\omega\tau} = \infty$$

entspricht wegen $\sigma_\omega \sim e^2 \sim \alpha$ der Näherung $\alpha = \infty$. Wir haben im vorigen Abschnitt schon festgestellt, dass diese Näherung allzu grob ist. Man muss die endliche, frequenzabhängige Leitfähigkeit $\sigma_\omega = (46)$ in die Theorie einbeziehen, um die gemessenen Resultate zu reproduzieren. Das bedeutet aber nichts anderes, als dass die Casimir-Kraft durch Photonenaustausch zwischen Ladungsträgern in den beiden Metallplatten zustande kommt. Die Tatsache, dass die Frequenzabhängigkeit der Leitfähigkeit σ_ω bei der Berechnung der Casimir-Kraft in Betracht gezogen werden muss beweist, dass die Photonen, die auf die Metallplatten Kräfte ausüben, nicht etwa unvermittelt aus einem See von Nullpunktsschwingungen auftauchen, sondern von den Ladungsträgern der gegenüberliegenden Platte emittiert werden.

Man kann es auch umgekehrt formulieren: Wenn die Feinstrukturkonstante α Null wäre, dann wäre auch σ_ω Null, und der Casimir-Effekt würde verschwinden [38]. Dass die Casimir-Kraft nur bei $\alpha \neq 0$ auftreten kann beweist, dass sie auf der Wechselwirkung zwischen dem elektromagnetischen Feld und elektrisch geladener Materie beruht und nicht als Effekt einer Nullpunktsenergie erklärt werden kann, die ohne Wechselwirkung mit Ladungsträgern zwischen den Metallplatten schwebt.

Es gibt mit der Theorie von Lifshitz eine alternative Theorie zu derjenigen von Casimir, die – ohne die Annahme einer physikalisch wirksamen Nullpunktsenergie – erstens Casimirs Formel im Grenzfall (57b) enthält, zweitens genauer mit sämtlichen experimentellen Beobachtungen übereinstimmt als diejenige von Casimir, und drittens auch weitere verblüffende Vorhersagen macht: Beispielsweise sagt die Theorie von Lifshitz für bestimmte Geometrien

der wechselwirkenden makroskopischen Objekte und für bestimmte Kombinationen der Dielektrizitätskonstanten $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ in (57a) auch eine abstoßende Kraft voraus. Dieser Aspekt der Lifshitz-Theorie wurde ebenfalls experimentell bestätigt, siehe die Referenzen in [39]. Übrigens gehört auch das oben erwähnte Experiment von Sabisky und Anderson in die Klasse mit abstoßender Casimir-Kraft.

Dazu eine Anekdote, berichtet von Iver H. Brevik: "... in March 1972 [... , after a talk of Hendrik Casimir at the Norwegian Institute of Technology in Trondheim, I] asked: 'Is the Casimir effect due to the quantum fluctuations of the electromagnetic field, or is it due to the van der Waals forces between the molecules in the two media?' Casimir's answer began, 'I have not made up my mind.' 11 years later I met Casimir again [... and ...] put to him the same question as before. And as far as I can remember, his answer and explanations were in effect the same as in 1972."⁸ [40, Vorwort]

Der Casimir-Effekt ist also kein Beweis für eine physikalische Wirksamkeit der Nullpunktsschwingungen. Um so erstaunlicher ist die Tatsache, dass Casimir's Herleitung von (36) zu einem zumindest näherungsweise korrekten Ergebnis geführt hat. Kann man das als Hinweis darauf verstehen, dass die Annahme physikalisch wirksamer Nullpunktsschwingungen doch in irgendeiner, bisher noch unverstandenen Weise, ihre Berechtigung hat?

Boyer, der 1970 einen Übersichtsartikel [41] über die Möglichkeiten verfasste, aus der Annahme physikalisch wirksamer Nullpunkts-

⁸ „Im März 1972 [... , nach einem Vortrag von Hendrik Casimir am Norwegischen Technischen Institut in Trondheim,] fragte ich: ‚Wird der Casimir-Effekt durch Quantenfluktuationen des elektromagnetischen Feldes bewirkt, oder durch die van der Waals Kräfte zwischen den Molekülen in den zwei Medien?‘ Casimir's Antwort begann mit den Worten: ‚Ich habe mich nicht entschieden.‘ 11 Jahre später traf ich Casimir wieder [... und ...] stellte ihm die gleiche Frage wie zuvor. Und so weit ich mich erinnern kann, waren seine Antwort und Erklärungen im Grunde die gleichen wie in 1972.“

schwingungen auf relativ einfache Weise experimentell überprüfbare Ergebnisse abzuleiten, kommentierte diese Situation mit den Worten: “Often in physics, a problem may be attacked from several points of view with the same conclusion. [...] Here we will show that zero-point energy is a useful concept in understanding and calculating some forces arising in quantum electrodynamics, — forces which may often be obtained alternatively by perturbation and dispersion-theoretic methods. We believe that the usefulness of a quantity often indicates that it is worthy a further investigation.”⁹ [41, Seite 479]

7. Sind Nullpunktsschwingungen physikalisch wirksam?

Offenbar muss man unterscheiden zwischen den Nullpunktsschwingungen materieller Systeme mit endlich vielen Freiheitsgraden, und den Nullpunktsschwingungen kontinuierlicher Felder mit unendlich vielen Freiheitsgraden.

Hinsichtlich der ersten Gruppe ist der Fall klar: Es gibt eine Fülle experimenteller Beweise für die Existenz ihrer Nullpunktsschwingungen. Diese Nullpunktsschwingungen führen nicht zu einem Konflikt mit der ART, weil die Energie der endlich vielen Nullpunktsschwingungen in jedem Fall winzig klein ist gegen die Ruheenergie dieser materiellen Systeme.

⁹ „Oftmals kann man in der Physik ein Problem aus verschiedenen Blickwinkeln in Angriff nehmen, und dabei zur gleichen Schlussfolgerung gelangen. [...] Hier werden wir zeigen, dass die Nullpunktenergie ein nützliches Konzept ist, um einige Kräfte zu berechnen, die in der Quantenelektrodynamik auftreten, – Kräfte die man oft alternativ durch Störungsrechnung und dispersionstheoretische Methoden erhalten kann. Wir glauben dass die Nützlichkeit einer Sache oftmals ein Hinweis darauf ist, dass sie eine weitere Untersuchung wert ist.“

Hinsichtlich der kontinuierlichen Felder scheint die Sachlage im ersten Moment genauso eindeutig zu sein: Nachdem der Casimir-Effekt als vermeintlich stärkstes Argument für die Nachweisbarkeit einer physikalisch wirksamen Nullpunktenergie des elektromagnetischen Feldes im vorangegangenen Abschnitt demontiert wurde, bleibt kein einziges experimentelles Indiz, das für ihre Existenz spricht. Wohl aber gibt es das in Abschnitt 3 diskutierte, überaus starke Gegenargument: Die Winzigkeit der Energiedichte des intergalaktischen Raumes, die um *mindestens* 58 Größenordnungen kleiner ist als zu erwarten wäre, wenn die Nullpunktenergie kontinuierlicher Felder gravitativ wirksam wäre. Wir haben das Schlupfloch der kosmologischen Konstante erwähnt, aber wir sind mit Pauli der Meinung, das dies keine diskussionswürdige Option ist.

Trotzdem bleiben Zweifel. Formal wurde die kanonische Quantisierung kontinuierlicher Felder der kanonischen Quantisierung endlicher materieller Systeme genau nachgebildet, so dass die Beschreibung der Schwingungsmoden der Felder mathematisch in jeder Hinsicht der Beschreibung der Schwingungsmoden materieller Systeme mit endlich vielen Freiheitsgraden entspricht. Dieses Vorgehen war überaus erfolgreich. Die Präzision der experimentell bestätigten Vorhersagen der Quantenfeldtheorien, insbesondere der Quantenelektrodynamik, ist eindrucksvoll und überzeugend.

Warum gibt es auf einmal in diesem einen Punkt einen grundlegenden Unterschied? Warum sind die Nullpunktsschwingungen, die bei materiellen Systemen mit endlich vielen Freiheitsgraden experimentell eindeutig nachgewiesen wurden, bei elementaren Quantenfeldern nur ein Artefakt, der irgendwie (beispielsweise durch „Normalordnung“) aus der Theorie entfernt werden muss? Wenn dieser Unterschied wirklich besteht, dann würde man sich

doch zumindest eine plausible Erklärung wünschen.¹⁰

Literatur

- [1] Max Planck: *Zur Theorie des Gesetzes der Energieverteilung im Normalspektrum*,
Verh. Deutsch. Phys. Ges. **2**, 237–245 (1900),
vorgetragen am 14. Dez. 1900  https://grundpraktikum.physik.uni-saarland.de/GP_Alt/scripts/Planck_1.pdf
- [2] *Quantensprünge*, (APIN, Nürnberg, 2010)
 <https://www.astrophys-neunhof.de/mtlg/sd67113.pdf>
- [3] Max Planck: *Eine neue Strahlungshypothese*,
Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. **13**, 138–148 (1911),
vorgetragen am 3. Feb. 1911
- [4] A. Einstein: *Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt*,
Ann. Phys. (Leipzig) **17**, 132–148 (1905)
 <http://dx.doi.org/10.1002/andp.19053220607>
- [5] A. Einstein, O. Stern: *Molekulare Agitation beim absoluten Nullpunkt*, Ann. Phys. (Leipzig) **40**, 551–60 (1913)
 http://www.physik.uni-augsburg.de/annalen/historie/einstein-papers/1913_40_551-560.pdf
- [6] Arnold Eucken: *Die Molekularwärme des Wasserstoffs bei tiefen Temperaturen*,
Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss. 141–151 (1912)

¹⁰ In 2017 hinzugefügte Fußnote: Die „plausible Erklärung“ kann man in [42, sec. 5] finden. In [42, sec. 9] wird ein zusätzliches, sehr wichtiges Argument gegen die Annahme einer Nullpunktsenergie elementarer Felder ausgeführt.

- [7] R. S. Mulliken: *The Isotope Effect in Band Spectra, II: The Spectrum of Boron Monoxide*, Phys. Rev. **25**, 259–294 (1925)
 <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRev.25.119>
- [8] W. Heisenberg: *Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen*, Z. Phys. **33**, 879–893 (1925)
 <http://dx.doi.org/10.1007/BF01328377>
- [9] Gerold Gründler: *Grundlagen der Relativistischen Quantenfeldtheorie* (APIN, Nürnberg, 2012)
<https://www.astrophys-neunhof.de/mtlg/Feldtheorie.pdf>
- [10] M. Born, W. Heisenberg, P. Jordan: *Zur Quantenmechanik II*, Z. Phys. **35**, 557–615 (1926)
 <http://dx.doi.org/10.1007/BF01379806>
- [11] P. Jordan, W. Pauli: *Zur Quantenelektrodynamik ladungsfreier Felder*, Z. Phys. **47**, 151–173 (1928)
 <http://dx.doi.org/10.1007/BF02055793>
- [12] W. Pauli: *Die allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik*, Handbuch der Physik, Hrsg: H. Geiger, K. Scheel, Band XXIV, 1. Teil, Kapitel 2, S. 83–272 (Julius Springer Verlag, Berlin, 2. Auflage 1933)
- [13] Albert Einstein: *Die Feldgleichungen der Gravitation*, Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss. Berlin **47**, 844–847 (1915)
 <http://nausikaa2.mpiwg-berlin.mpg.de/cgi-bin/toc/toc.x.cgi?dir=6E3MAXK4&step=thumb>
 <https://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol6-doc/273>

- [14] A. Einstein: *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*, Ann. Phys. (Leipzig) **49**, 769–822 (1916)
 <http://dx.doi.org/10.1002/andp.19163540702>
- [15] A. Einstein: *Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie*,
S. Preuß. Akad. Wiss. Berlin, 142–152 (1917),
 <http://echo.mpiwg-berlin.mpg.de/MPIWG:H428RSAN>
- [16] S. Weinberg: *The cosmological constant problem*,
Rev. Mod. Phys. **61**, 1–23 (1989)
 <http://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.61.1>
 internet link
- [17] Miao Li, Xiao-Dong Li, Shuang Wang, Yi Wang:
Dark Energy, Commun. Theor. Phys. **56**, 525–604 (2011),
 <http://dx.doi.org/10.1088/0253-6102/56/3/24>
 <https://arxiv.org/abs/1103.5870>
- [18] Walther Nernst: *Über einen Versuch, von quantentheoretischen Betrachtungen zur Annahme stetiger Energieänderungen zurückzukehren*,
Verh. Deutsch. Phys. Ges. **18**, 83–116 (1916),
vorgetragen am 18. Jan. 1916
- [19] Helge Kragh: *Preludes to dark energy: Zero-point energy and vacuum speculations*, Arch. Hist. Exact Sci. **66**, 199–240 (2012),
arXiv:1111.4623  <http://arxiv.org/abs/1111.4623>
- [20] H. B. G. Casimir: *On the attraction between two perfectly conducting plates*,
Proc. Kon. Nederl. Akad. Wetensch. **51**, 793–796 (1948)
 <http://www.dwc.knaw.nl/DL/publications/PU00018547.pdf>

- [21] Walter Greiner : *Quantentheorie (Spezielle Kapitel)*
(Harri Deutsch, Thun, 4. Auflage 1993)
- [22] A. Lambrecht, P. A. Maia Neto, S. Reynaud :
The Casimir effect within scattering theory,
New J. Physics **8**, 243 (2006)  [https://iopscience.iop.org/
article/10.1088/1367-2630/8/10/243/meta](https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1367-2630/8/10/243/meta)
- [23] A. O. Sushkov, W. J. Kim, D. A. R. Dalvit, S. K. Lamoreaux :
Observation of the thermal Casimir force
arXiv:1011.5219 (2010)  <http://arxiv.org/abs/1011.5219>
- [24] Neil W. Ashcroft, N. David Mermin : *Solid State Physics*
(Holt, Rinehart and Winston, New York, 1976)
- [25] C. Weißmantel, C. Hamann : *Grundlagen der Festkörperphysik*
(Springer, Berlin, 1979)
- [26] M. A. Ordal et al. : *Optical properties of the metals Al, Co,
Cu, Au, Fe, Pb, Ni, Pd, Pt, Ag, Ti and W in the infrared and
far infrared*, Appl. Opt. **22**, 1099–1119 (1983)
- [27] A. Lambrecht, S. Reynaud :
Casimir Effect: Theory and Experiments
Int. J. Mod. Phys. Conf. Ser. **14**, 171 – 180 (2012)
 <http://dx.doi.org/10.1142/S2010194512007313>
- [28] D. Garcia-Sanchez, K. Y. Fong, H. Bhaskaran, S. Lamoreaux,
H. X. Tang : *Casimir force and in-situ surface potential
measurements on nanomembranes*
Phys. Rev. Lett. **109**, 027202 (2012)
 <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.109.027202>
erratum: Phys. Rev. Lett. **109**, 159902 (2012)
 <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.109.159902>
 <http://arxiv.org/abs/1207.4429>

- [29] M. Bordag, G. L. Klimchitskaya, V. M. Mostepanenko :
Comment on “Casimir Force and In Situ Surface Potential Measurements on Nanomembranes”,
Phys. Rev. Lett. **109**, 199701 (2012)
 <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.109.199701>
 <http://de.arxiv.org/abs/1208.1757>
- [30] F. London : *Zur Theorie und Systematik der Molekularkräfte*,
Z. Phys. **63**, 245 – 279 (1930)
 <http://dx.doi.org/10.1007/BF01421741>
- [31] H. B. G. Casimir, D. Polder : *The Influence of Retardation on the London-van der Waals Forces*,
Phys. Rev. **73**, 360–372 (1948)
 <https://dx.doi.org/10.1103/PhysRev.73.360>
- [32] H. B. G. Casimir : In M. Bordag (editor), *The Casimir Effect 50 Years Later: The Proceedings of the Fourth Workshop on Quantum Field Theory Under the Influence of External Conditions*, Leipzig, 1998, page 3
(World Scientific, Singapore, 1999)
- [33] E. M. Lifshitz : *The Theory of Molecular Attractive Forces between Solids*, Sov. Phys. JETP **2**, 73 – 83 (1956)
 <http://www.jetp.ac.ru/cgi-bin/e/index/e/2/1/p73?a=list>
- [34] I. E. Dzyaloshinskii, E. M. Lifshitz, L. P. Pitaevskii : *Reviews of Topical Problems: General Theory of Van Der Waals’ Forces*,
Sov. Phys. Usp. **4**, 153 – 176 (1961),
translation of Usp. Fiz. Nauk **73**, 381 (1961)
 <http://dx.doi.org/10.1070/PU1961v004n02ABEH003330>
- [35] J. Schwinger, L. L. DeRaad, K. A. Milton : *Casimir effect in dielectrics*, Ann. Phys. (N.Y.) **115**, 1 – 23 (1978)
 [https://doi.org/10.1016/0003-4916\(78\)90172-0](https://doi.org/10.1016/0003-4916(78)90172-0)

- [36] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik: *Table of Integrals, Series, and Products* (Academic Press, San Diego, Ca, USA, 1980)
 <http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/TISPISGIMR.pdf>
- [37] E. S. Sabisky, C. H. Anderson: *Verification of the Lifshitz Theory of the van der Waals Potential Using Liquid-Helium Films*, Phys. Rev. A **7**, 790–806 (1973)
- [38] R. L. Jaffe: *Casimir effect and the quantum vacuum*, Phys. Rev. D **72**, 021301, 5pp, (2005)
 <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.72.021301>
 <http://arxiv.org/abs/hep-th/0503158>
- [39] K. A. Milton, E. K. Abalo, P. Parashar, N. Pourtolami, I. Brevik, S. A. Ellingsen :
Repulsive Casimir and Casimir–Polder forces,
J. Phys. A: Math. Theor. **45**, 374006 (21pp) (2012)
 <http://iopscience.iop.org/1751-8121/45/37/374006>
- [40] S. Y. Buhmann: *Dispersion Forces I*
(Springer Verlag, Berlin, 2012)
- [41] Timothy H. Boyer: *Quantum Zero-Point Energy and Long-Range Forces*, Ann. Phys. (N.Y.) **56**, 474–503 (1970)
 [https://dx.doi.org/10.1016/0003-4916\(70\)90027-8](https://dx.doi.org/10.1016/0003-4916(70)90027-8)
- [42] G. Gründler: *The zero-point energy of elementary quantum fields*, APIN circular se86311 (2017)
 <https://astrophys-neunhof.de/mtlg/se86311.pdf>
 <https://arxiv.org/abs/1506.08647>