Gerold Gründler

Grundlagen der Relativistischen Quantenfeldtheorie

Astrophysikalisches Institut Neunhof, Nürnberg
www.astrophys-neunhof.de
Version 3.13 , 14. September 2020

Dies elektronische Buch unterliegt – genauso wie gedruckte Medien – dem Urheberrecht. Sie dürfen diesen File zum eigenen Gebrauch speichern. Sie dürfen das Buch auch zum eigenen Gebrauch drucken, der Autor empfiehlt jedoch (siehe Seite 9), dies nicht zu tun. Sie dürfen das Buch anderen Personen zugänglich machen, bitte geben Sie dazu nicht den File, sondern den Link auf die oben genannte website weiter, damit jedem Leser stets die aktuelle Version des Buches zur Verfügung steht. Es ist verboten, dieses Buch oder Teile dieses Buches zu verkaufen oder gegen Bezahlung zu verleihen, egal ob in elektronischer oder gedruckter Form. Es ist verboten, dieses Buch oder Teile dieses Buches in andere Bücher oder sonstige Veröffentlichungen zu integrieren, egal ob in elektronischer oder gedruckter Form. Es ist verboten, dieses Buch in veränderter oder gekürzter Form an andere Personen weiterzugeben oder anderen Personen zugänglich zu machen, egal ob in elektronischer oder gedruckter Form, egal ob entgeltlich oder unentgeltlich.

Inhalt

Wie liest man dies e-Buch? 9

Vorwort 11

Konventionen 14

Teil 1: Klassische Feldtheorie

1 Warum Klassische Feldtheorie? 20

2 Relativitätstheorie 22
2.1 Invariante Länge 22
2.2 Transformationen 23
2.3 Vektoren und Tensoren 25
2.4 Inertialsysteme 30

3 Lagrange- und Hamilton-Funktion 31
3.1 Klassische Punktteilchen-Mechanik 31
3.1.1 Das Hamilton'sche Prinzip 31
3.1.2 Die kanonischen Gleichungen 35
3.2 Klassische Feldtheorie 38
3.2.1 Das erweiterte Hamilton'sche Prinzip 38
3.2.2 Die kanonischen Gleichungen 42

4 Kontinuierliche Symmetrien und Erhaltungsgrößen 47
4.1 Das Noether'sche Theorem 47
4.2 Translationen 52
4.3 Rotationen 59

4.4 Globale Phasentransformationen 67
4.5 Eichtransformationen 70

5 Die Lorentzgruppe 83
5.1 Die homogene eigentliche Lorentzgruppe $\{\ell\}$ 83
5.2 Gruppen und ihre Darstellungen 84
5.3 Lie-Gruppen 89
5.3.1 Parameter-Mannigfaltigkeit 90
5.3.2 Lie-Algebra 92
5.4 Eine unendlich-dimensionale Darstellung 97
5.5 Eine vierdimensionale Darstellung 99
5.5.1 Generatoren 99
5.5.2 Lorentztransformationen 103
5.5.3 Einfache Indizes 111
5.5.4 Kommutatoren 112
5.6 Die Transformation von Vektorfeldern 115
5.7 Der Drehimpuls von Vektorfeldern 120

6 Bedeckungsgruppen 124
6.1 Die nichtrelativistische Bedeckungsgruppe $\{\overline{\mathcal{B}}\}$ 126
6.1.1 Die Gruppen $\{\overline{\ell}\}$ und $\{\overline{\mathcal{B}}\}$ 126
6.1.2 Zusammenhang der Mannigfaltigkeiten 132
6.1.3 Die Homomorphie der Gruppen 138
6.1.4 n-dimensionale Darstellungen 139
6.2 Die relativistische Bedeckungsgruppe $\{\mathcal{B}\}$ 149
6.2.1 Zweidimensionale Darstellungen von $\{\mathcal{B}\}$ 151
6.2.2 n-dimensionale Darstellungen von $\{\mathcal{B}\}$ 154
6.3 Transformation von Spinorfeldern 156
6.4 Der Drehimpuls von Spinorfeldern 158

7 Normierung, Deltafunktion, Kronecker-Symbol 161

8 Das klassische Dirac-Feld 170
8.1 Die Diracgleichung 170
8.2 Lagrangedichte 175

8.3 Lorentzinvarianz . . . 179
8.4 Wahrscheinlichkeitsdichte . . . 183
8.5 Das freie Feld . . . 186
8.6 Erhaltungsgrößen . . . 195
8.7 Die Standardform der Dirac-Matrizen . . . 200
8.8 Eine Anmerkung zum Spin des Elektrons . . . 202
8.9 Weylgleichungen . . . 204
8.10 Das freie Weyl-Feld . . . 204
8.11 Weyl-Feld: Wahrscheinlichkeitsdichte . . . 209

9 Das klassische elektromagnetische Feld 211
9.1 Lagrangedichte und Feldgleichung . . . 211
9.2 Erhaltungsgrößen . . . 212

10 Das klassische Klein-Gordon-Feld 214
10.1 Feldgleichung . . . 214
10.2 Das freie Klein-Gordon-Feld . . . 216
10.3 Lagrangedichte . . . 217
10.4 Erhaltungsgrößen . . . 219
10.5 Das reelle Klein-Gordon-Feld . . . 225

11 Diskrete Symmetrien 228
11.1 Die erweiterte Lorentzgruppe . . . 228
11.2 Diskrete Symmetrien des Dirac-Feldes . . . 229
11.2.1 Raumspiegelung . . . 231
11.2.2 Zeitumkehr . . . 232
11.2.3 Ladungskonjugation . . . 235
11.3 Diskrete Symmetrien des Weyl-Feldes . . . 237
11.4 Diskrete Symmetrien des Klein-Gordon-Feldes . . . 238

12 Inhomogene Felder 239
12.1 Die Greensfunktion des Klein-Gordon-Feldes . . . 239
12.2 Die Greensfunktion des Dirac-Feldes . . . 246
12.3 Die Greensfunktion des Eichfeldes $A(x)$ . . . 250
12.4 Dimensionen . . . 252

Teil 2: Quantisierung der Felder

13 Warum Quantenfeldtheorie? 256

14 Kanonische Quantisierung 262
14.1 Quantenmechanik . . . 262
14.1.1 Quantisierung der Punktmechanik . . . 263
14.1.2 Darstellungen der Quantenmechanik . . . 266
14.1.3 Der Zeitentwicklungsoperator . . . 269
14.1.4 Schrödinger-Bild und Heisenberg-Bild . . . 273
14.1.5 Der Harmonische Oszillator . . . 278
14.2 Quantisierung von Feldern . . . 282
14.3 Keine „zweite“ Quantisierung . . . 285

15 Das freie Klein-Gordon-Feld 287
15.1 Quantisierung . . . 287
15.2 Feldoperatoren im Heisenberg-Bild . . . 290
15.3 Erhaltungsgrößen . . . 293
15.4 Quanten des Klein-Gordon-Feldes . . . 300
15.5 Die quantisierte Greensfunktion . . . 303
15.6 Kausalität . . . 305
15.7 Das reelle Klein-Gordon-Feld . . . 308

16 Das freie Dirac-Feld 310
16.1 Quantisierung . . . 310
16.2 Erhaltungsgrößen . . . 312
16.3 Quanten des Diracfeldes . . . 317
16.4 Die quantisierte Greensfunktion . . . 321
16.5 Kausalität . . . 322

17 Das freie Eichfeld $A(x)$ 325
17.1 Kanonische Quantisierung . . . 327
17.2 Erhaltungsgrößen . . . 334
17.3 Photonen . . . 344
17.4 Kovariante Quantisierung . . . 347
17.5 Der Photonen-Propagator . . . 355

18 Pfadintegrale 359
18.1 Punktteilchen . . . 360
18.1.1 Der allgemeinste Fall . . . 362
18.1.2 Berechnung der Summen über k . . . 370
18.1.3 Ein Minimal-Modell . . . 372
18.1.4 Matrixelemente des Ortsoperators . . . 376
18.2 Das erzeugende Funktional $W[J]$ . . . 379
18.3 Klein-Gordon-Feld . . . 381

Teil 3: Wechselwirkende Quantenfelder

19 $\boldsymbol{\psi^s}$-Wechselwirkung skalarer Felder 388
19.1 Störungsrechnung . . . 389
19.2 Wick's Theorem . . . 395
19.2.1 Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren . . . 395
19.2.2 Feldoperatoren . . . 398
19.3 S-Matrix und LSZ-Formel . . . 403

20 Feynman-Graphen der ψ^s-Theorie 410
20.1 Baum-Graphen . . . 410
20.2 Die Massen virtueller Teilchen . . . 432
20.3 Graphen mit Schleifen . . . 433
20.3.1 Der Tadpole der ψ^4-Theorie . . . 435
20.3.2 Propagatorkorrektur der ψ^3-Theorie . . . 444
20.3.3 Vierpunktstreuung in 2. Ordnung . . . 452
20.3.4 Die Doppelschleife der $\boldsymbol{\psi^4}$-Theorie . . . 458

21 Physikalische Interpretation der Renormierung 463
21.1 Die Renormierungsgruppe . . . 463
21.2 Ein minimales QFT-Modell . . . 469
21.3 Die fundamentale Länge . . . 479

22 Renormierung der $\boldsymbol{\psi^s}$-Theorie 483

23 Yukawa-Wechselwirkung 491
23.1 Streuprozesse . . . 493
23.1.1 Nukleon-Nukleon-Streuung . . . 501
23.1.2 Antinukleon-Antinukleon-Streuung . . . 507
23.1.3 Nukleon-Antinukleon-Streuung . . . 509
23.1.4 Innere Fermionen-Linien . . . 513
23.1.5 Zerstrahlung in Bosonen . . . 515

24 Quantenelektrodynamik 518
24.1 Feynman-Regeln . . . 519
24.2 Wirkungsquerschnitt und Zerfallsrate . . . 526
24.3 Baumgraphen . . . 539
24.3.1 Lepton-Lepton Streuung . . . 539
24.3.2 Antilepton-Antilepton Streuung . . . 550
24.3.3 Lepton-Antilepton Streuung . . . 552
24.3.4 Kreuzende Symmetrie . . . 558
24.3.5 Photon-Elektron-Streuung . . . 560
24.3.6 Bremsstrahlung und IR-Divergenzen . . . 562
24.3.7 Die Massen virtueller Teilchen . . . 567

25 Divergenzgrad und Regularisierung 572
25.1 Der oberflächliche Divergenzgrad . . . 572
25.2 Abschneide-Regularisierung . . . 580
25.3 Pauli-Villars Regularisierung . . . 581
25.4 Dimensionale Regularisierung . . . 583

26 Renormierung der QED 592
26.1 Vakuum-Polarisation . . . 592
26.2 Selbstenergie des Fermions . . . 606
26.3 Vertexkorrektur . . . 619
26.4 Ward-Takahashi-Identität . . . 634
26.5 Fermionenschleifen . . . 638
26.6 Photon-Photon-Streuung . . . 641

Teil 4: Nichtabelsche Eichtheorien

27 Flavor-Isospin 643
27.1 Der Isospin der Nukleonen 643
27.2 Globale Phasentransformationen 645
27.3 Lokale Phasentransformationen 648

28 Quantenchromodynamik 655
28.1 Quarks und Gluonen 655
28.2 Confinement und asymptotische Freiheit 662

29 Elektroschwache Wechselwirkung 666
29.1 Die Basis der Darstellung 668
29.2 Elektroschwache Eichfelder 671
29.3 Der Higgs-Mechanismus 676
29.4 Der ES-Tensor des Higgs-Feldes 686
29.5 Die Masse der Fermionen 688

Literatur 775

Wie liest man dies e-Buch?

Dies elektronische Buch sollte aus mehreren Gründen nicht gedruckt, sondern am Bildschirm gelesen werden:

* Es werden hin und wieder verbesserte Ausgaben ins Netz gestellt, ein Papier-Ausdruck könnte deshalb bald veraltet sein.
* Das Buch enthält unzählige (das ist natürlich übertrieben, man könnte sie zählen...) Links. Per Mausklick kann man die Ziele blitzschnell anspringen und anschließend (mit dem Werkzeugbutton „vorige Ansicht“ des Readers, oder mithilfe der Alt ← Tastenkombination) genauso schnell wieder zurückspringen, statt umständlich blättern zu müssen.
* Das Buch enthält (noch) keinen Schlagwort-Index. Die Suchfunktion des Readers kann dies Manko zumindest teilweise ausgleichen.
* Zuweilen ist es nützlich, mehrere Formeln oder Abbildungen, die sich auf verschiedenen Seiten des Buches befinden, gleichzeitig zu betrachten. Während man den file problemlos in mehreren Fenstern des Readers gleichzeitig auf den Bildschirm bringen kann, wäre ein mehrfacher Ausdruck des Buches doch recht aufwändig.
* Man spart Tinte und Papier, und vermeidet eine unnötige Belastung der Umwelt.

Das Lesen eines Buches am Bildschirm ist unübersichtlich und schnell ermüdend, wenn man unstrukturiert auf den Seiten herumscrolled, bzw. wegen ungeeigneter Einstellungen des Readers herumscrollen muss. Achten Sie deshalb auf folgende Einstellungen des pdf-Readers:
Aktivieren Sie im Menü Anzeige/Seitenanzeige die Option

✓ Einzelne Seite (jedoch nicht „Einzelne Seite fortlaufend“, oder „Bildlauf aktivieren“ oder dergleichen, was *völlig ungeeignet* wäre! Es ist sehr wichtig, dass sich beim Blättern der obere oder untere Rand einer Seite am oberen oder unteren Rand des Fensters befindet, aber nicht irgendwo in der Mitte. Sonst bekommen Sie schnell tränende Augen und verlieren

die Übersicht.)

Stellen Sie den Zoomfaktor 100% ein, und ziehen Sie das Fenster des Readers so weit auf, dass eine Seite in voller Breite und in mindestens 2/3 ihrer Höhe sichtbar ist. Mit den Tasten [Bild↓] und [Bild↑] der Tastatur können Sie dann mit je 2 Klicks eine Seite vorwärts oder zurück blättern. Von jeder Seite sehen sie einmal den oberen und einmal den unteren Teil, mit etwa 1/3 Seitenhöhe Überlappung. Diese Textansicht wird Ihnen verblüffend gewohnt vorkommen, denn tatsächlich betrachten Sie unbewusst auch die Seiten eines gedruckten Buches nicht wesentlich anders.

Falls Sie über einen sehr großen Bildschirm verfügen, und ohne Scrollen eine ganze Seite (bei Zoom 100 %) in voller Höhe anzeigen können, dann können Sie wahrscheinlich auch zwei Seiten gleichzeitig anzeigen. Wählen Sie dazu im Menü Anzeige/Seitenanzeige Ihres pdf-Readers die beiden Optionen

✓ Zwei-Seiten-Ansicht (jedoch nicht „Zwei Seiten fortlaufend“ oder „Bildlauf aktivieren“ oder dergleichen, was *völlig ungeeignet* wäre!)

✓ Deckblatt bei "Zwei Seiten" einblenden

In manchen Readern sind diese Optionen als

✓ Buchansicht verwenden

oder ähnlich zusammengefasst. Wählen Sie auf keinen Fall Anzeige-Einstellungen, bei denen sie horizontal scrollen müssen, oder bei denen sich der obere oder untere Seitenrand mitten im Fenster befindet!

Vielleicht empfinden Sie den „Lesemodus“ des Readers als angenehm, in dem Ihnen ein etwas größeres Fenster dadurch zur Verfügung steht, dass die Werkzeugleiste ausgeblendet wird. Um in diesem Modus zur vorherigen Ansicht zurückzukehren, nachdem man einem Link gefolgt ist, drückt man gleichzeitig die Tasten [Alt] [←] .

Vorwort

Die Physik ist ja für Physiker viel zu schwierig!
David Hilbert

Dies Buch richtet sich an Physikstudenten am Ende ihres Masterstudiums, oder am Beginn ihres Graduiertenstudiums. Natürlich ist es auch für andere Leser mit vergleichbaren Vorkenntnissen geeignet, die eine Einführung in die Relativistische Quantenfeldtheorie suchen. Ich habe es verfasst unter dem Eindruck der ziemlich harten und oft reichlich frustrierenden Monate, in denen ich mich selbst in die Thematik einarbeitete, und dabei oft nur mit größter Mühe den Kopf über Wasser halten konnte.

Als Albert Einstein sich bei der Entwicklung der Allgemeinen Relativitätstheorie mit der damals unter Physikern noch völlig unbekannten nichteuklidischen Geometrie befassen musste, da war David Hilbert – im frühen 20. Jahrhundert Ordinarius für Mathematik an der Universität Göttingen – einer seiner wichtigsten und hilfreichsten Gesprächspartner. Es mögen diese Diskussionen mit Einstein gewesen sein, die Hilbert zum oben abgedruckten Bonmot veranlassten.

Heute hat die Allgemeine Relativitätstheorie ihren Schrecken verloren, denn dem Studenten steht ein breites Spektrum von Lehrbüchern der ART auf jedem denkbaren Niveau zwischen mathematischer Abstraktion und pädagogischer Ausführlichkeit zur Verfügung.

Auf dem Gebiet der Relativistischen Quantenfeldtheorie sieht es leider ganz anders aus. Es gibt einige elementare Darstellungen auf „Bachelor-Niveau“ (mit dieser Charakterisierung will ich wirklich niemandem auf die Füße treten), die einen Leser, der sich um ein einigermaßen solides Verständnis der wesentlichen Grundzüge und Zusammenhänge der Theorie und ihrer physikalischen Bedeutung bemüht, keinesfalls zufrieden stellen können. Als Beispiel für derartige Darstellungen kann das Buch von Harris [1]

genannt werden. Das Ziel solcher Bücher ist es offensichtlich, den Leser nicht aus der Universität zu entlassen, ohne dass er zumindest einmal einige Formeln der Quantenfeldtheorie mit ihrer ebenso eindrucksvollen wie verwirrenden Vielfalt von Indizes bestaunen durfte. Sie legen aber nicht das Fundament für das Studium der anspruchsvolleren und tiefer gehenden Literatur.

Auf der anderen Seite verfügt jede einigermaßen gut sortierte Universitätsbibliothek über mindestens acht Regalmeter von Büchern, die die unterschiedlichsten Aspekte der Theorie oft bis ins letzte Detail beleuchten. Das hat seinen Preis: Wenn ein Lehrbuch spätestens auf Seite 400 die Quantenchromodynamik abhandeln möchte, zuvor sämtliche wichtigen Verfahren der Renormierung besprochen werden sollen, die natürlich wiederum durch eine angemessene Anzahl von Beispielen der Störungsrechnung zweiter Ordnung motiviert werden müssen, dann bleibt für die Diskussion der Grundlagen der Theorie wenig Platz und Zeit.

Sucht man nach englisch- oder deutschsprachigen Lehrbüchern, welche die wesentlichen Grundzüge und physikalischen Implikationen der Relativistischen Quantenfeldtheorie gründlich und umfassend darlegen, und dabei lediglich die mathematischen Kenntnisse eines Physikstudenten voraussetzen, der mit guter Note die Masterprüfung in Theoretischer Physik an einer deutschen Universität bestehen kann, dann wird das Angebot – um es einmal diplomatisch zurückhaltend zu formulieren – ziemlich spärlich.

Auch diejenigen der physikalisch ausführlichen und guten Lehrbücher der Relativistischen Quantenfeldtheorie, die als besonders geeignet für Anfänger empfohlen werden, wie beispielsweise das ältere von Bjorken und Drell [2], oder das etwas jüngere von Peskin und Schroeder [3], stellen das Durchhaltevermögen ihrer Leser auf eine äußerst harte Probe. Denn sie setzen eine Fülle mathematischer und gruppentheoretischer Kenntnisse voraus, über die Studenten auf Masterniveau in aller Regel nicht verfügen. Scheinbar einfachere Bücher dieser Art, wie beispielsweise diejenigen von Maggiore [4] oder Mandl und Shaw [5], erweisen sich bei genauerem Studium als lediglich oberflächlicher, aber nicht einfacher (im Gegenteil!) als die zuvor genannten, denn sie handeln schwierige und schwierigste Zusammenhänge in dürren Nebensätzen ab. Eine Besonderheit bilden die Bücher von Greiner und Reinhard [6–8]. Sie führen fast alle Berechnungen in bemerkenswerter De-

tailgenauigkeit vor. Allerdings haben diese Bücher eher den Charakter von Vorlesungsskripten (als die sie auch deklariert werden). Sie eignen sich nur sehr bedingt zum Selbststudium, wenn die verbindenden Worte und Erläuterungen fehlen, die in den Vorlesungen der Autoren sicherlich mündlich erfolgen. Das Buch von Gross [9], das dem Buch das ich vermisst habe in vieler Hinsicht näher kommt als die meisten anderen, entdeckte ich leider erst als mein Buch bereits nahezu fertig war.

Dem Physiker, der sich erstmals in die Relativistische Quantenfeldtheorie einarbeiten möchte, blieb angesichts dieses Literaturangebots bisher nur der Ausweg, die benötigten Informationen und Hilfsmittel aus einer großen Anzahl physikalischer und mathematischer Bücher mühsam zusammenzusuchen. Das vorliegende Buch will die Lücke füllen, die an dieser Stelle in der Lehrbuchliteratur klafft. Es stellt sämtliche benötigten Hilfsmittel, die über das Standardwissen eines Studenten auf Master-Niveau hinausgehen, im Buch selbst bereit.

Die Quellen, die sich beim Schreiben dieses Buches als die noch relativ nützlichsten Fundgruben erwiesen, sind im Literaturverzeichnis aufgelistet [2–30].

Es ist klar, dass die ausführliche Behandlung der Grundlagen an anderer Stelle Abstriche erfordert. Anwendungen werden lediglich gestreift, und nicht-abelsche Eichtheorien nur ziemlich knapp in Teil IV behandelt. Dies Buch soll die zu Recht gelobten Standardlehrbücher der Quantenfeldtheorie nicht ersetzen, sondern es soll den Zugang zu ihnen erleichtern. Der Autor ist davon überzeugt, dass ein Student insgesamt schneller voran kommen wird, wenn er zunächst dieses Buch studiert und anschließend mit den oben genannten Büchern weiterarbeitet, als wenn er ohne diese Vorbereitung „ins kalte Wasser springt“ und versucht, sich irgendwie durchzukämpfen.

Ob das vorliegende Buch einen stimmigen, für den adressierten Leserkreis verständlichen Weg zur Relativistischen Quantenfeldtheorie eröffnet, können letztlich nur die Leser selbst entscheiden. Der Autor freut sich über Rückmeldungen, Lob, und Kritik. Und er ist dankbar für Hinweise auf Druck- und andere Fehler.

mailto: gerold.gruendler@astrophys-neunhof.de

Neunhof, im Frühjahr 2012 Gerold Gründler

Konventionen

K.1 Matrizen

Bei Matrizen M, N mit den Elementen M^j, N^{jk} usw. bezeichnen der Matrixname ohne Indizes, sowie der Matrixname mit Indizes und Klammern, dass die komplette Matrix gemeint ist:

$$M = (M^j) = \begin{pmatrix} M^1 \\ M^2 \\ M^3 \end{pmatrix} \; ; \; N = (N^{jk}) = \begin{pmatrix} N^{11} & N^{12} & N^{13} \\ N^{21} & N^{22} & N^{23} \\ N^{31} & N^{32} & N^{33} \end{pmatrix} \tag{K.1}$$

Mit dem Zeichen * für das konjugiert-komplexe und dem Zeichen $^\sim$ für Transposition ist

$$N^\dagger = N^{*\sim} = \begin{pmatrix} N^{11\,*} & N^{21\,*} & N^{31\,*} \\ N^{12\,*} & N^{22\,*} & N^{32\,*} \\ N^{13\,*} & N^{23\,*} & N^{33\,*} \end{pmatrix} \tag{K.2}$$

die zu N adjungierte Matrix.
N heißt selbstadjungiert oder hermitesch, wenn $N^\dagger = N$.
N heißt orthogonal, wenn $N^\sim = N^{-1}$.
N heißt unitär, wenn $N^\dagger = N^{-1}$.

K.2 Klammern bei Differentialoperatoren

Der Differentialoperator $\mathrm{d}_\mu = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^\mu}$ wirkt auf alle rechts von ihm stehenden Faktoren, bis er von einer schließenden Klammer) gestoppt wird, deren öffnendes Gegenstück (links von ihm steht:

$$
\begin{aligned}
(A\mathrm{d}_\mu(B+C)DE)F = &(A(\mathrm{d}_\mu B+\mathrm{d}_\mu C)DE)F \\
&+(A(B+C)(\mathrm{d}_\mu D)E)F \\
&+(A(B+C)D\mathrm{d}_\mu E)F
\end{aligned}
\tag{K.3}
$$

Wichtige Ausnahme: Ein Differentialoperator wird *nicht* von einer schließenden Klammer gestoppt, die *unmittelbar* rechts von ihm steht. Ein Beispiel ist die Euler'sche Gleichung

$$
\rho\Big(\mathrm{d}_t\boldsymbol{v}+(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v}\Big)=-\nabla P\ ,
$$

in der der Operator $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}$ auf den Vektor $\boldsymbol{v}$ wirkt.

K.3 Kronecker-Symbol

$$
\delta_{ab}\equiv\begin{cases}1 & \text{falls } a=b\\ 0 & \text{falls } a\neq b\end{cases}
\tag{K.4}
$$

Wir schreiben die Indizes beim Kronecker-Symbol *immer* tiefgestellt, unterscheiden also nicht zwischen ko- und kontravarianter Indexstellung. Wenn es sich bei den Indizes um die vier Raum-Zeit-Indizes handelt, werden anstelle des Kronecker-Symbols oft die Elemente des vierdimensionalen Einheitstensors verwendet:

$$
g^\mu{}_\nu=g_\mu{}^\nu=\begin{cases}1 & \text{falls } \mu=\nu\\ 0 & \text{falls } \mu\neq\nu\end{cases}
\tag{K.5}
$$

Beim Metrischen Tensor unterscheiden wir sorgfältig zwischen hoch- und tiefgestellten Indizes. Nur bei Diagonalstellung der Indizes ist

$$
(g^\mu{}_\nu)=(g_\mu{}^\nu)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}
\tag{K.6}
$$

der vierdimensionale Einheitstensor. Weiteres zum Metrischen Tensor in Kapitel 2.

K.4 Einstein'sche Summenkonvention

Über Raum-Zeit-Indizes und über Spinor-Indizes, die in einem Produkt mehrfach vorkommen, ist zu summieren, auch wenn das Summations-Zeichen $\sum$ nicht explizit geschrieben wird:

$$G_a F^a \equiv \sum_a G_a F^a \tag{K.7}$$

Für Spinorindizes verwenden wir meist die Buchstaben $a, b, c, \ldots$ Für Raumzeitkoordinaten verwenden wir durchwegs griechische Indizes $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ wenn über alle vier Raumzeitkoordinaten summiert werden soll, und lateinische Indizes $j, k, l, \ldots$, wenn nur über die drei Raumkoordinaten zu summieren ist:

$$A_\mu B^\mu = \sum_{\mu=0}^{3} A_\mu B^\mu = A_0 B^0 + \sum_{k=1}^{3} A_k B^k = A_0 B^0 + A_k B^k \tag{K.8}$$

Über andere Indizes als Raum-Zeit-Indizes und Spinor-Indizes wird *nicht* automatisch summiert.

K.5 Einheitsvektoren

Wir definieren vier Einheitsvektoren in Richtung der vier Koordinatenachsen der Raumzeit:

$$e^{(0)} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad e^{(1)} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad e^{(2)} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad e^{(3)} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{K.9}$$

Diese kontravarianten Einheitsvektoren erfüllen mit beliebigen kontravarianten Lorentzvektoren V die Relationen

$$e^{(\sigma)} \cdot V = e^{(\sigma)\rho} g_{\rho\tau} V^\tau = g_{\sigma\tau} V^\tau \tag{K.10a}$$

$$V^\lambda = g^\lambda{}_\tau V^\tau = g^{\lambda\sigma} g_{\sigma\tau} V^\tau = \sum_{\sigma=0}^{3} g^{\lambda\sigma} e^{(\sigma)} \cdot V \tag{K.10b}$$

$$V_\rho = g_{\rho\lambda} V^\lambda = \sum_{\sigma=0}^{3} g_{\rho\lambda} g^{\lambda\sigma} e^{(\sigma)} \cdot V = e^{(\rho)} \cdot V \tag{K.10c}$$

$$V = \sum_{\lambda=0}^{3} V^\lambda e^{(\lambda)} = \sum_{\lambda=0}^{3} \sum_{\sigma=0}^{3} g^{\lambda\sigma} (e^{(\sigma)} \cdot V) e^{(\lambda)} \tag{K.10d}$$

$$e^{(\sigma)} \cdot e^{(\tau)} = e^{(\sigma)\rho} g_{\rho\lambda} e^{(\tau)\lambda} = g_{\sigma\tau} \tag{K.10e}$$

$$\text{mit } \lambda, \rho, \sigma, \tau = 0, 1, 2, 3 \ .$$

Zuweilen werden wir die raumartigen Komponenten

$$e^{(1)} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{e}^{(1)} \end{pmatrix} \quad , \quad e^{(2)} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{e}^{(2)} \end{pmatrix} \quad , \quad e^{(3)} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{e}^{(3)} \end{pmatrix} \tag{K.11}$$

dieser Einheitsvektoren auch als Dreiervektoren benutzen. Wie üblich werden Vierervektoren mager gedruckt, Dreiervektoren aber fett:

$$\boldsymbol{e}^{(1)} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{e}^{(2)} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{e}^{(3)} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{K.12}$$

Beim Rechnen mit den Dreiervektoren verwenden wir meist (aber nicht immer) die Euklidische Metrik. Mit beliebigen Vektoren $\boldsymbol{V}$ des dreidimensionalen Raumes gelten die Relationen

$$V^j = \boldsymbol{e}^{(j)} \cdot \boldsymbol{V} \tag{K.13a}$$

$$\boldsymbol{V} = \sum_{j=1}^{3} V^j \boldsymbol{e}^{(j)} = \sum_{j=1}^{3} (\boldsymbol{e}^{(j)} \cdot \boldsymbol{V}) \boldsymbol{e}^{(j)} \tag{K.13b}$$

$$\boldsymbol{e}^{(j)} \cdot \boldsymbol{e}^{(l)} = g_j{}^l \tag{K.13c}$$

$$\text{mit } j, l = 1, 2, 3 \ .$$

Die eingeklammerten Zeichen (σ), (j) usw. bezeichnen nicht die Komponenten der Einheitsvektoren, sondern sind ihre „Namen“. Sie sind extra in Klammern gesetzt, damit deutlich erkennbar ist dass es sich nicht um Komponenten-Indizes handelt, dass also auch nicht automatisch über gleiche Namen summiert wird, wenn sie in einem Produkt zweimal vorkommen.

K.6 Partielle Ableitung

Wir verwenden die in der Physik bewährte Konvention zur Bildung der Ableitung, die von der in der mathematischen Literatur üblichen abweicht. Anders als die Konvention der Mathematiker erlaubt die Konvention der Physiker Funktionen der Art $L\big(t, q(a(t)), \dot{q}(t)\big)$, in denen Variable (in diesem Beispiel t) sowohl explizit als auch implizit (in diesem Beispiel als implizite Variable von L und q, und als explizite Variable von L und $\dot{q}$ und a) vorkommen.

Bei der totalen Ableitung (gekennzeichnet mit dem Buchstaben d) ist die Kettenregel anzuwenden. Wenn die Kettenregel *nicht* angewendet sondern nur nach der expliziten Variablen abgeleitet werden soll, wird das Zeichen ∂ verwendet:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} L(t, q(a(t)), \dot{q}(t)) = \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial a}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\mathrm{d}\dot{q}}{\mathrm{d}t} \tag{K.14}$$

$$\frac{\partial L}{\partial a} = 0 \tag{K.15}$$

Die Ableitung $\frac{\partial L}{\partial q}$ nach der expliziten Variablen wird als partielle Ableitung bezeichnet, eine irreführende (weil die Ableitung $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}q}$ genauso „partiell“ ist) aber übliche Sprechweise. Genaueres hierzu findet man in [31].

Teil 1:
Klassische Feldtheorie

1 Warum Klassische Feldtheorie?

Das Verhältnis zwischen Quantentheorie und Klassischer Physik ist ein grundsätzlich anderes als beispielsweise das Verhältnis zwischen Spezieller Relativitätstheorie und Nichtrelativistischer Theorie. Zwei Gesichtspunkte sind in diesem Zusammenhang besonders hervorzuheben:

* Die mathematische Beschreibung eines Vorgangs mithilfe der Speziellen Relativitätstheorie geht im Fall $v^2/c^2 \ll 1$ nahtlos über in die mathematische Beschreibung mithilfe der nichtrelativistischen Physik.
* Die Beschreibung des experimentellen Aufbaus, des Ablaufs des untersuchten Vorgangs, der Messgeräte, und der Messergebnisse geschieht durchgängig in einer einheitlichen Sprache. Nämlich in der Sprache und mit den Begriffen der (relativistischen oder nichtrelativistischen) Klassischen Physik.

Beides ist im Fall von Quantenphänomenen vollkommen anders. Die Quantenfeldtheorie kann nur dann als physikalische Theorie bezeichnet werden, wenn aus ihr Aussagen abgeleitet werden können, die experimentell überprüfbar sind. Eine experimentelle Überprüfung ist nur möglich, wenn Physiker in der Lage sind, sich über den Aufbau und Ablauf eines Experiments sowie die dabei verwendeten Messgeräte[1] und deren Funktionsweise zu verständigen. Das ist nach Überzeugung der Erfinder der „Kopenhagener Deutung der Quantentheorie“ nur in der Sprache der Klassischen Physik möglich. Dem wollen zwar nicht alle Physiker zustimmen, Tatsache ist aber, dass es bis heute niemandem gelungen ist, auch nur ein einziges Messergebnis in der mathematischen Sprache der Quantentheorie zu formulieren.

Quantenphänomene werden ausnahmslos in der Weise beschrieben, dass zunächst die Randbedingungen in der Sprache der Klassischen Physik fixiert

[1] Es kann sich dabei auch um ein so einfaches Messgerät wie das menschliche Auge handeln.

werden. Dann beginnt ein Geschehen, für das die mathematische Sprache der Quantentheorie angemessen ist. Damit der Vorgang zu einem Ergebnis führt, das diskutiert und mit der Vorhersage der Theorie verglichen werden kann, muss er schließlich abgeschlossen werden durch die Wechselwirkung mit Messgeräten, deren Funktionsweise und Messwerte wiederum zwingend in der Sprache der Klassischen Physik beschrieben werden müssen.

Wir können also keinesfalls auf die Klassische Physik verzichten. Die Relativistische Quantenfeldtheorie ersetzt nicht die Klassische Physik, sondern ergänzt und erweitert sie. Wir werden – entsprechend dem historischen Ablauf – , in diesem Buch die Quantenfeldtheorie in möglichst enger Analogie zur Klassischen Feldtheorie entwickeln. Es gibt auch axiomatische Begründungen der Quantenfeldtheorie, die aber nochmals abstrakter und mathematisch schwieriger als unsere Darstellung sind. Es ist es naheliegend, da die Klassische Physik ohnehin unverzichtbar ist und bleibt, bei der Begründung der Quantenfeldtheorie den leichteren Weg zu gehen und die Klassische Feldtheorie als Ausgangspunkt zu wählen.

Wir werden in diesem Teil des Buches eine Fülle von Konzepten der Klassischen Feldtheorie entwickeln, die sich auch in der Quantenfeldtheorie als nützlich erweisen. Und wir werden alle Felder, mit denen wir uns in diesem Buch befassen, zunächst als klassische Felder beschreiben und ihre Eigenschaften untersuchen, bevor wir sie dann im zweiten Teil des Buches quantisieren.

2 Relativitätstheorie

2.1 Invariante Länge

In der Allgemeinen Relativitätstheorie können alle 10 linear unabhängigen Elemente des metrischen Tensors

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{01} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{02} & g_{12} & g_{22} & g_{23} \\ g_{03} & g_{13} & g_{23} & g_{33} \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

von Null verschieden sein. Die Spezielle Relativitätstheorie betrachtet nur den Spezialfall, in dem der metrische Tensor immer und überall die einfache Form

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

hat.[1] In diesem und den nächsten Abschnitten lassen wir von Null verschiedene nicht-Diagonalelemente des metrischen Tensors zu. Erst vom Abschnitt 2.4 an schränken wir uns dann für den Rest des Buches auf den Spezialfall (2.2) ein.

Das Differential des vierdimensionalen Ortsvektors ist

[1] Tatsächlich ist die Form (2.2) nicht eindeutig festgelegt. In Literatur zur Allgemeinen Relativitätstheorie und Kosmologie findet man oft $(g_{\mu\nu}) = \text{diag.}(-1, +1, +1, +1)$. Und in *sehr* alter Literatur (vor etwa 1960) kommt sogar $(g_{\mu\nu}) = \text{diag.}(+1, +1, +1, -1)$ vor, mit der zeitartigen Komponente auf die 44-Position verschoben. In diesem Buch entscheiden wir uns für die Konvention (2.2), die in Texten zur QFT weithin üblich ist.

$$\mathrm{d}s \equiv \begin{pmatrix} c\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}x^0 \\ \mathrm{d}x^1 \\ \mathrm{d}x^2 \\ \mathrm{d}x^3 \end{pmatrix} \quad . \tag{2.3}$$

Dreh- und Angelpunkt der Relativitätstheorie ist die Aussage, dass das Quadrat dieses Differentials unabhängig vom Koordinatensystem ist:

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu \\ \text{hat in allen Bezugssystemen den gleichen Wert.} \end{array}} \tag{2.4}$$

Dies ist eine Aussage über die Geometrie der vierdimensionalen Raumzeit, die durch den Metrischen Tensor $g_{\mu\nu}$ beschrieben wird. Der Metrische Tensor ist im allgemeinen zeit- und ortsabhängig. Die Geometrie von Raum und Zeit ist in jedem Bezugssystem gerade so deformiert, dass für $\mathrm{d}s^2$ in allen Bezugssystemen der gleiche Wert gemessen wird. Da die Differentiale $\mathrm{d}x^\mu$ und $\mathrm{d}x^\nu$ kommutieren, ist der Metrische Tensor symmetrisch:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\nu \mathrm{d}x^\mu = g_{\nu\mu}\mathrm{d}x^\nu \mathrm{d}x^\mu \\ \Longrightarrow \quad g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} \end{aligned} \tag{2.5}$$

Von den 16 Komponenten des Metrischen Tensors sind also nur 10 unabhängig.

2.2 Transformationen

Die Transformation Λ transformiert das Differential $\mathrm{d}s$ aus einem Bezugssystem in ein anderes, das wir mit einem Strich$'$ kennzeichnen. Das transformierte Differential ist

$$\mathrm{d}s' = \Lambda \mathrm{d}s \quad . \tag{2.6}$$

Wir schreiben die Transformation Λ als (4×4) - Matrix mit links stehendem Zeilenindex und rechts stehendem Spaltenindex. Der Spaltenvektor $\mathrm{d}s$ wird mit Λ multipliziert, das Ergebnis ist der Spaltenvektor $\mathrm{d}s'$. Für die Komponenten gilt

$$\mathrm{d}x'^{\nu} = \Lambda^{\nu}{}_{\mu}\mathrm{d}x^{\mu} \quad \Longrightarrow \quad \Lambda^{\nu}{}_{\mu} = \frac{\mathrm{d}x'^{\nu}}{\mathrm{d}x^{\mu}} \quad . \tag{2.7}$$

Die Hoch- und Tiefstellung der Indizes werden wir gleich erläutern. Im allgemeinen ist Λ zeit- und ortsabhängig, die Transformation ist also nichtlinear.

Die Rücktransformation des Differentials $\mathrm{d}s'$ vom gestrichenen ins ungestrichene Bezugssystem erfolgt durch Anwendung von Λ^{-1}, der inversen Matrix von Λ. Denn die Hintereinanderschaltung von Hin- und Rücktransformation muss natürlich die identische Transformation, also die Einheitsmatrix $\mathbb{1}$ ergeben:

$$\mathrm{d}s = \Lambda^{-1}\mathrm{d}s' \overset{(2.6)}{=} \underbrace{\Lambda^{-1}\Lambda}_{=\mathbb{1}}\mathrm{d}s \tag{2.8}$$

Die einzelnen Komponenten sind

$$\mathrm{d}x^{\mu} = \Lambda^{-1\,\mu}{}_{\nu}\mathrm{d}x'^{\nu} \quad \Longrightarrow \quad \Lambda^{-1\,\mu}{}_{\nu} = \frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}x'^{\nu}} \quad . \tag{2.9}$$

Als nächstes wollen wir die Transformation des Differentialoperators d_{μ} finden. Dazu wenden wir die Kettenregel an:

$$\mathrm{d}'_{\nu} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x'^{\nu}} = \frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}x'^{\nu}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^{\mu}} \overset{(2.9)}{=} \Lambda^{-1\,\mu}{}_{\nu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^{\mu}} = \Lambda^{-1\,\mu}{}_{\nu}\mathrm{d}_{\mu} \tag{2.10}$$

Wenn man diese Gleichung als Matrixgleichung schreiben will, dann muss man offenbar (d'_{ν}) und (d_{μ}) als Zeilenvektoren betrachten, weil über den Zeilenindex von $(\Lambda^{-1\,\mu}{}_{\nu})$ summiert wird. Die Matrixgleichung ist also:

$$\mathrm{d}' = \mathrm{d}\Lambda^{-1} \tag{2.11}$$

Die Rücktransformation ist

$$\mathrm{d}_{\mu} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^{\mu}} = \frac{\mathrm{d}x'^{\nu}}{\mathrm{d}x^{\mu}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x'^{\nu}} \overset{(2.7)}{=} \Lambda^{\nu}{}_{\mu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x'^{\nu}} = \Lambda^{\nu}{}_{\mu}\mathrm{d}'_{\nu} \tag{2.12}$$

mit der Matrixgleichung

$$\mathrm{d} = \mathrm{d}'\Lambda \quad . \tag{2.13}$$

Zusammenfassung:

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} \overset{(2.7)}{=} \frac{\mathrm{d}x'^{\mu}}{\mathrm{d}x^{\nu}} \overset{(2.12)}{=} \frac{\mathrm{d}_{\nu}}{\mathrm{d}'_{\mu}} \tag{2.14a}$$

$$\Lambda^{-1\,\mu}{}_{\nu} \overset{(2.9)}{=} \frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}x'^{\nu}} \overset{(2.10)}{=} \frac{\mathrm{d}'_{\nu}}{\mathrm{d}_{\mu}} \tag{2.14b}$$

2.3 Vektoren und Tensoren

Wir haben die Indizes beim Differential $\mathrm{d}x^{\nu}$ hochgestellt, beim Differentialoperator d_{ν} tiefgestellt geschrieben. Daraus machen wir eine allgemeine Regel:

Wenn eine vierkomponentige Größe A durch die gleiche Transformationsmatrix wie der Differentialoperator von einem Bezugssystem in ein anderes transformiert wird, dann ist sie ein *kovarianter Vektor*, und wird mit tiefgestelltem Index $A = (A_{\nu})$ geschrieben:

$$\boxed{\mathrm{d}'_{\nu} = \Lambda^{-1\mu}{}_{\nu}\,\mathrm{d}_{\mu}} \qquad \boxed{\mathrm{d}_{\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\mathrm{d}'_{\mu}} \tag{2.15a}$$

$$A'_{\nu} = \Lambda^{-1\mu}{}_{\nu}\,A_{\mu} \qquad A_{\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}A'_{\mu} \tag{2.15b}$$

Wenn eine vierkomponentige Größe B durch die gleiche Transformationsmatrix wie das Differential des vierdimensionalen Ortsvektors von einem Bezugssystem in ein anderes transformiert wird, dann ist sie ein *kontravarianter Vektor*, und wird mit hochgestelltem Index $B = (B^{\nu})$ geschrieben:

$$\boxed{\mathrm{d}x'^{\nu} = \Lambda^{\nu}{}_{\mu}\mathrm{d}x^{\mu}} \qquad \boxed{\mathrm{d}x^{\nu} = \Lambda^{-1\,\nu}{}_{\mu}\mathrm{d}x'^{\mu}} \tag{2.16a}$$

$$B'^{\nu} = \Lambda^{\nu}{}_{\mu}B^{\mu} \qquad B^{\nu} = \Lambda^{-1\,\nu}{}_{\mu}B'^{\mu} \tag{2.16b}$$

Als *Tensor n-ter Stufe* bezeichnet man eine n-fach indizierte Größe (beispielsweise ist der Tensor $(D_{\kappa}{}^{\mu}{}_{\nu})$ 3-fach indiziert), die komponentenweise wie ein Vektor transformiert wird:

$$D'_{\kappa}{}^{\mu}{}_{\nu} = \Lambda^{-1\rho}{}_{\kappa}\Lambda^{\mu}{}_{\sigma}\Lambda^{-1\tau}{}_{\nu}D_{\rho}{}^{\sigma}{}_{\tau} \tag{2.17}$$

Ein n-fach indizierter Tensor hat also 4^n Komponenten. Vektoren sind Tensoren erster Stufe. Tensoren nullter Stufe werden als *Skalare* bezeichnet. Durch *Kontraktion* wird aus einem Tensor n-ter Stufe ein Tensor $(n-2)$-ter Stufe:

$$\begin{aligned} F_{\sigma\rho}{}^{\sigma}{}_{\tau} &= F_{0\rho}{}^{0}{}_{\tau} + F_{1\rho}{}^{1}{}_{\tau} + F_{2\rho}{}^{2}{}_{\tau} + F_{3\rho}{}^{3}{}_{\tau} = F_{\rho\tau} \\ E_{\nu}{}^{\nu} &= E_0{}^0 + E_1{}^1 + E_2{}^2 + E_3{}^3 = E \\ C_{\nu}{}^{\nu} \equiv A_\nu B^\nu &= A_0B^0 + A_1B^1 + A_2B^2 + A_3B^3 = AB = C \end{aligned} \tag{2.18}$$

Man beachte, dass nicht jeder Tensor $(n+m)$-ter Stufe in das direkte Produkt eines Tensors n-ter Stufe und eines Tensors m-ter Stufe zerlegt werden kann. Im Beispiel (2.18) hat der Tensor $(E_\sigma{}^\tau)$ 16 linear unabhängige Komponenten, der Tensor $(C_\sigma{}^\tau) = (A_\sigma B^\tau)$ aber nur 8 .

Jedes Produkt eines kovarianten Vektors und eines kontravarianten Vektors ist ein Skalar, der bei einer Transformation der Raum-Zeit-Koordinaten invariant ist:

$$A'_\nu B'^\nu = \underbrace{\Lambda^{-1\mu}{}_{\nu}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}}_{\delta_{\mu\sigma}} A_\mu B^\sigma = A_\mu B^\mu \tag{2.19}$$

Als nächstes untersuchen wir, wie das Produkt des Metrischen Tensors $(g_{\mu\nu})$ und eines kontravarianten Vektors (B^ν) transformiert wird. Seine Komponenten

$$g'_{\mu\nu}B'^\nu = \Lambda^{-1\sigma}{}_{\mu}\underbrace{\Lambda^{-1\tau}{}_{\nu}\Lambda^{\nu}{}_{\rho}}_{\delta_{\tau\rho}} g_{\sigma\tau}B^\rho = \Lambda^{-1\sigma}{}_{\mu}g_{\sigma\tau}B^\tau \tag{2.20}$$

werden wie die Komponenten eines kovarianten Vektors transformiert. Wir definieren für die Komponenten dieses kovarianten Vektors die abkürzende Schreibweise

$$B_\sigma \equiv g_{\sigma\tau}B^\tau \quad . \tag{2.21}$$

Laut (2.5) ist der metrische Tensor symmetrisch. Deshalb gilt auch

$$g_{\tau\sigma}B^{\tau} = g_{\sigma\tau}B^{\tau} \overset{(2.21)}{=} B_{\sigma} \quad . \tag{2.22}$$

Die Definition (2.21) lässt sich auch in umgekehrter Richtung lesen: Wann immer ein kovarianter Vektor (A_μ) mit tiefgestelltem Index auftaucht, definieren wir durch

$$g_{\mu\nu}A^{\nu} \equiv A_{\mu} \tag{2.23}$$

implizit sein kontravariantes Gegenstück (A^ν). Diese Definition wird auf Tensoren beliebiger Ordnung übertragen:

$$D_{\kappa\mu\nu} = g_{\kappa\rho}D^{\rho}{}_{\mu\nu} = g_{\kappa\rho}g_{\nu\tau}D^{\rho}{}_{\mu}{}^{\tau} = g_{\kappa\rho}g_{\mu\sigma}g_{\nu\tau}D^{\rho\sigma\tau} \tag{2.24}$$

Sie gilt auch für den Metrischen Tensor:

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\sigma}g^{\sigma}{}_{\nu} = \tag{2.25a}$$

$$= g_{\nu\sigma}g_{\mu}{}^{\sigma} \overset{(2.5)}{=} g_{\sigma\nu}g_{\mu}{}^{\sigma} = \tag{2.25b}$$

$$= g_{\mu\sigma}g_{\nu\tau}g^{\sigma\tau} \overset{(2.5)}{=} g_{\mu\sigma}g_{\nu\tau}g^{\tau\sigma} \tag{2.25c}$$

Daraus folgen die Relationen

$$g^{\sigma}{}_{\nu} \overset{(2.25a)}{=} \delta_{\sigma\nu} \quad , \quad g_{\mu}{}^{\sigma} \overset{(2.25b)}{=} \delta_{\mu\sigma} \quad , \quad g_{\nu\tau}g^{\tau\sigma} \overset{(2.25c)}{=} \delta_{\nu\sigma} \quad . \tag{2.26}$$

Also gilt für den Metrischen Tensor

$$(g^{\nu}{}_{\sigma}) = (g_{\nu}{}^{\sigma}) = (g_{\nu\tau}g^{\tau\sigma}) = \mathbb{1} \quad \text{und} \quad (g^{\nu\sigma}) = (g_{\nu\sigma})^{-1} \quad . \tag{2.27}$$

Es ist bemerkenswert, dass dieser Zusammenhang bei beliebig gekrümmter Raum-Zeit gilt. *Nur* im Grenzfall der Metrik (2.2) von Inertialsystemen gilt zusätzlich die Relation $(g^{\nu\sigma}) = (g_{\nu\sigma})^{-1} = (g_{\nu\sigma})$.

Durch Multiplikation mit $g_{\mu\nu}$ werden oben stehende Indizes von Vektoren und Tensoren „nach unten gezogen“, durch Multiplikation mit $g^{\mu\nu}$ werden unten stehende Indizes von Vektoren und Tensoren „nach oben gezogen“:

$$g_{\nu\tau}A^{\tau} \overset{(2.23)}{=} A_{\nu} \overset{(2.26)}{=} \underbrace{g_{\nu\tau}g^{\tau\sigma}}_{\delta_{\nu\sigma}} A_{\sigma} \quad \Longrightarrow \quad g^{\tau\sigma}A_{\sigma} = A^{\tau} \tag{2.28}$$

Anders als mathematisch orientierte Autoren definieren wir das

$$\text{Kronecker-Symbol:} \quad \delta_{fg} \equiv \begin{cases} 1 \text{ falls } f = g \\ 0 \text{ falls } f \neq g \end{cases} \tag{2.29}$$

nicht als Tensor, sondern setzen seine Indizes *immer* nach unten, auch dann wenn es sich um das Kronecker-Symbol zweier Raum-Zeit-Indizes $\delta_{\mu\nu} = g_{\mu}{}^{\nu}$ handelt. Denn um das Kronecker-Symbol δ_{kf} mit anderen als Raum-Zeit-Indizes als Tensor zu behandeln, müssten wir neben dem 4-komponentigen Lorentzraum weitere n-komponentige Tensorräume (wobei n endlich oder abzählbar unendlich sein kann) einführen, in denen dann ein Kronecker-Tensor $\delta_{f}{}^{g}$ als zweifach indizierter Tensor zu definieren wäre. Wir wollen uns in diesem Buch aber mit keinen anderen Tensoren als den Tensoren der 4-dimensionalen Raum-Zeit befassen. Um konsistent zu bleiben, betrachten wir $g_{\mu}{}^{\nu}$ als Komponente eines Tensors (den man als Kronecker-Tensor des Zeit-Orts-Raums bezeichnen kann), $\delta_{\mu\nu}$ jedoch auch dann nicht, wenn μ und ν Raum-Zeit-Indizes sind.

Durch Multiplikation mit dem Metrischen Tensor zieht man Indizes nach oben oder unten, d.h. man wandelt ko- in kontravariante oder kontravariante in kovariante Tensorkomponenten um. Die Transformationen $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ sind keine Tensoren, sie werden nicht wie das direkte Produkt ko- oder kontravarianter Vektoren transformiert. Sie werden *überhaupt nicht* transformiert, sondern sie transformieren Vektoren und Tensoren aus einem in ein anderes Bezugssystem. Von ko- oder kontravarianter Stellung der Indizes kann also bei Transformationen keine Rede sein. Dennoch legt die Relation

$$\begin{aligned} g'^{\mu\sigma}x'_{\sigma} &\overset{(2.28)}{=} x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu} \overset{(2.28)}{=} \Lambda^{\mu}{}_{\nu}g^{\nu\tau}x_{\tau} \\ g'_{\rho\mu}g'^{\mu\sigma}x'_{\sigma} &\overset{(2.26)}{=} x'_{\rho} = g'_{\rho\mu}\Lambda^{\mu}{}_{\nu}g^{\nu\tau}x_{\tau} \overset{(2.15)}{=} \Lambda^{-1\,\tau}{}_{\rho}x_{\tau} \end{aligned} \tag{2.30}$$

die folgenden Definitionen nahe:

$$\Lambda_{\mu\nu} \equiv g'_{\mu\sigma}\Lambda^{\sigma}{}_{\nu} \tag{2.31a}$$
$$\Lambda^{\mu\nu} \equiv \Lambda^{\mu}{}_{\tau}g^{\tau\nu} \tag{2.31b}$$
$$\Lambda_{\mu}{}^{\nu} \equiv g'_{\mu\sigma}\Lambda^{\sigma}{}_{\tau}g^{\tau\nu} \overset{(2.30)}{=} \Lambda^{-1}{}^{\nu}{}_{\mu} \tag{2.31c}$$

Wenn Λ als Transformation aus dem ungestrichenen ins gestrichene Koordinatensystem definiert ist, dann ist der Zeilenindex von Λ mit g' zu ziehen, der Spaltenindex aber mit dem ungestrichenen g. Das macht die Anwendung dieser Definitionen kompliziert und fehlerträchtig. Im Fall $g' = g$, also insbesondere bei der Transformation zwischen Inertialsystemen (siehe folgender Abschnitt), entfällt diese Komplikation. Deshalb wird (2.31) bei Transformation zwischen Inertialsystemen häufig verwendet.

Oben haben wir festgestellt dass Skalare (d.h. Größen, die keine unkontrahierten Raum-Zeit-Indizes haben) bei beliebigen Transformationen des Koordinatensystems invariant sind. Es gibt aber auch zwei Tensoren (die also keine Skalare sind), die unter Koordinatentransformationen invariant sind:

Die Invarianz des Einheitstensor $\mathbb{1} = (g_{\alpha}{}^{\beta})$ kann leicht überprüft werden:

$$g'_{\alpha}{}^{\beta} = \Lambda^{-1}{}^{\sigma}{}_{\alpha}\Lambda^{\beta}{}_{\tau}g_{\sigma}{}^{\tau} = \Lambda^{\beta}{}_{\tau}\Lambda^{-1}{}^{\tau}{}_{\alpha} = g_{\alpha}{}^{\beta} \tag{2.32a}$$

Während der Einheitstensor invariant ist unter *sämtlichen* in der ART zulässigen Koordinatentransformationen, ist der Tensor

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.32b}$$

nur unter *globalen* Transformationen der Koordinaten der Raumzeit invariant, d.h. unter Transformationen, deren Elemente nicht an verschiedenen Punkten der Raumzeit unterschiedlich definiert sind, sondern global überall gleich. Diese globalen Transformationen werden als Lorentz-Transformationen bezeichnet. Wir werden die Lorentztransformationen in Abschnitt 5.5.2 explizit herleiten, und ihre Eigenschaften ausführlich diskutieren.

2.4 Inertialsysteme

Ein Bezugssystem ist per Definition ein Inertialsystem, wenn auf einen schweren Körper, der in diesem Bezugssystem ruht oder sich gleichförmig gradlinig bewegt, keine Trägheitskraft wirkt. Das ist genau dann der Fall, wenn der Metrische Tensor die einfache Form $(g_{\mu\nu}) = (2.32b)$ hat. Offensichtlich ist diese Matrix mit ihrer inversen – und deshalb auch mit $(g^{\mu\nu})$ – identisch:

$$(g_{\mu\nu}) = (g_{\mu\nu})^{-1} \overset{(2.27)}{=} (g^{\mu\nu}) \tag{2.33}$$

Die ART betrachtet auch die Schwerkraft als Trägheitskraft. In Inertialsystemen darf also keine Gravitation wirken. Sie sind deshalb in frei fallenden Laboren fixiert. Da in einem frei fallenden Labor hinreichender Größe Gezeitenkräfte auftreten (um die Schwerkraft genau zu kompensieren, müsste der tiefere, voraus fallende Teil des Labors schneller fallen als der höhere, hinterher fallende Teil des Labors), haben die Inertialsysteme der ART nur endliche Größe, streng genommen müssen sie sogar infinitesimal klein sein.

Die Spezielle Relativitätstheorie betrachtet dagegen die Schwerkraft nicht als Trägheitskraft. Bei der Messung des Metrischen Feldes g werden deshalb Beschleunigungen, die nach der Newton'schen Gravitationstheorie als anziehende Wirkung schwerer Körper erklärt werden können, abgezogen. Das hat zur Folge, dass erstens alle Inertialsysteme der SRT unendlich ausgedehnt sind, und dass sich zweitens sämtliche Inertialsysteme der SRT relativ zueinander mit gradlinig-gleichmäßiger Geschwindigkeit bewegen.

Wir werden in diesem Buch ausschließlich Bezugssysteme verwenden, die relativ zueinander gradlinig-gleichförmig bewegt sind, und in denen Abweichungen des Metrischen Tensors von (2.32b) unmessbar klein sind. Und wir werden als Transformationen Λ der Koordinaten der vierdimensionalen Raumzeit nur die Lorentztransformationen verwenden, die global definiert, also von Zeit und Ort unabhängig sind. Unter dieser Voraussetzung ist

$$x'^{\nu} = \Lambda^{\nu}{}_{\mu} x^{\mu} \tag{2.34}$$

eine lineare Gleichung, weil Λ nicht von x abhängt.

3 Lagrange- und Hamilton-Funktion

3.1 Klassische Punktteilchen-Mechanik

3.1.1 Das Hamilton'sche Prinzip

Der mechanische Zustand eines Systems von n Massepunkten kann für beliebige Zeiten der Zukunft und der Vergangenheit eindeutig berechnet werden, wenn man seine verallgemeinerten Koordinaten $q_1, q_2, \ldots, q_n$ und deren Zeitableitungen, die verallgemeinerten Geschwindigkeiten $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$, zu einem Zeitpunkt t kennt. Um die Berechnung tatsächlich durchführen zu können, benötigt man die Bewegungsgleichung des Systems. Man findet sie mithilfe einer Lagrangefunktion, und eines von Hamilton entdeckten Extremalprinzips.

Die Lagrangefunktion ist eine Funktion der verallgemeinerten Koordinaten und der verallgemeinerten Geschwindigkeiten des Systems, sowie der Zeit:

$$\text{Lagrangefunktion:} \quad L(q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n, t) \tag{3.1}$$

Oft werden wir zur Abkürzung die Schreibweise $L(q, \dot{q}, t)$ verwenden.

Das System hat zur Zeit t_1 die Koordinaten $q(t_1)$ und die Geschwindigkeiten $\dot{q}(t_1)$, zur Zeit t_2 die Koordinaten $q(t_2)$ und die Geschwindigkeiten $\dot{q}(t_2)$. Im Zeitraum zwischen t_1 und t_2 entwickeln sich $q(t)$ und $\dot{q}(t)$ erfahrungsgemäss so, dass das Integral

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, L(q, \dot{q}, t) \tag{3.2}$$

einen Extremwert annimmt. Dies ist das erwähnte Extremalprinzip von Hamilton. S wird die Wirkung des Systems genannt. Nehmen wir an, wir hätten die Koordinaten $q(t)$ und damit auch die Geschwindigkeiten

$\dot{q}(t)$ gefunden, bei denen die Wirkung einen Extremwert annimmt. Dann werden kleine Änderungen $\delta q(t)$ von $q(t)$ und demzufolge kleine Änderungen $\delta\dot{q}(t)$ von $\dot{q}(t)$ in linearer Näherung S nicht ändern. Wir variieren also $q(t)$ im Bereich zwischen den Zeitpunkten t_1 und t_2, jedoch nicht an diesen Randpunkten selbst, und verlangen dass

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q} \right) = 0 \tag{3.3}$$

ist. Mithilfe der Identität

$$\delta\dot{q} = \lim_{t'\to t} \delta\left(\frac{q(t') - q(t)}{t' - t}\right) = \lim_{t'\to t}\left(\frac{\delta q(t') - \delta q(t)}{t' - t}\right) = \frac{\mathrm{d}(\delta q)}{\mathrm{d}t} \tag{3.4}$$

können wir den zweiten Summanden umformen:

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q} &= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q \right] \\ &= \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\,\delta q\right|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q \end{aligned} \tag{3.5}$$

Wegen $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ ist nur der letzte Summand von Null verschieden, und wir finden die Extremalbedingung

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)\delta q = 0\ . \tag{3.6}$$

Für beliebige δq kann diese Bedingung nur erfüllt werden, wenn der Ausdruck in der Klammer gleich Null ist. Daraus folgt die Bewegungsgleichung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \tag{3.7}$$

Bei einem System mit n Koordinaten q_j müssen diese unabhängig voneinander

ander variiert werden, woraus sich die n Gleichungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad , \quad j = 1 \ldots n \tag{3.8}$$

ergeben.

Die Bewegungsgleichung folgt eindeutig aus der Lagrangefunktion, aber nicht umkehrbar eindeutig. Unterschiedliche Lagrangefunktionen können zur gleichen Bewegungsgleichung führen. Ein wichtiges Beispiel sind zwei Lagrangefunktionen L und L', die sich nur durch die totale Ableitung einer beliebigen Funktion $G(q, \dot{q}, t)$ nach der Zeit unterscheiden:

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} G(q, \dot{q}, t) \tag{3.9}$$

Nach dem Hamilton'schen Prinzip ist

$$\begin{aligned} \delta S' &= \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \, \left(L(q,\, \dot{q},\, t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} G(q, \dot{q}, t) \right) = \\ &= \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \, L(q,\, \dot{q},\, t) + \underbrace{\delta \left(G(q, \dot{q}, t) \Big|_{t_1}^{t_2} \right)}_{=0} = \delta S = 0 \; . \end{aligned} \tag{3.10}$$

Der zusätzliche Term $G(q, \dot{q}, t)$ trägt nichts zur Variation $\delta S'$ bei, weil q und $\dot{q}$ ja nur im Inneren des Integrationsintervalls variiert werden, aber nicht an seinem Rand. Deshalb führt die Bedingung $\delta S' = 0$ auf die gleiche Bewegungsgleichung wie die Bedingung $\delta S = 0$.

Die Lagrangefunktion eines klassischen Systems von Massepunkten ist in der Regel gleich der Differenz der kinetischen Energie T der Massenpunkte, und ihrer Potentiellen Energie U:

$$L = T - U = \sum_{j=1}^{n} T_j - U(q_1, \ldots, q_n)$$
$$= \sum_{j,k=1}^{n} \frac{1}{2}\, a_{jk}(q_1, \ldots, q_n)\dot{q}_j\dot{q}_k - U(q_1, \ldots, q_n)\ , \tag{3.11}$$

wobei die Koeffizienten a_{jk} Funktionen der verallgemeinerten Koordinaten $q \equiv (q_1, \ldots, q_n)$ sind. Falls kartesische Koordinaten $x \equiv (x_1, \ldots, x_n)$ verwendet werden ist die Koeffizientenmatrix diagonal. Dann ist

$$a_{jk} = m_j \delta_{jk} \tag{3.12}$$

die Masse des j-ten Massepunktes. Die Bewegungsgleichung dieses Massepunktes

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} - \frac{\partial L}{\partial x_j} = 0 \tag{3.13}$$

wird in kartesischen Koordinaten zu

$$m_j \ddot{x}_j = -\frac{\partial U}{\partial x_j}\ . \tag{3.14}$$

Historisch gesehen sind die Bewegungsgleichungen der Massenpunkte schon länger bekannt, als die Lagrangefunktion, aus der wir sie hier abgeleitet haben. Und auch die meisten der Feldgleichungen, die wir in diesem Buch kennenlernen werden, wurden unmittelbar gefunden, nicht aus einer Lagrangedichte – dem feldtheoretische Gegenstück zu der Lagrangefunktion der Punktmechanik – abgeleitet. Erst als die Feldgleichungen bekannt waren, wurden nachträglich Lagrangedichten konstruiert, aus denen sie sich mithilfe des Hamilton'schen Prinzips ergeben. Die Beschäftigung mit Lagrangedichten könnte deshalb als überflüssiger Umweg erscheinen.

Das ist aber keineswegs der Fall. Denn die Feldgleichungen „erben" die Symmetrieeigenschaften der Lagrangedichten, aus denen sie abgeleitet werden. Wir werden sehen, dass die Symmetrien in der Regel viel einfacher anhand der Lagrangedichten als anhand der Feldgleichungen selbst untersucht werden können. Der kleine Umweg über die Lagrangedichten macht

sich deshalb schnell bezahlt.

3.1.2 Die kanonischen Gleichungen

Die Bewegungsgleichungen, die man mithilfe des Hamilton'schen Prinzips aus der Lagrangefunktion gewinnt, sind Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Alternativ und gleichwertig können stattdessen zwei Differentialgleichungen erster Ordnung angegeben werden. Dazu betrachtet man das totale Differential

$$\mathrm{d}L = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_j}\mathrm{d}q_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\mathrm{d}\dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t \quad . \tag{3.15}$$

Mit der Definition der kanonisch konjugierten Impulse

$$p_j \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \tag{3.16}$$

und der Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \dot{p}_j \tag{3.17}$$

wird das totale Differential von L

$$\begin{aligned} \mathrm{d}L &= \sum_{j=1}^{n} \dot{p}_j \mathrm{d}q_j + \sum_{j=1}^{n} p_j \mathrm{d}\dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t \\ &= \sum_{j=1}^{n} \dot{p}_j \mathrm{d}q_j + \mathrm{d}\left(\sum_{j=1}^{n} p_j \dot{q}_j\right) - \sum_{j=1}^{n} (\mathrm{d}p_j)\dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t \quad . \end{aligned} \tag{3.18}$$

Wir stellen die Summanden um

$$\underbrace{\mathrm{d}\left(\sum_{j=1}^{n} p_j \dot{q}_j - L\right)}_{\equiv \mathrm{d}H} = -\sum_{j=1}^{n} \dot{p}_j \mathrm{d}q_j + \sum_{j=1}^{n} (\mathrm{d}p_j)\dot{q}_j - \frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t \quad , \tag{3.19}$$

und definieren die Hamiltonfunktion

$$H \equiv \sum_{j=1}^{n} p_j \dot{q}_j - L \tag{3.20}$$

mit dem totalen Differential

$$\mathrm{d}H(q,p,t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_j}\mathrm{d}q_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_j}\mathrm{d}p_j + \frac{\partial H}{\partial t}\mathrm{d}t \quad . \tag{3.21}$$

Aus dem Vergleich von (3.19) und (3.21) ergeben sich die beiden kanonischen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot{q}_j \qquad , \qquad \frac{\partial H}{\partial q_j} = -\dot{p}_j \ . \tag{3.22}$$

Sie werden oft auch als Hamilton-Gleichungen bezeichnet. Zusammengenommen sind sie gleichwertig zur Lagrangegleichung (3.8). Formal folgt aus dem Vergleich von (3.19) und (3.21) eine dritte Gleichung

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \ ,$$

die aber keine nützlichen Informationen zu den Bewegungsgleichungen hinzufügt.

Wir teilen (3.19) durch $\mathrm{d}t$, um die Zeitabhängigkeit der Hamiltonfunktion zu untersuchen:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_j}\dot{q}_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_j}\dot{p}_j + \frac{\partial H}{\partial t} = \\ &= -\sum_{j=1}^{n} \dot{p}_j \dot{q}_j + \sum_{j=1}^{n} \dot{q}_j \dot{p}_j + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} \end{aligned} \tag{3.23}$$

Falls L, und demzufolge H, nicht explizit von der Zeit abhängt, ändert sich das untersuchte physikalische System nicht, wenn es in der Zeit verschoben wird, d. h. $\mathrm{d}H/\mathrm{d}t$ ist Null. Die zeitliche Translation wird dann als Symmetrie

des Systems bezeichnet. In Abschnitt 4.1 werden wir feststellen, dass jede kontinuierliche Symmetrie eines physikalischen Systems (in diesem Fall die Invarianz unter einer zeitlichen Translation) mit einem Erhaltungssatz korreliert. Die Größe, die aufgrund zeitlicher Translationsinvarianz eines Systems erhalten ist, bezeichnen wir *per Definition* als Energie. Die Hamiltonfunktion H stellt also die Energie des Systems dar.

In kartesischen Koordinaten wird die Lagrangefunktion $L = (3.11)$ zu

$$L = T - U = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} m_j \dot{x}_j^2 - U(x_1, \ldots, x_n) \ . \tag{3.24}$$

Der kanonisch konjugierte Impuls des Teilchens j wird in kartesischen Koordinaten zu

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = m_j \dot{x}_j \ , \tag{3.25}$$

und die Hamiltonfunktion wird zu

$$\begin{aligned} H &= \sum_{j=1}^{n} p_j \dot{x}_j - L \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} m_j \dot{x}_j^2 + U = T + U \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2m_j} p_j^2 + U(x_1, \ldots, x_n) \ . \end{aligned} \tag{3.26}$$

Daraus folgen die kanonischen Gleichungen in kartesischen Koordinaten:

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} = \frac{1}{m_j} p_j = \dot{x}_j \quad \Longrightarrow \quad p_j = m_j \dot{x}_j \tag{3.27a}$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_j} = \frac{\partial U}{\partial x_j} = -\dot{p}_j \quad \Longrightarrow \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial U}{\partial x_j} \tag{3.27b}$$

Zusammen sind sie gleichwertig zur Bewegungsgleichung (3.14).

3.2 Klassische Feldtheorie

3.2.1 Das erweiterte Hamilton'sche Prinzip

Das Wirkungsintegral der klassischen Punktmechanik

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, L(q,\, \dot{q},\, t) \tag{3.28}$$

enthält (neben der Zeit t) die verallgemeinerten Koordinaten q und verallgemeinerten Geschwindigkeiten $\dot{q}$ diskreter Massepunkte. Um das Hamilton'sche Prinzip für die Feldtheorie nutzbar zu machen, sind einige Modifikationen erforderlich: In der Feldtheorie haben wir es mit Feldamplituden ϕ zu tun, die für ein Kontinuum von Zeit und Raum definiert sind:

$$\phi(ct, x, y, z) \equiv \phi(x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv \phi(x^0, \boldsymbol{x}) \equiv \phi(x) \tag{3.29}$$

Wir konstruieren eine Lagrangedichte $\mathcal{L}$, die eine Funktion der Feldamplitude $\phi(x)$, der Ableitungen der Feldamplitude nach allen Raumzeitkoordinaten, sowie der Raumzeitkoordinaten x ist:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\equiv \mathcal{L}\left(\phi(x), \frac{\mathrm{d}\phi(x)}{\mathrm{d}x^0}, \frac{\mathrm{d}\phi(x)}{\mathrm{d}x^1}, \frac{\mathrm{d}\phi(x)}{\mathrm{d}x^2}, \frac{\mathrm{d}\phi(x)}{\mathrm{d}x^3}, x\right) \\ &\equiv \mathcal{L}(\phi, \mathrm{d}_0\phi, \mathrm{d}_1\phi, \mathrm{d}_2\phi, \mathrm{d}_3\phi, x) \end{aligned} \tag{3.30}$$

Im dreidimensionalen Ortsraum wird ein so großes Normierungsvolumen Ω festgelegt, dass $\phi(x)$ zu jeder Zeit nur innerhalb von Ω von Null verschieden ist. (Viele Autoren bevorzugen ein unendlich großes Normierungsvolumen. In Abschnitt 7 werden wir begründen, warum ein beliebig großes aber endliches Normierungsvolumen physikalisch sinnvoller ist.) Die Lagrangefunktion des Feldes ist das Raumintegral über die Lagrangedichte:

$$L(t) = \int_{\Omega} \mathrm{d}^3x\, \mathcal{L} \tag{3.31}$$

In der Praxis werden wir fast immer mit der Lagrangedichte, nicht mit der Lagrangefunktion arbeiten.

Das Wirkungsintegral ist definiert durch

$$S \equiv \int_{x_a^0}^{x_b^0} \frac{\mathrm{d}x^0}{c} \int_{\Omega} \mathrm{d}^3x\, \mathcal{L} \equiv \int_{x_a^0}^{x_b^0} \frac{\mathrm{d}^4x}{c}\, \mathcal{L}\ . \tag{3.32}$$

Im rechten Ausdruck haben wir eine abkürzende Schreibweise für die Kombination des Zeitintegrals über das Intervall x_a bis x_b und des Raumintegrals über Ω definiert, die wir im Folgenden verwenden werden.

Nach dem Hamilton'schen Prinzip der Feldtheorie wird sich das Feld zwischen den Zeitpunkten x_a^0 und x_b^0 in der Weise entwickeln, dass das Wirkungsintegral einen Extremwert annimmt. Demnach muss die Variation von S nach ϕ und den Ableitungen von ϕ in linearer Näherung gleich Null sein. Die Variation ist dabei – wie in der Punktmechanik – nur im Inneren des Integrationsbereiches, aber nicht an seinem Rand auszuführen. Der Rand des Integrationsbereichs ist in diesem Fall durch die Oberfläche von Ω und die Zeitpunkte x_a^0 und x_b^0 festgelegt.

$$\delta S = \int_{x_a^0}^{x_b^0} \frac{\mathrm{d}^4x}{c} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\mu \phi)} \delta(\mathrm{d}_\mu \phi) \right) = 0 \tag{3.33}$$

Hier haben wir die Einstein'sche Summenkonvention (siehe K.4) verwendet, nach der zu summieren ist, wenn in einem Produkt Indizes doppelt vorkommen, also in diesem Fall

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\mu \phi)} \delta(\mathrm{d}_\mu \phi) \equiv \sum_{\mu=0}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\mu \phi)} \delta(\mathrm{d}_\mu \phi) \quad . \tag{3.34}$$

Mit Nutzung der Identität $\delta(\mathrm{d}_\mu \phi) = \mathrm{d}_\mu(\delta\phi)$ kann der letzte Summand in (3.33) umformuliert werden:

$$\int_{x_a^0}^{x_b^0} \frac{\mathrm{d}^4x}{c} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\mu \phi)} \delta(\mathrm{d}_\mu \phi) = \int_{x_a^0}^{x_b^0} \frac{\mathrm{d}^4x}{c} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\mu \phi)} \mathrm{d}_\mu(\delta\phi) =$$

$$= \int_{x_a^0}^{x_b^0} \frac{\mathrm{d}^4x}{c} \mathrm{d}_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\mu \phi)} \delta\phi - \int_{x_a^0}^{x_b^0} \frac{\mathrm{d}^4x}{c} \left(\mathrm{d}_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\mu \phi)} \right) \delta\phi \tag{3.35}$$

Der vorletzte Term ist Null. Denn nach dem Gauß'schen Satz ist das Integral der Divergenz eines Vektorfeldes über ein Volumen V gleich dem Flächenintegral des gleichen Vektorfeldes über die Oberfläche von V. Auf der Oberfläche des vierdimensionalen Integrationsvolumens ist überall $\delta\phi = 0$, weil das Feld nur im Inneren des Volumens variiert wird.

Der verbleibende Term von (3.35) wird in (3.33) eingesetzt:

$$\delta S = \int_{x_a}^{x_b} \frac{\mathrm{d}^4x}{c} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \mathrm{d}_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\mu \phi)} \right) \delta\phi = 0 \tag{3.36}$$

Diese Gleichung kann für beliebige $\delta\phi$ nur erfüllt werden, wenn die Feldgleichung

$$\boxed{\mathrm{d}_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0} \tag{3.37a}$$

gilt. Wenn $\mathcal{L}$ von n Feldern $\phi_r, \phi_s, \phi_t, \ldots$ und ihren Ableitungen abhängt, dann sind diese Felder unabhängig voneinander zu variieren, und man erhält n Feldgleichungen der Form

$$\mathrm{d}_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\mu \phi_r)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} = 0 \quad , \quad r = 1 \ldots n \quad . \tag{3.37b}$$

Auch die Komponenten von – in der vierdimensionalen Raumzeit definierten – Vektorfeldern sind einzeln zu variieren, so dass man für jede der vier Komponenten eine einzelne Feldgleichung erhält. Dagegen wird ein Feld mit mehreren Spinorkomponenten nur gesamthaft variiert, so dass es für dieses Feld nur eine Feldgleichung gibt. Der Grund für diese unterschiedli-

che Behandlung mehrkomponentiger Felder liegt darin, dass die Variation von (3.32) in der vierdimensionalen Raumzeit, aber nicht im Spinorraum stattfindet.

Wenn die Lagrangedichte von einem Feld $\phi(x)$ und dessen konjugiert-komplexem $\phi^*(x)$ abhängt, dann muss $\mathcal{L}$ einmal nach $\phi(x)$ und – getrennt davon – einmal nach $\phi^*(x)$ variiert werden, als ob $\phi(x)$ und $\phi^*(x)$ zwei voneinander unabhängige Felder wären. Dadurch erhält man die beiden Feldgleichungen

$$\mathrm{d}_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \quad \text{und} \quad \mathrm{d}_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\mu \phi^*)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} = 0 \,. \tag{3.37c}$$

Das überrascht im ersten Moment, weil $\phi^*(x)$ selbstverständlich nicht unabhängig, sondern durch $\phi(x)$ eindeutig festgelegt ist. Man kann $\phi(x)$ aber mit

$$\begin{aligned} a(x) &\equiv \tfrac{1}{2}\Big(\phi(x) + \phi^*(x)\Big) \qquad & b(x) &\equiv -\tfrac{i}{2}\Big(\phi(x) - \phi^*(x)\Big) \\ \phi(x) &\equiv a(x) + i b(x) & &\text{mit } a(x) \in \mathbb{R}\,,\, b(x) \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{3.38}$$

in Real- und Imaginärteil zerlegen. $a(x)$ und $b(x)$ sind tatsächlich zwei voneinander unabhängige Felder, für die man mithilfe der Kettenregel die Feldgleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{d}_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\mu a)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a} = \\ &= \mathrm{d}_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\mu \phi)} \underbrace{\frac{\partial(\mathrm{d}_\mu \phi)}{\partial(\mathrm{d}_\mu a)}}_{1} + \mathrm{d}_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\mu \phi^*)} \underbrace{\frac{\partial(\mathrm{d}_\mu \phi^*)}{\partial(\mathrm{d}_\mu a)}}_{1} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial a}}_{1} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} \underbrace{\frac{\partial \phi^*}{\partial a}}_{1} \end{aligned} \tag{3.39a}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{d}_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\mu b)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b} = \\ &= \mathrm{d}_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\mu \phi)} \underbrace{\frac{\partial(\mathrm{d}_\mu \phi)}{\partial(\mathrm{d}_\mu b)}}_{+i} + \mathrm{d}_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\mu \phi^*)} \underbrace{\frac{\partial(\mathrm{d}_\mu \phi^*)}{\partial(\mathrm{d}_\mu b)}}_{-i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial b}}_{+i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} \underbrace{\frac{\partial \phi^*}{\partial b}}_{-i} \end{aligned} \tag{3.39b}$$

findet. Daraus folgen die beiden Gleichungen

$$0 = \tfrac{1}{2}\Big((3.39a) - i(3.39b)\Big) = \mathrm{d}_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \tag{3.40a}$$

$$0 = \tfrac{1}{2}\Big((3.39a) + i(3.39b)\Big) = \mathrm{d}_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\mu \phi^*)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} \ , \tag{3.40b}$$

die mit (3.37c) identisch sind. Die unabhängige Variation von $\mathcal{L}$ nach $\phi(x)$ und nach $\phi^*(x)$ ist lediglich eine Abkürzung, die zum gleichen Ergebnis führt wie das formal richtige Verfahren (3.39).

Die Gleichungen (3.37) folgen eindeutig aus der Lagrangedichte, aber nicht umkehrbar eindeutig. Verschiedene Lagrangedichten können zur gleichen Feldgleichung führen. Insbesondere ergibt sich die gleiche Feldgleichung für zwei Lagrangedichten $\mathcal{L}$ und $\mathcal{L}'$, die sich nur durch die Viererdivergenz einer beliebigen Vektorfunktion $\mathcal{G}$ unterscheiden:

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \mathrm{d}_\mu \mathcal{G}^\mu \tag{3.41}$$

Wir berechnen die Variation der Wirkung:

$$\delta S' = \delta \int_{x_a}^{x_b} \frac{\mathrm{d}^4 x}{c} \left(\mathcal{L} + \mathrm{d}_\mu \mathcal{G}^\mu\right) = \underbrace{\delta \int_{x_a}^{x_b} \frac{\mathrm{d}^4 x}{c}\, \mathcal{L}}_{\delta S} + \underbrace{\delta \int_{x_a}^{x_b} \frac{\mathrm{d}^4 x}{c}\, \mathrm{d}_\mu \mathcal{G}^\mu}_{=0} \tag{3.42}$$

Nach dem Gauß'schen Satz ist das vierdimensionale Volumenintegral über die vierdimensionale Divergenz von $\mathcal{G}$ gleich dem Flächenintegral über $\mathcal{G}$ auf der Oberfläche, die das Volumen begrenzt. Auf dieser Fläche wird $\mathcal{G}$ nicht variiert, so dass die Variation des Integrals Null ergibt.

Wir können das Hamilton'sche Prinzip der Feldtheorie nicht herleiten. Es ist ein Naturgesetz, also ein erratenes Postulat, das allein dadurch zu rechtfertigen ist, dass die aus ihm abgeleiteten Schlussfolgerungen mit allen experimentellen Erfahrungen im Einklang stehen.

3.2.2 Die kanonischen Gleichungen

Es ist nicht unmittelbar offensichtlich, wie das Verfahren der Punktmechanik, kanonische Gleichungen aus der Lagrangefunktion abzuleiten, auf die

Feldtheorie übertragen werden kann. Denn die Feldamplituden $\phi(t, \boldsymbol{x})$ und ihre konjugierten Impulse $p(t, \boldsymbol{x})$ – die wir jetzt konstruieren wollen – haben anstelle des diskreten Index j der $q_j(t)$ und $p_j(t)$ die kontinuierlichen, nicht abzählbaren Koordinaten $\boldsymbol{x}$ des dreidimensionalen Raumes. Wir werden die konjugierten Impulse kontinuierlicher Felder auf zwei verschiedene Weisen definieren, nämlich zunächst durch Diskretisierung des Feldes, und dann noch einmal eleganter, aber auch weniger transparent auf Seite 56, Gleichung (4.40), mithilfe des Noether'schen Theorems. Zur Diskretisierung des Feldes konstruieren wir abzählbare Feldamplituden $\phi_j(t)$, indem wir den Raum in abzählbar unendlich viele kleine Zellen mit dem Volumen V zerlegen, und $\phi(t, \boldsymbol{x})$ über die Zelle $V(\boldsymbol{x}_j)$, die den Raumpunkt $\boldsymbol{x}_j$ enthält, mitteln:

$$\phi_j(t) \equiv \frac{1}{V} \int\limits_{V(\boldsymbol{x}_j)} \mathrm{d}^3x \, \phi(t, \boldsymbol{x}) \tag{3.43}$$

Also ist $\phi(t)$ am Punkt $\boldsymbol{x}_j$ gleich

$$\phi(t, \boldsymbol{x}_j) = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \int\limits_{V(\boldsymbol{x}_j)} \mathrm{d}^3x \, \phi(t, \boldsymbol{x}) = \lim_{V \to 0} \phi_j(t) \quad . \tag{3.44}$$

Die abzählbaren konjugierte Impulse $p_j(t)$ werden durch Mittelung über das gleiche Volumen definiert:

$$p_j(t) \equiv \frac{1}{V} \int\limits_{V(\boldsymbol{x}_j)} \mathrm{d}^3x \, p(t, \boldsymbol{x}) \tag{3.45}$$

$p(t)$ am Punkt $\boldsymbol{x}_j$ ist

$$p(t, \boldsymbol{x}_j) = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \int\limits_{V(\boldsymbol{x}_j)} \mathrm{d}^3x \, p(t, \boldsymbol{x}) = \lim_{V \to 0} p_j(t) \quad . \tag{3.46}$$

Die Lagrangedichte der Feldtheorie

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\Big(\phi(t, \boldsymbol{x}), \mathrm{d}_\mu \phi(t, \boldsymbol{x}), t, \boldsymbol{x}\Big) \quad \text{mit } \mu = 0, 1, 2, 3 \tag{3.47}$$

hängt ab von den Ableitungen der Feldamplitude nach allen vier Raumzeitkoordinaten. Wenn $V(\boldsymbol{x}_{jk})$ die Nachbarzelle von $V(\boldsymbol{x}_j)$ in x^k-Richtung ist, dann gilt für die Ableitung nach der Raumkoordinate x^k

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}\,\phi(t,\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}\,x^k}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_j} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x^k}\lim_{V\to 0}\phi_j(t)\\ &= \lim_{V\to 0}\frac{\phi_{jk}(t)-\phi_j(t)}{V^{1/3}}\\ &\equiv \lim_{V\to 0}\Delta_k\phi_j(t)\end{aligned} \tag{3.48}$$

Das Feld wird nur im Raum, aber nicht in der Zeit diskretisiert. Es ist

$$\frac{\mathrm{d}\phi(t,\boldsymbol{x}_j)}{\mathrm{d}t} = \dot{\phi}(t,\boldsymbol{x}_j) = \lim_{V\to 0}\frac{\mathrm{d}\phi_j(t)}{\mathrm{d}t} = \lim_{V\to 0}\dot{\phi}_j(t) \quad . \tag{3.49}$$

Damit wird die Lagrangedichte $\overline{\mathcal{L}_j}$ des diskretisierten Feldes in der Zelle $V(\boldsymbol{x}_j)$

$$\overline{\mathcal{L}_j} = \overline{\mathcal{L}_j}\Big(\phi_j(t),\dot{\phi}_j(t),\Delta_1\phi_j(t),\Delta_2\phi_j(t),\Delta_3\phi_j(t),t,\boldsymbol{x}_j\Big) \quad . \tag{3.50}$$

Die Lagrangefunktion ist

$$\overline{L} = \sum_j \overline{\mathcal{L}_j}\cdot V(\boldsymbol{x}_j) \quad , \tag{3.51}$$

und es gilt

$$\mathcal{L} = \lim_{V\to 0}\overline{\mathcal{L}} \quad , \qquad L = \lim_{V\to 0}\overline{L} \quad , \qquad \int \mathrm{d}^3x = \lim_{V\to 0}\sum_j V(\boldsymbol{x}_j) \quad . \tag{3.52}$$

Jetzt können wir die konjugierten Impulse explizit berechnen:

$$p_j(t) = \frac{\partial\overline{L}}{\partial\dot{\phi}_j(t)} = \frac{\partial}{\partial\dot{\phi}_j(t)}\sum_n \overline{\mathcal{L}_n}\cdot V(\boldsymbol{x}_n) = \frac{\partial\overline{\mathcal{L}_j}}{\partial\dot{\phi}_j(t)}\cdot V(\boldsymbol{x}_j) \tag{3.53}$$

Auf beiden Seiten der Gleichung nehmen wir den Grenzwert $\lim_{V\to 0}$ und finden

$$p(t, \boldsymbol{x}_j) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(t, \boldsymbol{x}_j)} \cdot \mathrm{d}^3 x_j \quad . \tag{3.54}$$

Dies gilt für beliebige j, also ist

$$p(t, \boldsymbol{x}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(t, \boldsymbol{x})} \cdot \mathrm{d}^3 x \quad . \tag{3.55}$$

Die konjugierte Impulsdichte $\pi(t, \boldsymbol{x})$ wird definiert durch

$$\pi(t, \boldsymbol{x}) \mathrm{d}^3 x \equiv p(t, \boldsymbol{x}) \quad . \tag{3.56}$$

Also ist die konjugierte Impulsdichte π des Feldes ϕ durch

$$\boxed{\pi(t, \boldsymbol{x}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(t, \boldsymbol{x})}} \tag{3.57}$$

gegeben. Wenn die Lagrangedichte mehrere Felder ϕ_r enthält, dann wird in gleicher Weise zu jedem Feld die konjugierte Impulsdichte π_r berechnet. Falls ϕ ein Vektorfeld mit drei Raumkomponenten, bzw. ein Vektorfeld mit vier Raum-Zeit-Komponenten ist, dann wird zu jeder Komponente die entsprechende Komponente der Impulsdichte gemäß (3.57) berechnet. Man beachte, dass die zu einer kovarianten Feldkomponente kanonisch-konjugierte Impulsdichte kontravariant ist, und umgekehrt:

$$\pi_\mu(t, \boldsymbol{x}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^\mu(t, \boldsymbol{x})} \tag{3.58}$$

Die Hamiltonfunktion H der Punktmechanik hatten wir in (3.20) definiert durch

$$H\Big(q(t), p(t), t\Big) \equiv \sum_{j=1}^{n} p_j(t)\dot{q}_j(t) - L\Big(q(t), \dot{q}(t), t\Big) \quad . \tag{3.59}$$

In völliger Analogie dazu definieren wir jetzt die Hamiltonfunktion H und die Hamiltondichte $\mathcal{H}$ der Feldtheorie durch

$$H\Big(\phi(t,\boldsymbol{x}),\pi(t,\boldsymbol{x}),t\Big) \equiv \int \mathrm{d}^3x\, \mathcal{H}\Big(\phi(t,\boldsymbol{x}),\pi(t,\boldsymbol{x}),t,\boldsymbol{x}\Big)$$
$$\mathcal{H} \equiv \sum_r \pi_r(t,\boldsymbol{x})\dot{\phi}_r(t,\boldsymbol{x}) - \mathcal{L}\Big(\phi,\mathrm{d}_\mu\phi,t,\boldsymbol{x}\Big)\ . \tag{3.60a}$$

Außerdem definieren wir den Physikalischen Impuls und die Physikalische Impulsdichte mit den drei Komponenten

$$P^j\Big(\phi(t,\boldsymbol{x}),\pi(t,\boldsymbol{x}),t\Big) \equiv \int \mathrm{d}^3x\, \mathcal{P}^j\Big(\phi(t,\boldsymbol{x}),\pi(t,\boldsymbol{x}),t,\boldsymbol{x}\Big)$$
$$\mathcal{P}^j \equiv \sum_r \pi_r(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}^j\phi_r(t,\boldsymbol{x}) \quad \text{mit } j=1,2,3\ . \tag{3.60b}$$

Die Begründung und Erklärung dieser Definition werden wir in Abschnitt 4.2, Gleichung (4.35) nachholen.

An dieser Stelle ist vor einem möglichen Missverständnis zu warnen: In (3.42) haben wir festgestellt, dass sich aus den zwei Lagrangedichten $\mathcal{L}$ und $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \mathrm{d}_\mu\mathcal{G}^\mu$, die sich nur durch die Vierердivergenz einer beliebigen Vektorfunktion unterscheiden, die selbe Feldgleichung ergibt. Es gilt aber keineswegs, dass im kanonischen Formalismus verschiedene Lagrangedichten gleichwertig wären, solange sie nur zur identischen Feldgleichung führen. Sobald die konjugierte Impulsdichte, die Energiedichte, oder die physikalische Impulsdichte von Feldern berechnet werden soll, bedeutet das eine zusätzliche Einschränkung bei der Wahl der Lagrangedichte. Man sieht das am einfachsten daran, dass eine mit einem konstanten Faktor multiplizierte Lagrangedichte zwar zur gleichen Feldgleichung, aber zu einer veränderten konjugierten Impulsdichte führt.

4 Kontinuierliche Symmetrien und Erhaltungsgrößen

4.1 Das Noether'sche Theorem

Es gibt einen systematischen Zusammenhang zwischen den kontinuierlichen Symmetrien physikalischer Systeme und ihren Erhaltungsgrößen, der nach seiner Entdeckerin[1] als Noether'sches Theorem bezeichnet wird.

Um diesen Zusammenhang herzuleiten, betrachten wir eine kontinuierliche Transformation Γ, die auf ein skalares Feld $\phi(x)$ einwirkt, und es in irgendeiner Weise modifiziert. Das modifizierte Feld nennen wir $\phi'(x)$:

$$\phi(x) \xrightarrow{\Gamma} \phi'(x) \tag{4.1}$$

Neben solchen aktiven Transformationen lassen wir auch passive Transformationen zu, die die Raumzeitkoordinaten unter dem Feld verändern:

$$\phi(x) \xrightarrow{\Gamma} \phi(x') \tag{4.2}$$

Die Transformationen der Felder und/oder der Raumzeitkoordinaten werden im allgemeinen auch die Lagrangedichte verändern:

$$\mathcal{L} \xrightarrow{\Gamma} \mathcal{L}' \tag{4.3}$$

Wenn eine Transformation Γ die Feldgleichung

$$\mathrm{d}_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\rho \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \tag{4.4}$$

unverändert lässt, dann wird Γ als Symmetrie der Lagrangedichte $\mathcal{L}$ bezeich-

[1] Emmy (Amalie) Noether, 1882 – 1935

net. Γ ist offenbar genau dann eine Symmetrie von $\mathcal{L}$, wenn die Variation δS der Wirkung, aus der wir die Feldgleichung gewonnen haben, durch Γ nicht verändert wird. Und δS wird genau dann unverändert bleiben, wenn die Lagrangedichte durch Γ lediglich um die Viererdivergenz (die auch identisch Null sein darf) einer beliebigen Vektorfunktion $\mathcal{G}$ geändert wird. Denn diese Viererdivergenz verschwindet – wie in (3.42) gezeigt – bei der Variation der Wirkung.

Ein reeller Parameter W (genauer gesagt handelt es sich meist um endlich viele reelle Parameter) gibt das Maß der Transformation an, beispielsweise die Größe des Winkels bei einer Rotation, oder die Größe der Verschiebung bei einer Translation, oder die Größe des Phasenwinkels bei einer Phasentransformation, usw. Mit $W = 0$ wird die Transformation zur Identität I. Das ist die Transformation, die das Objekt, auf das sie wirkt, unverändert lässt. Bei allen kontinuierlichen Transformationen die wir in diesem Buch betrachten, kann Γ in einer Taylorreihe um $W = 0$ entwickelt werden:

$$\Gamma = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{W^n}{n!} \frac{\mathrm{d}^n \Gamma}{\mathrm{d}W^n}\bigg|_{W=0} = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W^n}{n!} \frac{\mathrm{d}^n \Gamma}{\mathrm{d}W^n}\bigg|_{W=0} \tag{4.5}$$

Eine infinitesimal kleine Transformation Γ_{INF} erhält man, indem man W infinitesimal klein wählt:

$$w \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{W}{n} \quad \text{mit } n \in \mathbb{N} \tag{4.6}$$

Mit infinitesimal kleinem w kann die Taylorreihe nach dem linearen Glied abgebrochen werden, und die infinitesimale Transformation ist

$$\Gamma_{\text{INF}} = I + w \frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}W}\bigg|_{W=0} = I + w \frac{i}{\hbar}(-i\hbar) \frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}W}\bigg|_{W=0}$$

$$\boxed{\Gamma_{\text{INF}} = I + \frac{i}{\hbar} w \gamma} \quad . \tag{4.7}$$

Der Operator

$$\boxed{\gamma \equiv -i\hbar \frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}W}\bigg|_{W=0}} \tag{4.8}$$

wird als *Generator* der Transformation Γ bezeichnet. Der reelle Parameter W legt die Größe der Transformation, der Generator γ die Art der Transformation fest, ob es sich beispielsweise um eine Phasentransformation oder um eine Rotation oder was auch immer handelt. Die endliche Transformation Γ entsteht dadurch, dass unendlich viele infinitesimal kleine Transformationen Γ_{INF} hintereinander geschaltet werden:

$$\Gamma = \lim_{n\to\infty}\left(I+\frac{i}{\hbar}w\,\gamma\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(I+\frac{i}{\hbar}\frac{W}{n}\gamma\right)^n \quad \text{mit } n\in\mathbb{N} \tag{4.9}$$

$$\boxed{\Gamma = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}W\gamma\right\}} \tag{4.10}$$

Γ wird $\mathcal{L}$ genau dann bis auf die Viererdivergenz einer beliebigen Vektorfunktion unverändert lassen, wenn für die infinitesimale Transformation $(I+\frac{i}{\hbar}w\,\gamma)$ das gleiche gilt:

$$\boxed{\begin{aligned}&\Gamma = \lim_{n\to\infty}\left(I+\frac{i}{\hbar}w\,\gamma\right)^n \quad \text{ist Symmetrie von } \phi \iff\\ &\iff \exists\mathcal{G}:\ \mathcal{L}\xrightarrow{I+\frac{i}{\hbar}w\,\gamma}\mathcal{L}'=\mathcal{L}+\frac{i}{\hbar}w\,\gamma\mathcal{L}=\mathcal{L}+\mathrm{d}_\rho\mathcal{G}^\rho\end{aligned}} \tag{4.11}$$

$\mathcal{L}$ hängt im allgemeinen von mehreren Feldern $\phi_r, \phi_s, \phi_t, \ldots$ ab, den Ableitungen der Felder nach den Raumzeitkoordinaten, sowie eventuell auch explizit von den Raumzeitkoordinaten x. Die Wirkung des Generators γ auf $\mathcal{L}$ ist deshalb

$$\gamma\mathcal{L} = \sum_r \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_r}\gamma\phi_r + \sum_r \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\rho\phi_r)}\gamma(\mathrm{d}_\rho\phi_r) + (\partial_\rho\mathcal{L})\gamma x^\rho \quad . \tag{4.12}$$

Falls $\mathcal{L}$ Vektorfelder mit vier Raum-Zeit-Komponenten enthält, steuert jede Komponente einen Summanden zu den Summen über r bei, siehe die Zeilen nach (3.37b).

Mithilfe der Identität $\gamma(\mathrm{d}_\rho\phi) = \mathrm{d}_\rho(\gamma\phi)$ formen wir diese Gleichung um:

$$\gamma\mathcal{L} = \sum_r \underbrace{\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_r} - \mathrm{d}_\rho \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\rho\phi_r)}\right)}_{=0 \text{ wegen (3.37b)}} \gamma\phi_r + \\ + \mathrm{d}_\rho\left(\sum_r \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\rho\phi_r)}\gamma\phi_r\right) + (\partial_\rho\mathcal{L})\gamma x^\rho \tag{4.13}$$

Einsetzen in die Symmetriebedingung (4.11) ergibt

$$\frac{i}{\hbar}w\,\gamma\mathcal{L} = \mathrm{d}_\rho\left(\sum_r \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\rho\phi_r)}\frac{i}{\hbar}w\,\gamma\phi_r\right) + (\partial_\rho\mathcal{L})\frac{i}{\hbar}w\,\gamma x^\rho = \mathrm{d}_\rho\mathcal{G}^\rho \\ \mathrm{d}_\rho\left(\sum_r \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\rho\phi_r)}w\gamma\phi_r + i\hbar\mathcal{G}^\rho\right) + (\partial_\rho\mathcal{L})w\gamma x^\rho = 0 \quad . \tag{4.14}$$

Für beliebige x kann diese Bedingung nur erfüllt werden, wenn der zweite Summand Null ist. Daher lässt sich eine notwendige Symmetriebedingung formulieren:

$$\boxed{\Gamma = \lim_{n\to\infty}(I + \frac{i}{\hbar}w\,\gamma)^n \quad \text{ist Symmetrie von } \phi \implies \\ \implies (\partial_\rho\mathcal{L})w\gamma x^\rho = 0} \tag{4.15}$$

Diese Bedingung ist notwendig, aber nicht hinreichend. (4.11) ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass Γ bzw. $(I + \frac{i}{\hbar}w\gamma)$ eine Symmetrie des Feldes ϕ ist. In ihr ist die notwendige Bedingung (4.15) implizit enthalten. Meist ist es einfacher, statt der hinreichenden Bedingung zunächst nur die notwendige Bedingung (4.15) zu prüfen. Wenn dies Kriterium bereits verfehlt wird, kann man sich die Mühe sparen, nach einer Funktion $\mathcal{G}$ zu suchen, welche die hinreichende Bedingung (4.11) erfüllt.

Die notwendige Bedingung (4.15) ist dann erfüllt, wenn entweder die Transformation nicht auf Ortsvektoren, sondern nur auf Felder wirkt (dann ist $w\gamma x^\rho = 0$) und/oder dann, wenn das untersuchte System abgeschlossen ist und die Lagrangedichte deshalb nicht explizit von den Raumzeitkoordinaten abhängt (dann ist $\partial_\rho\mathcal{L} = 0$). Man spricht im Fall $w\gamma x^\rho = 0$ von einer „inneren Symmetrie“, da diese Symmetrie nicht auf den Rahmen der Raumzeit bezogen ist. Umgekehrt werden Symmetrien mit $w\gamma x^\rho \neq 0$ (und

deshalb $\partial_\rho \mathcal{L} = 0$) als „äußere Symmetrien" bezeichnet.

Wenn die hinreichende Symmetriebedingung (4.11) erfüllt ist, dann ist zufolge (4.14) die Stromdichte j mit den Komponenten

$$j^\rho \equiv C\left(\sum_r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\rho \phi_r)} w\gamma\phi_r + i\hbar \mathcal{G}^\rho\right) \tag{4.16}$$

eine Erhaltungsgröße, welche die Kontinuitätsgleichung

$$\mathrm{d}_\rho j^\rho = 0 \tag{4.17a}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{j^0}{c}\right) = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j} \tag{4.17b}$$

erfüllt. Die Konstante C kann beliebig gewählt werden. j^0/c wird als Ladungsdichte bezeichnet, j als Stromdichte. Die Dimensionen dieser Größen sind

$$[j] = \frac{\text{Ladung}}{\text{Fläche}\cdot\text{Zeit}} \quad , \quad [j^0/c] = \frac{\text{Ladung}}{\text{Volumen}} \; . \tag{4.18}$$

Der Begriff „Ladung" ist sehr allgemein zu verstehen, und nicht auf eine elektrische Ladung beschränkt. Wir werden gleich Beispiele für recht unterschiedliche Arten von „Ladung" kennenlernen.

Jede Kontinuitätsgleichung repräsentiert einen Erhaltungssatz. Das sieht man, wenn man sie über ein endliches Volumen V integriert, und das Volumenintegral über die Dreierdivergenz nach dem Gauss'schen Satz in ein Flächenintegral über die Oberfläche von V umwandelt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underbrace{\int\limits_V \mathrm{d}^3x\,\frac{j^0}{c}}_{Q} = -\int\limits_V \mathrm{d}^3x\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j} = -\int\limits_{O(V)} \mathrm{d}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{j} \tag{4.19}$$

Die Zunahme der Ladung Q im Inneren des Volumens ist gleich dem Strom, der über die Oberfläche O von V herein fließt. Es kann keine Ladung aus dem Nichts entstehen oder im Nichts verschwinden. Allgemein gilt: Das dreidimensionale Volumenintegral über die Nullkomponente einer erhaltenen

Stromdichte ist eine Erhaltungsgröße.

Man beachte, dass diese Erhaltungsgröße – wie in (4.16) erkennbar – für die Summe aller Felder gilt, die in der Lagrangedichte enthalten sind, nicht etwa für jedes einzelne. Z.B. könnten zwei Felder Impuls austauschen (wobei sich der Impuls eines einzelnen Feldes ändert), während der Impuls des Gesamtsystems erhalten bleibt.

4.2 Translationen

Wenn die notwendige Symmetriebedingung $(\partial_\rho \mathcal{L}) w\gamma x^\rho \overset{(4.15)}{=} 0$ durch $\partial_\rho \mathcal{L} = 0$, jedoch nicht durch $w\gamma x^\rho = 0$ erfüllt wird, dann spricht man von einer „äußeren“ Symmetrie.

Ein Beispiel ist die Transformation V, welche die Koordinaten der vierdimensionalen Raumzeit relativ zum untersuchten System um die Strecke A verschiebt. Dies wird als passive Translation bezeichnet, im Gegensatz zur aktiven Translation, die den Inhalt der Welt relativ zu den festgehaltenen Koordinaten verschiebt. Ein Maximum eines skalaren Feldes ϕ, das im verschobenen Koordinatensystem$'$, das wir durch einen Strich$'$ kennzeichnen, die Koordinaten x' hat, hat im unverschobenen Koordinatensystem die Koordinaten $x + A$:

$$\phi(x) \xrightarrow{V} \phi(x') = \phi(x + A) \tag{4.20}$$

Zur Untersuchung der Symmetrie-Eigenschaften betrachten wir V als Produkt unendlich vieler hintereinander geschalteter infinitesimaler Transformationen. Jeder infinitesimale Transformationsschritt verschiebt die Koordinaten um die Strecke

$$a = \lim_{n\to\infty} \frac{A}{n} \quad \text{mit } n \in \mathbb{N} \quad . \tag{4.21}$$

Die Wirkung eines infinitesimalen Transformationsschrittes kann in einer Taylorreihe, die wegen des infinitesimal kleinen a nach dem linearen Glied abgebrochen werden darf, entwickelt werden:

$$\begin{aligned}\phi(x) \xrightarrow{V_{\text{INF}}} \phi(x') &= \phi(x+a) \\ &= \phi(x) + \frac{i}{\hbar}(-i\hbar)a^\nu g_{\nu\mu}\mathrm{d}^\mu\phi(x) + \mathcal{O}(a^2) \end{aligned} \tag{4.22}$$

Vergleich mit der allgemeinen Form einer infinitesimalen Transformation

$$\Gamma_{\text{INF}} \overset{(4.7)}{=} I + \frac{i}{\hbar}w\gamma \tag{4.23}$$

mit dem Generator γ und dem reellen Parameter w zeigt, dass $-i\hbar(\mathrm{d}^\mu)$ der Generator der Koordinatentranslation mit dem reellen Parameter $a \equiv (a^\nu)$ ist. Damit entpuppt sich der Generator als der mit -1 multiplizierte bekannte Energie-Impuls-Operator

$$\begin{pmatrix} p^0 \\ p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H/c \\ p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{pmatrix} = i\hbar \begin{pmatrix} \mathrm{d}^0 \\ \mathrm{d}^1 \\ \mathrm{d}^2 \\ \mathrm{d}^3 \end{pmatrix} = i\hbar \begin{pmatrix} \mathrm{d}_0 \\ -\mathrm{d}_1 \\ -\mathrm{d}_2 \\ -\mathrm{d}_3 \end{pmatrix} \tag{4.24}$$

mit den Komponenten

$$\begin{aligned} p_0 = p^0 = H/c &= i\hbar\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ , \\ p_1 = \frac{\hbar}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^1} \ , \ p_2 = \frac{\hbar}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^2} \ , \ p_3 &= \frac{\hbar}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^3} \ . \end{aligned} \tag{4.25}$$

Der Energieoperator $i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ ist also bis auf den konstanten Faktor $-1/c$ der Generator einer passiven Translation in Zeitrichtung, die k-Komponente $\frac{\hbar}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^k}$ des Impulsoperators ist bis auf den konstanten Faktor -1 der Generator einer passiven Translation in Raumrichtung x^k.

Die notwendige Symmetriebedingung (4.15)

$$(\partial_\rho\mathcal{L})w\gamma x^\rho = -(\partial_\rho\mathcal{L})a^\nu i\hbar\mathrm{d}_\nu x^\rho = -(\partial_\rho\mathcal{L})a^\rho i\hbar = 0 \tag{4.26}$$

ist genau dann erfüllt, wenn die Lagrangedichte zumindest von den Raumzeitrichtungen, in denen das Koordinatensystem geschoben wird (also $a^\rho \neq 0$ ist) nicht explizit abhängt, sodass für diese Richtungen $\partial_\rho\mathcal{L} = 0$ gilt.

Man findet eine Vektorfunktion $\mathcal{G}$, mit der die hinreichende Symmetriebedingung (4.11) erfüllt wird, indem man die infinitesimale Transformation auf die Lagrangedichte anwendet:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \xrightarrow{I+\frac{i}{\hbar}w\gamma} \mathcal{L}' &= \mathcal{L} + \frac{i}{\hbar}a^\rho g_{\rho\sigma}(-i\hbar)\mathrm{d}^\sigma\mathcal{L} = \mathcal{L} + a^\rho \mathrm{d}_\rho\mathcal{L} \\ &= \mathcal{L} + \mathrm{d}_\rho\mathcal{G}^\rho \end{aligned} \tag{4.27}$$

Diese Bedingung kann, weil a konstant ist, für beliebige Lagrangedichten $\mathcal{L}$ durch die Wahl

$$\mathcal{G}^\rho \equiv a^\rho\mathcal{L} \tag{4.28}$$

erfüllt werden.

Die Komponenten der erhaltenen Stromdichte ergeben sich aus

$$j^\rho \overset{(4.16)}{\equiv} C\left(\sum_r \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\rho\phi_r)} w\gamma\phi_r + i\hbar\mathcal{G}^\rho\right) . \tag{4.29}$$

Durch Einsetzen von $w = (a^\nu)$, $\gamma = -i\hbar(\mathrm{d}^\mu)$, und $\mathcal{G}^\rho = a^\rho\mathcal{L}$ erhält man

$$j^\rho = Ca^\nu\left(-\sum_r \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\rho\phi_r)} i\hbar g_{\nu\mu}\mathrm{d}^\mu\phi_r + i\hbar g^\rho{}_\nu\mathcal{L}\right) . \tag{4.30}$$

Weil die vier Komponenten der Koordinatenverschiebung a voneinander unabhängig sind, gibt es vier erhaltene Stromdichten. Demnach kann die Konstante als

$$Ca^\nu \equiv -\frac{g^{\sigma\nu}}{i\hbar} \quad \text{mit } \sigma = 0,1,2,3 \tag{4.31}$$

gewählt werden, und die vier erhaltenen Stromdichten lauten

$$j^\rho = \sum_r \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\rho\phi_r)}\mathrm{d}^\sigma\phi_r - g^{\rho\sigma}\mathcal{L} \equiv \mathcal{T}^{\rho\sigma} \quad \text{mit } \sigma = 0,1,2,3 . \tag{4.32}$$

Jede der vier Stromdichten erfüllt die Kontinuitätsgleichung

$$\mathrm{d}_\rho j^\rho = \mathrm{d}_\rho \mathcal{T}^{\rho\sigma} = 0 \quad \text{mit } \sigma = 0,1,2,3\ . \tag{4.33}$$

Der Tensor $\mathcal{T}$ wird aus gleich ersichtlichen Gründen als Energiedichte-Spannungs-Tensor bezeichnet. Abkürzend nennen wir ihn auch Energie-Spannungs-Tensor oder noch kürzer ES-Tensor. Für die Elemente dieses Tensors sind spezielle Namen üblich, die wir ebenfalls gleich erläutern werden:

$$(\mathcal{T}^{\rho\sigma}) = \begin{pmatrix} \mathcal{H} & c\mathcal{P}^1 & c\mathcal{P}^2 & c\mathcal{P}^3 \\ \mathcal{S}^{E1}/c & \mathcal{S}^{P11} & \mathcal{S}^{P21} & \mathcal{S}^{P31} \\ \mathcal{S}^{E2}/c & \mathcal{S}^{P12} & \mathcal{S}^{P22} & \mathcal{S}^{P32} \\ \mathcal{S}^{E3}/c & \mathcal{S}^{P13} & \mathcal{S}^{P23} & \mathcal{S}^{P33} \end{pmatrix} \tag{4.34}$$

Die vier Kontinuitätsgleichungen lauten:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Bigg(\underbrace{\sum_r \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_0\phi_r)}\,\mathrm{d}^0\phi_r - \mathcal{L}}_{\mathcal{H}}\Bigg) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^j}\Bigg(\underbrace{\sum_r \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_j\phi_r)}\,c\,\mathrm{d}^0\phi_r}_{\mathcal{S}^{Ej}}\Bigg) \tag{4.35a}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Bigg(\underbrace{\sum_r \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(c\,\mathrm{d}_0\phi_r)}\,\mathrm{d}^1\phi_r}_{\mathcal{P}^1}\Bigg) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^j}\Bigg(\underbrace{\sum_r \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_j\phi_r)}\,\mathrm{d}^1\phi_r - g^{j1}\mathcal{L}}_{\mathcal{S}^{P1j}}\Bigg) \tag{4.35b}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Bigg(\underbrace{\sum_r \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(c\,\mathrm{d}_0\phi_r)}\,\mathrm{d}^2\phi_r}_{\mathcal{P}^2}\Bigg) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^j}\Bigg(\underbrace{\sum_r \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_j\phi_r)}\,\mathrm{d}^2\phi_r - g^{j2}\mathcal{L}}_{\mathcal{S}^{P2j}}\Bigg) \tag{4.35c}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Bigg(\underbrace{\sum_r \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(c\,\mathrm{d}_0\phi_r)}\,\mathrm{d}^3\phi_r}_{\mathcal{P}^3}\Bigg) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^j}\Bigg(\underbrace{\sum_r \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_j\phi_r)}\,\mathrm{d}^3\phi_r - g^{j3}\mathcal{L}}_{\mathcal{S}^{P3j}}\Bigg) \tag{4.35d}$$

In der Kontinuitätsgleichung (4.35a), die aufgrund der zeitlichen Translationssymmetrie des Feldes gilt, erkennen wir die Energiedichte (=Hamiltondichte) $\mathcal{H}$ von Gleichung (3.60a) wieder:

$$\sum_r \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}_r}\,\dot{\phi}_r - \mathcal{L} = \sum_r \pi_r\dot{\phi}_r - \mathcal{L} = \mathcal{H} \tag{4.36}$$

Die zeitliche Abnahme der Energiedichte $\mathcal{H}$ der Felder ϕ_r an einem Punkt der Raumzeit ist gleich der Dreier-Divergenz der Energiestromdichte $\mathcal{S}_E^j$ am gleichen Punkt. Also ist die „Ladung“ der Felder, die aufgrund ihrer zeitlichen Translationssymmetrie erhalten ist, die Energie.

Wir hätten auch umgekehrt vorgehen können: Statt in Abschnitt 3.2.2 mühsam durch Diskretisierung des Feldes die konjugierte Impulsdichte und die Hamiltondichte herzuleiten, hätten wir direkt Gleichung (4.35) aufschreiben und postulieren können, dass die Nullkomponente der Stromdichte, die aufgrund der zeitlichen Translationsinvarianz der Felder eine Erhaltungsgröße ist, abgesehen von einem möglichen konstanten Faktor f die Energiedichte der Felder sein muss.

$$f \cdot \int \mathrm{d}^3x \left(\frac{1}{c} \sum_r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_0 \phi_r)} \mathrm{d}^0 \phi_r - \frac{\mathcal{L}}{c} \right) = \int \mathrm{d}^3x \, \mathcal{H} \tag{4.37}$$

Das Raumintegral über die Energiedichte muss der Hamiltonfunktion (3.20) der Punktmechanik entsprechen:

$$H = \sum_{j=1}^{n} p_j \dot{q}_j - L \tag{4.38}$$

Also muss für die Felder

$$\int \mathrm{d}^3x \, \mathcal{H} = \int \mathrm{d}^3x \left(\sum_r \pi_r \dot{\phi}_r - \mathcal{L} \right) \tag{4.39}$$

gelten. Der Vergleich von (4.37) und (4.39) zeigt

$$f = c \quad \text{und} \quad \pi_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_r} \, . \tag{4.40}$$

Die „Ladung“, die aufgrund der räumlichen Translationssymmetrie der Felder in x^k-Richtung erhalten ist, ist *per Definition* ihr Impuls in k-Richtung. Die Abnahme der Impulsdichte $\mathcal{P}^k$ ist gleich der Divergenz der Impulsstromdichte $\mathcal{S}^{Pk}$. Die Bedeutung dieser Definitionen wird klarer, wenn man (4.35) über ein Raumvolumen V integriert, und das Volumenintegral über

die Divergenz nach dem Gauß'schen Satz in ein Flächenintegral über die Oberfläche von V umwandelt:

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_V \mathrm{d}^3x\,\mathcal{H} = \int\limits_{O(V)} \mathrm{d}f_j\,\mathcal{S}^{Ej} \tag{4.41a}$$

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_V \mathrm{d}^3x\,\mathcal{P}^k = \int\limits_{O(V)} \mathrm{d}f_j\,\mathcal{S}^{Pkj} \tag{4.41b}$$

Die Abnahme des Energieinhalts des Volumens V ist gleich der Energiemenge, die über die Oberfläche $O(V)$ hinaus strömt. Also ist $\mathcal{S}^{Ej}$ die Dichte des Energiestroms, der in Raumrichtung x^j fließt. Entsprechend ist $\mathcal{S}^{Pkj}$ die Dichte des in Raumrichtung x^j fließenden Stroms der k-Komponente des Impulses.

Anders als die Energiedichte

$$\mathcal{H} \overset{(4.35)}{=} \sum_r \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_0\phi_r)}\mathrm{d}^0\phi_r - \mathcal{L} \tag{4.42}$$

kann die gesamte Impulsdichte

$$\mathcal{P}^j \overset{(4.35)}{=} \sum_r \frac{1}{c}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_0\phi_r)}\mathrm{d}^j\phi_r \equiv \sum_r \mathcal{P}_r^j \tag{4.43}$$

als Summe der Impulsdichten $\mathcal{P}_r^j$ der einzelnen Felder geschrieben werden. Eine Erhaltungsgröße ist aber nur die Summe der Impulsdichten, nicht die Impulsdichte eines einzelnen Feldes.

Die Dimension des ES-Tensors ist

$$\left[(\mathcal{T}^{\rho\sigma})\right] = \frac{\text{Energie}}{\text{Volumen}}\ . \tag{4.44}$$

Demnach ist die Dimension der Impulsstromdichten

$$\left[\mathcal{S}^{Pkj}\right] = \frac{\text{Energie}}{\text{Volumen}} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}}\ .$$

Im Oberflächenintegral auf der rechten Seite von (4.41b) beschreibt der

Integrand im Fall $k = i$ den Druck, den das Feld auf die Oberfläche des Volumens ausübt. Im Fall $k \neq i$ beschreibt er die Scherkräfte, die das Feld tangential zur Oberfläche von V ausübt. Dies ist der Grund, warum $(\mathcal{T}^{\rho\sigma})$ als Energiedichte-Spannungs-Tensor bezeichnet wird. Um die Scherkräfte deutlich von den Druckkräften zu unterscheiden, definieren wir den mittleren Druck

$$\mathrm{P} \equiv \frac{1}{3}\left(\mathcal{S}^{P11} + \mathcal{S}^{P22} + \mathcal{S}^{P33}\right) \tag{4.45a}$$

(nicht mit der Impulsdichte $\mathcal{P}$ verwechseln!), sowie den Spannungstensor mit den 9 Komponenten

$$\sigma^{kj} \equiv \mathcal{S}^{Pkj} + g^{kj}\mathrm{P} \ . \tag{4.45b}$$

Mit diesen Definitionen kann der ES-Tensor in der Form

$$(\mathcal{T}^{\rho\sigma}) = (4.34) = \begin{pmatrix} \mathcal{H} & c\mathcal{P}^j \\ \mathcal{S}^{Ek}/c & (\sigma^{kj} - g^{kj}\mathrm{P}) \end{pmatrix} \tag{4.46}$$

geschrieben werden. Im Fall isotroper Felder gilt:

$$\begin{aligned} \text{Isotropie} \implies \mathcal{P}^j = \mathcal{S}^{Ej} = \sigma^{kj} = 0 \\ \mathcal{S}^{P11} = \mathcal{S}^{P22} = \mathcal{S}^{P33} = P \end{aligned} \tag{4.47}$$

Also wird der ES-Tensor beliebiger Felder unter der Annahme der Isotropie im großräumigen Mittel zu einer Diagonalmatrix:

$$\text{Isotropie} \implies (\mathcal{T}^{\rho\sigma}) = \begin{pmatrix} \mathcal{H} & 0 \\ 0 & -g^{kj}\mathrm{P} \end{pmatrix}$$

$(-\mathrm{P}g^{\rho\sigma})$ mit konstantem P ist offensichtlich ein Lorentz-Tensor, denn schließlich wissen wir mit Sicherheit dass $(g^{\rho\sigma})$ ein Lorentz-Tensor ist. $(\mathcal{T}^{\rho\sigma})$ könnte unmöglich ein Lorentz-Tensor sein wenn er mit $(-\mathrm{P}g^{\rho\sigma})$ in allen Komponenten identisch wäre, ausgenommen $(\mathcal{T}^{00}) \neq (-\mathrm{P}g^{00})$. Also erzwingt die Lorentz-Invarianz

$$\text{Isotropie} \implies (\mathcal{T}^{\rho\sigma}) = \begin{pmatrix} \mathcal{H} & 0 \\ 0 & -g^{kj}\mathrm{P} \end{pmatrix} = (-g^{\rho\sigma}\mathrm{P}) \ . \tag{4.48}$$

Abschließend merken wir noch an, dass die Impulsdichte $\mathcal{P}_r^j$ eines Feldes ϕ_r etwas anderes ist als seine kanonisch konjugierte Impulsdichte

$$\pi_r \overset{(3.57)}{\equiv} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_r} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_0\phi_r)} \ . \tag{4.49}$$

Es gilt

$$\mathcal{P}_r^k \overset{(4.35)}{=} \frac{1}{c}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_0\phi_r)}\mathrm{d}^k\phi_r \overset{(3.57)}{=} \pi_r \mathrm{d}^k\phi_r \quad . \tag{4.50}$$

Die physikalische Impulsdichte $\mathcal{P}$ ist dadurch definiert, dass sie mit der räumlichen Translationssymmetrie der Felder korreliert, genauso wie die Energiedichte $\mathcal{H}$ dadurch definiert ist, dass sie mit der zeitlichen Translationssymmetrie der Felder korreliert. Die kanonisch konjugierten Impulsdichten π_r sind ein Konstrukt des Hamilton-Formalismus, und dadurch definiert dass sie zu den Feldamplituden konjugiert sind. Sie brauchen nicht einmal die Dimension einer Impulsdichte zu haben. Das Produkt $\pi_r\phi_r$ von konjugierter Impulsdichte und Feldamplitude hat immer die Dimension Wirkung/Volumen. Die konjugierte Impulsdichte hat deshalb genau dann die Dimension Impuls/Volumen, wenn die Feldamplitude die Dimension einer Länge hat. Oft werden wir uns mit Feldern befassen, deren Dimension $1/\sqrt{\text{Volumen}}$ ist. Deren konjugierte Impulsdichte hat die Dimension Wirkung$/\sqrt{\text{Volumen}}$. Der physikalische Impuls ist kanonisch konjugiert zum Ortsvektor $\boldsymbol{x}$. Deshalb haben beide drei Komponenten. $\pi_r(x)$ hat wie das skalare Feld $\phi_r(x)$ nur eine Komponente. Bei Vektorfeldern und Spinorfeldern definiert man für jede Komponente des Feldes gemäß (4.49) eine Komponente seiner kanonisch konjugierten Impulsdichte.

4.3 Rotationen

Nachdem wir den mit -1 multiplizierten vierdimensionalen Impulsoperator als Generator passiver Translationen skalarer Felder kennengelernt

haben liegt die Vermutung nahe, dass der mit -1 multiplizierte vierdimensionale Drehimpulsoperator der Generator passiver Rotationen skalarer Felder sein könnte. Es wird sich aber gleich herausstellen, dass der *positive* Drehimpulsoperator dieser Generator ist. Zumindest dann, wenn man die Koordinatenachsen wie üblich als rechtshändiges System definiert, und Drehwinkel entgegen dem Uhrzeiger positiv zählt.

Die vierdimensionale Raumzeit hat sechs zueinander senkrechte zweidimensionale Ebenen: Die Raum-Zeit-Ebenen $10 = xct$, $20 = yct$, $30 = zct$, und die Raum-Raum-Ebenen $23 = yz$, $31 = zx$, $12 = xy$. Ein gestrichenes Koordinatensystem K' sei relativ zum ungestrichenen Koordinatensystem K um den infinitesimal kleinen positiven Winkel ω^{12} in der 12-Ebene gedreht wie in Abbildung 4.1 skizziert. Ein skalares Feld $\phi(x)$ habe ein Maximum am Raumzeitpunkt A. Es gilt also

$$\phi_{\max} = \phi \begin{pmatrix} 0' \\ \mathsf{A}' \\ 0' \\ 0' \end{pmatrix} = \phi \begin{pmatrix} 0 \\ \mathsf{A} \\ \omega^{12}\,\mathsf{A} \\ 0 \end{pmatrix} . \tag{4.51}$$

Ein Minimum des Feldes befinde sich am Raumzeitpunkt B:

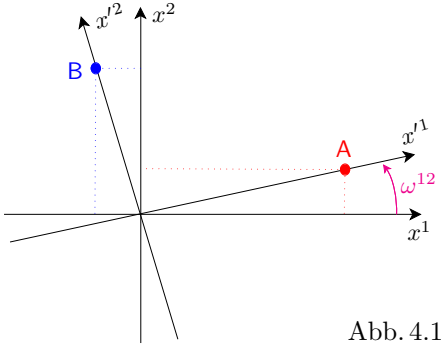


Abb. 4.1 : Rotation der Koordinaten

$$\phi_{\min} = \phi\begin{pmatrix} 0' \\ 0' \\ \mathsf{B}' \\ 0' \end{pmatrix} = \phi\begin{pmatrix} 0 \\ -\omega^{12}\,\mathsf{B} \\ \mathsf{B} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.52}$$

Allgemein gilt offenbar

$$\phi\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \phi\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 - \omega^{12}\,x^2 \\ x^2 + \omega^{12}\,x^1 \\ x^3 \end{pmatrix} = \phi(x) + \Big(\omega^{12}x^1\mathrm{d}_2 - \omega^{12}x^2\mathrm{d}_1\Big)\phi(x)\ . \tag{4.53}$$

Die Taylorentwicklung darf wegen des infinitesimal kleinen Winkels ω^{12} nach dem linearen Glied abgebrochen werden. Wir fügen an zwei Stellen den Faktor $1 = -g_{11} = -g_{22}$ ein, und ziehen die Indizes von d_2 und d_1 nach oben:

$$\begin{aligned}
\phi(x') &= \phi(x) - \omega^{12}\Big(g_{11}x^1\mathrm{d}_2 - g_{22}x^2\mathrm{d}_1\Big)\phi(x) \\
&= \phi(x) - \omega^{\alpha\beta}\Big(g_{\alpha1}x^1g_{\beta2}\mathrm{d}^2 - g_{\beta2}x^2g_{\alpha1}\mathrm{d}^1\Big)\phi(x) \\
&= \phi(x) - \omega_{\sigma\tau}g^{\sigma\alpha}g^{\tau\beta}\Big(g_{\alpha1}x^1g_{\beta2}\mathrm{d}^2 - g_{\beta2}x^2g_{\alpha1}\mathrm{d}^1\Big)\phi(x) \\
&= \phi(x) - \omega_{\sigma\tau}\Big(g^{\sigma}{}_1x^1g^{\tau}{}_2\mathrm{d}^2 - g^{\tau}{}_2x^2g^{\sigma}{}_1\mathrm{d}^1\Big)\phi(x)
\end{aligned} \tag{4.54}$$

Verallgemeinerung auf Koordinatendrehungen in einer beliebigen Ebene: Eine beliebige infinitesimale Koordinatendrehung kann durch Linearkombination der Drehwinkel Ω^{10},Ω^{20},Ω^{30},Ω^{23},Ω^{31},Ω^{12} in den sechs Ebenen der Raumzeit beschrieben werden. Die Winkel sind antisymmetrisch bei Vertauschung ihrer Indizes: $\Omega^{\sigma\tau} = -\Omega^{\tau\sigma}$. Sie werden in einer schiefsymmetrischen Matrix angeordnet:

$$\Omega = (\Omega^{\sigma\tau}) \equiv \begin{pmatrix} 0 & -\Omega^{10} & -\Omega^{20} & -\Omega^{30} \\ \Omega^{10} & 0 & \Omega^{12} & -\Omega^{31} \\ \Omega^{20} & -\Omega^{12} & 0 & \Omega^{23} \\ \Omega^{30} & \Omega^{31} & -\Omega^{23} & 0 \end{pmatrix} \tag{4.55}$$

Wegen $g^{00} = -g^{11} = -g^{22} = -g^{33} = +1$ wechseln die Raum-Zeit-Winkel das Vorzeichen, wenn die Indizes in die kovariante (untere) Stellung gezogen werden, während die Raum-Raum-Winkel dabei unverändert bleiben. Im allgemeinen brauchen wir uns darum aber nicht zu kümmern, da dies in unseren Formeln „automatisch“ eingearbeitet wird.

Die Indizes 1 und 2 in (4.54) ersetzen wir durch die allgemeinen Indizes κ und μ. Außerdem wird ein Faktor $\frac{1}{2}$ eingefügt, den wir gleich rechtfertigen werden. Wir bezeichnen die Koordinatenrotation als R:

$$\phi(x') = R_{\text{INF}}\phi(x) = \Big(I - \frac{1}{2}\omega_{\sigma\tau}(g^{\sigma}{}_{\kappa}x^{\kappa}g^{\tau}{}_{\mu}\mathrm{d}^{\mu} - g^{\tau}{}_{\nu}x^{\nu}g^{\sigma}{}_{\rho}\mathrm{d}^{\rho})\Big)\phi(x)$$

$$\begin{aligned}\phi(x') = R_{\text{INF}}\phi(x) &= \Big(I + \frac{i}{2\hbar}\omega_{\sigma\tau}i\hbar(x^{\sigma}\mathrm{d}^{\tau} - x^{\tau}\mathrm{d}^{\sigma})\Big)\phi(x)\\ &= \Big(I + \frac{i}{2\hbar}\omega_{\sigma\tau}J^{\sigma\tau}\Big)\phi(x) \qquad (4.56)\end{aligned}$$

Also ist

$$\boxed{J^{\sigma\tau} \equiv i\hbar(x^{\sigma}\mathrm{d}^{\tau} - x^{\tau}\mathrm{d}^{\sigma})} \qquad (4.57)$$

$$= i\hbar(x^{\sigma}g^{\tau\mu} - x^{\tau}g^{\sigma\mu})\mathrm{d}_{\mu} \qquad (4.58)$$

der Generator der infinitesimalen passiven Rotation

$$\boxed{R_{\text{INF}} = I + \frac{i}{2\hbar}\omega_{\sigma\tau}J^{\sigma\tau}} \qquad (4.59)$$

eines skalaren Feldes $\phi(x)$.

Aus (4.57) ist ersichtlich, dass

$$J^{\tau\sigma} = -J^{\sigma\tau} \qquad (4.60)$$

gilt. Weil die Diagonalelemente von Ω Null sind, ergibt sich bei der Summation über $\sigma = 0, 1, 2, 3$ und $\tau = 0, 1, 2, 3$ das Produkt

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Omega_{\sigma\tau}J^{\sigma\tau} &= \frac{1}{2}(\Omega_{10}J^{10} + \Omega_{20}J^{20} + \Omega_{30}J^{30} + \Omega_{10}J^{10} + \\ &\quad + \Omega_{12}J^{12} + \Omega_{31}J^{31} + \Omega_{20}J^{20} + \Omega_{12}J^{12} + \\ &\quad + \Omega_{23}J^{23} + \Omega_{30}J^{30} + \Omega_{31}J^{31} + \Omega_{23}J^{23}) \\ &= \Omega_{10}J^{10} + \Omega_{20}J^{20} + \Omega_{30}J^{30} + \\ &\quad + \Omega_{23}J^{23} + \Omega_{31}J^{31} + \Omega_{12}J^{12}\ . \end{aligned} \tag{4.61}$$

Das ist gerade die korrekte Summe über die Produkte der sechs Parameter und sechs Generatoren und erklärt, warum in (4.56) der Faktor $\frac{1}{2}$ eingefügt werden musste.

Beim Generator $J =$ (4.57) der Transformation handelt es sich – wie wir jetzt kurz überlegen wollen – um den vierdimensionalen Drehimpulsoperator. Der Drehimpuls im dreidimensionalen Ortsraum lässt sich mithilfe des Kreuzproduktes

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \boldsymbol{L} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} yp_z - zp_y \\ zp_x - xp_z \\ xp_y - yp_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2p^3 - x^3p^2 \\ x^3p^1 - x^1p^3 \\ x^1p^2 - x^2p^1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} J^{23} \\ J^{31} \\ J^{12} \end{pmatrix}$$

darstellen. Bei der Schreibweise J^{jk} geben die Indizes jk an, dass in der x^jx^k-Ebene gedreht wird. Die Verallgemeinerung auf Drehimpulse im vierdimensionalen Zeit-Orts-Raum ist offensichtlich

$$J^{\sigma\tau} \equiv x^\sigma p^\tau - x^\tau p^\sigma \quad \text{mit} \begin{cases} \sigma = 0,1,2,3 \\ \tau = 0,1,2,3 \end{cases} . \tag{4.62}$$

Den Drehimpulsoperator $J^{\sigma\tau}$ findet man, indem man die Komponenten p^ν des vierdimensionalen Impulses durch die Komponenten $i\hbar\mathrm{d}^\nu$ des vierdimensionalen Impulsoperators ersetzt. Das führt direkt zur Gleichung (4.57). Wie üblich, verwenden wir für Operatoren und für ihre Eigenwerte das gleiche Zeichen, d.h. wir kennzeichnen Operatoren (im allgemeinen) nicht durch Hütchen, sondern überlassen es der Aufmerksamkeit des Lesers, jeweils zu erkennen was gemeint ist.

Die Winkel $\Omega^{\sigma\tau}$ endlicher Koordinatendrehungen hängen mit den infinitesimalen Winkeln durch die Relation

$$\omega^{\sigma\tau} \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\,\Omega^{\sigma\tau} \quad \text{mit } n \in \mathbb{N} \tag{4.63}$$

zusammen. Eine endliche passive Drehung skalarer Felder erhält man durch Hintereinanderschaltung unendlich vieler infinitesimaler Transformationen:

$$R = \lim_{n\to\infty} \Big(I + \frac{1}{n}\frac{i}{2\hbar}\,\Omega_{\sigma\tau}\,J^{\sigma\tau}\Big)^n \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}$$

$$\boxed{R = \exp\Big\{\frac{i}{2\hbar}\,\Omega_{\sigma\tau}\,J^{\sigma\tau}\Big\}} \tag{4.64}$$

Unter welchen Voraussetzungen sind nun die Rotationen der vierdimensionalen Raum-Zeit-Koordinaten Symmetrien skalarer Felder $\phi_r(x)$, und welche Erhaltungssätze korrelieren mit diesen Symmetrien? Die Feldgleichungen der ϕ_r werden aus der Lagrangedichte $\mathcal{L}$ berechnet. Laut (4.15) ist die notwendige (aber nicht hinreichende) Bedingung dafür, dass eine Transformation Γ mit dem Generator γ eine Symmetrie von ϕ ist, durch

$$(\partial_\rho \mathcal{L}) w\gamma x^\rho = 0 \tag{4.65}$$

gegeben. Einsetzen von $\frac{1}{2}\omega_{\sigma\tau}J^{\sigma\tau}$ für $w\gamma$ mit $J^{\sigma\tau} \overset{(4.58)}{=} i\hbar(x^\sigma g^{\tau\mu} - x^\tau g^{\sigma\mu})\mathrm{d}_\mu$ ergibt

$$0 = (\partial_\rho \mathcal{L})\frac{1}{2}\omega_{\sigma\tau} i\hbar(x^\sigma g^{\tau\mu} - x^\tau g^{\sigma\mu})\mathrm{d}_\mu x^\rho = (\partial_\rho \mathcal{L})\frac{1}{2}\omega_{\sigma\tau} i\hbar(x^\sigma g^{\tau\rho} - x^\tau g^{\sigma\rho})\ . \tag{4.66}$$

$(x^\sigma g^{\tau\rho} - x^\tau g^{\sigma\rho})$ ist nur dann verschieden von Null, wenn $\rho = \sigma$ oder $\rho = \tau$ ist. Also ist die Bedingung genau dann erfüllt, wenn die Lagrangedichte zumindest von den Raumzeitrichtungen σ und τ, in denen die Drehung stattfindet, nicht explizit abhängt, sodass $\partial_\sigma \mathcal{L} = \partial_\tau \mathcal{L} = 0$ gilt.

Die hinreichende Symmetriebedingung (4.11)

$$\exists\, \mathcal{G}\ : \quad \mathcal{L} \xrightarrow{I + \frac{i}{\hbar} w\gamma} \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{i}{\hbar} w\gamma \mathcal{L} = \mathcal{L} + \mathrm{d}_\rho \mathcal{G}^\rho$$

ergibt mit Einsetzen von $\frac{1}{2}\omega_{\sigma\tau}J^{\sigma\tau}$ für $w\gamma$

$$\begin{aligned}\frac{i}{\hbar}w\,\gamma\mathcal{L} = \mathrm{d}_\rho\mathcal{G}^\rho &= \frac{i}{\hbar}\frac{1}{2}\omega_{\sigma\tau}J^{\sigma\tau}\mathcal{L} \\ &\overset{(4.58)}{=} \frac{i}{\hbar}\frac{1}{2}\omega_{\sigma\tau}i\hbar(x^\sigma g^{\tau\rho} - x^\tau g^{\sigma\rho})\mathrm{d}_\rho\mathcal{L} \\ &= -\mathrm{d}_\rho\frac{1}{2}\omega_{\sigma\tau}(x^\sigma g^{\tau\rho} - x^\tau g^{\sigma\rho})\mathcal{L} \quad . \end{aligned} \tag{4.67}$$

Kontrolle des letzten Schritts:

$$\mathrm{d}_\rho(x^\sigma g^{\tau\rho} - x^\tau g^{\sigma\rho})\mathcal{L} = (\underbrace{g^\sigma{}_\rho g^{\tau\rho} - g^\tau{}_\rho g^{\sigma\rho}}_{0})\mathcal{L} + (x^\sigma g^{\tau\rho} - x^\tau g^{\sigma\rho})\mathrm{d}_\rho\mathcal{L}$$

Der erste Summand ist tatsächlich Null, also darf man in (4.67) den Differentialoperator nach vorne ziehen, und findet mit

$$\mathcal{G}^\rho \equiv -\frac{1}{2}\omega_{\sigma\tau}(x^\sigma g^{\tau\rho} - x^\tau g^{\sigma\rho})\mathcal{L} \tag{4.68}$$

eine Vektorfunktion, die die hinreichende Symmetriebedingung erfüllt. In die Formel

$$j^\rho \overset{(4.16)}{=} C\Big(\sum_r \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\rho\phi_r)}w\gamma\phi_r + i\hbar\mathcal{G}^\rho\Big)$$

der erhaltenen Stromdichte setzen wir $\frac{1}{2}\omega_{\sigma\tau}J^{\sigma\tau}$ für $w\gamma$ und (4.68) für $\mathcal{G}^\rho$ ein.

$$\begin{aligned} j^\rho &= C\Big(\sum_r \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\rho\phi_r)}\frac{1}{2}\omega_{\sigma\tau}J^{\sigma\tau}\phi_r - i\hbar\frac{1}{2}\omega_{\sigma\tau}(x^\sigma g^{\tau\rho} - x^\tau g^{\sigma\rho})\mathcal{L}\Big) \\ &= \sum_{\sigma\tau=10,20,30,23,31,12} Ci\hbar\omega_{\sigma\tau}\cdot \\ &\quad\cdot\Big(\sum_r \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\rho\phi_r)}(x^\sigma\mathrm{d}^\tau - x^\tau\mathrm{d}^\sigma)\phi_r - (x^\sigma g^{\tau\rho} - x^\tau g^{\sigma\rho})\mathcal{L}\Big) \end{aligned}$$

Hier haben wir die Summation auf die sechs linear unabhängigen Komponenten des schiefsymmetrischen Tensors $\omega_{\sigma\tau}$ eingeschränkt, deshalb ist der Faktor $1/2$ entfallen. Und weil die sechs $\omega_{\sigma\tau}$ unabhängig sind, muss für

jeden einzelnen der sechs Summanden eine Kontinuitätsgleichung gelten. Wir wählen die Konstante

$$C \equiv \frac{1}{ci\hbar\omega_{\sigma\tau}} \quad \text{für } \sigma\tau = 10, 20, 30, 23, 31, 12 \,, \tag{4.69}$$

und finden die Komponenten der sechs erhaltenen Stromdichten

$$\begin{aligned} j^\rho &= x^\sigma \left(\frac{1}{c} \sum_r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\rho \phi_r)} \mathrm{d}^\tau \phi_r - g^{\tau\rho} \frac{\mathcal{L}}{c} \right) - x^\tau \left(\frac{1}{c} \sum_r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\rho \phi_r)} \mathrm{d}^\sigma \phi_r - g^{\sigma\rho} \frac{\mathcal{L}}{c} \right) \\ &\overset{(4.32)}{=} x^\sigma \frac{\mathcal{T}^{\rho\tau}}{c} - x^\tau \frac{\mathcal{T}^{\rho\sigma}}{c} \quad \text{mit } \sigma\tau = 10, 20, 30, 23, 31, 12 \,. \end{aligned} \tag{4.70}$$

Hier taucht der Energiedichte-Spannungs-Tensor $\mathcal{T}$ auf, den wir in (4.32) definiert hatten. Man kann die erhaltenen Stromdichten im Drehimpulsdichte-Tensor mit den Komponenten

$$\boxed{\mathcal{M}^{\rho\sigma\tau} \equiv x^\sigma \frac{\mathcal{T}^{\rho\tau}}{c} - x^\tau \frac{\mathcal{T}^{\rho\sigma}}{c}} \tag{4.71}$$

zusammenfassen. Der Drehimpulsdichte-Tensor hat die Dimension

$$[\,\mathcal{M}^{\rho\sigma\tau}\,] = \frac{\text{Länge} \cdot \text{Energie} \cdot \text{Zeit}}{\text{Volumen} \cdot \text{Länge}} = \frac{\text{Wirkung}}{\text{Volumen}} \,. \tag{4.72}$$

$\mathcal{M}$ erfüllt die sechs linear unabhängigen Kontinuitätsgleichungen

$$\mathrm{d}_\rho \mathcal{M}^{\rho\sigma\tau} = 0 \quad \text{für } \sigma\tau = 10, 20, 30, 23, 31, 12 \quad . \tag{4.73}$$

Die sechs erhaltenen Drehimpulse sind die Raumintegrale über die Null-Komponenten der erhaltenen Stromdichten:

$$M^{\sigma\tau} \equiv \int \mathrm{d}^3x \, \mathcal{M}^{0\sigma\tau} \quad \text{für } \sigma\tau = 10, 20, 30, 23, 31, 12 \tag{4.74}$$

Die rein räumlichen Drehimpulse M^{23}, M^{31}, M^{12} sind wohlbekannt. Sie haben die Form

$$M^{jk} = \int \mathrm{d}^3x \left(x^j \mathcal{P}^k(x) - x^k \mathcal{P}^j(x) \right) , \tag{4.75}$$

wobei $(\mathcal{P}^j) \overset{(4.34)}{=} (\mathcal{T}^{0j}/c)$ die Impulsdichte der Felder ist. Dagegen ist eine anschauliche Deutung der raumzeitlichen Drehimpulse M^{10}, M^{20}, M^{30} schwierig:

$$M^{j0} = \int \mathrm{d}^3x \left(x^j \frac{\mathcal{H}(\boldsymbol{x})}{c} - c\,t\,\mathcal{P}^j(\boldsymbol{x}) \right) \tag{4.76}$$

$\mathcal{H}$ ist die Energiedichte der Felder. M^{j0} kann unpraktischerweise die kleine Differenz zweier großer Zahlen sein, bzw. wird es im Lauf der Zeit auf jeden Fall werden. M^{j0} ist das Kuriosum einer Erhaltungsgröße, in der die Zeit explizit vorkommt. Die raumzeitlichen Drehimpulse sind zwar formal einwandfreie Erhaltungsgrößen, aber als Differenz divergierender Zahlen messtechnisch kaum fassbar, und deshalb in der Praxis des Experimentators bedeutungslos.

Außerdem werden wir im zweiten Teil dieses Buches zwar Energiedichte, Impulsdichte, und Ortsvektoren quantisieren. Aber die Quantentheorie kennt keinen hermiteschen Zeitoperator. Deshalb gibt es in der Quantenfeldtheorie für (4.76) ohnehin keine Verwendung, und wir werden in den folgenden Kapiteln nur die rein räumlichen Drehimpulse M^{23}, M^{31}, M^{12} betrachten.

In diesem Abschnitt haben wir uns auf den Drehimpuls von skalaren Feldern beschränkt. In Abschnitt 5.7 werden wir die Theorie auf den Drehimpuls von Vektorfeldern erweitern, in Abschnitt 6.4 auf den Drehimpuls von Spinorfeldern.

4.4 Globale Phasentransformationen

Im Fall einer inneren Symmetrie wird die notwendige (aber nicht hinreichende) Symmetriebedingung

$$(\partial_\rho \mathcal{L}) w\gamma x^\rho \overset{(4.15)}{=} 0$$

durch $w\gamma x^\rho = 0$ erfüllt.

Wir untersuchen eine globale Phasentransformation U, die die Phase des

Feldes $\phi(x)$ in allen Raumzeitpunkten x um den Winkel $Kq/\hbar$ dreht:

$$\phi(x) \xrightarrow{U} \phi'(x) = e^{\frac{i}{\hbar}Kq}\phi(x) \quad \text{mit } K, q \in \mathbb{R} \tag{4.77}$$

Man vergleiche dies mit der allgemeinen Form (4.9) und (4.10)! Der Generator q ist in diesem Fall eine konstante reelle Größe, die als *Ladung* des Feldes ϕ bezeichnet wird. Es kann sich um eine elektrische Ladung handeln, aber auch um eine andere für das Feld charakteristische additive Größe. Für reelle Felder wäre diese Transformation sinnlos. Nur komplexe Felder können eine erhaltene Ladung haben, die auf der Invarianz der Feldgleichungen unter der Phasentransformation basiert. Die Phasentransformation (4.77) wird als „global“ bezeichnet, weil der reelle Parameter K in jedem Raumzeitpunkt den gleichen Wert hat. Weil der Exponent dimensionslos sein muss, hat K die Dimension Wirkung/Ladung.

Die Raumzeitkoordinaten werden durch die Transformation U nicht verändert. Deshalb ist die notwendige Symmetriebedingung (4.15)

$$(\partial_\rho \mathcal{L}) \underbrace{w\gamma x^\rho}_{=0} = 0 \tag{4.78}$$

für beliebige Felder erfüllt. Um herauszufinden ob es ein $\mathcal{G}$ gibt, mit dem auch die hinreichende Symmetriebedingung (4.11)

$$\exists\, \mathcal{G}: \quad \mathcal{L} \xrightarrow{I+\frac{i}{\hbar}w\gamma} \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{i}{\hbar} w\gamma \mathcal{L} = \mathcal{L} + \mathrm{d}_\rho \mathcal{G}^\rho \tag{4.79}$$

erfüllt werden kann, untersuchen wir die infinitesimale Transformation. Wegen

$$e^{\frac{i}{\hbar}Kq} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{i}{\hbar} \underbrace{\frac{K}{n}}_{\equiv k} q\right)^n \quad \text{mit } n \in \mathbb{N} \tag{4.80}$$

hat sie in diesem Fall die Form

$$\phi(x) \xrightarrow{I+\frac{i}{\hbar}w\gamma} \phi'(x) = \phi(x) + \frac{i}{\hbar} kq\phi(x) \quad . \tag{4.81}$$

Ohne konkrete Informationen über $\mathcal{L}$ kann man die Symmetriebedingung (4.79) nicht überprüfen. Wir müssen uns auf das Beispiel einer Lagrangedichte einschränken, und wählen dafür das Dirac-Feld. Seine Feldgleichung kann aus der Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \phi^\dagger \gamma^0 (i\hbar c \gamma^\rho \mathrm{d}_\rho - mc^2)\phi \tag{4.82}$$

abgeleitet werden. Wir werden das Dirac-Feld in Kapitel 8 ausführlich diskutieren. Hier bemerken wir nur, dass ϕ ein Vierer-Spinor ist, also ein Feld mit vier Komponenten in einem abstrakten vierdimensionalen Spinor-Raum, der nichts mit dem vierdimensionalen Zeit-Orts-Raum zu tun hat. $\phi^\dagger$ ist der adjungierte, also transponierte konjugiert-komplexe Spinor von ϕ. Die Faktoren γ^μ sind 4×4 Matrizen im Spinorraum mit konstanten, komplexen Elementen.

Der transformierte adjungierte Spinor ist

$$\phi^{\dagger\prime}(x) = \phi^\dagger(x) - \frac{i}{\hbar} kq\phi^\dagger(x) \; . \tag{4.83}$$

Man beachte das Minuszeichen. Jetzt können wir die Wirkung der infinitesimalen Transformation auf $\mathcal{L}$ berechnen, wobei Summanden $\mathcal{O}(k^2)$ vernachlässigt werden:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \xrightarrow{I+\frac{i}{\hbar}w\gamma} \mathcal{L}' &= (\phi^\dagger - \frac{i}{\hbar} kq\phi^\dagger)\gamma^0 (i\hbar c\gamma^\rho \mathrm{d}_\rho - mc^2)(\phi + \frac{i}{\hbar} kq\phi) \\
\mathcal{L}' &= \mathcal{L} + \phi^\dagger \gamma^0 (i\hbar c\gamma^\rho \mathrm{d}_\rho - mc^2) \frac{i}{\hbar} kq\phi + \\
&\quad - \frac{i}{\hbar} kq\phi^\dagger \gamma^0 (i\hbar c\gamma^\rho \mathrm{d}_\rho - mc^2)\phi + \mathcal{O}(k^2) \\
&= \mathcal{L}
\end{aligned} \tag{4.84}$$

Die hinreichende Symmetriebedingung (4.79) wird durch

$$\mathrm{d}_\rho \mathcal{G}^\rho = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathcal{G} = \text{constant} \tag{4.85}$$

erfüllt. Wir sparen Schreibarbeit, indem wir $\mathcal{G} \equiv 0$ wählen. Die Komponenten der erhaltenen Stromdichte sind dann

$$j^\rho \overset{(4.16)}{=} C\sum_r \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\rho\phi_r)} w\gamma\phi_r = C\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\rho\phi)} kq\phi - \phi^\dagger \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\rho\phi^\dagger)} kq\right) =$$
$$= C\left(\phi^\dagger\gamma^0 i\hbar c\gamma^\rho kq\phi - 0\right) , \tag{4.86}$$

woraus mit $C \equiv 1/(i\hbar k)$

$$j^\rho = q\phi^\dagger\gamma^0 c\gamma^\rho\phi \tag{4.87}$$

folgt. In (4.86) haben wir im zweiten Summanden die Reihenfolge der Faktoren umgedreht, damit beide Summanden eine Zahl, aber keine Spinormatrix ergeben. Für j gilt die Kontinuitätsgleichung

$$\mathrm{d}_\rho j^\rho = 0 \tag{4.88a}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{j^0}{c} = -\mathrm{d}_k j^k$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} q\phi^\dagger\gamma^0\gamma^0\phi = -\mathrm{d}_k q\phi^\dagger\gamma^0 c\gamma^k\phi \quad . \tag{4.88b}$$

Integration über das Volumen V ergibt mit dem Gauss'schen Satz:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underbrace{\int_V \mathrm{d}^3x\, q\phi^\dagger\gamma^0\gamma^0\phi}_{Q(V)} = -\int_{O(V)} \mathrm{d}f_k \underbrace{q\phi^\dagger\gamma^0 c\gamma^k\phi}_{j^k} \tag{4.89}$$

Die Zunahme der im Volumen V enthaltenen Ladung $Q(V)$ ist gleich dem Strom, der über die Oberfläche in das Volumen herein fließt. Es kann keine Ladung aus dem Nichts entstehen oder im Nichts verschwinden.

4.5 Eichtransformationen

In Abschnitt 4.4 haben wir eine Phasentransformation untersucht, deren reeller Parameter K eine Konstante war. Die Änderung der Phase der Felder war deshalb in allen Raumzeitpunkten gleich, was als „globale" Phasentransformation bezeichnet wird.

Jetzt untersuchen wir eine Transformation $U(x)$, die die Phase des Feldes

$\phi(x)$ im Raumzeitpunkt x um den Winkel $\frac{1}{\hbar}K(x)q$ dreht:

$$\phi(x) \xrightarrow{U(x)} \phi'(x) = e^{\frac{i}{\hbar}K(x)q}\phi(x) \quad \text{mit } K(x), q \in \mathbb{R} \tag{4.90}$$

Der Generator q ist wie bei der globalen Transformation eine Ladung des Feldes ϕ, also eine für das Feld charakteristische konstante reelle Größe. Dagegen ist der reelle Parameter K (mit der Dimension Wirkung / Ladung) jetzt eine Funktion von x, kann also in jedem Raumzeitpunkt einen anderen Wert haben. Als einzige Einschränkung legen wir fest, dass die Funktion $K(x)$ analytisch sein muss, d.h. dass sie nach allen vier Raumzeitkoordinaten differenzierbar ist, und die Gleichung

$$\mathrm{d}_\rho \mathrm{d}_\nu K = \mathrm{d}_\nu \mathrm{d}_\rho K \quad \text{mit } \nu, \rho = 0, 1, 2, 3 \tag{4.91}$$

erfüllt. Da die Raumzeitkoordinaten durch die Phasentransformation nicht verändert werden, ist die notwendige Symmetriebedingung (4.15)

$$(\partial_\rho \mathcal{L}) \underbrace{w\gamma x^\rho}_{=0} = 0 \tag{4.92}$$

für beliebige Felder erfüllt. Wegen $w\gamma x^\rho = 0$ ist die Invarianz unter einer Phasentransformation eine „innere Symmetrie“. Um herauszufinden, ob es ein $\mathcal{G}$ gibt, mit dem auch die hinreichende Symmetriebedingung (4.11)

$$\exists\, \mathcal{G}: \quad \mathcal{L} \xrightarrow{I+\frac{i}{\hbar}w\gamma} \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{i}{\hbar} w\gamma \mathcal{L} = \mathcal{L} + \mathrm{d}_\rho \mathcal{G}^\rho$$

erfüllt werden kann, untersuchen wir die infinitesimale Transformation, die wegen

$$e^{\frac{i}{\hbar}K(x)q} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{i}{\hbar} \underbrace{\frac{K(x)}{n}}_{\equiv k(x)} q\right)^n \quad \text{mit } n \in \mathbb{N} \tag{4.93}$$

die Form

$$\phi(x) \xrightarrow{I+\frac{i}{\hbar}w\gamma} \phi'(x) = \phi(x) + \frac{i}{\hbar}k(x)q\phi(x) \tag{4.94}$$

hat. Als konkretes Beispiel wählen wir wieder das Dirac-Feld mit der Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \phi^\dagger\gamma^0(i\hbar c\gamma^\rho \mathrm{d}_\rho - mc^2)\phi \quad . \tag{4.95}$$

Da $k(x)$ eine Funktion der Raumzeitkoordinaten ist, gibt es jetzt bei der Transformation von $\mathcal{L}$ einen zusätzlichen Summanden:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \xrightarrow{I+\frac{i}{\hbar}w\gamma} \mathcal{L}' &= (\phi^\dagger - \frac{i}{\hbar}kq\phi^\dagger)\gamma^0(i\hbar c\gamma^\rho \mathrm{d}_\rho - mc^2)(\phi + \frac{i}{\hbar}kq\phi) \\
&= \mathcal{L} + \phi^\dagger\gamma^0 i\hbar c\gamma^\rho \frac{i}{\hbar}(\mathrm{d}_\rho k)q\phi + \phi^\dagger\gamma^0 k(i\hbar c\gamma^\rho \mathrm{d}_\rho - mc^2)\frac{i}{\hbar}q\phi - \\
&\quad - \frac{i}{\hbar}kq\phi^+\gamma^0(i\hbar c\gamma^\rho \mathrm{d}_\rho - mc^2)\phi + \mathcal{O}(k^2) \\
&= \mathcal{L} - \phi^\dagger\gamma^0 c\gamma^\rho(\mathrm{d}_\rho k)q\phi
\end{aligned} \tag{4.96}$$

Die lokale Phasentransformation $U(x)$ ist genau dann eine Symmetrie des Dirac-Feldes, wenn es eine Vektorfunktion $\mathcal{G}$ gibt, die die Gleichung

$$\mathrm{d}_\rho\mathcal{G}^\rho(x) = -\phi^\dagger(x)\gamma^0 c\gamma^\rho\Big(\mathrm{d}_\rho k(x)\Big)q\phi(x) \tag{4.97}$$

erfüllt. Eine derartige Funktion gibt es nicht. Also ist die lokale Phasentransformation $U(x)$ *keine* Symmetrie des Dirac-Feldes.

Statt uns mit dieser Feststellung zu begnügen, werden wir jetzt die lokale Phasentransformation zu einer Eichtransformation erweitern, und die Invarianz unter Eichtransformationen als ein Naturgesetz postulieren, dem alle geladenen Felder genügen müssen.

Es ist der Term mit $\mathrm{d}_\rho k$ in (4.96), durch den die lokale Phasentransformation das Symmetriekriterium verfehlt. Da wir darauf bestehen, dass k keine Konstante, sondern eine Funktion der Raumzeitkoordinaten sein muss, wird ein derartiger Term unvermeidlicherweise immer auftauchen, wenn die Lagrangedichte Differentialoperatoren enthält. Andererseits kann man auf Differentialoperatoren nicht verzichten, denn eine Lagrangedichte ohne

Differentialoperatoren kann nur auf auf statische, aber nicht auf dynamische Feldgleichungen führen.

Tatsächlich gibt es eine Möglichkeit, das Diracfeld invariant gegen lokale Phasentransformationen zu machen ohne die Differentialoperatoren aus der Lagrangedichte streichen zu müssen. Sie besteht darin, die Differentialoperatoren d_ρ zu ersetzen durch „phasentransformationsadaptierte“ Differentialoperatoren D_ρ, mit denen Differentialquotienten das Transformationsverhalten

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_\rho\,\phi \xrightarrow{U(x)} \mathrm{D}'_\rho\,\phi' &= \mathrm{D}'_\rho\, e^{\frac{i}{\hbar}K(x)q}\phi = \mathrm{D}'_\rho\, U(x)\,\phi \\ &= e^{\frac{i}{\hbar}K(x)q}\,\mathrm{D}_\rho\,\phi = U(x)\;\mathrm{D}_\rho\,\phi \end{aligned} \tag{4.98}$$

bekommen, anstelle von

$$\begin{aligned}\mathrm{d}_\rho\phi(x) \xrightarrow{U(x)} \mathrm{d}_\rho\phi'(x) &= \mathrm{d}_\rho e^{\frac{i}{\hbar}K(x)q}\phi \\ &= e^{\frac{i}{\hbar}K(x)q}\Big(\mathrm{d}_\rho + \frac{i}{\hbar}(\mathrm{d}_\rho K)q\Big)\phi \end{aligned} \tag{4.99}$$

mit dem lästigen zweiten Summanden. Anders als die immer und überall gleichen normalen Differentialoperatoren d_ρ werden die Operatoren $D_\rho(x)$ durch die Transformation zeit- und ortsabhängig so modifiziert, dass

$$(4.98) \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{D}'_\rho(x) = U(x)\;\mathrm{D}_\rho(x)\,U^\dagger(x) \tag{4.100}$$

gilt. Deshalb nennt man sie kovariante Differentialoperatoren, und wir haben in (4.98) D'_ρ geschrieben. Wir geben der – mit dem konstanten Faktor $\frac{\hbar}{iq}$ multiplizierten – zeit- und ortsabhängigen Differenz zwischen den beiden Arten von Differentialoperatoren den Namen

$$A_\rho(x) \equiv \frac{\hbar}{iq}\Big(\,\mathrm{D}_\rho(x) - \mathrm{d}_\rho\Big)\;, \tag{4.101}$$

d.h. der kovariante Differentialoperator ist

$$\mathrm{D}_\rho(x) \equiv \mathrm{d}_\rho + \frac{i}{\hbar}qA_\rho(x)\;. \tag{4.102}$$

Der kovariante Differentialquotient $\mathrm{D}_\rho\,\phi$ wird folgendermaßen transformiert:

$$(\mathrm{d}_\rho+\frac{i}{\hbar}qA_\rho)\phi \xrightarrow{U(x)} (\mathrm{d}_\rho+\frac{i}{\hbar}qA_\rho{}')\phi' = (\mathrm{d}_\rho+\frac{i}{\hbar}qA'_\rho)\phi e^{\frac{i}{\hbar}Kq} =$$
$$= e^{\frac{i}{\hbar}Kq}(\frac{i}{\hbar}(\mathrm{d}_\rho K)q\phi + \mathrm{d}_\rho\phi + \frac{i}{\hbar}qA_\rho{}'\phi)\ . \tag{4.103}$$

Nach (4.98) muss dies gleich

$$(\mathrm{d}_\rho + \frac{i}{\hbar}qA_\rho{}')\phi' = e^{\frac{i}{\hbar}Kq}(\mathrm{d}_\rho + \frac{i}{\hbar}qA_\rho)\phi \tag{4.104}$$

sein, woraus

$$A_\rho(x) \xrightarrow{U(x)} A_\rho{}'(x) = A_\rho(x) - \mathrm{d}_\rho K(x) \tag{4.105}$$

folgt. Da die Dimension von $K(x)$ Wirkung/Ladung ist, hat $A(x)$ die Dimension

$$\Big[A(x)\Big] = \text{Impuls/Ladung}\ . \tag{4.106}$$

Die Wirkung von $U(x)$ auf A ist nicht linear, das transformierte Feld $A'(x)$ ist nicht proportional zu $A(x)$. Damit sprengt diese Transformation den Rahmen des Noether'schen Theorems, und man kann *nicht* nach dem Schema von (4.16) eine erhaltene Stromdichte ableiten.

Beide Differentialoperatoren,

$$\mathrm{d}_\rho\phi(x) = \lim_{\Delta x^\rho\to 0}\frac{\phi(x+\Delta x^\rho)-\phi(x)}{\Delta x^\rho} \tag{4.107a}$$

und

$$\mathrm{D}_\rho\,\phi(x) = \lim_{\Delta x^\rho\to 0}\frac{\phi(x+\Delta x^\rho)-\phi(x)}{\Delta x^\rho} + \frac{i}{\hbar}q\,A_\rho(x)$$
$$\equiv \lim_{\Delta X^\rho\to 0}\frac{\phi(x+\Delta X^\rho)-\phi(x)}{\Delta X^\rho}\quad , \tag{4.107b}$$

vergleichen den Wert des Feldes an zwei Punkten im gleichen infinitesimalen

Abstand Δx^ρ. Aber die Anwesenheit von A hat den gleichen Effekt, wie wenn D_ρ statt des Maßstabs Δx^ρ einen anders geeichten Maßstab ΔX^ρ verwenden würde. Deshalb wird $A(x)$ als Eichfeld bezeichnet.

„Anwesenheit von A“ ist wörtlich zu verstehen. Wir postulieren, dass das Feld $A(x)$ genauso wirklich existiert wie Elektronen, Sterne, oder schwarze Löcher, und dass seine Wechselwirkung mit dem Diracfeld korrekt beschrieben wird, indem man in der Lagrangedichte die normale Ableitung d_ρ durch die kovariante Ableitung $\mathrm{D}_\rho(x) = \mathrm{d}_\rho + \frac{i}{\hbar} q A_\rho(x)$ ersetzt:

$$\mathcal{L} = \phi^\dagger \gamma^0 \Big(i\hbar c \gamma^\rho (\mathrm{d}_\rho + \frac{i}{\hbar} q A_\rho) - mc^2 \Big) \phi \tag{4.108}$$

Wir erweitern die Phasentransformation des Feldes ϕ um die damit kombinierte Transformation (4.105) des Eichfeldes A zur

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Eichtransformation:} \\ \phi(x) \xrightarrow{U(x)} \phi'(x) = \phi(x) e^{\frac{i}{\hbar} K(x) q} \\ A_\rho(x) \xrightarrow{U(x)} A'_\rho(x) = A_\rho(x) - \mathrm{d}_\rho K(x) \\ \text{mit } K(x) \in \mathbb{R},\ q \in \mathbb{R} \text{ konstant}\end{array}} \quad , \tag{4.109}$$

und prüfen die Wirkung einer infinitesimalen Eichtransformation auf die Lagrangedichte (4.108):

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \xrightarrow{I + \frac{i}{\hbar} w \gamma} \mathcal{L}' &= \Big(\phi^\dagger - \frac{i}{\hbar} k q \phi^\dagger \Big) \gamma^0 \cdot \Big(i\hbar c \gamma^\rho \big(\mathrm{d}_\rho + \frac{i}{\hbar} q (A_\rho - \mathrm{d}_\rho k) \big) - mc^2 \Big) \cdot \\ &\quad \cdot \Big(\phi + \frac{i}{\hbar} k q \phi \Big) \\ &= (4.96) + \phi^\dagger \gamma^0 c \gamma^\rho (\mathrm{d}_\rho k) q \phi + \mathcal{O}(k^2) = \mathcal{L} \end{aligned} \tag{4.110}$$

$\mathcal{L} =$ (4.108) ist tatsächlich eichinvariant, d.h. die Eichtransformation (4.109) ist eine Symmetrie der Kombination von Dirac-Feld $\phi(x)$ und Eichfeld $A(x)$.

Die Invarianz geladener Felder unter Eichtransformationen – kurz Eichinvarianz genannt – ist eine nicht aus der Theorie herleitbare, erratene Erfahrungstatsache, also ein Naturgesetz. Gerechtfertigt werden kann ein

Naturgesetz allein dadurch, dass die Schlussfolgerungen, die man aus ihm ziehen kann, mit allen Beobachtungen übereinstimmen. Bei der Suche nach den Feldtheorien der elektroschwachen und der starken Wechselwirkung war das Naturgesetz der Eichinvarianz eine wichtige Leitlinie.

Um die Eigenschaften des Eichfeldes genauer zu untersuchen, leiten wir aus der Lagrangedichte (4.108) die Feldgleichungen

$$\mathrm{d}_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\nu \phi_r)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} \overset{(3.37b)}{=} 0 \tag{4.111}$$

ab. Nach dem in den Zeilen nach (3.37b) gesagten müssen wir ϕ, $\phi^\dagger$, und die vier Komponenten von A als unabhängige Variable von $\mathcal{L}$ betrachten, so dass es sechs Feldgleichungen gibt. $\phi_r = \phi^\dagger$ ergibt die Diracgleichung

$$\Big(i\hbar c\gamma^\rho(\mathrm{d}_\rho + \frac{i}{\hbar} q A_\rho) - mc^2\Big)\phi = 0 \quad , \tag{4.112}$$

die wir in Abschnitt 8.1 detailliert untersuchen werden. Mit $\phi_r = \phi$ findet man die adjungierte Gleichung von (4.112). Wir werden die Ableitung dieser Gleichung erst nachholen, wenn wir die Kommutatoren der γ-Matrizen kennengelernt haben.

Die Gleichung der μ-Komponente des Eichfeldes ergibt sich mit $\phi_r = A_\mu$ als

$$-\phi^\dagger\gamma^0 i\hbar c\gamma^\rho \frac{i}{\hbar} q \frac{\partial A_\rho}{\partial A_\mu}\phi = \phi^\dagger\gamma^0 c\gamma^\mu q\phi = 0 \overset{(4.87)}{=} j^\mu \tag{4.113}$$

$$\text{mit } \mu = 0, 1, 2, 3 \ ,$$

wobei j^μ die μ-Komponente der erhaltenen Stromdichte ist. Es ist interessant, dass die Stromdichte in der Feldgleichung von $A(x)$ vorkommt, aber wieso ist sie Null? Und wieso taucht das Feld $A(x)$ selbst in dieser Gleichung überhaupt nicht auf? Offenbar fehlen in der Lagrangedichte noch wichtige Terme. Insbesondere sollte sie auch Ableitungen von $A(x)$ enthalten, damit sich eine dynamische Feldgleichung ergibt.

Bei der Ergänzung von $\mathcal{L}$ ist sorgfältig darauf zu achten, dass die gerade erst nachgewiesene Eichinvarianz erhalten bleibt. Das erreicht man dadurch,

dass man den Zusatztermen die Form einer vierdimensionalen Rotation von $A(x)$ gibt. Bei der Eichtransformation (4.109) taucht der vierdimensionale Gradient $\mathrm{d}_\rho K(x)$ als Summand von $A(x)$ auf, und Rotationsterme der Form

$$F_{\rho\nu} \equiv \mathrm{d}_\rho A_\nu - \mathrm{d}_\nu A_\rho \tag{4.114}$$

in der Lagrangedichte sind wegen

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}_\rho(A_\nu - \mathrm{d}_\nu K) - \mathrm{d}_\nu(A_\rho - \mathrm{d}_\rho K) = \\ &\quad = \mathrm{d}_\rho A_\nu - \mathrm{d}_\nu A_\rho \underbrace{-\mathrm{d}_\rho \mathrm{d}_\nu K + \mathrm{d}_\nu \mathrm{d}_\rho K}_{\overset{(4.91)}{=} 0} \end{aligned} \tag{4.115}$$

zuverlässig unschädlich für die Eichinvarianz. Ausserdem sollten die Rotationsterme mindestens quadratisch in der Lagrangedichte stehen, damit sich bei der Berechnung von $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\nu A)}$ nicht eine Feldgleichung wie (4.113) ergibt, in der A selbst garnicht mehr enthalten ist. Es ist also das einfachste und nächstliegendste, einen Summanden $vF_{\rho\nu}F^{\rho\nu}$ mit Rotationstermen $F_{\rho\nu}$ entsprechend (4.114) und noch zu bestimmendem konstanten v, als Zusatzterm in die Lagrangedichte einzufügen.

Überlegen wir, welche Dimension die Konstante v hat. Die Dimension von A ist Impuls/Ladung, also hat $F_{\rho\nu}$ die Dimension Impuls/(Ladung·Länge). Demnach gilt

$$\begin{aligned} [vF_{\rho\nu}F^{\rho\nu}] &= [v] \cdot \frac{\text{Impuls}^2}{\text{Ladung}^2 \cdot \text{Länge}^2} = [\mathcal{L}] = \frac{\text{Energie}}{\text{Volumen}} \\ [v] &= \frac{\text{Energie}}{\text{Volumen}} \cdot \frac{\text{Ladung}^2 \cdot \text{Länge}^2}{\text{Impuls}^2} = \frac{\text{Ladung}^2}{\text{Kraft} \cdot \text{Zeit}^2} \end{aligned} \tag{4.116}$$

An dieser Stelle kommen wir mit dem allgemeinen Begriff „Ladung“ nicht mehr weiter. Wir müssen unsere Diskussion auf eine bestimmte Art von Ladung einschränken, und definieren q als eine elektrische Ladung, weil elektrische Ladungen uns besser bekannt und geläufig sind als jede andere Art von Ladung. Dann ist eine Naturkonstante mit der passenden Dimension bereits bekannt, nämlich die

$$\text{Magnetische Feldkonstante } = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\mathrm{N} \cdot \mathrm{s}^2}{\mathrm{C}^2} \quad . \tag{4.117}$$

Wir setzen also

$$v = \frac{u}{\mu_0} \quad \text{mit } u \in \mathbb{R} \text{ dimensionslos} \tag{4.118}$$

an, und erhalten die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \phi^\dagger \gamma^0 \Big(i\hbar c \gamma^\rho (\mathrm{d}_\rho + \frac{i}{\hbar} q A_\rho) - mc^2 \Big) \phi + \frac{u}{\mu_0} F_{\sigma\tau} F^{\sigma\tau} \tag{4.119}$$

Als reelle Zahl u setzen wir $u = -1/4$ ein, weil nur mit diesem Zahlenwert – wie wir am Ende dieses Abschnitts nachprüfen werden – die bekannten Maxwell'schen Gleichungen der Klassischen Elektrodynamik aus der Lagrangedichte (4.120) hervorgehen. Die Wahl eines anderen Zahlenwertes für u entspräche einer Neudefinition der Magnetischen Feldkonstanten μ_0. Das wäre nicht „falsch", wir haben zu einer Neudefinition von μ_0 aber keinen Anlass.

Mit $u = -1/4$ ergibt sich die Lagrangedichte:

$$\boxed{\mathcal{L} = \phi^\dagger \gamma^0 \Big(i\hbar c \gamma^\rho (\mathrm{d}_\rho + \frac{i}{\hbar} q A_\rho) - mc^2 \Big) \phi - \frac{1}{4\mu_0} F_{\sigma\tau} F^{\sigma\tau}} \tag{4.120}$$

Aus dieser folgt die Feldgleichung für die μ-Komponente des Eichfeldes A:

$$\mathrm{d}_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\nu A_\mu)} \underbrace{- \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu}}_{(4.113)} = -\frac{1}{4\mu_0} \mathrm{d}_\nu \frac{\partial F_{\sigma\tau} F^{\sigma\tau}}{\partial(\mathrm{d}_\nu A_\mu)} + \underbrace{\phi^\dagger \gamma^0 c \gamma^\mu q \phi}_{j^\mu} = 0 \tag{4.121}$$

Mit

$$F_{\sigma\tau} F^{\sigma\tau} = F^{\nu\rho} g_{\sigma\nu} g_{\tau\rho} F^{\sigma\tau} = F^{\nu\rho} F_{\nu\rho} = F^{\sigma\tau} F_{\sigma\tau} \tag{4.122}$$

gilt

$$\frac{\partial F_{\sigma\tau}F^{\sigma\tau}}{\partial(\mathrm{d}_\nu A_\mu)} = \frac{\partial F_{\sigma\tau}}{\partial(\mathrm{d}_\nu A_\mu)}F^{\sigma\tau} + F^{\sigma\tau}\frac{\partial F_{\sigma\tau}}{\partial(\mathrm{d}_\nu A_\mu)} = 2\frac{\partial F_{\sigma\tau}}{\partial(\mathrm{d}_\nu A_\mu)}F^{\sigma\tau} =$$
$$= 2(g^\nu{}_\sigma g^\mu{}_\tau - g^\nu{}_\tau g^\mu{}_\sigma)F^{\sigma\tau} = 2(F^{\nu\mu} - F^{\mu\nu}) = 4F^{\nu\mu}\ . \qquad (4.123)$$

Einsetzen in (4.121) ergibt

$$-\frac{1}{\mu_0}\mathrm{d}_\nu F^{\nu\mu} + \underbrace{\phi^\dagger\gamma^0 c\gamma^\mu q\phi}_{j^\mu} = 0\ . \qquad (4.124)$$

Diese Gleichung muss für $\mu = 0, 1, 2, 3$ erfüllt sein:

$$\boxed{\mathrm{d}_\nu F^{\nu\mu} = \mu_0\phi^\dagger\gamma^0 c\gamma^\mu q\phi = \mu_0 j^\mu \quad \text{mit } \mu = 0, 1, 2, 3} \qquad (4.125)$$

Das hier eingetragene j^μ ist ist eine Komponente der invarianten Stromdichte der *globalen* Phasentransformation, die wir in Gleichung (4.87) gefunden haben. Wir hatten im Anschluss an (4.105) bereits darauf hingewiesen, dass mit der Eichinvarianz kein neuer erhaltener Strom verbunden ist.
Der Nutzen der Eichsymmetrie besteht vielmehr darin, dass sie

1. für jedes geladene Feld die Existenz eines Eichfeldes vorhersagt,
2. eine klare und eindeutige Regel für die Kopplung zwischen Feld und Eichfeld enthält, nämlich die Ersetzung der normalen Ableitung durch die kovariante Ableitung,
3. die Eigenschaften des Eichfeldes und seine Feldgleichung weitestgehend festlegt.

Den dritten Punkt wollen wir abschließend noch kurz vertiefen. In die Lagrangedichte (4.120) haben wir das Eichfeld in Form zweier Summanden eingefügt: Erstens als kovariante Ableitung, wodurch die Eichinvarianz erreicht wurde. Und zweitens als Term $-\frac{1}{4\mu_0}F_{\sigma\tau}F^{\sigma\tau}$, was – abgesehen vom Faktor $-\frac{1}{4}$, den wir im Hinblick auf die Maxwell-Gleichungen so getuned haben – die einfachste Möglichkeit ist, eine dynamische Feldgleichung für das Eichfeld zu erhalten ohne die Eichinvarianz zu stören. Jetzt wollen wir uns davon überzeugen, dass durch diese Lagrangedichte tatsächlich die vier Maxwell'schen Gleichungen festgelegt werden, und damit die gesamte klassische Theorie der Elektrodynamik bestimmt ist.

Dazu schreiben wir das Eichfeld in der üblichen Form

$$A = (A^\rho) = \begin{pmatrix} \Phi/c \\ \boldsymbol{A} \end{pmatrix} \tag{4.126}$$

mit dem skalaren elektrischen Potential Φ und dem magnetischen Vektorpotential $\boldsymbol{A}$, und benutzen für die Komponenten des Feldstärketensors (4.114) die Maxwell'sche Nomenklatur

$$E^k/c \equiv F^{k0} = -F^{0k} = \mathrm{d}^k A^0 - \mathrm{d}^0 A^k = -\mathrm{d}_k A^0 - \mathrm{d}_0 A^k \tag{4.127a}$$
$$B^1 \equiv -F^{23} = F^{32} = \mathrm{d}^3 A^2 - \mathrm{d}^2 A^3 = -\mathrm{d}_3 A^2 + \mathrm{d}_2 A^3 \tag{4.127b}$$
$$B^2 \equiv -F^{31} = F^{13} = \mathrm{d}^1 A^3 - \mathrm{d}^3 A^1 = -\mathrm{d}_1 A^3 + \mathrm{d}_3 A^1 \tag{4.127c}$$
$$B^3 \equiv -F^{12} = F^{21} = \mathrm{d}^2 A^1 - \mathrm{d}^1 A^2 = -\mathrm{d}_2 A^1 + \mathrm{d}_1 A^2 \tag{4.127d}$$
$$0 = F^{\rho\rho} = \mathrm{d}^\rho A^\rho - \mathrm{d}^\rho A^\rho \tag{4.127e}$$

beziehungsweise in Vektorschreibweise

$$\text{Elektrische Feldstärke:} \quad (E^k) = \boldsymbol{E} \equiv -\boldsymbol{\nabla}\Phi - \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} \tag{4.128a}$$
$$\text{Magnetische Feldstärke:} \quad (B^k) = \boldsymbol{B} \equiv \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} \quad . \tag{4.128b}$$

Die vierdimensionale Feldgleichung

$$(\mathrm{d}_\nu F^{\nu\rho}) = \mu_0 \phi^\dagger \gamma^0 c \begin{pmatrix} \gamma^0 \\ \boldsymbol{\gamma} \end{pmatrix} q\phi = \mu_0 \begin{pmatrix} j^0 \\ \boldsymbol{j} \end{pmatrix} \tag{4.125}$$

wird mit diesen Definitionen

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}_\nu F^{\nu 0} \\ \mathrm{d}_\nu F^{\nu 1} \\ \mathrm{d}_\nu F^{\nu 2} \\ \mathrm{d}_\nu F^{\nu 3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}_k E^k/c \\ -\mathrm{d}_0 E^1/c + \mathrm{d}_2 B^3 - \mathrm{d}_3 B^2 \\ -\mathrm{d}_0 E^2/c - \mathrm{d}_1 B^3 + \mathrm{d}_3 B^1 \\ -\mathrm{d}_0 E^3/c + \mathrm{d}_1 B^2 - \mathrm{d}_2 B^1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E}/c \\ -\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{E}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} \end{pmatrix} = \mu_0 \begin{pmatrix} j^0 \\ \boldsymbol{j} \end{pmatrix} \quad . \tag{4.129}$$

Man definiert die

$$\text{Elektrische Feldkonstante:} \quad \epsilon_0 \equiv \frac{1}{c^2 \mu_0} \quad , \tag{4.130}$$

mit der man schließlich die zwei Maxwell'schen Gleichungen für die Divergenz von $\boldsymbol{E}$ und die Rotation von $\boldsymbol{B}$ erhält:

$$\epsilon_0 \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{j^0}{c} \tag{4.131a}$$

$$\frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{j} + \epsilon_0 \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{E}}{\mathrm{d}t} \tag{4.131b}$$

Diese beiden Gleichungen verknüpfen die Feldstärken mit ihren Quellen. Sie werden deshalb als Erregungsgleichungen bezeichnet. Die beiden anderen Maxwell'schen Gleichungen für die Divergenz von $\boldsymbol{B}$ und die Rotation von $\boldsymbol{E}$ sind unabhängig von j, und heißen deshalb Innere Feldgleichungen. Sie sind implizit bereits dadurch festgelegt, dass der Feldstärketensor

$$F_{\sigma\tau} \overset{(4.114)}{\equiv} \mathrm{d}_\sigma A_\tau - \mathrm{d}_\tau A_\sigma$$

durch Rotationsterme definiert wurde, weshalb

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}_\rho F_{\sigma\tau} + \mathrm{d}_\tau F_{\rho\sigma} + \mathrm{d}_\sigma F_{\tau\rho} = \\ &\quad = \mathrm{d}_\rho \mathrm{d}_\sigma A_\tau - \mathrm{d}_\rho \mathrm{d}_\tau A_\sigma + \mathrm{d}_\tau \mathrm{d}_\rho A_\sigma - \mathrm{d}_\tau \mathrm{d}_\sigma A_\rho + \\ &\qquad + \mathrm{d}_\sigma \mathrm{d}_\tau A_\rho - \mathrm{d}_\sigma \mathrm{d}_\rho A_\tau = 0 \end{aligned} \tag{4.132}$$

gilt. Da jeder Index vier Werte annehmen kann, sind dies $4^3 = 64$ Gleichungen. Aber alle Gleichungen mit zwei – oder gar drei – identischen Indizes sind wegen

$$\mathrm{d}_\sigma F_{\sigma\tau} + \mathrm{d}_\tau \underbrace{F_{\sigma\sigma}}_{=0} + \mathrm{d}_\sigma \underbrace{F_{\tau\sigma}}_{=-F_{\sigma\tau}} = 0 \tag{4.133}$$

trivial (nämlich $0 = 0$), und es bleiben nur $4! = 24$ nicht-triviale Gleichungen mit $\rho \neq \sigma \neq \tau \neq \rho$. Wenn der erste Summand in (4.132) statt $\mathrm{d}_\rho F_{\sigma\tau}$ als $\mathrm{d}_\tau F_{\rho\sigma}$ oder als $\mathrm{d}_\sigma F_{\tau\rho}$ gewählt wird, so ändert sich nur die Reihenfolge der

drei Summanden, aber die Gleichung bleibt gleich. Also gibt es nur $24/3 = 8$ verschiedene nichttriviale Gleichungen. Wegen $F_{\sigma\tau} = -F_{\tau\sigma}$ unterscheiden sich die Hälfte dieser Gleichungen nur durch das Vorzeichen von der anderen Hälfte, und es gibt nur $8/2 = 4$ linear unabhängige nicht-trivialen Gleichungen. Mit den Definitionen aus (4.127) lauten sie

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}_1 F_{23} + \mathrm{d}_3 F_{12} + \mathrm{d}_2 F_{31} = \\
&\quad = -\mathrm{d}_1 B^1 - \mathrm{d}_3 B^3 - \mathrm{d}_2 B^2 = 0 && \text{(4.134a)}\\
&\mathrm{d}_2 F_{30} + \mathrm{d}_0 F_{23} + \mathrm{d}_3 F_{02} = \\
&\quad = -\mathrm{d}_2 E^3/c - \mathrm{d}_0 B^1 + \mathrm{d}_3 E^2/c = 0 && \text{(4.134b)}\\
&\mathrm{d}_3 F_{01} + \mathrm{d}_1 F_{30} + \mathrm{d}_0 F_{13} = \\
&\quad = \mathrm{d}_3 E^1/c - \mathrm{d}_1 E^3/c + \mathrm{d}_0 B^2 = 0 && \text{(4.134c)}\\
&\mathrm{d}_0 F_{12} + \mathrm{d}_2 F_{01} + \mathrm{d}_1 F_{20} = \\
&\quad = -\mathrm{d}_0 B^3 + \mathrm{d}_2 E^1/c - \mathrm{d}_1 E^2/c = 0 \quad , && \text{(4.134d)}
\end{aligned}$$

woraus durch wenige Umstellungen

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_1 B^1 + \mathrm{d}_2 B^2 + \mathrm{d}_3 B^3 &= 0 && \text{(4.135a)}\\
\mathrm{d}_2 E^3 - \mathrm{d}_3 E^2 &= -c\,\mathrm{d}_0 B^1 && \text{(4.135b)}\\
\mathrm{d}_3 E^1 - \mathrm{d}_1 E^3 &= -c\,\mathrm{d}_0 B^2 && \text{(4.135c)}\\
\mathrm{d}_1 E^2 - \mathrm{d}_2 E^1 &= -c\,\mathrm{d}_0 B^3 && \text{(4.135d)}
\end{aligned}$$

beziehungsweise in Vektorschreibweise

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} &= 0 && \text{(4.136a)}\\
\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} &= -\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t} && \text{(4.136b)}
\end{aligned}$$

folgt. Also ergeben sich tatsächlich die vier Maxwell'schen Gleichungen (4.131) und (4.136) bereits aus der Forderung nach Eichinvarianz des Diracfeldes. Eine sehr bemerkenswerte Tatsache!

5 Die Lorentzgruppe

Im 4. Kapitel haben wir durch geschicktes Raten herausgefunden, wie skalare Felder bei Translationen (Abschnitt 4.2) oder Rotationen (Abschnitt 4.3) der Raum-Zeit-Koordinaten transformiert werden. Im Folgenden benötigen wir auch die Transformationen von Vektoren bzw. Vektorfeldern und von Spinoren bzw. Spinorfeldern beim Wechsel der Raum-Zeit-Koordinaten. Bei der Herleitung der gesuchten Transformationen werden wir leichter vorankommen, wenn wir systematischer als bisher vorgehen.

Die Transformationen von skalaren Feldern, von Vektoren bzw. Vektorfeldern und von Spinoren bzw. Spinorfeldern bei Koordinatenrotationen und -translationen sind Darstellungen bestimmter Gruppen, und die skalaren Felder, Vektoren, und Spinoren sind die Basen dieser Darstellungen. In diesem Kapitel erläutern wir diese gruppentheoretische Betrachtungsweise, verschaffen uns eine ganze Reihe höchst nützlicher Werkzeuge, und geben zwei Transformationen, die Darstellungen der Lorentzgruppe sind, explizit an. Die Transformation von Spinoren werden wir im Kapitel 6 behandeln.

5.1 Die homogene eigentliche Lorentzgruppe $\{\ell\}$

Die inhomogene Lorentzgruppe (auch Poincarégruppe genannt) enthält Translationen (das sind Verschiebungen des Nullpunkts des Koordinatensystems, wobei die Richtungen der Koordinatenachsen unverändert bleiben), eigentliche und uneigentliche Rotationen (das sind Änderungen der Richtung einer oder mehrerer Koordinatenachsen, wobei der Nullpunkt des Koordinatensystems unverändert bleibt), und Kombinationen von Translationen und Rotationen. Die Kombinationen können immer als Hintereinanderschaltung einer Rotation und einer Translation beschrieben werden. Deshalb bringt es keinen Vorteil und nur unnötige formale Komplikationen, Translationen und Rotationen in Kombination zu betrachten. Man kann die Untersuchung der

Translationen vollständig abtrennen von der Untersuchung der Rotationen.

Die Transformation skalarer Felder bei Translation der Koordinaten hatten wir im Abschnitt 4.2 bereits beschrieben. Vektoren (mit Ausnahme des Ortsvektors) und Spinoren ändern sich bei Translationen überhaupt nicht. Der Ortsvektor, Vektorfelder und Spinorfelder werden bei Translation der Koordinaten genauso transformiert wie skalare Felder, d.h. es wird lediglich die Translation zum Ortsvektor bzw. zum Argument der Felder addiert. Eine weitere Untersuchung von Translationen ist deshalb nicht erforderlich, und wir werden uns in diesem Kapitel ganz auf die Untersuchung von Rotationen konzentrieren.

Die *eigentlichen* Rotationen können als Hintereinanderschaltung unendlich vieler Rotationen mit infinitesimal kleinem Drehwinkel betrachtet werden.

Als *uneigentliche* Rotation bezeichnet man die Kombination einer eigentlichen Rotation mit der Inversion einer oder mehrerer Koordinatenachsen. In der Praxis verwendet man die Zeitinversion T, die die Richtung der x^0-Achse umdreht (spiegelt), und die Paritätstransformation P, die die Richtungen aller drei Achsen x^1, x^2, x^3 spiegelt. Die Spiegelung einzelner Achsen und die Spiegelung beliebiger Kombinationen von Achsen lässt sich durch Kombination von T, P, und eigentlichen Rotationen erreichen.

Wir werden in diesem Buch unter dem einfachen Begriff Lorentzgruppe die *homogene eigentliche* Lorentzgruppe verstehen, also die Gruppe der Koordinatenrotationen der vierdimensionalen Raumzeit, die aus infinitesimal kleinen Rotationen zusammengesetzt werden können, und die den Nullpunkt des Koordinatensystems unverändert lassen. Achtung: Die Literatur ist hinsichtlich dieser Namenskonvention nicht einheitlich.

5.2 Gruppen und ihre Darstellungen

Wir haben die Menge aller eigentlichen Koordinatenrotationen als Gruppe bezeichnet, ohne bisher präzise zu sagen, was wir unter einer Gruppe verstehen. Das holen wir nach durch die folgende

Definition: Eine Menge $G = \{g, h, j, \ldots\}$ mit einer für jedes geordnete Paar von Elementen eindeutig definierten Verknüpfung $\circ$ ist eine *Gruppe*, wenn folgende 4 Bedingungen erfüllt sind:

(1) Abgeschlossenheit: $\forall g, h \in G : \; g \circ h \in G$
(2) Assoziativgesetz: $\forall g, h, j \in G : \; (g \circ h) \circ j = g \circ (h \circ j)$
(3) Einselement: $\exists\, e \in G : \; g \circ e = e \circ g = g \; \forall g \in G$
(4) Inverses Element:
$\forall g \in G \, \exists g^{-1} \in G : \; g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$

(5.1)

Zur Erklärung der verwendeten Abkürzungen $\exists$, $\in$, $:$, $\forall$ fassen wir die vier Bedingungen nochmal in Worte:

(1) Abgeschlossenheit: Für alle g, h aus G gilt: Das Produkt $g \circ h$ ist wieder ein Element aus G.
(2) Assoziativgesetz: Für alle g, h, j aus G gilt: Die Verknüpfung von $g \circ h$ mit j ist gleich der Verknüpfung von g mit $h \circ j$.
(3) Einselement: Es gibt ein Element e in G mit der Eigenschaft: Für alle g aus G ist $g \circ e = e \circ g = g$. Das Element e heißt Einselement der Gruppe G.
(4) Inverses Element: Zu jedem Element g der Gruppe G gibt es in G ein Element g^{-1} mit der Eigenschaft: $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$. Das Element g^{-1} heißt inverses Element von g.

Wir bezeichnen die Verknüpfung meist als *Produkt*, womit nicht unbedingt das algebraische Produkt zweier Zahlen gemeint zu sein braucht. Bei der Lorentzgruppe ist die Verknüpfung bzw. das Produkt gleich der Hintereinanderschaltung zweier Koordinatenrotationen. Das Zeichen $\circ$ schreiben wir häufig nicht aus, sondern definieren

$$hg \equiv h \circ g \quad .$$

Das Produkt braucht nicht kommutativ zu sein. Beispielsweise ist das Produkt von Rotationen im allgemeinen abhängig davon, ob man erst um die eine und dann um die andere Achse dreht, oder erst um die andere und dann um die eine.

Definition: Eine *Abbildung* A von einer Menge G auf eine Menge D ist eine Vorschrift mit folgenden zwei Eigenschaften:
(1) Jedem Element aus G wird eindeutig ein Element aus D zugeordnet:

$$A : G \longrightarrow D$$
$$\forall g \in G : \; g \xrightarrow{A} d(g) \in D \tag{5.2}$$

(2) Auf jedes Element $d \in D$ wird mindestens ein Element $g \in G$ abgebildet.

Abbildungen mit der Eigenschaft (2) werden als „surjektiv“ bezeichnet. Da wir in diesem Buch ausschließlich surjektive Abbildungen verwenden, haben wir diese Eigenschaft in die Definition der Abbildung integriert. Die Abbildung muss eindeutig sein, sie braucht jedoch nicht eineindeutig (= umkehrbar eindeutig) zu sein. Es dürfen auch mehrere verschiedene Elemente von G auf das gleiche Element von D abgebildet werden.

Definition: Die Elemente einer Gruppe D seien Transformationen, die in einem von den Vektoren $v_1, v_2, v_3, \ldots$ aufgespannten Vektorraum V wirken. D heißt *Darstellung* einer Gruppe G, wenn es eine Abbildung $A : G \longrightarrow D$ gibt, die die Gruppenstruktur erhält:

$$\forall g, h \in G : \; d(h \circ g) = d(h)d(g) \tag{5.3}$$

Der Vektorraum V wird als *Darstellungsraum* bezeichnet. Die Vektoren $v_1, v_2, v_3, \ldots \in V$, die den Darstellungsraum aufspannen, werden als *Basis* der Darstellung D bezeichnet.

Wenn die Abbildung A eineindeutig (=umkehrbar eindeutig) ist, dann werden D und G als *isomorph* bezeichnet. Wenn die Abbildung A lediglich eindeutig, aber nicht eineindeutig ist, wenn es also Elemente $d \in D$ gibt, auf die mehrere Elemente $g \in G$ abgebildet werden, dann ist die Gruppe D zur Gruppe G *homomorph*. Die Definition der Darstellung verlangt lediglich, dass D zu G homomorph ist. Wenn die Gruppen darüber hinaus isomorph sind, dann wird D als *treue Darstellung* von G bezeichnet.

Achtung: Einige Autoren definieren den Begriff Abbildung anders. Sie verlangen nicht, dass die Abbildung eindeutig ist, sondern lassen auch

mehrdeutige Abbildungen zu. Folglich sind auch ihre Darstellungen nicht eindeutig, sondern sie kennen „mehrwertige Darstellungen“. Beispielsweise bezeichnen sie die Matrixgruppe SU(2) als eine zweiwertige Darstellung der Drehgruppe $\{\overline{\ell}\}$ des dreidimensionalen Ortsraums. Darauf kommen wir am Ende von Abschnitt 6.1.3 zurück. Wir bleiben in diesem Buch konsequent bei der Definition, dass Abbildungen und Darstellungen eindeutig sein müssen.

Achtung: Manche Autoren fassen die Definition der Darstellung wesentlich enger: Ihre Darstellungen sind ausschließlich Gruppen $n \times n$-dimensionaler Matrizen, und die Basis ihrer Darstellungen sind n-komponentige Spaltenvektoren. Selbst wenn $n = \infty$ zugelassen wird, halten wir diese Einschränkung für unsinnig. Nach unserer Definition können Darstellungen Gruppen von Matrizen sein, brauchen es aber nicht. Wir benötigen auch Darstellungen, die zwar Transformationsgruppen, aber keine Matrixgruppen sind. Deshalb halten wir an der allgemeiner gefassten Definition (5.3) fest. In Abschnitt 5.4 kommen wir auf diesen Punkt zurück.

Darstellungen sind Gruppen, deren Elemente Transformationen sind. Die Transformationen transformieren die Basisvektoren der Darstellung. Abstrakte Gruppen sind ausschließlich durch ihre Gruppenverknüpfung $\circ$ definiert, ihre Elemente wirken auf nichts außerhalb der Gruppe. Es gibt Gruppen, die man meist unmittelbar als Transformationsgruppe kennenlernt, nicht als abstrakte Gruppe. Vier wichtige Beispiele: Die Gruppe $\{\Lambda\}$ der Lorentztransformationen besteht aus 4×4-dimensionalen Matrizen, die Vektoren mit vier Raum-Zeit-Komponenten transformieren. Die Matrixgruppe SO(3) besteht aus 3×3-dimensionalen Matrizen, die dreidimensionale, im Ortsraum definierte Vektoren transformieren. Die Elemente der Matrixgruppen SU(2) und SL(2,$\mathbb{C}$) sind 2×2-dimensionale Matrizen, die zweidimensionale Spinoren transformieren. Auch solche Transformationsgruppen betrachten wir als Darstellungen abstrakter, ausschließlich durch ihre Gruppenstruktur definierter Gruppen:

abstrakte Gruppe	Darstellung
Lorentzgruppe $\{\ell\}$	$\{\Lambda\}$
3-D Raumgruppe $\{\overline{\ell}\}$	SO(3)
$\{\overline{\mathcal{B}}\}$	SU(2)
$\{\mathcal{B}\}$	SL(2,$\mathbb{C}$)

Die vier genannten Darstellungen sind nur Beispiele für unendlich viele, denn zu jeder abstrakten Gruppe kann man unendlich viele verschiedene Darstellungen konstruieren.

Die Lorentzgruppe bezeichnen wir als $\{\ell\}$, ihre Elemente – die einzelnen Rotationen der Raum-Zeit-Koordinaten – nennen wir $\ell^B, \ell^C, \ell^D, \ldots$ (Den Buchstaben A sparen wir für einen anderen Zweck auf). Um eine Darstellung der Lorentzgruppe zu konstruieren, betrachten wir einen Vektorraum V mit Vektoren $v_j, v_k, v_l, \ldots$. Bei der Rotation ℓ^B der Raum-Zeit-Koordinaten wird der Vektor $v_j \in V$ in ein Element $v_p \in V$ des gleichen Vektorraums transformiert:

$$v_j \xrightarrow{\ell^B} d(\ell^B)v_j = v_p \quad \text{mit } v_j, v_p \in V \tag{5.4}$$

Die Transformationen d transformieren die Elemente $v \in V$ in andere (oder evtl. auch die gleichen) Elemente $v \in V$. Es handelt sich um invertierbare Transformationen, denn es gilt ja auch $v_j = d(\ell^{B\,-1})v_p = d^{-1}(\ell^B)v_p$. Mit der Hintereinanderschaltung von Transformationen als Verknüpfung, und mit der identischen Transformation I als Einselement, bildet die Menge D der Transformationen d eine Gruppe, denn sie erfüllt alle Bedingungen der Definition (5.1).

Aus (5.4) kann man eine Abbildung

$$A : \{\ell\} \longrightarrow D \tag{5.5}$$

von der Lorentzgruppe auf die Menge D der auf dem Vektorraum V definierten invertierbaren Transformationen d ablesen:

$$\boxed{\begin{array}{l} \ell^B \xrightarrow{A} d(\ell^B) \\ \text{wird definiert durch} \\ v_j \xrightarrow{\ell^B} d(\ell^B)v_j \quad \forall v_j \in V \end{array}} \tag{5.6}$$

Mit der soeben definierten Abbildung A bildet die Gruppe D eine Darstellung der Lorentzgruppe $\{\ell\}$, denn sie erhält – wie in Definition (5.3) gefordert – die Gruppenstruktur der Lorentzgruppe:

$$\forall \ell^B, \ell^C \in \{\ell\} : \; d(\ell^C \ell^B) = d(\ell^C) d(\ell^B)$$

Die Darstellung D kann eine treue Darstellung sein, muss es aber nicht. Eine Darstellung der Lorentzgruppe, die keine treue Darstellung ist, erhält man beispielsweise, wenn V ein eindimensionaler Vektorraum ist, der durch den Basisvektor (1) aufgespannt wird. Dann besteht die Darstellung D nur aus der einzigen Matrix $d = (1)$, und die Abbildung A bildet sämtliche Elemente $\ell^B, \ell^C, \ell^D, \ldots \in \{\ell\}$ auf das Element $(1) \in D$ ab. Diese Darstellung ist eindimensional gemäß folgender

Definition: Als *Dimension* einer Darstellung D wird die Dimension des Vektorraums V bezeichnet, auf dem die Transformationen $d \in D$ definiert sind. Die Dimension des Vektorraums V wiederum ist gleich der Anzahl linear unabhängiger Vektoren $v \in V$, die den Vektorraum aufspannen. (5.7)

Als Zusammenfassung dieses Abschnitts kann man sagen: Wenn wir herausfinden wollen, wie bestimmte mathematische Objekte bei einer Rotation des Koordinatensystems transformiert werden, dann suchen wir eine Gruppe von Transformationen, die auf dem Vektorraum dieser mathematischen Objekte definiert sind und eine Darstellung der Lorentzgruppe bilden. Damit haben wir die gesuchten Transformationen noch nicht gefunden, sondern zunächst nur die Fragestellung in veränderter Weise formuliert. Es wird uns aber unter diesem neuen Blickwinkel leichter gelingen, die gesuchten Transformationen explizit zu konstruieren.

5.3 Lie-Gruppen

Marius Sophus Lie (1842 - 1899) leistete Pionierarbeit bei der Erforschung kontinuierlicher Gruppen. Eine Klasse kontinuierlicher Gruppen mit analytischer Parameter-Mannigfaltigkeit ist seither nach ihm benannt. Auch die Lorentzgruppe gehört zu den Lie-Gruppen. Eine Lie-Gruppe wird durch ihre Parameter-Mannigfaltigkeit und durch ihre Lie-Algebra eindeutig definiert. In diesem Abschnitt klären wir diese beiden Begriffe, und spezifizieren insbesondere die Parameter-Mannigfaltigkeit und die Lie-Algebra der Lorentzgruppe.

5.3.1 Parameter-Mannigfaltigkeit

Jedes Element einer Lie-Gruppe wird durch k reelle Zahlen $\Omega = (\Omega_1, \ldots, \Omega_k)$ parametrisiert. Im konkreten Fall der Lorentzgruppe gibt es sechs reelle Parameter, nämlich die Drehwinkel Ω^{10},Ω^{20},Ω^{30} in den drei Raum-Zeit Ebenen 10, 20, 30, und die Drehwinkel Ω^{23},Ω^{31},Ω^{12} in den rein räumlichen Ebenen 23, 31, 12 der vierdimensionalen Raumzeit. Die k reellen Parameter beliebiger Lie-Gruppen können als Punkte eines k-dimensionalen Parameter-Raums betrachtet werden. Jeder Punkt des Parameter-Raums entspricht einem Parameter-Multiplet, und damit einem bestimmten Element der Lie-Gruppe. Zwischen den Parameterpunkten besteht eine topologische Beziehung, denn man kann den Abstand zwischen den Punkten A und B, die die Parameter-Multiplets Ω^A und Ω^B repräsentieren, durch

$$\text{Abstand}(A, B) \equiv + \sqrt{(\Omega_1^A - \Omega_1^B)^2 + \ldots + (\Omega_k^A - \Omega_k^B)^2} \qquad (5.8)$$

definieren. Bei vielen Gruppen definieren mehrere verschiedene Parameter-Multiplets ein und dasselbe Element der Gruppe. Im Fall der Lorentzgruppe wird eine Drehung der drei rein räumlichen Koordinatenachsen um einen bestimmten Winkel $\mathbf{\Omega}$ bei unveränderter Zeitachse durch die unendlich vielen verschiedenen Parameter $\mathbf{\Omega} + z \cdot 2\pi\mathbf{\Omega}/|\Omega|$ mit beliebiger ganzer Zahl $z \in \mathbb{Z}$ definiert. Eine derartige Redundanz gibt es bei den Raum-Zeit-Drehungen nicht. Im Parameter-Multiplet (Ω^{10},Ω^{20},Ω^{30},Ω^{23},Ω^{31},Ω^{12}) der Lorentzgruppe parametrisieren die ersten drei Komponenten eindeutig genau ein Element der Lorentzgruppe, aber die letzten drei Komponenten sind mit 2π periodisch und deshalb unendlich redundant.

Den Ballast unendlich vieler redundanter Parameter möchte man in der Parameter-Mannigfaltigkeit nicht mitschleppen. Deswegen definiert man, dass von allen Punkten im Parameterraum, die das gleiche Element der Gruppe parametrisieren, nur derjenige zur Parameter-Mannigfaltigkeit gehört, der den kleinsten Abstand zum Parameter-Multiplet des Einselements der Gruppe hat. Damit wird im Fall der Lorentzgruppe die Mannigfaltigkeit der Parameter Ω^{23},Ω^{31},Ω^{12} eingeschränkt auf eine dreidimensionale Kugel um den Punkt $\Omega = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$ mit Radius π. Jede rein räumliche Drehung wird jetzt durch genau einen Punkt in der Parameter-Mannigfaltigkeit

repräsentiert, mit Ausnahme der Rotationen mit dem Winkel $\pm\pi\,\boldsymbol{\Omega}/|\Omega|$. Da $\ell(+\pi\,\boldsymbol{\Omega}/|\Omega|) = \ell(-\pi\,\boldsymbol{\Omega}/|\Omega|)$ ist, wird jede π-Drehung durch zwei Parameterpunkte definiert, die sich auf der Oberfläche der Parameterkugel diametral gegenüber liegen. Es ist üblich, diese Punkte beide zur Parameter-Mannigfaltigkeit zu rechnen, aber als einen einzigen topologischen Punkt der Mannigfaltigkeit zu betrachten.

Beiläufig (weil dies Detail in unseren folgenden Betrachtungen keine Rolle spielt) merken wir an, dass diese Definition der Parameter-Mannigfaltigkeit auch eine präzisere Definition des Abstands zwischen zwei Punkten erforderlich macht. Denn was ist beispielsweise der Abstand zwischen dem topologischen Punkt $+0.5\pi\,\boldsymbol{\Omega}/|\Omega|$ und dem topologischen Punkt $\pm\pi\,\boldsymbol{\Omega}/|\Omega|$ in den drei rein räumlichen Komponenten der Parameter-Mannigfaltigkeit der Lorentzgruppe? Ist der Abstand 0.5π oder 1.5π? Wir definieren, dass der Abstand zwischen topologischen Punkten immer der kleinste aller in Frage kommenden Werte ist.

Nach diesen Vorüberlegungen können wir die Definition der Parameter-Mannigfaltigkeit formulieren:

Definition: Jedes Multiplet der k reellen Parameter einer Lie-Gruppe wird als Punkt in einem k-dimensionalen Raum dargestellt. Die Menge dieser Punkte wird als topologische *Parameter-Mannigfaltigkeit* der Lie-Gruppe bezeichnet.
Wenn verschiedene Parameter-Multiplets das gleiche Element der Lie-Gruppe definieren, gehört nur derjenige Punkt zur Parameter-Mannigfaltigkeit, der den kleinsten Abstand zum Parameter-Multiplet des Einselements der Gruppe hat. Wenn mehrere euklidische Punkte dies Kriterium des minimalen Abstands erfüllen, so gehören sie alle zur Parameter-Mannigfaltigkeit, werden aber als ein einziger topologischer Punkt betrachtet. (5.9)

Die Parameter-Mannigfaltigkeit $\{\Omega^{10},\Omega^{20},\Omega^{30},\Omega^{23},\Omega^{31},\Omega^{12}\}$ der Lorentzgruppe ist in den ersten drei Komponenten unendlich ausgedehnt, $-\infty \leq \Omega_{j0} \leq +\infty$. In den anderen drei Komponenten ist sie eine Kugel mit dem Radius π um den Nullpunkt. Jeweils 2 diametral auf der Oberfläche der Kugel gegenüberliegende euklidische Punkte bilden einen einzigen topologischen Punkt, weil sie das gleiche Element der Lorentzgruppe parametrisieren.

5.3.2 Lie-Algebra

Zu den definierenden Eigenschaften von Lie-Gruppen gehört, dass ihre Parameter-Mannigfaltigkeit analytisch ist. Das bedeutet, dass man ein Gruppenelement $\ell(\Omega)$, das durch das Parameter-Multiplet Ω definiert wird, in einer Taylorreihe um das Element $\ell(0)$ entwickeln kann. Wenn man infinitesimal kleine Parameter

$$\omega_k \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{\Omega_k}{n} \quad \text{mit } n \in \mathbb{N} \tag{5.10}$$

betrachtet, dann kann man die Reihe nach dem linearen Glied abbrechen:

$$\ell_{\text{INF}}(\omega) = \ell(0) + \omega_k \frac{\mathrm{d}\,\ell(\Omega)}{\mathrm{d}\,\Omega_k}\Big|_{\Omega=0} = \ell(0) + \frac{i}{\hbar}\omega_k l^k \tag{5.11}$$

$$\boxed{l^k \equiv -i\hbar \frac{\mathrm{d}\,\ell(\Omega)}{\mathrm{d}\,\Omega_k}\Big|_{\Omega=0}} \tag{5.12}$$

Die k Operatoren l^k werden als *Generatoren* der Lie-Gruppe bezeichnet. Dieser Definition sind wir in (4.8) schon einmal begegnet. Eine endliche Transformation enthält man dadurch, dass man unendlich viele unendlich kleine Transformationen hintereinander schaltet:

$$\begin{aligned} \ell(\Omega) &= \lim_{n\to\infty} \left(\ell(0) + \frac{i}{\hbar}\frac{\Omega_k}{n} l^k\right)^n \\ &= \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\Omega_k l^k\right\} \end{aligned} \tag{5.13}$$

Im Fall der Lorentzgruppe ist es zweckmäßig, die sechs reellen Parameter in einer schiefsymmetrischen Matrix anzuordnen:

$$(\Omega^{\sigma\tau}) = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega^{10} & -\Omega^{20} & -\Omega^{30} \\ \Omega^{10} & 0 & \Omega^{12} & -\Omega^{31} \\ \Omega^{20} & -\Omega^{12} & 0 & \Omega^{23} \\ \Omega^{30} & \Omega^{31} & -\Omega^{23} & 0 \end{pmatrix} \tag{5.14}$$

Den sechs Generatoren l geben wir die gleichen doppelten Indizes, und ordnen sie ebenfalls in einer schiefsymmetrischen Matrix an:

$$(l^{\sigma\tau}) = \begin{pmatrix} 0 & -l^{10} & -l^{20} & -l^{30} \\ l^{10} & 0 & l^{12} & -l^{31} \\ l^{20} & -l^{12} & 0 & l^{23} \\ l^{30} & l^{31} & -l^{23} & 0 \end{pmatrix} \tag{5.15}$$

In der Summe $\Omega_{\sigma\tau} l^{\sigma\tau}$ kommt damit jeder Parameter und jeder Generator doppelt vor, deshalb muss man einen Faktor 1/2 einbauen, wenn man die Elemente der Lorentzgruppe in der Exponentialform (5.13) schreibt:

$$\boxed{\ell(\Omega) = \exp\left\{\frac{i}{2\hbar}\Omega_{\sigma\tau} l^{\sigma\tau}\right\}} \tag{5.16}$$

Wir merken an, dass in den Produkten $\Omega_{\sigma\tau} l^{\sigma\tau} = \Omega^{\alpha\beta} g_{\alpha\sigma} g_{\beta\tau} l^{\sigma\tau}$ bei den Raum-Zeit-Indexkombinationen $j0$ und $0j$ ein Faktor -1 auftritt, bei den Raum-Raum-Indexkombinationen jj aber nicht.

Wenn man Elemente von Lie-Gruppen verknüpft, dann ist eine kleine Klippe zu umschiffen, denn die naheliegende Vermutung

$$\begin{aligned} \ell(\Omega^C) \equiv \ell(\Omega^B)\,\ell(\Omega^A) &= \exp\left\{\frac{i}{2\hbar}\,\Omega^B{}_{\gamma\delta}\, l^{\gamma\delta}\right\} \exp\left\{\frac{i}{2\hbar}\,\Omega^A{}_{\alpha\beta}\, l^{\alpha\beta}\right\} \\ &\overset{??}{=} \exp\left\{\frac{i}{2\hbar}(\Omega^B{}_{\sigma\tau} + \Omega^A{}_{\sigma\tau})\, l^{\sigma\tau}\right\} \quad \text{ist falsch!} \end{aligned} \tag{5.17}$$

Wir haben die kontrahierten Indizes in den Produkten $\Omega^B{}_{\gamma\delta}\, l^{\gamma\delta}$ und $\Omega^A{}_{\alpha\beta}\, l^{\alpha\beta}$ nach $\sigma\tau$ umbenannt. Von der Möglichkeit, kontrahierte Indizes umzubenennen, werden wir in den folgenden Ableitungen vielfach Gebrauch machen. Der Fehler in (5.17) lässt sich am besten verstehen und beheben, wenn man das infinitesimale Element betrachtet:

$$\begin{aligned} \ell_{\text{INF}}(\omega^C) &\overset{(5.11)}{=} (\ell(0) + \frac{i}{2\hbar}\,\omega^B{}_{\gamma\delta}\, l^{\gamma\delta})(\ell(0) + \frac{i}{2\hbar}\,\omega^A{}_{\alpha\beta}\, l^{\alpha\beta}) \\ &= \ell(0) + \frac{i}{2\hbar}(\omega^A{}_{\sigma\tau} + \omega^B{}_{\sigma\tau}) l^{\sigma\tau} - \frac{1}{4\hbar^2}\,\omega^B{}_{\gamma\delta}\,\omega^A{}_{\alpha\beta}\, l^{\gamma\delta} l^{\alpha\beta} \end{aligned} \tag{5.18}$$

Das Produkt $\omega^B \omega^A$ im letzten Summanden taucht in der Exponentialform (5.17) nicht auf, und genau das ist der Fehler. Denn $\omega^B \omega^A$ ist nicht notwendig $\mathcal{O}(\omega^2)$, sondern kann durchaus auch $\mathcal{O}(\omega)$ sein. Wenn beispielsweise ω^A und

ω^B Drehwinkel um zueinander senkrechte Rotationsachsen sind, dann ist die resultierende „diagonale“ Gesamtrotation von gleicher Größenordnung wie die beiden Teilrotationen. Terme mit $\omega^B\omega^A$ dürfen also – im Gegensatz zu Termen $\omega^A\omega^A$ oder $\omega^B\omega^B$, die in jedem Fall $\mathcal{O}(\omega^2)$ sind, – nicht von vornherein vernachlässigt werden.

Es muss deshalb im Exponenten von (5.17) auch ein Term mit $\omega^B\omega^A$ auftauchen. Dazu machen wir den Ansatz

$$\omega^C{}_{\sigma\tau} = \omega^B{}_{\sigma\tau} + \omega^A{}_{\sigma\tau} + \frac{1}{2}\,\omega^B{}_{\gamma\delta}\,\frac{1}{2}\,\omega^A{}_{\alpha\beta}\,\frac{i}{\hbar} f^{\gamma\delta\alpha\beta}{}_{\sigma\tau} \tag{5.19}$$

mit zunächst unbekannten Strukturkonstanten $f^{\gamma\delta\alpha\beta}{}_{\sigma\tau}$. Die beiden Faktoren $\frac{1}{2}$ setzen wir wieder ein, weil ja bei der Summation über $\gamma, \delta, \alpha, \beta$ jeder der sechs Parameter ω^B und jeder der sechs Parameter ω^A doppelt auftaucht. Anmerkung: Mathematisch orientierte Autoren definieren – anders als wir – den Generator (5.12) ohne den Faktor $\hbar$. Folgerichtig klammern sie dann – wieder anders als wir – im Ansatz (5.19) keinen Faktor $1/\hbar$ aus den Strukturkonstanten aus.

Ein infinitesimales Element $\ell_{\text{INF}}(\omega)$ der Lorentzgruppe entsteht aus der Taylorentwicklung um das Element $\ell(0)$, wobei nur diejenigen Reihenglieder beibehalten werden, die im reellen Parameter ω linear sind. Im Fall von ℓ^C_{INF} muss man die Reihe bis zum quadratischen Glied entwickeln, denn mit unserem Ansatz sind in $\omega^C{}^2$ Terme der Art $\omega^B\,\omega^A$ enthalten, die $\mathcal{O}(\omega)$ sein können:

$$\begin{aligned}
\ell_{\text{INF}}(\omega^C) &= \ell(0) + \frac{i}{2\hbar}\,\omega^C{}_{\sigma\tau}\,l^{\sigma\tau} - \frac{1}{8\hbar^2}\,\omega^C{}_{\sigma\tau}\,\omega^C{}_{\mu\nu}\,l^{\sigma\tau}l^{\mu\nu} \\
&= \ell(0) + \frac{i}{2\hbar}(\,\omega^B{}_{\sigma\tau} + \omega^A{}_{\sigma\tau} + \omega^B{}_{\gamma\delta}\,\omega^A{}_{\alpha\beta}\,\frac{i}{4\hbar} f^{\gamma\delta\alpha\beta}{}_{\sigma\tau})l^{\sigma\tau} \\
&\quad - \frac{1}{8\hbar^2}(\,\omega^B{}_{\sigma\tau}\,\omega^A{}_{\mu\nu} + \omega^A{}_{\sigma\tau}\,\omega^B{}_{\mu\nu})l^{\sigma\tau}l^{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Terme, die $\omega^B{}^2$ oder $\omega^A{}^2$ enthalten, sind natürlich immer $\mathcal{O}(\omega^2)$, so dass wir sie vernachlässigen durften. Aus dem gleichen Grund reicht bei ℓ^A_{INF} und ℓ^B_{INF} – anders als bei ℓ^C_{INF} – die Entwicklung bis zum linearen Reihenglied aus.

Der Faktor $\omega^B{}_{\gamma\delta}\,\omega^A{}_{\alpha\beta}\,l^{\gamma\delta}l^{\alpha\beta}$ im letzten Summanden von (5.18) lässt sich

folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned}\omega^B{}_{\gamma\delta}\,\omega^A{}_{\alpha\beta}\,l^{\gamma\delta}l^{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\Big(\omega^B{}_{\gamma\delta}\,\omega^A{}_{\alpha\beta}\,l^{\gamma\delta}l^{\alpha\beta} + \omega^B{}_{\gamma\delta}\,\omega^A{}_{\alpha\beta}\,l^{\gamma\delta}l^{\alpha\beta} - \\ &\quad - \omega^B{}_{\gamma\delta}\,\omega^A{}_{\alpha\beta}\,l^{\alpha\beta}l^{\gamma\delta} + \omega^B{}_{\gamma\delta}\,\omega^A{}_{\alpha\beta}\,l^{\alpha\beta}l^{\gamma\delta}\Big) = \\ &= \frac{1}{2}\Big(\omega^B{}_{\gamma\delta}\,\omega^A{}_{\alpha\beta}\,[l^{\gamma\delta}l^{\alpha\beta}, l^{\alpha\beta}l^{\gamma\delta}] + (\omega^B{}_{\gamma\delta}\,\omega^A{}_{\alpha\beta} + \omega^B{}_{\alpha\beta}\,\omega^A{}_{\gamma\delta})l^{\gamma\delta}l^{\alpha\beta}\Big)\end{aligned} \tag{5.21}$$

Das wird in den letzten Summanden von (5.18) eingesetzt:

$$\begin{aligned}\ell_{\text{INF}}(\omega^C) &= \ell(0) + \frac{i}{2\hbar}(\omega^A{}_{\sigma\tau} + \omega^B{}_{\sigma\tau})l^{\sigma\tau} - \\ &- \frac{1}{8\hbar^2}\Big(\omega^B{}_{\gamma\delta}\,\omega^A{}_{\alpha\beta}\,[l^{\gamma\delta}l^{\alpha\beta}, l^{\alpha\beta}l^{\gamma\delta}] + (\omega^B{}_{\gamma\delta}\,\omega^A{}_{\alpha\beta} + \omega^B{}_{\alpha\beta}\,\omega^A{}_{\gamma\delta})l^{\gamma\delta}l^{\alpha\beta}\Big)\end{aligned} \tag{5.22}$$

Dies Ergebnis ist mit (5.20) genau dann verträglich, wenn

$$\boxed{[l^{\gamma\delta}l^{\alpha\beta}, l^{\alpha\beta}l^{\gamma\delta}] = f^{\gamma\delta\alpha\beta}{}_{\sigma\tau}l^{\sigma\tau}} \tag{5.23a}$$

ist. Damit können wir jetzt (5.17) korrekt schreiben, indem wir $\Omega^C =$ (5.19) einsetzen:

$$\begin{aligned}&\ell(\Omega^B)\ell(\Omega^A) = \exp\Big\{\frac{i}{2\hbar}\,\Omega^B{}_{\beta\gamma}\,l^{\beta\gamma}\Big\}\exp\Big\{\frac{i}{2\hbar}\,\Omega^A{}_{\alpha\beta}\,l^{\alpha\beta}\Big\} \\ &= \exp\Big\{\frac{i}{2\hbar}(\Omega^B{}_{\sigma\tau} + \Omega^A{}_{\sigma\tau} + \Omega^B{}_{\gamma\delta}\Omega^A{}_{\alpha\beta}\frac{i}{4\hbar}f^{\gamma\delta\alpha\beta}{}_{\sigma\tau})l^{\sigma\tau}\Big\} \\ &= \ell(\Omega^B + \Omega^A + \Omega^B{}_{\gamma\delta}\Omega^A{}_{\alpha\beta}\,\frac{i}{4\hbar}f^{\gamma\delta\alpha\beta}) \\ &\quad \text{mit } f^{\gamma\delta\alpha\beta}{}_{\sigma\tau} \text{ bzw. } f^{\gamma\delta\alpha\beta} \equiv (f^{\gamma\delta\alpha\beta}{}_{\sigma\tau}) \text{ gemäß (5.23a)}\end{aligned} \tag{5.23b}$$

In dieser Gleichung taucht das Produkt $\Omega^B\Omega^A$ mit dem Gewicht auf – d.h. es wird in dem Maß als linear in Ω betrachtet – , wie sich der Kommutator der entsprechenden Generatoren von Null unterscheidet. In den Kommutatoren, bzw. in den aus den Kommutatoren gemäß (5.23a) berechneten

Strukturkonstanten f, steckt also die Information über die strukturellen Eigenschaften einer Lie-Gruppe.

(5.23) ist das fundamentale Gleichungssystem der *Lie-Algebra*. Wir haben bei seiner Herleitung an keiner Stelle von den besonderen Eigenschaften der Lorentzgruppe Gebrauch gemacht, es gilt deshalb allgemein für beliebige Lie-Gruppen.

Für die Lorentzgruppe $\{\ell\}$ legen wir die Strukturkonstanten *per Definition* folgendermaßen fest:

Strukturkonstanten der Lorentzgruppe:

$$f^{\alpha\beta\gamma\delta}{}_{\sigma\tau} \equiv i\hbar(g^{\beta\gamma}g^{\alpha}{}_{\sigma}g^{\delta}{}_{\tau} - g^{\beta\delta}g^{\alpha}{}_{\sigma}g^{\gamma}{}_{\tau} - g^{\alpha\gamma}g^{\beta}{}_{\sigma}g^{\delta}{}_{\tau} + g^{\alpha\delta}g^{\beta}{}_{\sigma}g^{\gamma}{}_{\tau}) \tag{5.24a}$$

Damit ist die

Lie-Algebra der Lorentzgruppe:

$$\begin{aligned}[l^{\alpha\beta}, l^{\gamma\delta}] &= f^{\alpha\beta\gamma\delta}{}_{\sigma\tau}l^{\sigma\tau} \\ &= i\hbar(g^{\beta\gamma}l^{\alpha\delta} - g^{\beta\delta}l^{\alpha\gamma} - g^{\alpha\gamma}l^{\beta\delta} + g^{\alpha\delta}l^{\beta\gamma})\end{aligned} \tag{5.24b}$$

Natürlich fällt diese ziemlich komplizierte Definition nicht einfach vom Himmel. Tatsächlich handelt es sich bei (5.24) um die Lie-Algebra der Lorentztransformationen $\{\Lambda\}$. Also ist es nicht erstaunlich wenn wir in Abschnitt 5.5 feststellen werden, dass die Lorentztransformationen die Lie-Algebra der Lorentzgruppe haben. Wir wollen aber an unserer systematischen Sichtweise festhalten, die konsequent zwischen abstrakten Gruppen und ihren Darstellungen unterscheidet. Deshalb legen wir (5.24) als Lie-Algebra der abstrakten Lorentzgruppe per Definition – ohne Bezug auf irgendeine Darstellung – fest.

Jede Darstellung D der Lorentzgruppe mit Elementen $d \in D$ muss nach (5.3) die Gruppenstruktur erhalten, also homomorph zur Lorentzgruppe $\{\ell\}$ sein:

$$\begin{aligned}
&\forall \ell(\Omega^A), \ell(\Omega^B) \in \{\ell\}: \\
&\quad d\Big(\ell(\Omega^B)\Big) d\Big(\ell(\Omega^A)\Big) = d\Big(\ell(\Omega^B)\ell(\Omega^A)\Big) = \\
&\quad \overset{(5.23b)}{=} d\Big(\ell(\Omega^B + \Omega^A + \Omega^B{}_{\gamma\delta}\Omega^A{}_{\alpha\beta}\,\frac{i}{4\hbar} f^{\gamma\delta\alpha\beta})\Big) \\
&\quad \text{mit } f^{\gamma\delta\alpha\beta} \equiv (f^{\gamma\delta\alpha\beta}{}_{\sigma\tau}) \text{ gemäß (5.24a)}
\end{aligned} \tag{5.25}$$

Da wir die Abbildung $\{\ell\} \to D$ anhand der reellen Parameter Ω in der Form $\ell(\Omega^B) \to d(\Omega^B)$ definieren, können wir übersichtlicher auch schreiben:

$$\begin{aligned}
&\forall \Omega^A, \Omega^B \in \text{ der Parameter-Mannigfaltigkeit von } \{\ell\}: \\
&\quad d(\Omega^B) d(\Omega^A) = d(\Omega^B + \Omega^A + \Omega^B{}_{\gamma\delta}\Omega^A{}_{\alpha\beta}\,\frac{i}{4\hbar} f^{\gamma\delta\alpha\beta}) \\
&\quad \text{mit } f^{\gamma\delta\alpha\beta} \equiv (f^{\gamma\delta\alpha\beta}{}_{\sigma\tau}) \text{ gemäß (5.24a)}
\end{aligned} \tag{5.26}$$

In Worten:

Satz: Eine Transformationsgruppe D ist genau dann eine Darstellung der Lorentzgruppe, wenn es eine eindeutige Abbildung $\{\ell\} \to D$ gibt, und wenn D die gleiche Lie-Algebra wie die Lorentzgruppe hat. (5.27)

In diesem Satz wird die Bedingung von Definition (5.3), dass eine Darstellung die Gruppenstruktur erhalten muss, ersetzt durch die Bedingung, dass die Darstellung die gleiche Lie-Algebra wie die Gruppe haben muss. Weil der Beweis der Strukturerhaltung für Gruppen mit überabzählbar vielen Elementen ziemlich schwierig wäre, wird sich dieser Satz als höchst nützlich erweisen zur Identifikation von Darstellungen der Lorentzgruppe.

5.4 Eine unendlich-dimensionale Darstellung

Die Elemente $\ell(\Omega^B)$ der Lorentzgruppe $\{\ell\}$ sind die Koordinatendrehungen um einen bestimmten Winkel Ω^B, wobei durch den schiefsymmetrischen Tensor Ω^B alle sechs Parameter der Drehung festgelegt werden. In Abschnitt 4.3 haben wir – ohne das Wort „Darstellung“ in den Mund zu nehmen – eine Darstellung $\{R\}$ der Lorentzgruppe beschrieben, deren Basis ein skalares

Feld $\phi(x)$ ist:

$$R(\Omega^B)\phi(x) \overset{(4.64)}{=} \exp\Big\{-\frac{i}{2\hbar}\,\Omega^B_{\sigma\tau}\,J^{\sigma\tau}\Big\}\phi(x) \tag{5.28}$$

Um nachzuweisen, dass die Gruppe der Transformationen $\{R\}$ tatsächlich eine Darstellung von $\{\ell\}$ ist müssen wir gemäß (5.27) prüfen, ob es erstens eine eindeutige Abbildung $\{\ell\} \to \{R\}$ gibt, und ob zweitens die Gruppe $\{R\}$ die gleiche Lie-Algebra wie die Lorentzgruppe $\{\ell\}$ hat.

Das erste Kriterium ist erfüllt, denn die Elemente von $\{R\}$ werden durch die gleichen sechs Parameter Ω festgelegt wie die Elemente von $\{\ell\}$. Dadurch ist die Abbildung $\ell(\Omega) \leftrightarrow R(\Omega)$ zwischen den Elementen beider Gruppen sogar eineindeutig, sodass $\{R\}$, falls auch das zweite Kriterium erfüllt wird, sogar eine treue Darstellung der Lorentzgruppe ist.

Zur Prüfung des zweiten Kriteriums berechnen wir die Kommutatoren der Generatoren von $\{R\}$, also der Drehimpulsoperatoren:

$$\begin{aligned}
[J^{\alpha\beta}, J^{\gamma\delta}] &\overset{(4.58)}{=} (i\hbar)^2\Big((x^\alpha g^{\beta\mu} - x^\beta g^{\alpha\mu})\mathrm{d}_\mu(x^\gamma g^{\delta\kappa} - x^\delta g^{\gamma\kappa})\mathrm{d}_\kappa \\
&\qquad - (x^\gamma g^{\delta\kappa} - x^\delta g^{\gamma\kappa})\mathrm{d}_\kappa(x^\alpha g^{\beta\mu} - x^\beta g^{\alpha\mu})\mathrm{d}_\mu\Big) \\
&= (i\hbar)^2\Big((x^\alpha g^{\beta\gamma} g^{\delta\kappa} - x^\alpha g^{\beta\delta} g^{\gamma\kappa} - x^\beta g^{\alpha\gamma} g^{\delta\kappa} + x^\beta g^{\alpha\delta} g^{\gamma\kappa})\mathrm{d}_\kappa \\
&\qquad - (x^\gamma g^{\delta\alpha} g^{\beta\mu} - x^\gamma g^{\delta\beta} g^{\alpha\mu} - x^\delta g^{\gamma\alpha} g^{\beta\mu} + x^\delta g^{\gamma\beta} g^{\alpha\mu})\mathrm{d}_\mu\Big) \\
&= (i\hbar)^2\Big(g^{\beta\gamma}(x^\alpha g^{\delta\mu} - x^\delta g^{\alpha\mu})\mathrm{d}_\mu - g^{\beta\delta}(x^\alpha g^{\gamma\mu} - x^\gamma g^{\alpha\mu})\mathrm{d}_\mu \\
&\qquad - g^{\alpha\gamma}(x^\beta g^{\delta\mu} - x^\delta g^{\beta\mu})\mathrm{d}_\mu + g^{\alpha\delta}(x^\beta g^{\gamma\mu} - x^\gamma g^{\beta\mu})\mathrm{d}_\mu\Big) \\
&= i\hbar(g^{\beta\gamma} J^{\alpha\delta} - g^{\beta\delta} J^{\alpha\gamma} - g^{\alpha\gamma} J^{\beta\delta} + g^{\alpha\delta} J^{\beta\gamma})
\end{aligned} \tag{5.29}$$

Das stimmt mit (5.24b) überein. Also ist $\{R\}$ eine treue Darstellung der Lorentzgruppe.

Die Darstellung $\{R\}$ ist überabzählbar unendlichdimensional. Denn ihr Generator J enthält Differentialoperatoren, die $\phi(x)$ nicht nur am Punkt x, sondern auch in einer infinitesimal kleinen Umgebung um diesen Raumzeitpunkt herum abtasten. Diese infinitesimale Umgebung enthält unendlich

viele Raumzeitpunkte, und die Gesamtheit aller $\phi(x)$ an diesen unendlich vielen Raumzeitpunkten spannt den Vektorraum auf, auf dem die Transformationen $\{R\}$ definiert sind.

Im Anschluss an die Definition (5.3) von Darstellungen haben wir erwähnt, dass manche Autoren nur Gruppen von $n \times n$-dimensionalen Matrizen (mit möglicherweise $n = \infty$) als Darstellung anerkennen. Die Gruppe der Transformationen $\{R\}$ wäre nach ihrem Verständnis keine Darstellung der Lorentzgruppe. Wir halten an der Definition fest, nach der Darstellungen Gruppen von Transformationen, aber nicht unbedingt Gruppen von Matrixtransformationen sein müssen. Die überabzählbar unendlichdimensionale Darstellung $\{R\}$ der Lorentzgruppe ist genauso „gut“ und wichtig wie die Matrixdarstellungen, die wir im Folgenden kennenlernen werden.

5.5 Eine vierdimensionale Darstellung

Wir wollen jetzt die *Lorentztransformationen* $\{\Lambda\}$ als vierdimensionale Darstellung der Lorentzgruppe $\{\ell\}$ konstruieren.

5.5.1 Generatoren

Als Basis der gesuchten Darstellung verwenden wir Vierervektoren (P^μ), und machen für eine infinitesimale Lorentztransformation Λ_{INF} den Ansatz

$$P'^\mu = \Lambda_{\text{INF}}{}^\mu{}_\nu P^\nu = (g^\mu{}_\nu - \omega^\mu{}_\nu) P^\nu \tag{5.30}$$

mit infinitesimal kleinem Winkel $\omega^\mu{}_\nu$. Wir haben $\omega^\mu{}_\nu$ von vornherein mit negativem Vorzeichen angesetzt, weil wir ja eine passive Drehung beschreiben wollen, und eine Drehung der Koordinaten um einen positiven Winkel einer Drehung der Vektoren P um einen negativen Winkel entspricht. Es ist die zentrale Aussage der Relativitätstheorie, dass das Quadrat der Vierervektoren bei der Transformation erhalten bleibt:

$$
\begin{aligned}
P_\nu P^\nu = P'_\mu P'^\mu &= P'^\sigma g_{\sigma\mu} P'^\mu = (g^\sigma{}_\tau - \omega^\sigma{}_\tau) P^\tau g_{\sigma\mu} (g^\mu{}_\nu - \omega^\mu{}_\nu) P^\nu \\
&= g^\sigma{}_\tau P^\tau g_{\sigma\mu} g^\mu{}_\nu P^\nu - g^\sigma{}_\tau P^\tau g_{\sigma\mu} \omega^\mu{}_\nu P^\nu - \omega^\sigma{}_\tau P^\tau g_{\sigma\mu} g^\mu{}_\nu P^\nu + \mathcal{O}(\omega^2) \\
&= P_\nu P^\nu - P^\tau \omega_{\tau\nu} P^\nu - \omega_{\nu\tau} P^\tau P^\nu \\
&\Longrightarrow \quad \omega_{\tau\nu} = -\omega_{\nu\tau}
\end{aligned}
\tag{5.31}
$$

Es ist nützlich, die Schiefsymmetrie der Winkelmatrix $\omega_{\tau\nu}$ im Ansatz von Λ_{INF} explizit sichtbar zu machen:

$$
\begin{aligned}
\Lambda_{\text{INF}}{}^\mu{}_\nu &= g^\mu{}_\nu - \omega^\mu{}_\nu = g^\mu{}_\nu - g^{\mu\kappa}\omega_{\kappa\nu} \\
&= g^\mu{}_\nu - g^{\mu\kappa}\frac{1}{2}\omega_{\sigma\tau}(g^\sigma{}_\kappa g^\tau{}_\nu - g^\tau{}_\kappa g^\sigma{}_\nu) \\
&= g^\mu{}_\nu + \frac{i}{2\hbar}\omega_{\sigma\tau} i\hbar (g^{\sigma\mu} g^\tau{}_\nu - g^{\tau\mu} g^\sigma{}_\nu) \\
&= g^\mu{}_\nu + \frac{i}{2\hbar}\omega_{\sigma\tau} B^{\sigma\tau\mu}{}_\nu
\end{aligned}
\tag{5.32}
$$

Dabei haben wir

$$
\boxed{B^{\sigma\tau\mu}{}_\nu \equiv i\hbar (g^{\sigma\mu} g^\tau{}_\nu - g^{\tau\mu} g^\sigma{}_\nu)}
\tag{5.33}
$$

als Generator der Lorentztransformation definiert. (5.32) enthält die 4×4-dimensionalen Matrizen $(\Lambda_{\text{INF}}{}^\mu{}_\nu)$ und $(g^\mu{}_\nu)$ mit Zeilenindex μ und Spaltenindex ν. Deshalb betrachten wir auch den vierfach indizierten Tensor $(B^{\sigma\tau\mu}{}_\nu)$ als 4×4 Matrix mit Zeilenindex μ, Spaltenindex ν, und dem „Namen“ $\sigma\tau$. Die infinitesimale Lorentztransformation ist

$$
\boxed{(\Lambda_{\text{INF}}{}^\mu{}_\nu) \equiv (g^\mu{}_\nu) + \frac{i}{2\hbar}\,\omega_{\sigma\tau}\,(B^{\sigma\tau\mu}{}_\nu)} \quad .
\tag{5.34}
$$

Durch Hintereinanderschaltung unendlich vieler infinitesimal kleiner Transformationen erhält man die endliche Lorentztransformation

$$
\boxed{(\Lambda^\mu{}_\nu) \equiv \exp\left\{\frac{i}{2\hbar}\,\Omega_{\sigma\tau}\,(B^{\sigma\tau\mu}{}_\nu)\right\}} \quad .
\tag{5.35}
$$

Die Gruppe $\{\Lambda\}$ der Lorentztransformationen ist genau dann eine Darstellung der Lorentzgruppe, wenn es erstens eine eindeutige Abbildung von der Lorentzgruppe $\{\ell\}$ auf die Gruppe $\{\Lambda\}$ gibt, und wenn zweitens die Lie-Algebra der Gruppe $\{\Lambda\}$ mit der Lie-Algebra der Lorentzgruppe identisch ist. Punkt eins ist offensichtlich erfüllt, da wir beide Gruppen durch die gleiche Winkelmatrix Ω parametrisieren. Zur Prüfung von Punkt zwei sind die Vertauschungsrelationen der Generatoren $B^{\sigma\tau}$ zu untersuchen.

$$
\begin{aligned}
[B^{\alpha\beta}, B^{\gamma\delta}]^{\mu}{}_{\nu} &= B^{\alpha\beta\mu}{}_{\kappa} B^{\gamma\delta\kappa}{}_{\nu} - B^{\gamma\delta\mu}{}_{\kappa} B^{\alpha\beta\kappa}{}_{\nu} \\
&\overset{(5.33)}{=} (i\hbar)^2 \Big((g^{\alpha\mu} g^{\beta}{}_{\kappa} - g^{\beta\mu} g^{\alpha}{}_{\kappa})(g^{\gamma\kappa} g^{\delta}{}_{\nu} - g^{\delta\kappa} g^{\gamma}{}_{\nu}) \\
&\qquad - (g^{\gamma\mu} g^{\delta}{}_{\kappa} - g^{\delta\mu} g^{\gamma}{}_{\kappa})(g^{\alpha\kappa} g^{\beta}{}_{\nu} - g^{\beta\kappa} g^{\alpha}{}_{\nu}) \Big) \\
&= (i\hbar)^2 \Big(g^{\alpha\mu} g^{\beta\gamma} g^{\delta}{}_{\nu} - g^{\alpha\mu} g^{\beta\delta} g^{\gamma}{}_{\nu} - g^{\beta\mu} g^{\alpha\gamma} g^{\delta}{}_{\nu} + g^{\beta\mu} g^{\alpha\delta} g^{\gamma}{}_{\nu} \\
&\qquad - g^{\gamma\mu} g^{\delta\alpha} g^{\beta}{}_{\nu} + g^{\gamma\mu} g^{\delta\beta} g^{\alpha}{}_{\nu} + g^{\delta\mu} g^{\gamma\alpha} g^{\beta}{}_{\nu} - g^{\delta\mu} g^{\gamma\beta} g^{\alpha}{}_{\nu} \Big) \\
&= (i\hbar)^2 \Big(g^{\beta\gamma} (g^{\alpha\mu} g^{\delta}{}_{\nu} - g^{\delta\mu} g^{\alpha}{}_{\nu}) - g^{\beta\delta} (g^{\alpha\mu} g^{\gamma}{}_{\nu} - g^{\gamma\mu} g^{\alpha}{}_{\nu}) \\
&\qquad - g^{\alpha\gamma} (g^{\beta\mu} g^{\delta}{}_{\nu} - g^{\delta\mu} g^{\beta}{}_{\nu}) + g^{\alpha\delta} (g^{\beta\mu} g^{\gamma}{}_{\nu} - g^{\gamma\mu} g^{\beta}{}_{\nu}) \Big) \\
&\overset{(5.33)}{=} i\hbar (g^{\beta\gamma} B^{\alpha\delta} - g^{\beta\delta} B^{\alpha\gamma} - g^{\alpha\gamma} B^{\beta\delta} + g^{\alpha\delta} B^{\beta\gamma})^{\mu}{}_{\nu}
\end{aligned}
\tag{5.36}
$$

Diese Vertauschungsrelationen stimmen mit (5.24b) überein.

Die Gruppe $\{\Lambda\}$ der Lorentztransformationen ist eine vierdimensionale (treue) Darstellung der Lorentzgruppe, denn die Lorentztransformationen sind auf der Basis der Vektoren (P^{μ}) definiert, die einen vierdimensionalen Vektorraum aufspannen.

Die von B^{k0} generierten Transformationen bei Koordinatendrehungen in den Ebenen $10, 20, 30$ der vierdimensionalen Raumzeit werden als passiver „Lorentzboost“ in k-Richtung bezeichnet. Für die Transformationen bei rein räumlichen Koordinatendrehungen in den Ebenen $23, 31, 12$ gibt es keinen besonderen Namen. Mithilfe der Definition

$$
B^{\sigma\tau\mu}{}_{\nu} \overset{(5.33)}{\equiv} i\hbar (g^{\sigma\mu} g^{\tau}{}_{\nu} - g^{\tau\mu} g^{\sigma}{}_{\nu}) \tag{5.37}
$$

lassen sich die Generatoren der sechs linear unabhängigen Transformationen leicht berechnen:

Boost entlang der x^1-Achse:

$$K^1 \equiv B^{10} = (B^{10\mu}{}_{\nu}) = -B^{01} = -i\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.38a}$$

Boost entlang der x^2-Achse:

$$K^2 \equiv B^{20} = (B^{20\mu}{}_{\nu}) = -B^{02} = -i\hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.38b}$$

Boost entlang der x^3-Achse:

$$K^3 \equiv B^{30} = (B^{30\mu}{}_{\nu}) = -B^{03} = -i\hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.38c}$$

Drehung in der x^2-x^3-Ebene:

$$L^1 \equiv B^{23} = (B^{23\mu}{}_{\nu}) = -B^{32} = -i\hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.38d}$$

Drehung in der x^3-x^1-Ebene:

$$L^2 \equiv B^{31} = (B^{31\mu}{}_{\nu}) = -B^{13} = -i\hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.38e}$$

Drehung in der x^1-x^2-Ebene:

$$L^3 \equiv B^{12} = (B^{12\mu}{}_{\nu}) = -B^{21} = -i\hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.38f}$$

Die Generatoren B^{jk} der rein räumlichen Drehungen sind hermitesche Operatoren (sie sind identisch mit den transponierten konjugiert-komplexen

Operatoren), die Generatoren B^{k0} der Boosts sind es nicht. Nur die Generatoren B^{jk} der räumlichen Drehungen, aber nicht die Generatoren B^{k0} der Boosts repräsentieren im Formalismus der Quantentheorie beobachtbare Größen, denn nur hermitesche Operatoren haben reelle Eigenwerte.

5.5.2 Lorentztransformationen

Um die endlichen Lorentztransformationen explizit anzugeben, verwenden wir die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion:

$$(\Lambda^{\mu}{}_{\nu}) \overset{(5.35)}{=} \exp\Big\{\frac{i}{2\hbar}\,\Omega_{\sigma\tau}\,(B^{\sigma\tau\mu}{}_{\nu})\Big\} \tag{5.39}$$

$$= \sum_{n=0,1,2,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n!}\Big(\frac{i}{2\hbar}\,\Omega_{\sigma\tau}\,(B^{\sigma\tau\mu}{}_{\nu})\Big)^n \tag{5.40}$$

Bei einer Koordinatendrehung in der 10-Ebene ist $\Omega_{10} = -\Omega_{01} \neq 0$, $\Omega_{\sigma\tau} = 0$ für $10 \neq \sigma\tau \neq 01$, sowie $\Omega_{10} = g_{\alpha 1} g_{\beta 0} \Omega^{\alpha\beta} = -\Omega^{10}$, und es gilt:

$$\Big(\frac{i}{2\hbar}\,\Omega_{\sigma\tau}\,(B^{\sigma\tau\mu}{}_{\nu})\Big)^n \overset{(5.38a)}{=} (-\Omega^{10})^n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ für } n = 1, 3, 5, \ldots$$

$$\Big(\frac{i}{2\hbar}\,\Omega_{\sigma\tau}\,(B^{\sigma\tau\mu}{}_{\nu})\Big)^n \overset{(5.38a)}{=} (-\Omega^{10})^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ für } n = 2, 4, 6, \ldots$$

$$\frac{1}{0!}\Big(\frac{i}{2\hbar}\,\Omega_{\sigma\tau}\,(B^{\sigma\tau\mu}{}_{\nu})\Big)^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.41}$$

Also ist die Lorentztransformation einer Koordinatendrehung um den Winkel Ω^{10} in der 10-Ebene

$$\Lambda \overset{(5.40)}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \sum_{n=0,2,4,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n!} \Omega^{10n} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n!} \Omega^{10n} \quad .$$

Dies sind die Reihenentwicklungen der Hyperbelfunktionen cosh und sinh, d.h. man erhält die Lorentztransformation für den

$$\text{Boost}^{10}: \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \cosh \Omega^{10} & -\sinh \Omega^{10} & 0 & 0 \\ -\sinh \Omega^{10} & \cosh \Omega^{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.42a}$$

Die Lorentztransformationen von Boosts in den anderen Raumrichtungen werden völlig analog konstruiert:

$$\text{Boost}^{20}: \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \cosh \Omega^{20} & 0 & -\sinh \Omega^{20} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sinh \Omega^{20} & 0 & \cosh \Omega^{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.42b}$$

$$\text{Boost}^{30}: \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \cosh \Omega^{30} & 0 & 0 & -\sinh \Omega^{30} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh \Omega^{30} & 0 & 0 & \cosh \Omega^{30} \end{pmatrix} \tag{5.42c}$$

Boosts in beliebiger Richtung beschreibt man durch entsprechende Kombinationen von (5.42). Der Drehwinkel Ω^{k0} wird bei Boosts als *Rapidität* bezeichnet. Um einen Boost eindeutig zu bestimmen, sind drei linear unabhängige reelle Parameter – nämlich die Rapiditäten $\Omega^{10}, \Omega^{20}, \Omega^{30}$ – festzulegen.

Der Boost ^{10} ist die Transformation eines Vektors von einem Bezugssystem in ein zweites mit parallelen Achsenrichtungen, dessen Nullpunkt sich mit der Geschwindigkeit v entlang der x^1-Achse des ersten Systems bewegt. Der

Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit v und der Rapidität Ω^{10} ist

$$\tanh \Omega^{10} = v/c \quad . \tag{5.43}$$

Es gilt $\tanh \Omega^{10} \to 1$ für $\Omega^{10} \to +\infty$, und $\tanh \Omega^{10} \to -1$ für $\Omega^{10} \to -\infty$. Die Wertebereiche von Ω^{10} und von v/c sind also $-\infty \leq \Omega^{10} \leq +\infty$ und $-1 \leq v/c \leq +1$.
Mit der Eigenschaft der Hyperbelfunktionen

$$\cosh \Omega = \sqrt{\frac{1}{1 - \tanh^2 \Omega}} \tag{5.44}$$

und der Definition

$$\gamma \equiv \sqrt{\frac{1}{1 - (v/c)^2}} \tag{5.45}$$

lässt sich der Lorentzboost auch schreiben als

$$\Lambda \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \overset{(5.42a)}{=} \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v/c & 0 & 0 \\ -\gamma v/c & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(ct - vx/c) \\ \gamma(x - vt) \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad . \tag{5.46}$$

Obwohl diese Form vielleicht aus dem Grundstudium geläufiger ist, ist es zweckmäßiger den Boost durch die Rapidität statt durch die Geschwindigkeit zu parametrisieren. Denn die Rapidität, aber nicht die Geschwindigkeit, ist additiv bei Hintereinanderschaltung mehrerer Transformationen.

Die inversen Transformationen Λ^{-1} der Lorentzboosts findet man, indem man die Rapidität durch die negative Rapidität ersetzt. Für den Boost entlang der x^1-Achse gilt

$$\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \cosh\Omega^{10} & \sinh\Omega^{10} & 0 & 0 \\ \sinh\Omega^{10} & \cosh\Omega^{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \Lambda^{\sim} \tag{5.47}$$

$^{\sim}$ bezeichnet die transponierte Matrix. Der Lorentzboost ist keine orthogonale Transformation, denn die inverse Transformation ist nicht gleich der transponierten! Wir hatten bereits festgestellt, dass die Generatoren der Boosts nicht hermitesch sind, das pflanzt sich in die Nicht-Orthogonalität der Transformationen fort.

Als nächstes betrachten wir die Transformation von Vektoren bei rein räumlicher Rotation des Koordinatensystems um den Winkel Ω^{12} in der 12-Ebene.

$$\Big(\frac{i}{2\hbar}\,\Omega_{\sigma\tau}\,(B^{\sigma\tau\mu}{}_{\nu})\Big)^{n} \overset{(5.38f)}{=} {\Omega_{12}}^{n} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big| \begin{matrix} \text{für } n = \\ 1, 5, 9, 13, \ldots \end{matrix} \tag{5.48}$$

$$\Big(\frac{i}{2\hbar}\,\Omega_{\sigma\tau}\,(B^{\sigma\tau\mu}{}_{\nu})\Big)^{n} \overset{(5.38f)}{=} {\Omega_{12}}^{n} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big| \begin{matrix} \text{für } n = \\ 2, 6, 10, 14, \ldots \end{matrix} \tag{5.49}$$

$$\Big(\frac{i}{2\hbar}\,\Omega_{\sigma\tau}\,(B^{\sigma\tau\mu}{}_{\nu})\Big)^{n} \overset{(5.38f)}{=} {\Omega_{12}}^{n} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big| \begin{matrix} \text{für } n = \\ 3, 7, 11, 15, \ldots \end{matrix} \tag{5.50}$$

$$\Big(\frac{i}{2\hbar}\,\Omega_{\sigma\tau}\,(B^{\sigma\tau\mu}{}_{\nu})\Big)^{n} \overset{(5.38f)}{=} {\Omega_{12}}^{n} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big| \begin{matrix} \text{für } n = \\ 4, 8, 12, 16, \ldots \end{matrix} \tag{5.51}$$

$$\frac{1}{0!}\Big(\frac{i}{2\hbar}\,\Omega_{\sigma\tau}\,(B^{\sigma\tau\mu}{}_{\nu})\Big)^{0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.52}$$

Demnach ist die Lorentztransformation bei einer Koordinatendrehung in der 12-Ebene:

$$\begin{aligned}\Lambda \overset{(5.40)}{=} & \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} + \\ & + \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \cdot \sum_{n=0,4,8,12,\ldots}^{\infty} \Big(\frac{1}{n!} {\Omega_{12}}^{n} - \frac{1}{(n+2)!} {\Omega_{12}}^{n+2} \Big) \\ & + \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \cdot \sum_{n=1,5,9,13,\ldots}^{\infty} \Big(\frac{1}{n!} {\Omega_{12}}^{n} - \frac{1}{(n+2)!} {\Omega_{12}}^{n+2} \Big) \end{aligned} \tag{5.53}$$

Dies sind die Reihenentwicklungen der Winkelfunktionen cos und sin. Also ist – unter Beachtung von $\Omega_{12} = g_{1\alpha} g_{2\beta} \Omega^{\alpha\beta} = +\Omega^{12}$ – die Lorentztransformation einer

$$\text{Drehung}^{12}: \qquad \Lambda = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\cos\Omega^{12}&\sin\Omega^{12}&0\\0&-\sin\Omega^{12}&\cos\Omega^{12}&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \tag{5.54a}$$

Die Lorentztransformationen bei Koordinatendrehungen in den Ebenen 23 und 31 ergeben sich auf gleiche Weise:

$$\text{Drehung}^{23}: \qquad \Lambda = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\cos\Omega^{23}&\sin\Omega^{23}\\0&0&-\sin\Omega^{23}&\cos\Omega^{23}\end{pmatrix} \tag{5.54b}$$

$$\text{Drehung}^{31}: \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Omega^{31} & 0 & -\sin\Omega^{31} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin\Omega^{31} & 0 & \cos\Omega^{31} \end{pmatrix} \tag{5.54c}$$

Die inversen Transformationen Λ^{-1} der räumlichen Drehungen findet man, indem man die Drehwinkel durch die negativen Drehwinkel ersetzt:

$$\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Omega^{12} & -\sin\Omega^{12} & 0 \\ 0 & \sin\Omega^{12} & \cos\Omega^{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \Lambda^{\sim} \quad . \tag{5.55}$$

Die Lorentztransformationen bei rein räumlichen Koordinatendrehungen sind orthogonal, denn die inversen Transformationen sind gleich den transponierten. Eine beliebige räumliche Drehung wird durch Angabe von drei reellen Parametern – nämlich den Winkeln Ω^{23}, Ω^{31}, Ω^{12} – eindeutig bestimmt.

Insgesamt sechs linear unabhängige reelle Parameter, je drei für die Boosts und drei für die räumlichen Drehungen, legen eine beliebige Rotation der vierdimensionalen Raumzeitkoordinaten eindeutig fest.

Ohne Beweis zitieren wir folgenden Satz aus der Darstellungstheorie der Lie-Gruppen:

> **Satz:** Wenn die Parameter-Mannigfaltigkeit einer Lie-Gruppe nicht kompakt ist, dann hat sie keine endlich-dimensionale unitäre Darstellung. (5.56)

Kompakt bedeutet beschränkt und abgeschlossen. Die Parameter der Boost-Transformationen, d.h. die Rapiditäten, sind nicht beschränkt, sondern können jeden Wert im Bereich $-\infty \leq \Omega^{j0} \leq +\infty$ annehmen. Also können wir zufolge des Satzes nicht hoffen eine vierdimensionale Darstellung der Lorentzgruppe zu finden, deren sämtliche Elemente unitäre Transformationen sind. Eine Transformation T ist unitär, wenn ihre adjungierte ($=$transponierte konjugiert-komplexe) Transformation gleich ihrer inversen Transformation ist:

$$T \text{ ist unitär} \quad \Longleftrightarrow \quad TT^\dagger = I \tag{5.57}$$
$$\text{mit } T^\dagger = T^{*\sim} \,,\; I = \text{Identische Transformation}$$

Orthogonale Transformationen sind die reelle Untermenge der unitären Transformationen. Die Boost-Transformationen (5.42) sind weder orthogonal noch unitär, die rein räumlichen Drehungen (5.54) sind orthogonal und deshalb erst recht unitär. Ob Transformationen unitär oder nicht unitär sind, hängt damit zusammen ob ihre Generatoren hermitesch oder nicht hermitesch sind. Dazu betrachten wir die Exponentialform einer beliebigen Transformation:

$$\begin{aligned} T \equiv \exp\Big\{\frac{i}{\hbar}\, W_k\, \gamma^k\Big\} \text{ ist unitär} \quad &\Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow \quad TT^\dagger = \exp\Big\{\frac{i}{\hbar}\, W_k\, \gamma^k\Big\} \exp\Big\{-\frac{i}{\hbar}\, W_k\, \gamma^{k\dagger}\Big\} \\ = \exp\Big\{\frac{i}{\hbar}\, W_k \left(\gamma^k - \gamma^{k\dagger}\right)\Big\} = I \quad &\Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow \quad \gamma^k = \gamma^{k\dagger} \quad \text{mit } I = \text{Identische Transformation} \end{aligned} \tag{5.58}$$

Man kann diese Gleichung in beiden Richtungen lesen: Eine Transformation ist zwangsläufig unitär, wenn ihr Generator hermitesch (= selbstadjungiert) ist. Wenn eine Transformation unitär ist, so ist ihr Generator zwangsläufig hermitesch. Es ist also kein Zufall, dass die Boost-Transformationen nicht unitär sind, denn ihre Generatoren sind nicht hermitesch. Dagegen sind die rein räumlichen Drehungen aufgrund ihrer hermiteschen Generatoren unitär, – in diesem Fall sogar orthogonal.

Tatsächlich hat eine Untergruppe der Lorentzgruppe – nämlich die Gruppe der Koordinatendrehungen des dreidimensionalen Ortsraums – orthogonale Darstellungen, die wir in Abschnitt 6.1.1 untersuchen werden.

Achtung: Die systematischen Namen von Matrixgruppen sind auf Seite 125 zusammengestellt. Die Gruppe der 4×4-Matrizen der Lorentztransformationen hat in dieser Systematik den Namen SO(3,1). Das O in diesem Namen bedeutet orthogonal. Haben wir nicht gerade festgestellt, dass zumindest ein Teil der Lorentztransformationen *nicht* orthogonal ist? Immerhin wird der Name in der Tabelle schon auf „pseudo-orthogonal“ eingeschränkt. Die

Erklärung liegt in unterschiedlichen Definitionen. Unsere Definition des Begriffs orthogonal bezeichnet eine Eigenschaft der Transformation, die dem Namen SO(3,1) zugrunde liegende Definition bezeichnet eine Eigenschaft des Skalarprodukts:

Im dreidimensionalen Ortsraum der Newton'schen Physik ist das Skalarprodukt $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ zweier Vektoren $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{pmatrix}$ definiert durch

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\equiv\boldsymbol{a}^{\sim}\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}a_x\ a_y\ a_z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{pmatrix}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z\ . \tag{5.59}$$

Unter orthogonalen Transformationen O ist dies Skalarprodukt invariant:

$$(O\boldsymbol{a},O\boldsymbol{b})=(O\boldsymbol{a})^{\sim}O\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}^{\sim}O^{\sim}O\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}^{\sim}O^{-1}O\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}^{\sim}\boldsymbol{b} \tag{5.60}$$

Im Hilbertraum der Zustandsvektoren $|u\rangle,|v\rangle$ der Quantentheorie ist ein Skalarprodukt definiert, das invariant unter unitären Transformationen U ist:

$$(|Uu\rangle,|Uv\rangle)\equiv\langle Uu|Uv\rangle=\langle u|U^{\dagger}Uv\rangle=\langle u|U^{-1}Uv\rangle=\langle u|v\rangle \tag{5.61}$$

Im vierdimensionalen Zeit-Orts-Raum der Speziellen Relativitätstheorie ist das Skalarprodukt (a,b) zweier Vektoren a und b definiert durch

$$\begin{aligned}(a,b)\equiv a^{\sim}gb&=\begin{pmatrix}a^0\ a^1\ a^2\ a^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b^0\\b^1\\b^2\\b^3\end{pmatrix}=\\&=a^0b^0-a^1b^1-a^2b^2-a^3b^3\end{aligned} \tag{5.62}$$

mit dem metrischen Tensor g. Dies Skalarprodukt ist invariant unter Lorentztransformationen:

$$(\Lambda a,\Lambda b)=(\Lambda a)^{\sim}g\Lambda b=a^{\sim}\Lambda^{\sim}g\Lambda b=a^{\sim}gb \tag{5.63}$$

$$\text{wegen}\quad\Lambda^{\sim}g\Lambda=g\quad\text{bzw.}\quad g^{-1}\Lambda^{\sim}g=\Lambda^{-1}$$

„Richtig“ orthogonal wären die Lorentztransformationen unter der Bedingung $\Lambda^{\sim} = \Lambda^{-1}$. „Pseudo-orthogonal“ sind sie unter der Bedingung $g^{-1}\Lambda^{\sim} g = \Lambda^{-1}$. Letztere Bedingung ist tatsächlich erfüllt. Denn die Multiplikation von links mit $g^{-1} = g$ multipliziert die drei unteren Zeilen von $\Lambda^{\sim}$ mit -1, die Multiplikation von rechts mit g multipliziert die drei rechten Spalten von $\Lambda^{\sim}$ mit -1. Insgesamt bleiben die Parameter der räumlichen Drehungen unverändert, aber die Boost-Parameter werden mit -1 multipliziert. In diesem Sinn sind alle sechs linear unabhängigen Lorentztransformationen pseudo-orthogonal (oder orthogonal), was den Namen SO(3,1) der Matrixgruppe begründet.

5.5.3 Einfache Indizes

Bisher haben wir die 6 reellen Parameter und die 6 Generatoren der Lorentzgruppe und ihrer Darstellungen mit doppelten Indizes versehen und in schiefsymmetrischen 4×4-dimensionalen Matrizen angeordnet, siehe (5.14) und (5.15). Diese Schreibweise ist häufig sehr nützlich und elegant, aber nicht immer. Besonders bei den Lorentztransformationen ist manchmal eine Schreibweise zweckmäßiger, die nur einfach indiziert ist, aber dafür den Unterschied zwischen Boost- und Rotationsparametern bzw. Boost- und Rotationsgeneratoren deutlicher hervorhebt:

$$(\Omega^{\sigma\tau}) = \begin{pmatrix} 0 & -\eta^1 & -\eta^2 & -\eta^3 \\ \eta^1 & 0 & \theta^3 & -\theta^2 \\ \eta^2 & -\theta^3 & 0 & \theta^1 \\ \eta^3 & \theta^2 & -\theta^1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.64a}$$

$$(B^{\sigma\tau}) = \begin{pmatrix} 0 & -K^1 & -K^2 & -K^3 \\ K^1 & 0 & L^3 & -L^2 \\ K^2 & -L^3 & 0 & L^1 \\ K^3 & L^2 & -L^1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.64b}$$

Wegen

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\,\Omega_{\sigma\tau}\,B^{\sigma\tau} &= \frac{1}{2}\Big(\,\Omega_{j0}\,B^{j0} + \Omega_{23}\,B^{23} + \Omega_{31}\,B^{31} + \Omega_{12}\,B^{12} + \\ &\quad + \Omega_{0j}\,B^{0j} + \Omega_{32}\,B^{32} + \Omega_{13}\,B^{13} + \Omega_{21}\,B^{21}\Big) \\ &= \eta_j K^j + \Theta_j L^j \end{aligned} \tag{5.65}$$

ist die Lorentztransformation in dieser Schreibweise

$$\begin{aligned}(\Lambda^\mu{}_\nu) &\overset{(5.35)}{=} \exp\Big\{\frac{i}{2\hbar}\,\Omega_{\sigma\tau}\,(B^{\sigma\tau\mu}{}_\nu)\Big\} \\ &= \exp\Big\{\frac{i}{\hbar}(\eta_j K^j + \Theta_j L^j)\Big\} \quad . \end{aligned} \tag{5.66}$$

Wir führen den total antisymmetrischen Tensor

$$\epsilon^{jkl}\begin{cases} = 1 & \text{bei gerader Permutation von } jkl \\ = -1 & \text{bei ungerader Permutation von } jkl \\ = 0 & \text{wenn zwei der Indizes } jkl \text{ identisch sind} \end{cases} \tag{5.67}$$

ein, und merken an, dass

$$\eta_j = \Omega_{j0} = g_{j\alpha} g_{0\beta} \Omega^{\alpha\beta} = -\Omega^{j0} = -\eta^j \tag{5.68a}$$

$$\Theta_j = \epsilon^{jkl}\Omega_{kl} = \epsilon^{jkl} g_{k\alpha} g_{l\beta} \Omega^{\alpha\beta} = +\epsilon^{jkl}\Omega^{kl} = +\Theta^j \tag{5.68b}$$

$$K_j = \Omega_{j0} = g_{j\alpha} g_{0\beta} \Omega^{\alpha\beta} = -\Omega^{j0} = -K^j \tag{5.68c}$$

$$L_j = \epsilon^{jkl}\Omega_{kl} = \epsilon^{jkl} g_{k\alpha} g_{l\beta} \Omega^{\alpha\beta} = +\epsilon^{jkl}\Omega^{kl} = +L^j \tag{5.68d}$$

ist. D.h. $\boldsymbol{\eta}$ und $\boldsymbol{K}$ sind Vektoren, aber $\boldsymbol{\Theta}$ und $\boldsymbol{L}$ sind Pseudovektoren.

5.5.4 Kommutatoren

Wir haben festgestellt, dass die Lorentztransformationen mit den sechs Generatoren

Generator	Was generiert er ?
$K^1 = B^{10}$	Boost in Richtung x^1
$K^2 = B^{20}$	Boost in Richtung x^2
$K^3 = B^{30}$	Boost in Richtung x^3
$L^1 = B^{23}$	Drehung in Ebene x^2x^3
$L^2 = B^{31}$	Drehung in Ebene x^3x^1
$L^3 = B^{12}$	Drehung in Ebene x^1x^2

(5.69)

die gleiche Lie-Algebra wie die Lorentzgruppe haben:

$$[B^{\alpha\beta}, B^{\gamma\delta}] \overset{(5.36)}{=} i\hbar(g^{\beta\gamma}B^{\alpha\delta} - g^{\beta\delta}B^{\alpha\gamma} - g^{\alpha\gamma}B^{\beta\delta} + g^{\alpha\delta}B^{\beta\gamma})$$

Jetzt wollen wir sämtliche Kommutatoren explizit angeben. Bei 6 Generatoren sind $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ Kommutatoren zu berechnen:

$$\begin{aligned}[B^{10}, B^{20}] = [K^1, K^2] &= i\hbar(g^{02}B^{10} - g^{00}B^{12} - g^{12}B^{00} + g^{10}B^{02}) \\ &= -i\hbar B^{12} = -i\hbar L^3 \end{aligned} \tag{5.70a}$$

$$\begin{aligned}[B^{20}, B^{30}] = [K^2, K^3] &= i\hbar(g^{03}B^{20} - g^{00}B^{23} - g^{23}B^{00} + g^{20}B^{03}) \\ &= -i\hbar B^{23} = -i\hbar L^1 \end{aligned} \tag{5.70b}$$

$$\begin{aligned}[B^{30}, B^{10}] = [K^3, K^1] &= i\hbar(g^{01}B^{30} - g^{00}B^{31} - g^{31}B^{00} + g^{30}B^{01}) \\ &= -i\hbar B^{31} = -i\hbar L^2 \end{aligned} \tag{5.70c}$$

$$\begin{aligned}[B^{10}, B^{23}] = [K^1, L^1] &= i\hbar(g^{02}B^{13} - g^{03}B^{12} - g^{12}B^{03} + g^{13}B^{02}) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{5.70d}$$

$$\begin{aligned}[B^{20}, B^{31}] = [K^2, L^2] &= i\hbar(g^{03}B^{21} - g^{01}B^{23} - g^{23}B^{01} + g^{21}B^{03}) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{5.70e}$$

$$[B^{30}, B^{12}] = [K^3, L^3] = i\hbar(g^{01}B^{32} - g^{02}B^{31} - g^{31}B^{02} + g^{32}B^{01}) = 0 \tag{5.70f}$$

$$[B^{10}, B^{31}] = [K^1, L^2] = i\hbar(g^{03}B^{11} - g^{01}B^{13} - g^{13}B^{01} + g^{11}B^{03}) = +i\hbar B^{30} = +i\hbar K^3 \tag{5.70g}$$

$$[B^{20}, B^{12}] = [K^2, L^3] = i\hbar(g^{01}B^{22} - g^{02}B^{21} - g^{21}B^{02} + g^{22}B^{01}) = +i\hbar B^{10} = +i\hbar K^1 \tag{5.70h}$$

$$[B^{30}, B^{23}] = [K^3, L^1] = i\hbar(g^{02}B^{33} - g^{03}B^{32} - g^{32}B^{03} + g^{33}B^{02}) = +i\hbar B^{20} = +i\hbar K^2 \tag{5.70i}$$

$$[B^{23}, B^{20}] = [L^1, K^2] = i\hbar(g^{32}B^{20} - g^{30}B^{22} - g^{22}B^{30} + g^{20}B^{32}) = +i\hbar B^{30} = +i\hbar K^3 \tag{5.70j}$$

$$[B^{31}, B^{30}] = [L^2, K^3] = i\hbar(g^{13}B^{30} - g^{10}B^{33} - g^{33}B^{10} + g^{30}B^{13}) = +i\hbar B^{10} = +i\hbar K^1 \tag{5.70k}$$

$$[B^{12}, B^{10}] = [L^3, K^1] = i\hbar(g^{21}B^{10} - g^{20}B^{11} - g^{11}B^{20} + g^{10}B^{21}) = +i\hbar B^{20} = +i\hbar K^2 \tag{5.70l}$$

$$[B^{23}, B^{31}] = [L^1, L^2] = i\hbar(g^{33}B^{21} - g^{31}B^{23} - g^{23}B^{31} + g^{21}B^{33}) = +i\hbar B^{12} = +i\hbar L^3 \tag{5.70m}$$

$$[B^{31}, B^{12}] = [L^2, L^3] = i\hbar(g^{11}B^{32} - g^{12}B^{31} - g^{31}B^{12} + g^{32}B^{11}) = +i\hbar B^{23} = +i\hbar L^1 \tag{5.70n}$$

$$[B^{12}, B^{23}] = [L^3, L^1] = i\hbar(g^{22}B^{13} - g^{23}B^{12} - g^{12}B^{23} + g^{13}B^{22})$$
$$= +i\hbar B^{31} = +i\hbar L^2 \tag{5.70o}$$

Mithilfe des total antisymmetrischen Tensors (5.67) lassen sich die 15 Kommutatoren (5.70) in drei Gleichungen zusammenfassen:

$$[K^j, K^k] = -i\hbar\epsilon^{jkl}L^l \tag{5.71a}$$
$$[K^j, L^k] = +i\hbar\epsilon^{jkl}K^l \tag{5.71b}$$
$$[L^j, L^k] = +i\hbar\epsilon^{jkl}L^l \tag{5.71c}$$

Man kann erkennen, dass die rein räumlichen Drehungen eine Untergruppe der Lorentzgruppe bilden, denn bei der Verknüpfung rein räumlicher Drehimpulsoperatoren entsteht wieder ein räumlicher Drehimpulsoperator, siehe (5.71c). Dagegen sind die Boosts keine Untergruppe der Lorentzgruppe, denn (5.71a) und (5.71b) zeigen, dass bei der Verknüpfung von Boosts immer auch ein räumlicher Drehimpuls auftritt.

Dasgleiche hätten wir auch schon aus den Matrizen der Boost-Transformationen (5.42) und der räumlichen Rotationen (5.54) ablesen können: In den Matrizen (5.54) der räumlichen Drehungen gibt es nur in einem 3×3-Block rechts unten nicht-Diagonalelemente, die von Null verschieden sind. Diese Matrizen mischen also nur die Komponenten 1 bis 3 der Vektoren, auf die sie wirken, lassen aber die 0-Komponente unverändert. Dagegen haben die Matrizen (5.42) in allen Zeilen und Spalten nicht-Diagonalelemente, die von Null verschieden sind. Dadurch mischen sie alle vier Komponenten der Vektoren, auf die sie wirken, und können nicht als abgeschlossene Gruppe aus den Lorentztransformationen abgetrennt werden.

5.6 Die Transformation von Vektorfeldern

Zur Vorbereitung betrachten wir nochmal die Transformation von skalaren Feldern. In den Abschnitten 4.3 und 5.4 haben wir auf der Basis skalarer Felder $\phi(x)$ eine unendlich-dimensionale Darstellung

$$R\phi(x) \overset{(4.64)}{=} \exp\Big\{\frac{i}{2\hbar}\,\Omega_{\sigma\tau}\,J^{\sigma\tau}\Big\}\phi(x) \tag{5.72}$$

der Lorentzgruppe eingeführt, deren Generatoren die Drehimpulsoperatoren J sind.

Wir wollen jetzt zeigen, dass man die gleiche Transformation des skalaren Feldes erreichen kann, indem man die inverse Lorentztransformation Λ^{-1} auf das Argument des skalaren Feldes anwendet:

$$\boxed{R\phi(x) \equiv \phi(\Lambda^{-1}x)} \tag{5.73}$$

Es genügt, die infinitesimalen Transformationen zu untersuchen, denn sobald

$$R_{\text{INF}}\phi(x) \equiv \phi(\Lambda^{-1}_{\text{INF}}\,x) \tag{5.74}$$

bewiesen ist, ist auch (5.73) bewiesen. Die ρ-Komponente der infinitesimalen Lorentztransformation des Ortsvektors ist

$$\Lambda_{\text{INF}}{}^{\rho}{}_{\nu}x^{\nu} \overset{(5.34)}{=} (g^{\rho}{}_{\nu} + \frac{i}{2\hbar}\,\omega_{\sigma\tau}\,B^{\sigma\tau\rho}{}_{\nu})x^{\nu}\ . \tag{5.75}$$

Also ist die inverse infinitesimale Transformation

$$\Lambda^{-1}_{\text{INF}}{}^{\rho}{}_{\nu}x^{\nu} = (g^{\rho}{}_{\nu} - \frac{i}{2\hbar}\,\omega_{\sigma\tau}\,B^{\sigma\tau\rho}{}_{\nu})x^{\nu}\ . \tag{5.76}$$

Weil $B^{\sigma\tau\rho}{}_{\nu}x^{\nu}$ die ρ-Komponente des Vierervektors

$$B^{\sigma\tau}{}_{\nu}x^{\nu} \equiv \begin{pmatrix} B^{\sigma\tau 0}{}_{\nu}x^{\nu} \\ B^{\sigma\tau 1}{}_{\nu}x^{\nu} \\ B^{\sigma\tau 2}{}_{\nu}x^{\nu} \\ B^{\sigma\tau 3}{}_{\nu}x^{\nu} \end{pmatrix} \tag{5.77}$$

ist, ist (5.76) die ρ-te Zeile der Matrixgleichung

$$\Lambda^{-1}_{\text{INF}}\,x = x - \frac{i}{2\hbar}\,\omega_{\sigma\tau}\,B^{\sigma\tau}{}_{\nu}x^{\nu}\quad . \tag{5.78}$$

Den Ausdruck

$$\phi(\Lambda_{\text{INF}}^{-1}\, x) = \phi(x - \frac{i}{2\hbar}\,\omega_{\sigma\tau}\, B^{\sigma\tau}{}_{\nu} x^{\nu}) \tag{5.79}$$

entwickeln wir in einer Taylorreihe um $\phi(x)$. Die Taylorreihe darf nach dem linearen Glied abgebrochen werden, weil ω infinitesimal klein ist:

$$\phi(x - \frac{i}{2\hbar}\,\omega_{\sigma\tau}\, B^{\sigma\tau}{}_{\nu} x^{\nu}) = \phi(x) - \frac{i}{2\hbar}\,\omega_{\sigma\tau}\, B^{\sigma\tau\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \mathrm{d}_{\mu}\phi(x) \tag{5.80}$$

Wegen

$$B^{\sigma\tau\mu}{}_{\nu} \overset{(5.33)}{=} i\hbar(g^{\sigma\mu} g^{\tau}{}_{\nu} - g^{\tau\mu} g^{\sigma}{}_{\nu}) \tag{5.81a}$$

$$J^{\sigma\tau} \overset{(4.58)}{=} i\hbar(x^{\sigma} g^{\tau\mu} - x^{\tau} g^{\sigma\mu})\mathrm{d}_{\mu} = i\hbar(g^{\sigma}{}_{\nu} g^{\tau\mu} - g^{\tau}{}_{\nu} g^{\sigma\mu}) x^{\nu} \mathrm{d}_{\mu} \tag{5.81b}$$

gilt

$$J^{\sigma\tau} = -B^{\sigma\tau\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \mathrm{d}_{\mu}\ . \tag{5.82}$$

Kombination mit (5.79) und (5.80) ergibt:

$$\begin{aligned} \phi(\Lambda_{\text{INF}}^{-1}\, x) &= \phi(x) - \frac{i}{2\hbar}\,\omega_{\sigma\tau}\, B^{\sigma\tau\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \mathrm{d}_{\mu}\phi(x) = \\ &= \phi(x) + \frac{i}{2\hbar}\,\omega_{\sigma\tau}\, J^{\sigma\tau}\phi(x) \overset{(4.56)}{=} R_{\text{INF}}\phi(x) \end{aligned} \tag{5.83}$$

Damit ist (5.74), und demzufolge auch (5.73) bewiesen.

Nach dieser Vorbereitung kommen wir zum eigentlichen Thema dieses Abschnitts, der Transformation von Vektorfeldern. Es wird keine neue Darstellung der Lorentzgruppe benötigt, um Felder von Lorentzvektoren, wie beispielsweise das in Abschnitt 4.5 als Eichfeld eingeführte elektromagnetische Potential

$$A(x) = \begin{pmatrix} \Phi/c\,(x) \\ \boldsymbol{A}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^0(x) \\ A^1(x) \\ A^2(x) \\ A^3(x) \end{pmatrix} \tag{5.84}$$

bei Koordinatenrotationen zu transformieren. Die Transformation in ein

gestrichenes Koordinatensystem′ erfolgt durch Kombination der bereits bekannten vierdimensionalen Darstellung $\{\Lambda\}$ und der unendlich-dimensionalen Darstellung $\{R\}$ der Lorentzgruppe. Allerdings ist bei der kombinierten Anwendung der beiden Transformationen eine Klarstellung erforderlich, damit Raum-Zeit-Vektoren x nicht doppelt transformiert werden:

$$\widetilde{\Lambda} \equiv \Lambda \quad , \quad \text{jedoch } \widetilde{\Lambda} x = x \tag{5.85a}$$

$$\widetilde{B}^{\sigma\tau} \equiv B^{\sigma\tau} \quad , \quad \text{jedoch } \widetilde{B}^{\sigma\tau} x = 0 \tag{5.85b}$$

Die Sonderregel gilt *nur* für die Vierer-Ortsvektoren x.

Achtung: Es ist in der Literatur nicht üblich, durch eine Tilde oder ein anderes Zeichen darauf hinzuweisen, ob ein Transformationsoperator nur auf die Amplitude eines Vektorfeldes wirkt, oder auch auf sein Argument. Normalerweise bleibt es der Aufmerksamkeit des Lesers überlassen zu erraten, was jeweils gemeint ist. Auch wir werden in späteren Kapiteln zuweilen auf die Tilde verzichten.

Wir betrachten zunächst eine Transformation, bei der die Koordinaten um den infinitesimal kleinen Winkel ω gedreht werden. Ob man die kombinierte Transformation als $R_{\text{INF}}\widetilde{\Lambda}_{\text{INF}}$ oder als $\widetilde{\Lambda}_{\text{INF}}R_{\text{INF}}$ schreibt, ist egal.

$$\begin{aligned} A^{\mu}(x) &\xrightarrow{\ell(\omega)} A'^{\mu}(x') \\ A'^{\mu}(x') &= \underbrace{\left(I + \frac{i}{2\hbar}\omega_{\sigma\tau}J^{\sigma\tau}\right)}_{R_{\text{INF}}} \underbrace{\left(g^{\mu}{}_{\nu} + \frac{i}{2\hbar}\omega_{\sigma\tau}\widetilde{B}^{\sigma\tau\mu}{}_{\nu}\right)}_{\widetilde{\Lambda}_{\text{INF}}} A^{\nu}(x) \end{aligned} \tag{5.86}$$

Die Transformation $A'^{\mu}(x) = \widetilde{\Lambda}_{\text{INF}}{}^{\mu}{}_{\nu}A^{\nu}(x)$ dreht die Amplitude des Vektorfeldes $A(x)$ genau so, wie sie einen Vektor A drehen würde. Auf das Argument des Vektorfeldes hat sie definitionsgemäß keinen Einfluss. Die Transformation $A'^{\mu}(x') = R_{\text{INF}}A'^{\mu}(x)$ dreht das Argument x der μ-Komponente Vektorfeldes genau so, wie sie das Argument eines skalaren Feldes $\phi(x)$ drehen würde. Die Amplitude des Vektorfeldes lässt sie unverändert.

Man kann die beiden Schritte der Transformation auch in der Reihenfolge $A^{\mu}(x') = R_{\text{INF}}A^{\mu}(x)$ und $A'^{\mu}(x') = \widetilde{\Lambda}_{\text{INF}}{}^{\mu}{}_{\nu}A^{\nu}(x')$ durchführen. Wichtig ist auf jeden Fall, dass *beide* Schritte durchgeführt werden. Es wäre ziemlich

sinnlos, Vektorfelder wie $A^\mu(x')$ oder $A'^\mu(x)$ zu untersuchen, deren Amplitude und Argument in verschiedenen Koordinatensystemen definiert sind. Nur $A^\mu(x)$ und $A'^\mu(x')$ haben einen vernünftigen Sinn. Anmerkung: Für skalare Felder gilt bei Koordinatenrotationen $\phi'(x') = \phi(x')$, deshalb haben wir dort den Strich bei ϕ nicht ausgeschrieben.

Wir berechnen das Produkt der beiden infinitesimalen Transformationen. Im Hinblick auf die im Anschluss an (5.18) geführte Diskussion ist zu bemerken, dass der Term mit $\omega_{\sigma\tau}^2$ – anders als ein Term $\omega_{\sigma\tau}\omega_{\alpha\beta}$ mit $\sigma\tau \neq \alpha\beta$ – vernachlässigt werden darf.

$$A'^\mu(x') = \Big(g^\mu{}_\nu + \frac{i}{2\hbar}\omega_{\sigma\tau}(\widetilde{B}^{\sigma\tau\mu}{}_\nu + J^{\sigma\tau}g^\mu{}_\nu)\Big)A^\nu(x) \tag{5.87}$$

Es handelt sich um die μ-te Zeile der Matrixgleichung

$$A'(x') = \Big(\mathbb{1} + \frac{i}{2\hbar}\omega_{\sigma\tau}\big(\underbrace{\widetilde{B}^{\sigma\tau}}_{(\widetilde{B}^{\sigma\tau\mu}{}_\nu)} + J^{\sigma\tau}\mathbb{1}\big)\Big)A(x)\ . \tag{5.88}$$

$\mathbb{1}$ ist die Einheitsmatrix im vierdimensionalen Zeit-Orts-Raum. $J^{\sigma\tau}\mathbb{1}$ ist der zu einer vierdimensionalen Diagonalmatrix im Zeit-Orts-Raum aufgeblasene Drehimpulsoperator.

Die endliche Transformation ergibt sich durch Hintereinanderschaltung unendlich vieler infinitesimaler Transformationen:

$$A'(x') = \exp\Big\{\frac{i}{2\hbar}\Omega_{\sigma\tau}\Big(\widetilde{B}^{\sigma\tau} + J^{\sigma\tau}\mathbb{1}\Big)\Big\}A(x) \tag{5.89}$$

Zusammenfassung: Die Transformation eines Vektorfeldes bei einer Rotation der Raum-Zeit-Koordinaten kann geschrieben werden in den drei equivalenten Formen

$$A^\mu(x) \xrightarrow{\ell(\Omega)} A'^\mu(x') = R\,\widetilde{\Lambda}^\mu{}_\nu A^\nu(x) \tag{5.90a}$$

$$= \widetilde{\Lambda}^\mu{}_\nu\, RA^\nu(x) \tag{5.90b}$$

$$= \widetilde{\Lambda}^\mu{}_\nu A^\nu(\Lambda^{-1}x)\ . \tag{5.90c}$$

5.7 Der Drehimpuls von Vektorfeldern

In Abschnitt (4.3) haben wir die Drehimpulserhaltung skalarer Felder untersucht. Die Erweiterung auf Vektorfelder gelingt ohne wesentliche neue Probleme.

Die Feldgleichung des Vektorfelds $A(x)$ wird aus der Lagrangedichte $\mathcal{L}$ berechnet. Die notwendige (aber nicht hinreichende) Bedingung dafür, dass eine Transformation Γ mit dem Generator γ eine Symmetrie des Vektorfeldes $A(x)$ ist, ist durch

$$(\partial_\rho \mathcal{L}) w\gamma x^\rho \overset{(4.15)}{=} 0 \tag{5.91}$$

gegeben. Mit (5.87) lautet die Bedingung

$$\begin{aligned} 0 = (\partial_\rho \mathcal{L})(w\gamma)^\rho{}_\nu x^\nu &= (\partial_\rho \mathcal{L}) \frac{1}{2} \omega_{\sigma\tau} (\widetilde{B}^{\sigma\tau\rho}{}_\nu + J^{\sigma\tau} g^\rho{}_\nu) x^\nu \\ &\overset{(5.85)}{=} (\partial_\rho \mathcal{L}) \frac{1}{2} \omega_{\sigma\tau} J^{\sigma\tau} x^\rho \ . \end{aligned} \tag{5.92}$$

Dies ist identisch mit der notwendigen Bedingung (4.66) für die Drehimpulserhaltung eines skalaren Feldes. Also ist – wie bei (4.66) diskutiert – auch für ein Vektorfeld die Bedingung genau dann erfüllt, wenn die Lagrangedichte zumindest von den Raumzeitrichtungen σ und τ, in denen die Drehung stattfindet, nicht explizit abhängt, sodass $\partial_\sigma \mathcal{L} = \partial_\tau \mathcal{L} = 0$ gilt.

Die hinreichende Symmetriebedingung (4.11)

$$\exists\, \mathcal{G} : \quad \mathcal{L} \xrightarrow{I + \frac{i}{\hbar} w\,\gamma} \mathcal{L}\,' = \mathcal{L} + \frac{i}{\hbar} w\,\gamma \mathcal{L} = \mathcal{L} + \mathrm{d}_\rho \mathcal{G}^\rho$$

wird erfüllt mit

$$\mathrm{d}_\rho \mathcal{G}^\rho = \frac{i}{\hbar} w\,\gamma \mathcal{L} = \frac{i}{\hbar} \frac{1}{2} \omega_{\sigma\tau} (\widetilde{B}^{\sigma\tau} + J^{\sigma\tau}) \mathcal{L} = \frac{i}{2\hbar} \omega_{\sigma\tau} J^{\sigma\tau} \mathcal{L} \ .$$

Denn Lagrangedichten sind – per Definition und Konstruktion – Skalare, so dass

$$\widetilde{B}^{\sigma\tau} \mathcal{L} = B^{\sigma\tau} \mathcal{L} = 0 \tag{5.93}$$

ist. Die hinreichende Bedingung für die Drehimpulserhaltung des Vektorfeldes wird demnach mit dem gleichen

$$\mathcal{G}^\rho \overset{(4.68)}{=} -\frac{1}{2}\omega_{\sigma\tau}(x^\sigma g^{\tau\rho} - x^\tau g^{\sigma\rho})\mathcal{L} \tag{5.94}$$

erfüllt wie die hinreichende Bedingung für die Drehimpulserhaltung des skalaren Feldes.

Die Komponenten der erhaltenen Stromdichten sind

$$\begin{aligned} j^\rho &\overset{(4.16)}{=} C\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\rho A^\mu)}\frac{1}{2}\omega_{\sigma\tau}(\widetilde{B}^{\sigma\tau} + J^{\sigma\tau})A^\mu - i\hbar\mathcal{G}^\rho\right) \\ &= \sum_{\sigma\tau=10,20,30,23,31,12} Ci\hbar\omega_{\sigma\tau}\Bigg(\\ &\qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\rho A^\mu)}\Big(\frac{1}{i\hbar}\widetilde{B}^{\sigma\tau} + x^\sigma \mathrm{d}^\tau - x^\tau \mathrm{d}^\sigma\Big)A^\mu - (x^\sigma g^{\tau\rho} - x^\tau g^{\sigma\rho})\mathcal{L}\Bigg) \end{aligned} \tag{5.95}$$

Laut (4.16) muss hier die Summe $\sum_r$ über sämtliche Felder ϕ_r genommen werden, die in der Lagrangedichte enthalten sind, wobei jede Komponente eines Vektorfeldes als unabhängiges Feld zu betrachten ist. Wir haben angenommen, dass in der Lagrangedichte nur das Vektorfeld $A(x)$ vorkommt, und haben mit der Einstein'schen Summenkonvention über seine vier Komponenten $A^\mu(x)$ summiert. Ob man A in kovarianter oder in kontravarianter Form einträgt ist egal, aber man muss konsistent an beiden Stellen die gleiche Form verwenden. Denn ein kontravarianter Faktor im Nenner entspricht einem kovarianter Faktor im Zähler, wie man auch am Index ρ erkennt.

Außerdem ist in der letzten Zeile der Faktor $1/2$ entfallen, weil nur über die sechs linear unabhängigen Komponenten des schiefsymmetrischen Tensors $\omega_{\sigma\tau}$ summiert wird. Aufgrund der Unabhängigkeit dieser Komponenten gibt es sechs verschiedene erhaltene Stromdichten j, deren Komponenten mit $C \equiv 1/(ci\hbar\omega_{\sigma\tau})$

$$j^\rho = x^\sigma \Big(\underbrace{\frac{1}{c}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\rho A^\mu)}\mathrm{d}^\tau A^\mu - g^{\tau\rho}\frac{\mathcal{L}}{c}}_{\mathcal{T}^{\rho\tau}/c} \Big)$$
$$- x^\tau \Big(\underbrace{\frac{1}{c}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\rho A^\mu)}\mathrm{d}^\sigma A^\mu - g^{\sigma\rho}\frac{\mathcal{L}}{c}}_{\mathcal{T}^{\rho\sigma}/c} \Big) + \underbrace{\frac{1}{c}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\rho A^\mu)}\frac{1}{i\hbar}\widetilde{B}^{\sigma\tau}A^\mu}_{\mathcal{S}^{\rho\sigma\tau}}$$
$$\text{mit } \sigma\tau = 10, 20, 30, 23, 31, 12 \tag{5.96}$$

lauten. Der Energiedichte-Spannungs-Tensor $\mathcal{T}$ wurde genauso definiert wie in (4.32), es wurde lediglich die Summe über die skalaren Felder ϕ_r ersetzt durch die Summe über die vier Komponenten A^μ des Vektorfeldes $A(x)$.

Gegenüber der erhaltenen Stromdichte der skalaren Felder taucht hier als zusätzlicher Summand die Spindichte $\mathcal{S}$ auf, die mit

$$\widetilde{B}^{\sigma\tau\mu}{}_\nu = B^{\sigma\tau\mu}{}_\nu \overset{(5.33)}{=} i\hbar(g^{\sigma\mu}g^\tau{}_\nu - g^{\tau\mu}g^\sigma{}_\nu) \tag{5.97}$$

umgeformt werden kann:

$$\mathcal{S}^{\rho\sigma\tau} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\rho A^\mu)}\frac{1}{i\hbar}\widetilde{B}^{\sigma\tau}A^\mu = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\rho A^\mu)}\frac{1}{i\hbar}B^{\sigma\tau\mu}{}_\nu A^\nu = \tag{5.98}$$
$$= \frac{1}{c}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\rho A^\mu)}g^{\sigma\mu}A^\tau - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\rho A^\mu)}g^{\tau\mu}A^\sigma =$$
$$\boxed{\mathcal{S}^{\rho\sigma\tau} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\rho A_\sigma)}A^\tau - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\rho A_\tau)}A^\sigma} \,. \tag{5.99}$$

Der Drehimpulsdichte-Tensor hat die Komponenten

$$\boxed{\mathcal{M}^{\rho\sigma\tau} \equiv x^\sigma \frac{\mathcal{T}^{\rho\tau}}{c} - x^\tau \frac{\mathcal{T}^{\rho\sigma}}{c} + \mathcal{S}^{\rho\sigma\tau}} \quad . \tag{5.100}$$

Seine Dimension ist

$$[\mathcal{M}^{\rho\sigma\tau}] = \frac{\text{Wirkung}}{\text{Volumen}} \,. \tag{5.101}$$

Er erfüllt die sechs Kontinuitätsgleichungen

$$\mathrm{d}_\rho \mathcal{M}^{\rho\sigma\tau} = 0 \quad \text{mit } \sigma\tau = 10, 20, 30, 23, 31, 12 \; . \tag{5.102}$$

Integration der Null-Komponenten über den gesamten Ortsraum ergibt die sechs erhaltenen Drehimpulse

$$M^{\sigma\tau} \equiv \int\limits_\Omega \mathrm{d}^3x \Big(x^\sigma \, \frac{\mathcal{T}^{0\tau}}{c} - x^\tau \, \frac{\mathcal{T}^{0\sigma}}{c} \Big) + \int\limits_\Omega \mathrm{d}^3x \, \mathcal{S}^{0\sigma\tau} \tag{5.103}$$
$$\text{mit } \sigma\tau = 10, 20, 30, 23, 31, 12 \quad ,$$

die bereits bei (4.74) diskutiert wurden. Dort hatten wir festgestellt, dass für praktische Anwendungen nur die rein räumlichen Drehimpulse mit $\sigma\tau = jl = 23, 31, 12$ nützlich sind:

$$M^{jl} \equiv \underbrace{\int\limits_\Omega \mathrm{d}^3x \Big(x^j \mathcal{P}^l - x^l \mathcal{P}^j \Big)}_{\text{Bahndrehimpuls}} + \underbrace{\int\limits_\Omega \mathrm{d}^3x \, \mathcal{S}^{0jl}}_{\text{Spin}} \tag{5.104}$$
$$\text{mit } jl = 23, 31, 12$$

Hier wurde $\mathcal{P}^j \overset{(4.34)}{=} \mathcal{T}^{0j}/c$ benutzt. Wir bemerken, dass Erhaltungssätze nur für die Gesamt-Drehimpulse M^{jl} gelten, nicht für Bahndrehimpuls oder Spin allein.

6 Bedeckungsgruppen

Wir haben festgestellt, wie bei einer Drehung des Koordinatensystems skalare Felder, Vektoren, und Vektorfelder transformiert werden, d.h. wir haben die Darstellungen der Lorentzgruppe gefunden, deren Basen skalare Felder bzw. Vektoren sind. Nun müssen wir als letzte und schwierigste Aufgabe herausfinden, wie Spinoren bei einer Drehung des Koordinatensystems transformiert werden. Die Aufgabe ist deshalb schwieriger, weil Spinoren nicht Basen von Darstellungen der Lorentzgruppe sind, sondern Basen von Darstellungen einer anderen Gruppe – nämlich der Gruppe $\{\mathcal{B}\}$, die die „universelle Bedeckungsgruppe“ der Lorentzgruppe ist.

Aus folgendem Grund kommt hier eine neue Gruppe ins Spiel: Natürlich erwarten wir, dass sich bei einer Drehung der räumlichen Koordinatenachsen (also einer Koordinatenrotation in den Ebenen 23, 31, oder 12 der vierdimensionalen Raumzeit, oder bei einer beliebigen Linearkombination dieser drei Drehungen) um den Winkel 2π die Beschreibung keines beobachtbaren physikalischen Phänomens in irgendeiner Weise ändert. Nun treten aber die Zustandsfunktionen der Quantentheorie bei der Beschreibung beliebiger beobachtbarer Größen immer in bilinearer Kombination auf. Würden sich die Zustandsfunktionen, wenn die räumlichen Koordinatenachsen um den Winkel α gedreht werden, um den Faktor $\exp\{i\frac{\alpha}{2}\}$ ändern, so wären sie wegen $\exp\{i\frac{4\pi}{2}\} = 1$ bei einer Koordinatendrehung von $z \cdot 4\pi$ mit $z \in \mathbb{Z}$ mit den nicht gedrehten Zustandsfunktionen identisch. Die Zustandsfunktionen hätten also bei raumartigen Koordinatenrotation eine Periodizität von 4π. Bei einer Koordinatendrehung um ein ungeradzahliges Vielfaches von 2π würden die Zustandsfunktionen sich um den Faktor $\exp\{i\frac{2\pi}{2}\} = -1$ ändern. Wegen

$$\langle U(2\pi)\phi|U(2\pi)\psi\rangle = \langle -\phi| - \psi\rangle = \langle\phi|\psi\rangle \tag{6.1}$$

würden sich diese Faktoren -1 aber bei jeglicher Berechnung von Messwerten

kompensieren, und die Theorie würde auch in diesem Fall alle beobachtbaren Größen mit einer Periodizität von 2π bei Raumdrehungen beschreiben.

Tatsächlich hat die Erfahrung gezeigt, dass man für eine vollständige quantentheoretische Beschreibung auch Zustandsfunktionen mit 4π-Periodizität bei Raumdrehungen benötigt. Solche Zustandsfunktionen werden als *Spinoren* bezeichnet.

Wir werden die etwas komplizierte Konstruktion leichter überschauen, wenn wir uns zunächst den entsprechenden, aus der elementaren nichtrelativistischen Quantenmechanik bekannten Zusammenhang zwischen Koordinatenrotationen des dreidimensionalen Ortsraums und den Transformationen nichtrelativistischer Spinoren in Erinnerung rufen. Die Gruppe der Koordinatenrotationen des dreidimensionalen Ortsraums nennen wir $\{\overline{\ell}\}$. Nichtrelativistische Spinoren sind nicht die Basen von Darstellungen von $\{\overline{\ell}\}$, sondern sie sind Basen von Darstellungen der Gruppe $\{\overline{\mathcal{B}}\}$. Dazu gleich mehr.

Vorab geben wir eine Übersicht über die Nomenklatur einiger Matrixgruppen. Wir schreiben Transformationsgruppen, die Darstellungen von abstrakten Gruppen bilden, meist in Form von Matrixgruppen. Man denke beispielsweise an die 4×4 Matrizen der Lorentztransformationen $\{\Lambda\}$. Solche Darstellungen werden als Matrixdarstellungen bezeichnet. Da die Matrizen einer beliebigen Matrixdarstellung eine Gruppe bilden, muss das Produkt zweier Matrizen wieder eine Matrix aus der Gruppe sein, und zu jeder Matrix muss auch die inverse Matrix in der Gruppe enthalten sein. Deshalb sind die Matrizen sämtlicher Darstellungen quadratisch und invertierbar. Systematische Nomenklatur von Matrixgruppen:

U(n)	Unitäre Matrizen der Dimension $n \times n$. Sie lassen das Skalarprodukt (und damit insbesondere auch das Normquadrat) der Vektoren, auf die sie wirken, invariant. Ihre Determinante ist ±1. Die Elemente der Matrizen sind komplexe Zahlen.
O(n)	Untergruppe von U(n). Besteht aus allen Matrizen mit ausschließlich reellen Elementen. Das O bedeutet orthogonal.
SU(n)	Untergruppe von U(n). Besteht aus allen Matrizen mit Determinante $+1$. Das S bedeutet speziell, synonym wird auch die Bezeichnung unimodular verwendet.

SO(n) Untergruppe von O(n). Besteht aus allen Matrizen mit Determinante +1.

SO(m,n) Pseudo-orthogonale Gruppe von Matrizen der Dimension $(n+m)\times(n+m)$. Sie lässt das Skalarprodukt von Vektoren a, b in der Form $a\cdot b = +a_1b_1+\ldots+a_nb_n - a_{n+1}b_{n+1}-\ldots- a_{n+m}b_{n+m}$ invariant. SO(3,1) ist der systematische Name der Gruppe $\{\Lambda\}$ der Lorentztransformationen.

SL(n,$\mathbb{C}$) Gruppe linearer Matrizen der Dimension $n\times n$ mit Determinante +1. Die Matrizen haben komplexe Elemente. Die Gruppe SU(n) ist eine Untergruppe der SL(n,$\mathbb{C}$).

6.1 Die nichtrelativistische Bedeckungsgruppe $\{\overline{\mathcal{B}}\}$

6.1.1 Die Gruppen $\{\overline{\ell}\}$ und $\{\overline{\mathcal{B}}\}$

$\{\overline{\ell}\}$ ist die Gruppe der Koordinatenrotationen des dreidimensionalen Ortsraumes. Sie ist eine Untergruppe der Lorentzgruppe $\{\ell\}$. Beide sind abstrakte Gruppen, denn sie sind nicht durch ihre Wirkung auf eine Basis definiert, sondern allein durch ihre Gruppenstruktur.

Die Matrixgruppe SO(3) ist eine dreidimensionale treue Darstellung von $\{\overline{\ell}\}$. Basis dieser Darstellung sind die im Ortsraum definierten dreidimensionalen Vektoren $\boldsymbol{V}$. Ihre Elemente $R(\boldsymbol{\theta})\in$ SO(3) transformieren die Vektoren in ein gestrichenes Koordinatensystem$'$, dessen Achsen gegenüber dem ungestrichenen Koordinatensystem um den Winkel $\boldsymbol{\theta}$ gedreht sind:

$$\boldsymbol{V}' = R(\boldsymbol{\theta})\,\boldsymbol{V} \tag{6.2}$$

Dabei verwenden wir für die Drehwinkel die in (5.64) eingeführte Nomenklatur

$$\Theta^j = \epsilon^{jkl}\Omega^{kl} \quad . \tag{6.3}$$

Da $\{\overline{\ell}\}$ eine Untergruppe von $\{\ell\}$ ist, lässt sich die Darstellung SO(3) von $\{\overline{\ell}\}$ leicht aus der Darstellung $\{\Lambda\}$ von $\{\ell\}$ extrahieren. Den aus dem vierdimensionalen Generator

$$L^j \overset{(5.69)}{=} B^{kl} \quad \text{generiert Drehung in Ebene } x^k x^l \tag{6.4}$$

abgeleiteten dreidimensionalen Generator

$$\bar{L}^j \quad \text{generiert Drehung in Ebene } x^k x^l \tag{6.5}$$

kennzeichnen wir durch einen Querstrich. Die drei Generatoren der Gruppe SO(3) sind:

Drehung in der x^2-x^3-Ebene:

$$\bar{L}^1 \overset{(5.38d)}{=} -i\hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.6}$$

Drehung in der x^3-x^1-Ebene:

$$\bar{L}^2 \overset{(5.38e)}{=} -i\hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.7}$$

Drehung in der x^1-x^2-Ebene:

$$\bar{L}^3 \overset{(5.38f)}{=} -i\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.8}$$

Die endlichen Transformationen $R \in \mathrm{SO}(3)$ sind

$$R(\boldsymbol{\Theta}) = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\Theta_k \bar{L}^k\right\} \quad , \tag{6.9}$$

was für die einzelnen Drehebenen identisch ist mit

Drehung ^{23}:

$$R(\Theta^1) \overset{(5.54b)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Theta^1 & \sin\Theta^1 \\ 0 & -\sin\Theta^1 & \cos\Theta^1 \end{pmatrix} \tag{6.10a}$$

Drehung ^{31}:

$$R(\Theta^2) \overset{(5.54c)}{=} \begin{pmatrix} \cos\Theta^2 & 0 & -\sin\Theta^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\Theta^2 & 0 & \cos\Theta^2 \end{pmatrix} \tag{6.10b}$$

$$\text{Drehung}^{12}: \quad R(\Theta^3) \overset{(5.54a)}{=} \begin{pmatrix} \cos\Theta^3 & \sin\Theta^3 & 0 \\ -\sin\Theta^3 & \cos\Theta^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.10c}$$

Auch die Lie-Algebra der Darstellung SO(3) – die mit der Lie-Algebra der abstrakten Gruppe $\{\overline{\ell}\}$ identisch ist – ist uns bereits bekannt:

$$[\bar{L}^j, \bar{L}^k] \overset{(5.71c)}{=} +i\hbar\epsilon^{jkl}\bar{L}^l \tag{6.11}$$

Für eine vollständige Beschreibung der beobachteten Phänomene kommt man nicht mit Zustandsfunktionen aus, die Basis von Darstellungen der Gruppe $\{\overline{\ell}\}$ sind. Die Erfahrung hat gezeigt, dass man auch Zustandsfunktionen benötigt, die Basis von Darstellungen der Gruppe $\{\overline{\mathcal{B}}\}$ sind, die wir implizit folgendermaßen definieren:

Definition: Die Matrixgruppe SU(2) ist eine zweidimensionale treue Darstellung der abstrakten Gruppe $\{\overline{\mathcal{B}}\}$. (6.12)

Die Elemente der Gruppe SU(2) sind Matrizen, die zweikomponentige Vektoren transformieren. Die Gruppe $\{\overline{\mathcal{B}}\}$ hat die gleiche Gruppenstruktur wie die Gruppe SU(2), aber die Elemente von $\{\overline{\mathcal{B}}\}$ wirken auf nichts außerhalb der Gruppe. Sie ist eine abstrakte Gruppe, keine Transformationsgruppe.

Die 4 Elemente einer Matrix $U \in \mathrm{SU}(2)$ sind komplexe Zahlen. Jede Matrix hat demnach zunächst 8 Freiheitsgrade, die aber durch Nebenbedingungen auf 3 Freiheitsgrade eingeschränkt werden. Erstens muss die Determinante $+1$ sein:

$$\det U = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc = +1 \; . \tag{6.13}$$

Dies ist eine komplexe Gleichung, die die Freiheitsgrade der Matrizen von 8 auf 6 einschränkt. Aus der Forderung nach Unitarität folgen die Bedingungen:

$$UU^+ = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$aa^* + bb^* = 1 \tag{6.14a}$$
$$ac^* + bd^* = 0 \tag{6.14b}$$
$$ca^* + db^* = 0 \tag{6.14c}$$
$$cc^* + dd^* = 1 \tag{6.14d}$$

Diese Bedingungen schränken die verbliebenen 6 Freiheitsgrade auf 3 ein. Denn (6.14b) und (6.14c) sind zueinander komplex konjugiert, also nicht voneinander unabhängig.

Unter Berücksichtigung der Randbedingungen ergibt sich (Nebenrechnung in Anhang A.4) folgende allgemeinste Form einer Matrix $U \in \mathrm{SU}(2)$:

$$\boxed{U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad aa^* + bb^* \overset{(6.14a)}{=} 1} \quad . \tag{6.15}$$

Die zusammen vier Freiheitsgrade der komplexen Zahlen a und b werden durch die reelle Gleichung $aa^* + bb^* = 1$ auf drei eingeschränkt.

Demnach werden die Matrizen $U \in \mathrm{SU}(2)$ eindeutig festgelegt durch 3 reelle Parameter, die in einem Dreiervektor $\boldsymbol{\Theta} = (\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3)$ zusammengefasst werden können. Wir beweisen nun, dass sich alle Matrizen $U \in \mathrm{SU}(2)$ mit den Pauli-Matrizen

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{6.16}$$

in der Form

$$\boxed{U(\boldsymbol{\Theta}) = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\Theta_k \frac{\hbar\sigma^k}{2}\right\}} \tag{6.17}$$

schreiben lassen. Wegen

$$\sigma^1\sigma^1 = \sigma^2\sigma^2 = \sigma^3\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.18}$$

ist

$$\begin{aligned} U(\boldsymbol{\Theta}) &\overset{(6.17)}{=} \sum_{n=0,2,4,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n!}\Big(i\frac{\Theta}{2}\Big)^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n!}\Big(i\frac{\Theta}{2}\Big)^n \frac{\boldsymbol{\Theta}}{\Theta}\cdot\boldsymbol{\sigma} \\ &= \cos(\Theta/2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + i\sin(\Theta/2)\frac{\boldsymbol{\Theta}}{\Theta}\cdot\boldsymbol{\sigma} \end{aligned} \tag{6.19}$$

mit $\Theta \equiv |\boldsymbol{\Theta}|$. In dieser Gleichung ist erkennbar, dass die Matrizen $U \in SU(2)$ mit dem reellen Parameter 4π periodisch sind, aber nicht mit 2π. Mit beliebigen ganzen Zahlen z gilt

$$U\Big(\boldsymbol{\Theta} + z\cdot 4\pi\frac{\boldsymbol{\Theta}}{\Theta}\Big) = U\Big(\boldsymbol{\Theta}\Big) \tag{6.20a}$$

$$U\Big(\boldsymbol{\Theta} + (2z+1)\cdot 2\pi\frac{\boldsymbol{\Theta}}{\Theta}\Big) = U\Big(\boldsymbol{\Theta}\Big)\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{6.20b}$$

mit beliebigem $z \in \mathbb{Z}$.

Insbesondere gilt unabhängig von der Richtung der Drehachse:

$$U(0) = U(\pm 4\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad U(\pm 2\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{6.20c}$$

Wir haben in (6.1) bereits festgestellt dass dies akzeptabel ist, weil die Spinoren in allen Berechnungen beobachtbarer Größen bilinear vorkommen, so dass beobachtbare Größen die Periodizität 2π haben, auch wenn sie mithilfe von Spinoren berechnet werden, deren Periodizität 4π ist.

Wir schreiben (6.19) komponentenweise:

$$U(\Theta_1) = \begin{pmatrix} \cos(\Theta_1/2) & i\sin(\Theta_1/2) \\ i\sin(\Theta_1/2) & \cos(\Theta_1/2) \end{pmatrix} \tag{6.21a}$$

$$U(\Theta_2) = \begin{pmatrix} \cos(\Theta_2/2) & \sin(\Theta_2/2) \\ -\sin(\Theta_2/2) & \cos(\Theta_2/2) \end{pmatrix} \tag{6.21b}$$

$$U(\Theta_3) = \begin{pmatrix} \exp\{i\Theta_3/2\} & 0 \\ 0 & \exp\{-i\Theta_3/2\} \end{pmatrix} \tag{6.21c}$$

Aus diesen drei Gleichungen kann man direkt ablesen, dass jede Matrix $U \in \mathrm{SU}(2)$ in der Form

$$U(\boldsymbol{\Theta}) \overset{(6.15)}{=} \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \overset{(6.17)}{=} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\Theta_k \frac{\hbar\sigma^k}{2}\right\}$$

geschrieben werden kann: Es ist immer möglich, die drei reellen Parameter $\boldsymbol{\Theta}$ so zu wählen, dass

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(b) = \sin(\Theta_2/2) \qquad &, \qquad \mathrm{Im}(b) = \sin(\Theta_1/2) \\ a = \cos(\Theta_1/2) + \cos(\Theta_2/2) &+ \exp\{i\Theta_3/2\} \\ \text{mit } aa^* + bb^* &\overset{(6.14a)}{=} 1 \end{aligned} \tag{6.22}$$

gilt.

Die Generatoren $\hbar\sigma^k/2$ der Transformation (6.17) haben die Vertauschungsrelationen

$$\left[\frac{\hbar\sigma^1}{2}, \frac{\hbar\sigma^2}{2}\right] = \frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} - \frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix} = i\hbar\,\frac{\hbar\sigma^3}{2} \tag{6.23a}$$

$$\left[\frac{\hbar\sigma^2}{2}, \frac{\hbar\sigma^3}{2}\right] = \frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} 0 & 2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix} = i\hbar\,\frac{\hbar\sigma^1}{2} \tag{6.23b}$$

$$\left[\frac{\hbar\sigma^3}{2}, \frac{\hbar\sigma^1}{2}\right] = \frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = i\hbar\,\frac{\hbar\sigma^2}{2}\ . \tag{6.23c}$$

Die allgemeine Form des Kommutators ist

$$\left[\frac{\hbar\sigma^j}{2}, \frac{\hbar\sigma^k}{2}\right] = i\hbar\epsilon^{jkl}\frac{\hbar\sigma^l}{2} \quad , \tag{6.24}$$

was mit (6.11) übereinstimmt.

Die Lie-Algebren der Gruppen $\{\overline{\ell}\}$ und SU(2) bzw. $\{\overline{\mathcal{B}}\}$ sind identisch.	(6.25)

Da wir $\{\overline{\mathcal{B}}\}$ definiert haben als abstrakte Gruppe mit der Darstellung SU(2), sind beide Gruppen isomorph und haben die gleiche Lie-Algebra (6.24).

6.1.2 Zusammenhang der Mannigfaltigkeiten

In diesem Abschnitt beleuchten wir die formale Beziehung zwischen den Gruppen $\{\overline{\mathcal{B}}\}$ und $\{\overline{\ell}\}$ unter einem weiteren Gesichtspunkt aus der Theorie der Lie-Gruppen: $\{\overline{\mathcal{B}}\}$ ist die universelle Bedeckungsgruppe der Gruppe $\{\overline{\ell}\}$.

In Abschnitt 5.3.1 haben wir den Begriff der Parameter-Mannigfaltigkeit eingeführt. Die Parameter-Mannigfaltigkeit der Gruppe $\{\overline{\ell}\}$ ist identisch mit der Parameter-Mannigfaltigkeit der Lorentzgruppe $\{\ell\}$ in den drei rein räumlichen Parametern: Sie ist eine Kugel mit dem Radius π um den Nullpunkt. Jeweils 2 auf der Oberfläche der Mannigfaltigkeit diametral gegenüberliegende euklidische Punkte bilden einen einzigen topologischen Punkt. Die Parameter-Mannigfaltigkeit der Gruppe $\{\overline{\mathcal{B}}\}$ bzw. ihrer treuen Darstellung SU(2) ist ebenfalls eine Kugel um den Nullpunkt, allerdings mit dem Radius 2π, da die Elemente der SU(2) ja 4π-Periodizität haben. Da für die Elemente $U \in \mathrm{SU}(2)$ unabhängig von der Richtung der Drehachse

$$U(\pm 2\pi\tfrac{\boldsymbol{\Theta}}{\Theta}) \overset{(6.20c)}{=} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gilt, bildet die gesamte Oberfläche der Parameter-Kugel der SU(2) einen einzigen topologischen Punkt.
Um den Begriff des Zusammenhangs einer Parameter-Mannigfaltigkeit zu klären, betrachten wir die in Abbildung 6.1 als graue Flächen skizzierten

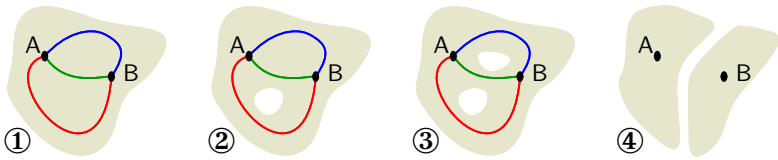


Abb. 6.1 : Verschiedene Parameter-Mannigfaltigkeiten

zweidimensionalen Parameter-Mannigfaltigkeiten von vier Phantasiegruppen.

Definition: Eine topologische Mannigfaltigkeit heißt *zusammenhängend*, wenn es zwischen zwei beliebigen Punkten der Mannigfaltigkeit mindestens einen kontinuierlichen Weg gibt, der nirgendwo außerhalb der Mannigfaltigkeit verläuft. (6.26)

Offensichtlich sind die drei Mannigfaltigkeiten ①,②,③ in Abbildung 6.1 zusammenhängend. Nur die Mannigfaltigkeit ④ ist nicht zusammenhängend, denn kein kontinuierlicher Weg kann die Punkte A und B verbinden, ohne teilweise außerhalb der Mannigfaltigkeit zu verlaufen.

Definition: Eine topologische Mannigfaltigkeit heißt *n-fach zusammenhängend*, wenn man zwischen zwei beliebigen Punkten der Mannigfaltigkeit genau n Standardwege definieren kann, die folgende Eigenschaft haben: Jeder beliebige Weg zwischen den beiden Punkten, der die Mannigfaltigkeit nirgendwo verlässt, kann durch kontinuierliche Verschiebung, ohne irgendwo die Mannigfaltigkeit zu verlassen, mit genau einem Standardweg zur Deckung gebracht werden. (6.27)

Die Mannigfaltigkeit ① in Abbildung 6.1 ist einfach zusammenhängend. Man kann beispielsweise den roten Weg als Standardweg definieren. Der grüne Weg und der blaue Weg, und jeder beliebige andere Weg zwischen den Punkten A und B kann durch kontinuierliche Verschiebung innerhalb der Mannigfaltigkeit mit dem roten Standardweg zur Deckung gebracht werden. Für beliebige andere zwei Punkte dieser Mannigfaltigkeit gilt das gleiche.

Die Mannigfaltigkeit ② ist zweifach zusammenhängend. Wir können den roten und den grünen Weg als Standardwege definieren. Der blaue Weg kann

– ohne die Mannigfaltigkeit irgendwo zu verlassen — durch kontinuierliche Verschiebung mit dem grünen Weg zur Deckung gebracht werden, aber wegen des Lochs in der Mannigfaltigkeit nicht mit dem roten. Auch jeder beliebige andere Weg zwischen den beliebigen Punkten A und B läßt sich durch kontinuierliche Verschiebung innerhalb der Mannigfaltigkeit entweder mit dem roten oder mit dem grünen Standardweg zur Deckung bringen, aber nicht mit beiden.

Die Mannigfaltigkeit ③ schließlich ist dreifach zusammenhängend. Denn beliebige Wege zwischen beliebigen Punkten A und B lassen sich durch kontinuierliche Verschiebung innerhalb der Mannigfaltigkeit mit einem der drei eingezeichneten Standardwege zur Deckung bringen. Aber kein Weg kann mit einem zweiten oder dritten Standardweg zur Deckung gebracht werden, weil die Wege dazu über Gebiete – nämlich die Löcher in der Mannigfaltigkeit – geschoben werden müssten, die nicht zur Mannigfaltigkeit gehören.
Es gilt der

Satz: Wenn mehrere Gruppen mit verschiedener Parameter-Mannigfaltigkeit die gleiche Lie-Algebra haben, dann hat genau eine von ihnen eine einfach zusammenhängende Parameter-Mannigfaltigkeit. (6.28)

Den Beweis dieses wichtigen Satzes erspare ich den Lesern, und vor allem mir selbst.

Definition: Wenn mehrere Gruppen mit verschiedener Parameter-Mannigfaltigkeit die gleiche Lie-Algebra haben, dann wird diejenige von ihnen, deren Parameter-Mannigfaltigkeit einfach zusammenhängt, als *universelle Bedeckungsgruppe* der anderen Gruppen bezeichnet. (6.29)

Der Name „universelle Bedeckungsgruppe“ leuchtet mit Blick auf Abbildung 6.1 unmittelbar ein: Wenn man die Parameter-Mannigfaltigkeit ① mit den Parameter-Mannigfaltigkeiten ②,③,④ zudeckt, dann bleiben Teile von ① durch die Löcher und Spalte von ②,③,④ sichtbar. Umgekehrt können ②,③,④ von der einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeit ① vollständig zugedeckt werden.

Die Parameter-Mannigfaltigkeit der Gruppe $\{\overline{\ell}\}$ ist eine dreidimensionale Kugel mit Radius π. Im Zentrum der Kugel befindet sich der Punkt, der das Parameter-Triplet $\boldsymbol{\Theta} = (0, 0, 0)$ repräsentiert. Die Oberfläche der Kugel wird von den Punkten gebildet, die die Parameter-Triplets $\boldsymbol{\Theta} = \pm\pi\,\boldsymbol{\Theta}/\Theta$ repräsentieren. Bei flüchtiger Betrachtung könnte man vermuten, diese Parameter-Mannigfaltigkeit hinge einfach zusammen, weil es in ihr keine Löcher oder Spalte gibt. Wir müssen die Definition (6.27) aber genau lesen: Von „Löchern“ oder „Spalten“ ist dort überhaupt nicht die Rede. Vielmehr haben wir zu prüfen, wie viele verschiedene Standardwege zwischen zwei beliebigen Punkten definiert werden können.

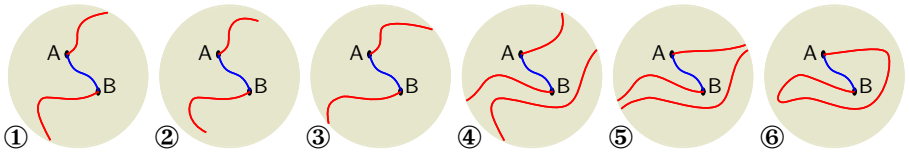


Abb. 6.2: Die Parameter-Mannigfaltigkeit der Gruppe $\{\overline{\ell}\}$

In Skizze ① von Abbildung 6.2 sind zwei Wege eingezeichnet, die die Punkte A und B der Parameter-Mannigfaltigkeit der Gruppe $\{\overline{\ell}\}$ miteinander verbinden. Der blaue Weg ist eine direkte Verbindung im Inneren der Mannigfaltigkeit. Der rote Weg führt vom Punkt A zur Oberfläche der Mannigfaltigkeit bei etwa 1 Uhr. Der diametral bei etwa 7 Uhr auf der Oberfläche der Mannigfaltigkeit liegende Parameterpunkt definiert die gleiche Drehung wie der Punkt bei etwa 1 Uhr, ist also mit diesem Punkt topologisch identisch. Allgemein gilt, dass die „zwei“ jeweils diametral auf der Kugeloberfläche der Mannigfaltigkeit gegenüberliegenden Punkte das gleiche Gruppenelement von $\{\overline{\ell}\}$ definieren und demnach als ein einziger topologischer Punkt gelten. Vom Punkt bei etwa 7 Uhr führt der rote Weg weiter zum Punkt B. Der rote Weg ist, durch die Brille der Topologie der Parameter-Mannigfaltigkeit der Gruppe $\{\overline{\ell}\}$ betrachtet, ein genauso kontinuierlicher Weg wie der blaue.

Wir ernennen den blauen Weg zum Standardweg, und versuchen den roten Weg durch kontinuierliche Verschiebung mit dem blauen Weg zur Deckung zu bringen. Sobald wir den roten Weg auch nur infinitesimal vom Punkt etwa 1 Uhr auf der Kugeloberfläche ins Innere der Mannigfaltigkeit zurückziehen,

ziehen wir ihn auch vom Punkt etwa 7 Uhr der Kugeloberfläche zurück. Denn der Punkt etwa 1 Uhr und der Punkt etwa 7 Uhr ist ja ein einziger topologischer Punkt. Entweder verläuft der Weg über diesen Punkt, oder nicht. Wenn er nicht mehr über diesen Punkt verläuft, dann öffnet sich eine Lücke im Weg, wie in ② sichtbar. Auf diese Weise ist offenbar keine kontinuierliche Verschiebung des roten Weges möglich.

Wir können stattdessen versuchen, den Punkt entlang der Kugeloberfläche zu verschieben, z.B. von etwa 1 Uhr in Richtung 2 Uhr. Das ist aber identisch mit einer Verschiebung des Punktes bei etwa 7 Uhr in Richtung 8 Uhr, siehe ③. Auch diese Methode bringt uns nicht dem Ziel näher, den roten Weg mit dem blauen zur Deckung zu bringen. Wenn ein Weg einen topologischen Punkt an der Oberfläche der Mannigfaltigkeit der Gruppe $\{\overline{\ell}\}$ enthält, dann kann er durch kontinuierliche Verschiebung auf keine Weise von der Oberfläche gelöst werden.

Anders ist es, wenn – wie in ④ dargestellt – ein Weg die Oberfläche der Mannigfaltigkeit an zwei topologischen Punkten berührt: Der rote Weg führt vom Punkt A zur Oberfläche der Mannigfaltigkeit bei etwa 1 Uhr bzw. 7 Uhr, von dort durchs Innere der Mannigfaltigkeit weiter zum topologischen Punkt an der Oberfläche bei etwa halb drei bzw. etwa halb neun, und weiter zum Punkt B. Jetzt kann man den Weg vom topologischen Punkt 1 Uhr bzw. 7 Uhr kontinuierlich auf der Oberfläche der Mannigfaltigkeit zum andern topologischen Punkt etwa halb drei bzw. etwa halb neun verschieben, siehe ⑤. Sobald sich die beiden Oberflächenpunkte des Weges berühren, kann der Weg – wie in ⑥ zu sehen – durch kontinuierliche Verschiebung von der Oberfläche der Mannigfaltigkeit abgelöst und mit dem blauen Standardweg zur Deckung gebracht werden.

Allgemein gilt: Jeder Weg zwischen den Punkten A und B, der die Oberfläche der Parameter-Mannigfaltigkeit der Gruppe $\{\overline{\ell}\}$ in einer geraden Anzahl (einschließlich Null) von topologischen Punkten berührt, kann durch kontinuierliche Verschiebung mit dem blauen Standardweg zur Deckung gebracht werden. Jeder Weg zwischen den Punkten A und B, der die Oberfläche der Mannigfaltigkeit in einer ungeraden Anzahl von topologischen Punkten berührt, kann durch kontinuierliche Verschiebung mit dem roten Weg von Skizze ① – den wir zum zweiten Standardweg ernennen – zur Deckung gebracht werden. Die Parameter-Mannigfaltigkeit der Gruppe $\{\overline{\ell}\}$

hängt also zweifach zusammen.

Nun zur Gruppe $\{\overline{\mathcal{B}}\}$ bzw. ihrer treuen Darstellung SU(2): Ihre Parameter-Mannigfaltigkeit ist eine dreidimensionale Kugel mit Radius 2π. Im Zentrum der Kugel befindet sich der Punkt, der das Parameter-Triplet $\boldsymbol{\Theta} = (0, 0, 0)$ repräsentiert. Die Oberfläche der Kugel wird von den Punkten gebildet, die die Parameter-Triplets $\boldsymbol{\Theta} = \pm 2\pi\, \boldsymbol{\Theta}/\Theta$ repräsentieren. Anders als bei $\{\overline{\ell}\}$ sind in der Parameter-Mannigfaltigkeit der Gruppe $\{\overline{\mathcal{B}}\}$ nicht nur die auf der Kugeloberfläche diametral gegenüberliegenden Punkte, sondern *sämtliche* Punkte der Oberfläche der Mannigfaltigkeit ein einziger topologischer Punkt. In Skizze ① von Abbildung 6.3 sind zwei Wege einge-

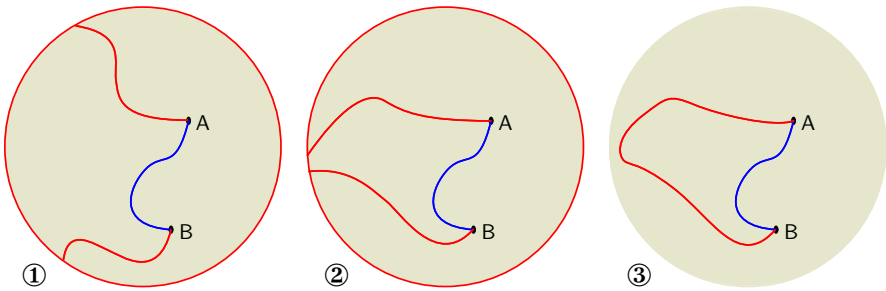


Abb. 6.3: Die Parameter-Mannigfaltigkeit der Gruppe $\{\overline{\mathcal{B}}\}$

zeichnet, die die beiden Punkte A und B in der Parameter-Mannigfaltigkeit der Gruppe $\{\overline{\mathcal{B}}\}$ miteinander verbinden. (Nebenbei: Die Abbildungen 6.3 und 6.2 sind im gleichen Maßstab gezeichnet: Die Mannigfaltigkeit der Gruppe $\{\overline{\mathcal{B}}\}$ ist eine Kugel mit Radius 2π, die Mannigfaltigkeit der Gruppe $\{\overline{\ell}\}$ ist eine Kugel mit Radius π.) Der blaue Weg verbindet A und B im Inneren der Mannigfaltigkeit. Der rote Weg führt vom Punkt A zur Oberfläche der Mannigfaltigkeit, die er bei etwa 11 Uhr erreicht. Die gesamte Oberfläche der Mannigfaltigkeit ist ein topologischer Punkt, der zum roten Weg gehört, und deshalb rot gezeichnet ist. Von diesem topologischen Punkt führt der Weg bei etwa halb acht weiter zum Punkt B. Da die Oberfläche ein einziger Punkt ist, kann man die beiden Teilwege zwischen der Oberfläche und den Punkten A und B kontinuierlich aufeinander zuschieben, siehe Skizze ②. Sobald sich die Teilwege an der Oberfläche berühren, lassen sie sich durch

weitere kontinuierliche Verschiebung von der Oberfläche der Mannigfaltigkeit lösen (siehe Skizze ③), und schließlich mit dem blauen Weg überlagern. Es gibt also in der Parameter-Mannigfaltigkeit der Gruppe $\{\overline{\mathcal{B}}\}$ zwischen zwei beliebigen topologischen Punkten nur einen einzigen Standardweg, d.h. die Mannigfaltigkeit ist einfach zusammenhängend.

Zufolge Satz (6.28) ist also die Gruppe $\{\overline{\mathcal{B}}\}$ die universelle Bedeckungsgruppe der Gruppe $\{\overline{\ell}\}$.

6.1.3 Die Homomorphie der Gruppen

In (6.25) haben wir festgestellt, dass die Gruppen $\{\overline{\mathcal{B}}\}$ und $\{\overline{\ell}\}$ die gleiche Lie-Algebra haben. In diesem Abschnitt wird zusätzlich eine Abbildung definiert, die je zwei Elementen aus $\{\overline{\mathcal{B}}\}$ ein Element aus $\{\overline{\ell}\}$ zuordnet. Zusammengenommen ist damit gezeigt, dass die Gruppe $\{\overline{\ell}\}$ der Koordinatendrehungen des dreidimensionalen Ortsraums zu ihrer Bedeckungsgruppe $\{\overline{\mathcal{B}}\}$ homomorph ist.

Für beliebige Parametertriplets $\boldsymbol{\Theta}$ definieren wir folgende Abbildung:

$$\left.\begin{array}{r} A:\{\overline{\mathcal{B}}\}\longrightarrow\{\overline{\ell}\} \\ \overline{\mathcal{B}}(\boldsymbol{\Theta}) \\ \overline{\mathcal{B}}(\boldsymbol{\Theta}\pm 2\pi\frac{\boldsymbol{\Theta}}{\Theta}) \end{array}\right\} \xrightarrow{A} \overline{\ell}(\boldsymbol{\Theta}) \tag{6.30}$$

Dabei ist $\overline{\mathcal{B}}(\boldsymbol{\Theta}\pm 2\pi\frac{\boldsymbol{\Theta}}{\Theta}) = \overline{\mathcal{B}}(\boldsymbol{\Theta})\overline{\mathcal{B}}(\pm 2\pi)$ für jedes Parametertriplet $\boldsymbol{\Theta}$ genau ein Element der Gruppe $\{\overline{\mathcal{B}}\}$, nicht etwa zwei Elemente. Denn wegen (6.20c) ist $\overline{\mathcal{B}}(+2\pi) = \overline{\mathcal{B}}(-2\pi)$.

Die Parametermannigfaltigkeit der Gruppe $\{\overline{\mathcal{B}}\}$ ist eine Kugel mit Radius 2π um den Punkt $\boldsymbol{\Theta} = (0,0,0)$, die Parametermannigfaltigkeit der Gruppe $\{\overline{\ell}\}$ ist eine Kugel mit Radius π um den Punkt $\boldsymbol{\Theta} = (0,0,0)$. Deshalb kann man sich die Abbildung veranschaulichen wie in Abb. 6.4 dargestellt. Gezeigt ist eine beliebige Achse durch den Nullpunkt der Parameter-Mannigfaltigkeit. Jedes Element der Gruppe $\{\overline{\mathcal{B}}\}$ wird eindeutig auf genau ein Element der Gruppe $\{\overline{\ell}\}$ abgebildet. Das gilt auch für $\overline{\mathcal{B}}(+\pi\frac{\boldsymbol{\Theta}}{\Theta})$ und $\overline{\mathcal{B}}(-\pi\frac{\boldsymbol{\Theta}}{\Theta})$. Denn in der Parameter-Mannigfaltigkeit der Gruppe $\{\overline{\ell}\}$ ist der Punkt $\pm\pi$ auf jeder Achse ein einziger topologischer Punkt, der das eindeutige Element $\overline{\ell}(\pm\pi\frac{\boldsymbol{\Theta}}{\Theta})$ parametrisiert.

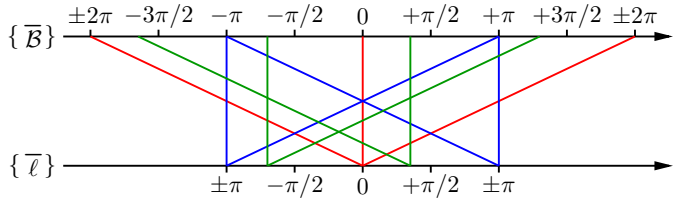


Abb. 6.4: Abbildung der Gruppe $\{\overline{\mathcal{B}}\}$ auf die Gruppe $\{\overline{\ell}\}$

Jedes Element in $\{\overline{\ell}\}$ ist Bild von genau 2 Elemente aus $\{\overline{\mathcal{B}}\}$, auch das Element $\overline{\ell}\,(0)$. Denn auf $\overline{\ell}\,(0)$ werden die 2 Elemente $\overline{\mathcal{B}}(0)$ und $\overline{\mathcal{B}}(\pm 2\pi)$ abgebildet, wobei $\overline{\mathcal{B}}(\pm 2\pi)$ ja für alle Drehachsen zusammen ein einziges Element ist.

6.1.4 *n*-dimensionale Darstellungen

Empfehlung: Weil dieser Abschnitt sehr ins Detail geht und zum Verständnis der folgenden Kapitel nicht erforderlich ist, sollten Sie ihn beim ersten Studium des Buches überspringen und gleich bei Abschnitt 6.2 auf Seite 149 weiterarbeiten.

6.1.4.1 Tensorprodukte

In der nichtrelativistischen Quantentheorie sind Spinoren – per Definition – Zustandsfunktionen, die Basis von Darstellungen der Gruppe $\{\overline{\mathcal{B}}\}$ sind. Per Definition ist die Matrixgruppe SU(2) eine treue, zweidimensionale Darstellung der abstrakten Gruppe $\{\overline{\mathcal{B}}\}$. Symbolisch schreiben wir für diese zweidimensionale Darstellung

$$\mathbf{2} \equiv \mathrm{SU}(2) \quad . \tag{6.31}$$

Ihre Basis sind zweikomponentige Spinoren ϕ:

$$\phi' = \begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix}' = U\phi \overset{(6.15)}{=} \begin{pmatrix} a & b\\ -b^* & a^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\phi_1 + b\phi_2\\ -b^*\phi_1 + a^*\phi_2\end{pmatrix}$$

Matrixdarstellungen der Gruppe $\{\overline{\mathcal{B}}\}$ mit beliebiger Dimension lassen sich erzeugen, indem man Tensorprodukte von Zweierspinoren als Basis wählt. Wir führen das Verfahren am Beispiel einer vierdimensionalen Darstellung vor. Die vierdimensionalen Spinoren χ, welche die Basis der gesuchten Darstellung bilden, erhalten wir als direktes Produkt von Zweierspinoren:

$$\chi = \begin{pmatrix}\chi_{11}\\ \chi_{12}\\ \chi_{21}\\ \chi_{22}\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\phi_1 \cdot \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}\\ \\ \phi_2 \cdot \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\phi_1\psi_1\\ \phi_1\psi_2\\ \phi_2\psi_1\\ \phi_2\psi_2\end{pmatrix} \tag{6.32}$$

χ wird durch die 4×4 Matrix W transformiert. Mit

$$U \overset{(6.15)}{=} \begin{pmatrix} a & b\\ -b^* & a^*\end{pmatrix} \quad \in \mathrm{SU}(2) \tag{6.33}$$

$$\text{gilt:} \quad \chi' = W\chi = U\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix} \otimes U\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} \tag{6.34}$$

$$= \begin{pmatrix} (a\phi_1 + b\phi_2)(a\psi_1 + b\psi_2)\\ (a\phi_1 + b\phi_2)(-b^*\psi_1 + a^*\psi_2)\\ (-b^*\phi_1 + a^*\phi_2)(a\psi_1 + b\psi_2)\\ (-b^*\phi_1 + a^*\phi_2)(-b^*\psi_1 + a^*\psi_2)\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} aa & ab & ba & bb\\ -ab^* & aa^* & -bb^* & ba^*\\ -b^*a & -b^*b & a^*a & a^*b\\ b^*b^* & -b^*a^* & -a^*b^* & a^*a^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_1\psi_1\\ \phi_1\psi_2\\ \phi_2\psi_1\\ \phi_2\psi_2\end{pmatrix} \tag{6.35}$$

$$= (U \otimes U)\,\chi \tag{6.36}$$

Die Matrizen $W = U \otimes U$ bilden eine vierdimensionale Matrixdarstellung der Gruppe $\{\overline{\mathcal{B}}\}$ auf Basis der vierkomponentigen Spinoren χ. Diese Darstellung ist *reduzibel*. Damit ist folgendes gemeint:

Auf die Gleichung $\chi' \overset{(6.34)}{=} W\chi$ wenden wir eine beliebige unitäre Transformation T an, und fügen die Einheitsmatrix $\mathbb{1} = T^{-1}T$ ein:

$$\widetilde{\chi}' \equiv T\chi' = \underbrace{TWT^{-1}}_{\widetilde{W}} \underbrace{T\chi}_{\widetilde{\chi}} \equiv \widetilde{W}\widetilde{\chi} \tag{6.37}$$

$\{\widetilde{W}\}$ ist eine weitere, zu $\{W\}$ gleichwertige, Darstellung der Gruppe $\{\overline{\mathcal{B}}\}$ auf Basis der vierkomponentigen Spinoren $\widetilde{\chi}$. Durch geeignete Wahl von T kann man erreichen, dass die 4×4-Matrizen $\{\widetilde{W}\}$ als direkte Summe eines eindimensionalen und eines dreidimensionalen Blocks erscheinen (Details der Rechnungen stehen in A.5).

$$\widetilde{W} = TWT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & aa & ab\sqrt{2} & bb \\ 0 & -ab^*\sqrt{2} & aa^* - bb^* & a^*b\sqrt{2} \\ 0 & b^*b^* & -a^*b^*\sqrt{2} & a^*a^* \end{pmatrix} . \tag{6.38}$$

In allen Matrizen der Darstellung $\{\widetilde{W}\}$ sind nur die Elemente $\widetilde{W}_{11}$ und $\widetilde{W}_{jk}$ mit $j, k = 2, 3, 4$ von Null verschieden. Die drei unteren Spinorkomponenten $\widetilde{\chi}_{12}, \widetilde{\chi}_{21}, \widetilde{\chi}_{22}$ werden nur untereinander gemischt, aber nicht mit der obersten Spinorkomponente $\widetilde{\chi}_{11}$. Die oberste Spinorkomponente wird nur mit sich selbst „gemischt“. Die 4×4-dimensionalen Matrizen $\widetilde{W}$ sind demnach die direkte Summe von 1×1-dimensionalen Matrizen und 3×3-dimensionalen Matrizen:

$$\widetilde{W} = (1) \oplus \begin{pmatrix} aa & ab\sqrt{2} & bb \\ -ab^*\sqrt{2} & aa^* - bb^* & a^*b\sqrt{2} \\ b^*b^* & -a^*b^*\sqrt{2} & a^*a^* \end{pmatrix} \tag{6.39}$$

Die transformierten Spinoren haben die Form

$$\widetilde{\chi} = T\chi = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}}(\phi_1\psi_2 - \phi_2\psi_1) \\ \phi_1\psi_1 \\ \sqrt{\frac{1}{2}}(\phi_1\psi_2 + \phi_2\psi_1) \\ \phi_2\psi_2 \end{pmatrix} . \tag{6.40}$$

Die aus den drei unteren Komponenten gebildeten dreikomponentigen Spi-

noren

$$S \equiv \begin{pmatrix} \phi_1\psi_1 \\ \sqrt{\frac{1}{2}}(\phi_1\psi_2 + \phi_2\psi_1) \\ \phi_2\psi_2 \end{pmatrix} \tag{6.41}$$

sind Basis einer dreidimensionalen Darstellung der Gruppe $\{\overline{\mathcal{B}}\}$. Die 3×3 dimensionalen Matrizen Q dieser Darstellung haben gemäß (6.39) die Form

$$Q \equiv \begin{pmatrix} aa & ab\sqrt{2} & bb \\ -ab^*\sqrt{2} & aa^* - bb^* & a^*b\sqrt{2} \\ b^*b^* & -a^*b^*\sqrt{2} & a^*a^* \end{pmatrix} \tag{6.42}$$

$$\text{mit } aa^* + bb^* \overset{(6.15)}{=} 1 \quad .$$

Diese Darstellung schreiben wir symbolisch als

$$\mathbf{3} \equiv \{Q\} \; . \tag{6.43}$$

Wir bemerken, dass der Spinor S symmetrisch bei Vertauschung von ϕ und ψ ist:

$$\begin{pmatrix} \phi_1\psi_1 \\ \sqrt{\frac{1}{2}}(\phi_1\psi_2 + \phi_2\psi_1) \\ \phi_2\psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\psi_1\phi_1 \\ +\sqrt{\frac{1}{2}}(\psi_1\phi_2 + \psi_2\phi_1) \\ +\psi_2\phi_2 \end{pmatrix} \tag{6.44}$$

Der aus der obersten Komponente von (6.40) gebildete eindimensionale Spinor

$$A \equiv \sqrt{\frac{1}{2}}(\phi_1\psi_2 - \phi_2\psi_1) \tag{6.45}$$

ist Basis einer eindimensionalen Darstellung der Gruppe $\{\overline{\mathcal{B}}\}$. Es handelt sich um eine triviale Darstellung, denn alle 1×1 dimensionalen Matrizen P dieser Darstellung haben gemäß (6.39) die Form

$$P \equiv (1) \quad . \tag{6.46}$$

Symbolisch schreiben wir für diese Darstellung

$$\mathbf{1} \equiv \{P\} \quad . \tag{6.47}$$

Wir bemerken, dass der Spinor A antisymmetrisch bei Vertauschung von ϕ und ψ ist:

$$\sqrt{\frac{1}{2}}(\phi_1\psi_2 - \phi_2\psi_1) = -\sqrt{\frac{1}{2}}(\psi_1\phi_2 - \psi_2\phi_1) \tag{6.48}$$

Dies Ergebnis lässt sich zusammenfassen in der symbolischen Gleichung

$$\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{3} \; . \tag{6.49}$$

In Worten: Die reduzible vierdimensionale Darstellung der Gruppe $\{\overline{\mathcal{B}}\}$, die als direktes Produkt zweier zweidimensionaler Darstellungen entsteht, zerfällt in die direkte Summe einer irreduziblen eindimensionalen und einer irreduziblen dreidimensionalen Darstellung.

Wir wollen die Spinoren der nichtrelativistischen Theorie noch in einer anschaulicheren Weise darstellen, die vielleicht aus dem Grundstudium gewohnter ist. Dazu definieren wir

$$\uparrow_\phi \equiv \phi_1 \qquad \downarrow_\phi \equiv \phi_2 \qquad \uparrow_\psi \equiv \psi_1 \qquad \downarrow_\psi \equiv \psi_2 \quad . \tag{6.50}$$

In dieser Schreibweise sind die ein- und dreidimensionalen Spinoren, die die Basen der irreduziblen Darstellungen bilden:

$$A \overset{(6.45)}{=} \sqrt{\tfrac{1}{2}}(\uparrow_\phi \downarrow_\psi \; - \downarrow_\phi \uparrow_\psi) \tag{6.51}$$

$$S \overset{(6.41)}{=} \begin{pmatrix} \uparrow_\phi \uparrow_\psi \\ \sqrt{\frac{1}{2}}(\uparrow_\phi \downarrow_\psi \; + \downarrow_\phi \uparrow_\psi) \\ \downarrow_\phi \downarrow_\psi \end{pmatrix} \tag{6.52}$$

Anschauliche Lesart dieser Gleichungen: Die Spinoren ϕ und ψ repräsentieren je ein Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$. Der Pfeil $\uparrow$ bedeutet, dass die Projektion des Spins auf eine bestimmten Achse des Ortsraums $+\frac{\hbar}{2}$ ist, der Pfeil $\downarrow$ bedeutet, dass die Projektion des Spins auf diese Achse $-\frac{\hbar}{2}$ ist. $\uparrow_\phi \uparrow_\psi$ bedeutet, dass

die Projektion des Gesamtspins des zusammengesetzten Systems auf diese Achse $+\hbar$ ist, $\downarrow_\phi \downarrow_\psi$ bedeutet, dass die Projektion des Gesamtspins des zusammengesetzten Systems auf diese Achse $-\hbar$ ist.

Das zusammengesetzte System, dessen Spinprojektion auf die ausgezeichnete Achse gleich 0 ist, wird bemerkenswerterweise nicht durch $\uparrow_\phi \downarrow_\psi$ oder $\downarrow_\phi \uparrow_\psi$ beschrieben, sondern durch die antisymmetrische Kombination $\sqrt{\frac{1}{2}}(\uparrow_\phi \downarrow_\psi - \downarrow_\phi \uparrow_\psi)$, oder durch die symmetrische Kombination $\sqrt{\frac{1}{2}}(\uparrow_\phi \downarrow_\psi + \downarrow_\phi \uparrow_\psi)$ der beiden Teilchen. Bei der Zusammensetzung verschmelzen die beiden Teilchen zu einem Gesamtsystem, in der die eine oder andere Orientierung des Spins nicht mehr dem einen oder anderen Teilchen zugeordnet werden kann.

6.1.4.2 Symmetrische Produkt-Darstellungen

Man kann irreduzible Darstellungen beliebiger Dimension dadurch gewinnen, dass man Tensorprodukte von Darstellungen niedriger Dimension bildet, und dann Tensorprodukte der Tensorprodukte, und so weiter, und schließlich diese Darstellungen in eine direkte Summe irreduzibler Darstellungen zerlegt. Das Verfahren wird bei höherer Dimension ziemlich aufwändig. In diesem Abschnitt beschreiben wir, wie man sich den Umweg über die reduziblen Darstellungen sparen, und auf Anhieb irreduzible Darstellungen beliebiger Dimension konstruieren kann.

Dazu überlegen wir, wieso eigentlich bei der Methode der Tensorprodukte reduzible Darstellungen auftreten. Wir bilden das direkte Produkt eines zweikomponentigen Spinors mit sich selbst:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} uu \\ uv \\ vu \\ vv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^2 \\ uv \\ uv \\ v^2 \end{pmatrix} \tag{6.53}$$

Das Produkt enthält zwei identische Komponenten. Wenn wir das Produkt nochmals mit dem Spinor $\binom{u}{v}$ direkt multiplizieren, bekommen wir einen Spinor mit den Komponenten u^3,u^2v, u^2v, uv^2,u^2v,uv^2,uv^2,v^3. In diesem Spinor sind drei Komponenten gleich u^2v, und drei Komponenten gleich uv^2.

Insgesamt sind von den acht Komponenten nur vier, nämlich u^3,u^2v,uv^2,v^3, linear unabhängig. Es ist das mehrfache Auftreten gleicher Komponenten der Spinoren, das die Darstellungen reduzibel macht. Es ist plausibel, dass eine Darstellung irreduzibel ist, wenn ihre Basis von Spinoren gebildet wird, deren Komponenten voneinander linear unabhängig sind. Den Beweis ersparen wir uns.

Zur Konstruktion von Spinoren beliebiger Dimension mit linear unabhängigen Komponenten gehen wir aus von der treuen zweidimensionalen Darstellung der Gruppe $\{\overline{\mathcal{B}}\}$ durch die Matrixgruppe SU(2):

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \overset{(6.15)}{=} \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au + bv \\ -b^*u + a^*v \end{pmatrix} \tag{6.54}$$

Die Dimension einer Darstellung codieren wir mithilfe eines Parameters j:

$$\begin{aligned} \text{Dimension} = 2j+1 = 1\,,2\,,3\,,4\,,5\,,6\,,\ldots \\ \Longrightarrow \quad j = 0\,,\tfrac{1}{2}\,,1\,,\tfrac{3}{2}\,,2\,,\tfrac{5}{2}\,,\ldots \end{aligned} \tag{6.55}$$

Die Spinoren $\phi^{(j)}$, die die Basis einer $2j+1$-dimensionalen Darstellung der Gruppe $\{\overline{\mathcal{B}}\}$ bilden, kennzeichnen wir mit dem Zeichen (j), ebenso die Elemente $D^{(j)}$ der Darstellung $\{D^{(j)}\}$. Die runden Klammern sollen darauf hinweisen, dass *nicht* nach der Summenkonvention über mehrfach vorkommendes (j) zu summieren ist.

Die Komponente $\phi_r^{(j)}$ des $2j+1$-komponentigen Spinors $\phi^{(j)}$ definieren wir durch

$$\boxed{\phi_r^{(j)} \equiv N_r^{(j)} u^{2j+1-r} v^{r-1}} \tag{6.56a}$$

mit dem Normierungsfaktor

$$N_r^{(j)} \equiv \sqrt{\frac{(2j)!}{(r-1)!\,(2j+1-r)!}}\,. \tag{6.56b}$$

Der Spinor der Dimension $2j+1$ ist demnach

$$\phi^{(j)} = \begin{pmatrix} N_1^{(j)} u^{2j} v^0 \\ N_2^{(j)} u^{2j-1} v^1 \\ \vdots \\ N_{2j}^{(j)} u^1 v^{2j-1} \\ N_{2j+1}^{(j)} u^0 v^{2j} \end{pmatrix} . \tag{6.57}$$

Wir geben einige Spinoren mit wenigen Komponenten, und ihre Betragsquadrate, explizit an:

$$\phi^{(0)} = \left(N_1^{(0)} u^0 v^0 \right) = (1) \tag{6.58a}$$

$$|\phi^{(0)}|^2 = 1 \tag{6.58b}$$

$$\phi^{(\frac{1}{2})} = \begin{pmatrix} N_1^{(\frac{1}{2})} u^1 v^0 \\ N_2^{(\frac{1}{2})} u^0 v^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{6.59a}$$

$$|\phi^{(\frac{1}{2})}|^2 = |u|^2 + |v|^2 \tag{6.59b}$$

$$\phi^{(1)} = \begin{pmatrix} N_1^{(1)} u^2 v^0 \\ N_2^{(1)} u^1 v^1 \\ N_3^{(1)} u^0 v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^2 \\ \sqrt{2} uv \\ v^2 \end{pmatrix} \tag{6.60a}$$

$$|\phi^{(1)}|^2 = |u|^4 + 2|u|^2|v|^2 + |v|^4 = (|u|^2 + |v|^2)^2 \tag{6.60b}$$

$$\phi^{(\frac{3}{2})} = \begin{pmatrix} N_1^{(\frac{3}{2})} u^3 v^0 \\ N_2^{(\frac{3}{2})} u^2 v^1 \\ N_3^{(\frac{3}{2})} u^1 v^2 \\ N_4^{(\frac{3}{2})} u^0 v^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^3 \\ \sqrt{3} u^2 v \\ \sqrt{3} uv^2 \\ v^3 \end{pmatrix} \tag{6.61a}$$

$$|\phi^{(\frac{3}{2})}|^2 = |u|^6 + 3|u|^4|v|^2 + 3|u|^2|v|^4 + |v|^6 = (|u|^2 + |v|^2)^3 \tag{6.61b}$$

Offensichtlich sind alle Spinoren auf 1 normiert, wenn der zweidimensionale Spinor $\binom{u}{v}$ auf 1 normiert ist.

Die $2j+1$-dimensionalen Basisvektoren werden mithilfe der zweidimensionalen Basisvektoren berechnet:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} &\overset{(6.54)}{=} \begin{pmatrix} au + bv \\ -b^* u + a^* v \end{pmatrix} \\
\phi_r^{(j)} &\overset{(6.56a)}{=} N_r^{(j)} u^{2j+1-r} v^{r-1} \\
\phi_r^{(j)\prime} &= N_r^{(j)} (u')^{2j+1-r} (v')^{r-1} \\
&= N_r^{(j)} (au + bv)^{2j+1-r} (-b^* u + a^* v)^{r-1}
\end{aligned} \tag{6.62}$$

Die Elemente $D^{(j)}$ der Darstellung $\{D^{(j)}\}$ sind lineare Transformationen, die auf die Basisvektoren (6.62) wirken:

$$\phi^{(j)\prime} \equiv D^{(j)} \phi^{(j)} \tag{6.63}$$

bzw. in Komponentenschreibweise

$$\phi_{r'}^{(j)\prime} \equiv D_{r'r}^{(j)} \phi_r^{(j)} \tag{6.64}$$

Den Zeilenindex von ϕ' haben wir r' genannt, damit er vom Zeilenindex von ϕ unterschieden werden kann. Auf der rechten Seite der Gleichung wird gemäß der Summenkonvention über den Index r von 1 bis $2j+1$ summiert. Die Transformationen $D_{r'r}^{(j)}$ (Nebenrechnungen siehe Anhang A.1) sind:

$$\boxed{\begin{aligned} D_{r'r}^{(j)} = \sum_{k=0}^{2j+1-r'} & \frac{\sqrt{(2j+1-r')!(r'-1)!(r-1)!(2j+1-r)!}}{k!(2j+1-r'-k)!(-k+r-1)!(r'+k-r)!} \cdot \\ & \cdot a^{2j+1-r'-k} b^k (-b^*)^{r'+k-r} a^{*-k+r-1} \end{aligned}} \tag{6.65}$$

Achtung: In dieser Formel können im Nenner (aber nicht im Zähler) die Fakultäten negativer ganzer Zahlen auftreten. Die Definition der Fakultät ganzer Zahlen ist

$$\left.\begin{array}{ll} z! \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (z-1) \cdot z & \text{für } z > 0 \\ z! \equiv 1 & \text{für } z = 0 \\ z! \equiv \pm\infty & \text{für } z < 0 \end{array}\right\} z \in \mathbb{Z}\,. \tag{6.66}$$

Also sind alle Summanden, bei denen im Nenner die Fakultät einer negativen ganzen Zahl vorkommt, gleich Null.

Dadurch, dass die Konstruktion der Darstellungen (6.65) unmittelbar auf der zweidimensionalen Darstellung SU(2) aufbaut ist sichergestellt, dass sie tatsächlich Darstellungen der Gruppe $\{\overline{\mathcal{B}}\}$ sind, die alle formalen Anforderungen an eine Darstellung erfüllen, insbesondere auch zur Gruppe $\{\overline{\mathcal{B}}\}$ homomorph sind.

Wir berechnen mit Formel (6.65) die Darstellungsmatrizen für einige kleine Werte von j (die Nebenrechnungen findet man in Anhang A.2):

$$D^{(0)} \overset{(A.10)}{=} (1) \tag{6.67a}$$

$$D^{(\frac{1}{2})} \overset{(A.11)}{=} \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \tag{6.67b}$$

$$D^{(1)} \overset{(A.12)}{=} \begin{pmatrix} a^2 & \sqrt{2}ab & b^2 \\ -\sqrt{2}ab^* & aa^* - bb^* & \sqrt{2}ba^* \\ b^{*2} & -\sqrt{2}b^*a^* & a^{*2} \end{pmatrix} \tag{6.67c}$$

$$D^{(\frac{3}{2})} \overset{(A.13)}{=} \begin{pmatrix} a^3 & \sqrt{3}a^2b & \sqrt{3}ab^2 & b^3 \\ -\sqrt{3}a^2b^* & a^2a^* - 2abb^* & 2aba^* - b^2b^* & \sqrt{3}b^2a^* \\ \sqrt{3}ab^{*2} & -2ab^*a^* + bb^{*2} & aa^{*2} - 2bb^*a^* & \sqrt{3}ba^{*2} \\ -b^{*3} & \sqrt{3}b^{*2}a^* & -\sqrt{3}b^*a^{*2} & a^{*3} \end{pmatrix} \tag{6.67d}$$

Konstruktionsbedingt ist die zweidimensionale Darstellung $\{D^{(\frac{1}{2})}\} = \mathbf{2}$ natürlich identisch mit (6.15).

Der Vergleich mit den Darstellungen, die wir im vorigen Abschnitt durch die Bildung von Tensorprodukten von $D^{(\frac{1}{2})}$ erzeugt haben, zeigt: Die eindimensionale Darstellung $\{D^{(0)}\}$ ist – siehe (6.46) – identisch mit der eindimensionalen Darstellung $\{P\} = \mathbf{1}$, und die dreidimensionale Darstellung $\{D^{(1)}\}$ ist – siehe (6.42) – identisch mit der dreidimensionalen Darstellung $\{Q\} = \mathbf{3}$. Dagegen unterscheidet sich die irreduzible Darstellung $\{D^{(\frac{3}{2})}\} = \mathbf{4}$ von den

beiden zueinander equivalenten reduziblen vierdimensionalen Darstellungen $\{W\}$ – siehe (6.35) – und $\{\widetilde{W}\}$ – siehe (6.38).

Nur für irreduzible Darstellungen verwenden wir zuweilen die fett gedruckten Dimensionszahlen als abkürzende Darstellungsnamen. Achtung: Einige Autoren kodieren mit der fett gedruckten Nummer nicht die Dimension der Darstellung, sondern den Wert von j. Die zweidimensionale Darstellung heißt bei ihnen $\mathbf{\frac{1}{2}}$, die dreidimensionale Darstellung $\mathbf{1}$, und aus unserer Gleichung $\mathbf{2}\otimes\mathbf{2}\overset{(6.49)}{=}\mathbf{1}\oplus\mathbf{3}$ wird bei ihnen $\mathbf{\frac{1}{2}}\otimes\mathbf{\frac{1}{2}}=\mathbf{0}\oplus\mathbf{1}$.

Im Folgenden werden wir auch die Generatoren und die Exponentialform der Transformationen $D^{(j)}$ benötigen. Man findet sie, indem man infinitesimal kleine Parameter

$$\Theta_k^{\text{INF}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\Theta_k}{n}\quad\text{mit } n\in\mathbb{N} \tag{6.68}$$

verwendet, und die Darstellung $D^{(j)}(\mathbf{\Theta}^{\text{INF}})$ in einer Taylorreihe um $D^{(j)}(\mathbf{\Theta}=0)$ entwickelt. Wegen der infinitesimal kleinen Parameter kann die Entwicklung nach dem linearen Glied abgebrochen werden:

$$D^{(j)}(\mathbf{\Theta}_{\text{INF}})=I+\Theta_k^{\text{INF}}\frac{\mathrm{d}\,D^{(j)}}{\mathrm{d}\,\Theta_k}\Big|_{\mathbf{\Theta}=0}=I+\frac{i}{\hbar}\Theta_k^{\text{INF}}\Sigma^{(j)k} \tag{6.69}$$

$$\Sigma^{(j)k}\equiv-i\hbar\frac{\mathrm{d}\,D^{(j)}}{\mathrm{d}\,\Theta_k}\Big|_{\mathbf{\Theta}=0} \tag{6.70}$$

$\Sigma^{(j)k}$ sind die drei Generatoren der $2j+1$-dimensionalen Darstellung $\{D^{(j)}\}$ von $\{\overline{\mathcal{B}}\}$. Die Transformation mit endlichen Parametern erhält man durch Hintereinanderschaltung unendlich vieler unendlich kleiner Transformationen:

$$D^{(j)}(\mathbf{\Theta})=\lim_{n\to\infty}\Big(I+\frac{i}{\hbar}\frac{\Theta_k}{n}\Sigma^{(j)k}\Big)^n=\exp\Big\{\frac{i}{\hbar}\Theta_k\Sigma^{(j)k}\Big\} \tag{6.71}$$

6.2 Die relativistische Bedeckungsgruppe $\{\mathcal{B}\}$

Im vorigen Abschnitt haben wir gesehen, dass nichtrelativistische Spinoren die Basen von Darstellungen der Gruppe $\{\overline{\mathcal{B}}\}$ sind. Die Gruppe $\{\overline{\mathcal{B}}\}$ ist die

universelle Bedeckungsgruppe der Drehgruppe $\{\overline{\ell}\}$ des dreidimensionalen Raumes. Die Parameter-Mannigfaltigkeit von $\{\overline{\ell}\}$ ist eine zweifach-zusammenhängende dreidimensionale Kugel mit Radius π und Mittelpunkt $(0,0,0)$. Die Parameter-Mannigfaltigkeit von $\{\overline{\mathcal{B}}\}$ ist eine einfach-zusammenhängende dreidimensionale Kugel mit Radius 2π und Mittelpunkt $(0,0,0)$.

Die Parameter-Mannigfaltigkeit $(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3)$ der Lorentzgruppe $\{\ell\}$ ist in drei ihrer sechs Dimensionen mit der Parameter-Mannigfaltigkeit von $\{\overline{\ell}\}$ identisch, also eine zweifach-zusammenhängende Kugel mit Radius π. Folglich ist die Parameter-Mannigfaltigkeit der universellen Bedeckungsgruppe der Lorentzgruppe – die wir $\{\mathcal{B}\}$ nennen – in drei ihrer sechs Dimensionen identisch mit der Parameter-Mannigfaltigkeit der Gruppe $\{\overline{\mathcal{B}}\}$, also eine einfach zusammenhängende Kugel mit Radius 2π und Mittelpunkt $(0,0,0,0,0,0)$.

Die anderen drei Parameter η_1, η_2, η_3 der Lorentzgruppe können jeden beliebigen Wert $-\infty \leq \eta \leq +\infty$ annehmen. Dieser Teil der Mannigfaltigkeit ist einfach zusammenhängend, denn kein Weg zwischen zwei Punkten kann die Oberfläche der Mannigfaltigkeit berühren. Deshalb haben die Lorentzgruppe $\{\ell\}$ und ihre Bedeckungsgruppe $\{\mathcal{B}\}$ in den drei Parametern $\boldsymbol{\eta}$ die identische Parameter-Mannigfaltigkeit. Damit ist die Parameter-Mannigfaltigkeit der Gruppe $\{\mathcal{B}\}$ vollständig festgelegt.

Relativistische Spinoren sind die Basen von Darstellungen von $\{\mathcal{B}\}$. Unsere nächste Aufgabe ist es deshalb, Darstellungen von $\{\mathcal{B}\}$ mit beliebiger Dimension zu finden. Bei der Suche werden folgende Anhaltspunkte hilfreich sein:

* Die Matrixgruppe SU(2) ist eine zweidimensionale Darstellung von $\{\overline{\mathcal{B}}\}$. Ihre drei Generatoren sind $\frac{\hbar}{2}\sigma^k$, mit den Pauli-Matrizen σ^k, $k = 1, 2, 3$.
* Die Determinanten der Elemente aller Matrixdarstellungen der Gruppen $\{\overline{\ell}\}$ und $\{\overline{\mathcal{B}}\}$ sind gleich $+1$.
* Die Determinanten der Elemente sämtlicher Matrixdarstellungen der Lorentzgruppe $\{\ell\}$ sind $+1$. Deshalb müssen auch die Determinanten der Elemente sämtlicher Matrixdarstellungen der Gruppe $\{\mathcal{B}\}$ gleich $+1$ sein.
* Die Lie-Algebra von $\{\mathcal{B}\}$ und aller ihrer Darstellungen muss mit der Lie-Algebra der Lorentzgruppe $\{\ell\}$ identisch sein.

6.2.1 Zweidimensionale Darstellungen von $\{\mathcal{B}\}$

Wir suchen zunächst eine treue Matrixdarstellung von $\{\mathcal{B}\}$ mit möglichst niedriger Dimension. 1×1-Matrizen reichen nicht aus, denn $\{\mathcal{B}\}$ hat ja 6 reelle Parameter. Wir versuchen es mit 2×2-Matrizen mit komplexen Elementen:

$$\begin{pmatrix} ae^{i\alpha} & be^{i\beta} \\ ce^{i\gamma} & de^{i\delta} \end{pmatrix} \quad \text{mit } a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \tag{6.72}$$

Die 8 reellen Parameter der Matrizen werden durch die Anforderung an die Determinante eingeschränkt:

$$\det \begin{pmatrix} ae^{i\alpha} & be^{i\beta} \\ ce^{i\gamma} & de^{i\delta} \end{pmatrix} = ade^{i(\alpha+\delta)} - bce^{i(\beta+\gamma)} = +1 \tag{6.73}$$

In Anhang A.3 wird gezeigt, dass diese Nebenbedingung die Anzahl der freien Parameter der Matrizen auf genau 6 reduziert. Die Matrizen (6.72) mit der Nebenbedingung (6.73) bilden die Matrixgruppe SL(2,$\mathbb{C}$). Das S im Namen der Gruppe bedeutet „speziell“ oder „unimodular“, es bezieht sich darauf dass die Determinante ihrer Elemente +1 ist. (2,$\mathbb{C}$) bedeutet, dass es sich um 2×2-Matrizen mit komplexen Elementen handelt (es gibt auch eine Gruppe SL(2,$\mathbb{R}$) mit reellen Elementen). Das L bedeutet „linear“. Anders als die Elemente von SU(2) sind die Elemente von SL(2,$\mathbb{C}$) nicht unitär. Das haben wir auch nicht erwartet, weil wir bereits aus (5.56) wissen, dass eine Lie-Gruppe nur dann eine endlich-dimensionale unitäre Darstellung haben kann, wenn ihre Parameter-Mannigfaltigkeit kompakt ist.

Anhand der sechs reellen Zahlen, die die Elemente der SL(2,$\mathbb{C}$) parametrisieren, kann eine eineindeutige Abbildung zwischen $\{\mathcal{B}\}$ und SL(2,$\mathbb{C}$) definiert werden. Wenn darüber hinaus die Lie-Algebra der SL(2,$\mathbb{C}$) identisch ist mit der Lie-Algebra der Gruppe $\{\mathcal{B}\}$, dann ist SL(2,$\mathbb{C}$) eine treue zweidimensionale Darstellung von $\{\mathcal{B}\}$.

Wir suchen jetzt die Generatoren der SL(2,$\mathbb{C}$). Sie müssen 2×2-dimensionale Matrizen mit der Lie-Algebra der Lorentzgruppe sein. Zum Vergleich betrachten wir die vierdimensionalen Generatoren der Lorentztransformati-

onen $\{\Lambda\}$, die in (5.69) aufgelistet sind. Ihre Lie-Algebra ist

$$[K^k, K^l] \overset{(5.71a)}{=} -i\hbar\epsilon^{klm} L^m \tag{6.74a}$$

$$[K^k, L^l] \overset{(5.71b)}{=} +i\hbar\epsilon^{klm} K^m \tag{6.74b}$$

$$[L^k, L^l] \overset{(5.71c)}{=} +i\hbar\epsilon^{klm} L^m \quad . \tag{6.74c}$$

Um zweidimensionale Generatoren mit der gleichen Lie-Algebra zu finden erinnern wir uns daran, dass die Generatoren der SU(2) die gleichen Vertauschungsrelationen wie (6.74c) haben:

$$\left[\frac{\hbar\sigma^k}{2}, \frac{\hbar\sigma^l}{2}\right] \overset{(6.24)}{=} +i\hbar\epsilon^{klm}\frac{\hbar\sigma^m}{2} \tag{6.75}$$

Damit ist es nicht schwer, die sechs Generatoren

$$\pm i\,\frac{\hbar\sigma^k}{2} \;,\; \frac{\hbar\sigma^k}{2} \quad \text{mit } k = 1, 2, 3 \tag{6.76}$$

zu erraten. Die Lie-Algebra dieser Generatoren ist tatsächlich mit (6.74) identisch:

$$\left[\pm i\,\frac{\hbar\sigma^k}{2}, \pm i\,\frac{\hbar\sigma^l}{2}\right] = -i\hbar\epsilon^{klm}\frac{\hbar\sigma^m}{2} \tag{6.77a}$$

$$\left[\pm i\,\frac{\hbar\sigma^k}{2}, \frac{\hbar\sigma^l}{2}\right] = +i\hbar\epsilon^{klm}\left(\pm i\,\frac{\hbar\sigma^m}{2}\right) \tag{6.77b}$$

$$\left[\frac{\hbar\sigma^k}{2}, \frac{\hbar\sigma^l}{2}\right] = +i\hbar\epsilon^{klm}\frac{\hbar\sigma^m}{2} \tag{6.77c}$$

Da die Pauli-Matrizen hermitesch sind, sind es die drei Rotationsgeneratoren $\frac{\hbar\sigma^k}{2}$ ebenfalls. Dagegen sind die drei Boostgeneratoren $\pm i\frac{\hbar\sigma^k}{2}$ nicht hermitesch. Aufgrund ihres doppelten Vorzeichens gibt es zwei unterschiedliche zweidimensionale Darstellungen von $\{\mathcal{B}\}$, die wir $\{^L D\}$ und $\{^R D\}$ nennen. Die Spinoren, die die Basis der Darstellung $\{^L D\}$ bilden, nennen wir L, die Spinoren der Basis von $\{^R D\}$ nennen wir R:

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix}' = {}^{L}D \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix} \equiv \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \left(\Theta_k \frac{\hbar\sigma^k}{2} + \eta_k i \frac{\hbar\sigma^k}{2} \right) \right\} \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix} \tag{6.78a}$$

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}' = {}^{R}D \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} \equiv \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \left(\Theta_k \frac{\hbar\sigma^k}{2} - \eta_k i \frac{\hbar\sigma^k}{2} \right) \right\} \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} \tag{6.78b}$$

In der Schreibweise mit doppelt indizierten Winkelmatrizen

$$(\Omega_{\sigma\tau}) \overset{(5.64a)}{=} \begin{pmatrix} 0 & \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ -\eta_1 & 0 & \theta_3 & -\theta_2 \\ -\eta_2 & -\theta_3 & 0 & \theta_1 \\ -\eta_3 & \theta_2 & -\theta_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.79}$$

und analog zu (5.64b) definierten doppelt indizierten Generatormatrizen

$$({}^{L}S^{\sigma\tau}) \equiv \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & i\sigma^1 & i\sigma^2 & i\sigma^3 \\ -i\sigma^1 & 0 & \sigma^3 & -\sigma^2 \\ -i\sigma^2 & -\sigma^3 & 0 & \sigma^1 \\ -i\sigma^3 & \sigma^2 & -\sigma^1 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.80}$$

$$({}^{R}S^{\sigma\tau}) \equiv \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^1 & -i\sigma^2 & -i\sigma^3 \\ i\sigma^1 & 0 & \sigma^3 & -\sigma^2 \\ i\sigma^2 & -\sigma^3 & 0 & \sigma^1 \\ i\sigma^3 & \sigma^2 & -\sigma^1 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.81}$$

können die Darstellungen auch in der Form

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix}' = {}^{L}D \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix} \equiv \exp\left\{ \frac{i}{2\hbar} \Omega_{\sigma\tau} {}^{L}S^{\sigma\tau} \right\} \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix} \tag{6.82a}$$

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}' = {}^{R}D \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} \equiv \exp\left\{ \frac{i}{2\hbar} \Omega_{\sigma\tau} {}^{R}S^{\sigma\tau} \right\} \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} \tag{6.82b}$$

geschrieben werden.

Diese beiden Darstellungen werden nach ihrem Erforscher[1] als Weyl-Darstellungen bezeichnet. Achtung: Es handelt sich nicht um eine zweideu-

[1] Hermann Klaus Hugo Weyl (1885-1955)

tige Abbildung, sondern um zwei eineindeutige Abbildungen der Gruppe $\{\mathcal{B}\}$ auf die beiden Gruppen $\{{}^{R}D\}$ und $\{{}^{L}D\}$, die sich im Vorzeichen ihrer Boostgeneratoren unterscheiden. Wir haben erwähnt, dass manche Autoren Darstellungen von $\{\mathcal{B}\}$ als Darstellungen der Lorentzgruppe $\{\ell\}$ betrachten. Dabei tritt dann eine Zweideutigkeit auf, weil die Parameter-Mannigfaltigkeit der Lorentzgruppe in den drei Parametern Θ^k zweifach zusammenhängt, die Parameter-Mannigfaltigkeit ihrer Bedeckungsgruppe $\{\mathcal{B}\}$ aber einfach. Das Auftreten unterschiedlicher Vorzeichen in den zwei Darstellungen (6.78) hat mit jener Zweideutigkeit nichts zu tun. Man erkennt das allein schon daran, dass das unterschiedliche Vorzeichen in (6.78) in den Boost-Generatoren auftritt, also bei den Parametern η^k, deren Mannigfaltigkeit sowohl bei der Lorentzgruppe als auch bei ihrer Bedeckungsgruppe $\{\mathcal{B}\}$ einfach zusammenhängt.

Durch die Relation $\tanh\eta \overset{(5.43)}{=} v/c$ sind die drei Boost-Parameter $\boldsymbol{\eta}$ ein Maß für die Relativgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ zweier Koordinatensysteme. Deshalb eignen sich – wie wir sehen werden – die Spinoren, die die Basen der beiden Darstellungen mit entgegengesetztem Rapiditäts-Parameter bilden, zur Beschreibung von Feldern mit entgegengesetzter Helizität. Aus diesem Grund behält man beide Varianten von (6.78) bei, obwohl der Unterschied marginal erscheint. In Abschnitt 8.10 werden wir beweisen, dass die Spinoren R Felder mit rechtshändiger Helizität beschreiben, die Spinoren L aber Felder mit linkshändiger Helizität. Die Indizes R und L werden deshalb als „rechts“ bzw. „links“ gelesen.

6.2.2 n-dimensionale Darstellungen von $\{\mathcal{B}\}$

Empfehlung: Weil dieser Abschnitt sehr ins Detail geht und zum Verständnis der folgenden Kapitel nicht erforderlich ist, sollten Sie ihn beim ersten Studium des Buches überspringen und gleich bei Abschnitt 6.3 auf Seite 156 weiterarbeiten.

In Abschnitt 6.1.4 haben wir Verfahren zur Konstruktion beliebig-dimensionaler Darstellungen $D^{(j)}$ der Gruppe $\{\overline{\mathcal{B}}\}$ entwickelt, und in (6.70) ihre Generatoren angegeben. Die Dimension der Darstellung $D^{(j)}$ ist $2j+1$. Der Parameter j kann die Werte $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$ annehmen. Über das eingeklammerte (j) wird *nicht* nach der Summenkonvention summiert. Jetzt

wollen wir Darstellungen der Gruppe $\{\mathcal{B}\}$ mit beliebiger Dimension $2j+1$ konstruieren. In (6.76) fiel es uns nicht schwer, die sechs Generatoren der beiden zweidimensionalen Darstellungen von $\{\mathcal{B}\}$ zu erraten. Denn wir kannten bereits die Generatoren $\frac{\hbar\sigma^k}{2}$ der zweidimensionalen Darstellung der Gruppe $\{\overline{\mathcal{B}}\}$, und brauchten nur noch den Faktor $\pm i$ hinzuzufügen, um auch die Boost-Generatoren zu finden. Dies ist keine Besonderheit der zweidimensionalen Darstellungen, sondern es gilt der

Satz:

$$\Sigma^{(j)k} \quad \text{mit } k=1,2,3$$

seien die drei Generatoren einer $2j+1$-dimensionalen Darstellung der Gruppe $\{\overline{\mathcal{B}}\}$, mit $j=0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},\ldots$. Dann sind

$$+\Sigma^{(j)k}\ ,\ +i\Sigma^{(j)k} \quad \text{mit } k=1,2,3$$

die sechs Generatoren einer $2j+1$-dimensionalen linkshändigen Darstellung der Gruppe $\{\mathcal{B}\}$, und

$$+\Sigma^{(j)k}\ ,\ -i\Sigma^{(j)k} \quad \text{mit } k=1,2,3$$

sind die sechs Generatoren einer $2j+1$-dimensionalen rechtshändigen Darstellung der Gruppe $\{\mathcal{B}\}$. (6.83)

Beweis: Als Generatoren einer Darstellung der Gruppe $\{\overline{\mathcal{B}}\}$ haben die Operatoren $\Sigma^{(j)k}$ mit $k=1,2,3$ die Lie-Algebra

$$[\Sigma^{(j)k},\Sigma^{(j)l}] \overset{(6.24)}{=} +i\hbar\epsilon^{klm}\Sigma^{(j)m}\ . \tag{6.84}$$

Also ist die Lie-Algebra der sechs Generatoren $\Sigma^{(j)k}, \pm i\Sigma^{(j)k}$:

$$[\pm i\Sigma^{(j)k},\pm i\Sigma^{(j)l}] = -i\hbar\epsilon^{klm}\Sigma^{(j)m} \tag{6.85a}$$

$$[\pm i\Sigma^{(j)k},\Sigma^{(j)l}] = +i\hbar\epsilon^{klm}(\pm i\Sigma^{(j)m}) \tag{6.85b}$$

$$[\Sigma^{(j)k},\Sigma^{(j)l}] = +i\hbar\epsilon^{klm}\Sigma^{(j)m} \tag{6.85c}$$

Das ist wieder mit (6.74) identisch. Satz und Beweis gelten für Generatoren beliebiger Dimension. Mit Satz (6.83) können wir die links- und rechtshändigen Darstellungen der Gruppe $\{\mathcal{B}\}$ konstruieren:

$$ {}^{L}D^{(j)} \equiv \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\Big(\Theta_k \Sigma^{(j)k} + \eta_k i \Sigma^{(j)k}\Big)\right\} \tag{6.86a} $$

$$ {}^{R}D^{(j)} \equiv \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\Big(\Theta_k \Sigma^{(j)k} - \eta_k i \Sigma^{(j)k}\Big)\right\} \tag{6.86b} $$

${}^{L}D^{(j)}$ und ${}^{R}D^{(j)}$ haben beide die Dimension $2j+1$.

Manchmal sind auch die direkten Produkte von ${}^{R}D^{(j_R)}$ und ${}^{L}D^{(j_L)}$ nützlich, wobei $j_R = j_L$ oder $j_R \neq j_L$ sein kann. Wir nennen die $2j_R+1$-dimensionalen Spinoren, die die Basis der Darstellung $\{{}^{R}D^{(j_R)}\}$ bilden, $R^{(j_R)}$. Als $L^{(j_L)}$ bezeichnen wir die $2j_L+1$-dimensionalen Spinoren, die die Basis der Darstellung $\{{}^{L}D^{(j_L)}\}$ bilden. Die Basis der direkten Produktdarstellungen sind die direkten Produkte der Spinoren $R^{(j_R)}$ und $L^{(j_L)}$:

$$ D^{(j_L,j_R)}\left(L^{(j_L)} \otimes R^{(j_R)}\right) \equiv \left({}^{L}D^{(j_L)} L^{(j_L)}\right) \otimes \left({}^{R}D^{(j_R)} R^{(j_R)}\right) \tag{6.87} $$

Die Dimension der Darstellung $\{D^{(j_L,j_R)}\}$ ist $(2j_L+1)\cdot(2j_R+1)$.

6.3 Transformation von Spinorfeldern

Aufgrund der formalen Ähnlichkeit mit der Transformation von Vektorfeldern kann man die Formeln von Abschnitt 5.6 mit geringen Modifikationen übernehmen. Wenn der n-dimensionale Spinor ϕ bei einer Drehung der vierdimensionalen Raum-Zeit-Koordinaten um den infinitesimal kleinen Winkel ω durch

$$ \phi'_a = D^{\text{INF}}_{ab}\phi_b = \Big(\delta_{ab} + \frac{i}{2\hbar}\,\omega_{\sigma\tau} S^{\sigma\tau}_{ab}\Big)\phi_b \tag{6.88} $$

transformiert wird, dann wird das n-dimensionale Spinorfeld $\phi(x)$ bei der gleichen Koordinaten-Rotation durch

$$ \phi'_a(x') \overset{(5.87)}{=} \Big(\delta_{ab} + \frac{i}{2\hbar}\omega_{\sigma\tau}(S^{\sigma\tau}_{ab} + J^{\sigma\tau}\delta_{ab})\Big)\phi_b(x) \tag{6.89} $$

transformiert. Dies ist die a-te Zeile der Matrixgleichung

$$ \phi'(x') = \Big(1 + \frac{i}{2\hbar}\omega_{\sigma\tau}(S^{\sigma\tau} + J^{\sigma\tau})\Big)\phi(x)\ . \tag{6.90} $$

Die Transformation bei Drehung der vierdimensionalen Raum-Zeit-Koordinaten um den endlichen Winkel Ω ist demzufolge

$$\phi'(x') = \exp\Big\{\frac{i}{2\hbar}\Omega_{\sigma\tau}(S^{\sigma\tau} + J^{\sigma\tau})\Big\}\phi(x)\ . \tag{6.91}$$

Da die Generatoren S auf die Amplitudenkomponenten ϕ_n des Spinorfeldes, jedoch nicht auf ihr Argument x wirken, und da die Generatoren J auf das Argument x des Spinorfeldes, aber nicht auf seine Amplitudenkomponenten ϕ_n wirken, kommutieren S und J. Deshalb ist die Reihenfolge der Transformationen egal:

$$\phi'(x') = DR\phi(x) = RD\phi(x) \tag{6.92a}$$

Als dritte Variante kann man – wie in Abschnitt 5.6 bewiesen – das Argument des Spinorfelds mit der inversen Lorentztransformation transformieren:

$$\phi'(x') = \exp\Big\{\frac{i}{2\hbar}\Omega_{\sigma\tau}S^{\sigma\tau}\Big\}\phi(\Lambda^{-1}x) = D\phi(\Lambda^{-1}x) \tag{6.92b}$$

$(S^{\sigma\tau}_{ab})$ ist der Generator der Spinortransformation D. Die Raum-Zeit-Indizes σ und τ laufen von 0 bis 3. Den Wertebereich der Spinorindizes a, b haben wir nicht spezifiziert. Bisher haben wir nur die Darstellungen (6.82) explizit angegeben, die auf der Basis zweikomponentiger Spinoren definiert sind. Mindestens ebenso wichtig ist die Transformation vierkomponentiger Dirac-Spinoren. Wir werden die explizite Konstruktion einer vierdimensionalen Darstellung von $\{\mathcal{B}\}$ in Abschnitt 8.3 nachholen.

Warnung: Einige Autoren definieren $\phi'(x') = D\phi(x)$, integrieren also die Transformation des Arguments x in die Transformation D. Definitionen können nicht richtig oder falsch sein, sondern nur mehr oder weniger geschickt und zweckmäßig. Wichtig ist es freilich, die einmal getroffene Definition dann auch konsistent anzuwenden, was in der Literatur leider nicht immer geschieht.

6.4 Der Drehimpuls von Spinorfeldern

In Abschnitt (4.3) haben wir die Drehimpulserhaltung skalarer Felder untersucht, in Abschnitt (5.7) die Drehimpulserhaltung von Vektorfeldern. Diese Untersuchung wollen wir jetzt auf Spinorfelder ausdehnen.

Die Feldgleichung des Spinorfelds $\phi(x)$ wird aus der Lagrangedichte $\mathcal{L}$ berechnet. Laut (4.15) ist die notwendige (aber nicht hinreichende) Bedingung dafür, dass die Transformation Γ mit dem Generator γ eine Symmetrie von ϕ ist, durch

$$(\partial_\rho \mathcal{L}) w\gamma x^\rho = 0 \tag{6.93}$$

gegeben. Einsetzen von $\frac{1}{2}\omega_{\sigma\tau}(S^{\sigma\tau} + J^{\sigma\tau})$ für $w\gamma$ ergibt

$$0 = (\partial_\rho \mathcal{L})\frac{1}{2}\omega_{\sigma\tau}(S^{\sigma\tau} + J^{\sigma\tau})x^\rho = (\partial_\rho \mathcal{L})\frac{1}{2}\omega_{\sigma\tau}J^{\sigma\tau}x^\rho \ , \tag{6.94}$$

denn x^ρ ist ein Spinor-Skalar, so dass $S^{\sigma\tau}x^\rho = 0$ ist. Deshalb ist (6.94) identisch mit der notwendigen Bedingung (4.66) für die Drehimpulserhaltung eines skalaren Feldes. Also ist – wie bei (4.66) diskutiert – auch für ein Spinorfeld die Bedingung genau dann erfüllt, wenn die Lagrangedichte zumindest von den Raumzeitrichtungen σ und τ, in denen die Drehung stattfindet, nicht explizit abhängt, sodass $\partial_\sigma \mathcal{L} = \partial_\tau \mathcal{L} = 0$ gilt.

Die hinreichende Symmetriebedingung (4.11)

$$\exists\, \mathcal{G} : \quad \mathcal{L} \xrightarrow{I + \frac{i}{\hbar} w\,\gamma} \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{i}{\hbar} w\,\gamma \mathcal{L} = \mathcal{L} + \mathrm{d}_\rho \mathcal{G}^\rho$$

ergibt mit Einsetzen von $\frac{1}{2}\,\omega_{\sigma\tau}(S^{\sigma\tau} + J^{\sigma\tau})$ für $w\gamma$

$$\frac{i}{\hbar} w\,\gamma \mathcal{L} = \mathrm{d}_\rho \mathcal{G}^\rho = \frac{i}{2\hbar}\omega_{\sigma\tau}(S^{\sigma\tau} + J^{\sigma\tau})\mathcal{L} = \frac{i}{2\hbar}\omega_{\sigma\tau}J^{\sigma\tau}\mathcal{L} \ . \tag{6.95}$$

Denn alle Lagrangedichten, mit denen wir uns in diesem Buch beschäftigen, sind Spinor-Skalare, d.h. sämtliche Spinorindizes sind in $\mathcal{L}$ kontrahiert. Deshalb ist

$$S^{\sigma\tau}\mathcal{L} = 0 \ . \tag{6.96}$$

Die hinreichende Bedingung für die Drehimpulserhaltung des Spinorfeldes wird demnach mit dem gleichen

$$\mathcal{G}^\rho \overset{(4.68)}{=} -\frac{1}{2}\omega_{\sigma\tau}(x^\sigma g^{\tau\rho} - x^\tau g^{\sigma\rho})\mathcal{L} \tag{6.97}$$

erfüllt wie die hinreichende Bedingung für die Drehimpulserhaltung des skalaren Feldes. Auf gleiche Weise wie in Abschnitt 4.3 findet man die Komponenten der erhaltenen Stromdichten:

$$\begin{aligned} j^\rho &\overset{(4.16)}{=} C\Big(\frac{\sum_r \partial\mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\rho\phi_r)}\frac{1}{2}\omega_{\sigma\tau}(S^{\sigma\tau} + J^{\sigma\tau})\phi_r + i\hbar\mathcal{G}^\rho\Big) \\ &= \sum_{\sigma\tau=10,20,30,23,31,12} Ci\hbar\omega_{\sigma\tau}\cdot \\ &\cdot\Big(\sum_r \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\rho\phi_r)}\Big(\frac{1}{i\hbar}S^{\sigma\tau} + x^\sigma\mathrm{d}^\tau - x^\tau\mathrm{d}^\sigma\Big)\phi_r - (x^\sigma g^{\tau\rho} - x^\tau g^{\sigma\rho})\mathcal{L}\Big) \end{aligned}$$

Zu summieren ist über alle Spinorfelder ϕ_r, die in der Lagrangedichte enthalten sind. In der letzten Zeile ist der Faktor $1/2$ entfallen, weil nur über die sechs linear unabhängigen Komponenten des schiefsymmetrischen Tensors $\omega_{\sigma\tau}$ summiert wird. Aufgrund der Unabhängigkeit dieser Komponenten gibt es sechs verschiedene erhaltene Stromdichten j, deren Komponenten man mit dem in Abschnitt 4.2 definierten Energiedichte-Spannungs-Tensor

$$\mathcal{T}^{\rho\sigma} \overset{(4.32)}{=} \sum_r \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\rho\phi_r)}\mathrm{d}^\sigma\phi_r - g^{\rho\sigma}\mathcal{L} \tag{6.98}$$

und der Spindichte

$$\mathcal{S}^{\rho\sigma\tau} \equiv \frac{1}{i\hbar c}\sum_r \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\rho\phi_r)}S^{\sigma\tau}\phi_r \tag{6.99}$$

(die eine deutlich andere Form als die Spindichte (5.99) des in Abschnitt 5.7 untersucht Vektorfeldes hat), und mit der Definition $C \equiv 1/(ci\hbar\omega_{\sigma\tau})$ in der einfachen Form

$$j^\rho \overset{(4.70)}{=} x^\sigma \frac{\mathcal{T}^{\rho\tau}}{c} - x^\tau \frac{\mathcal{T}^{\rho\sigma}}{c} + \mathcal{S}^{\rho\sigma\tau} \qquad (6.100)$$
$$\text{mit } \sigma\tau = 10, 20, 30, 23, 31, 12$$

schreiben kann. Die erhaltenen Stromdichten werden zusammengefasst im Drehimpulsdichte-Tensor

$$\boxed{\mathcal{M}^{\rho\sigma\tau} \equiv x^\sigma \frac{\mathcal{T}^{\rho\tau}}{c} - x^\tau \frac{\mathcal{T}^{\rho\sigma}}{c} + \mathcal{S}^{\rho\sigma\tau}} \ , \qquad (6.101)$$

der die Dimension Wirkung/Volumen hat. $\mathcal{M}$ erfüllt die sechs linear unabhängigen Kontinuitätsgleichungen

$$\mathrm{d}_\rho j^\rho = \mathrm{d}_\rho \mathcal{M}^{\rho\sigma\tau} = 0 \quad \text{für } \sigma\tau = 10, 20, 30, 23, 31, 12 \quad . \qquad (6.102)$$

Integration der Null-Komponenten über den gesamten Ortsraum ergibt die sechs erhaltenen Drehimpulse

$$M^{\sigma\tau} \equiv \underbrace{\int\limits_\Omega \mathrm{d}^3x \Big(x^\sigma \frac{\mathcal{T}^{0\tau}}{c} - x^\tau \frac{\mathcal{T}^{0\sigma}}{c} \Big)}_{\text{Bahndrehimpuls}} + \underbrace{\int\limits_\Omega \mathrm{d}^3x\, \mathcal{S}^{0\sigma\tau}}_{\text{Spin}} \qquad (6.103)$$
$$\text{mit } \sigma\tau = 10, 20, 30, 23, 31, 12 \ ,$$

die bereits bei (4.73) diskutiert wurden. Dort hatten wir festgestellt, dass für praktische Anwendungen nur die rein räumlichen Drehimpulse mit $\sigma\tau = 23, 31, 12$ nützlich sind. Wir bemerken, dass Erhaltungssätze nur für die Gesamt-Drehimpulse gelten, nicht für Bahndrehimpuls oder Spin allein.

7 Normierung, Deltafunktion, Kronecker-Symbol

Bei der Quantisierung der Felder werden wir von den Lösungen der Gleichungen freier Felder ausgehen. Wichtige formale Fragen bei freien Feldern sind die Normierung der Zustandsvektoren, und im Zusammenhang damit unterschiedliche Realisierungen der Dirac'schen Deltafunktion und des Kronecker-Symbols. Bevor wir uns den einzelnen Feldern zuwenden, werden wir vorab diese Fragen klären.

Wenn ein System durch die Zustandsfunktion $\psi(x)$ beschrieben wird, dann ist

$$\langle K \rangle \equiv \frac{\int\limits_{\Omega} \mathrm{d}^3x\, \psi^*(t,\boldsymbol{x}) K \psi(t,\boldsymbol{x})}{\int\limits_{\Omega} \mathrm{d}^3x\, \psi^*(t,\boldsymbol{x}) \psi(t,\boldsymbol{x})} \tag{7.1}$$

der Erwartungswert einer Messgröße, die durch den Operator K repräsentiert wird. Damit dies Berechnungsverfahren funktionieren kann ist es unabdingbar, dass das Normierungsintegral

$$\int\limits_{\Omega} \mathrm{d}^3x\, \psi^*(t,\boldsymbol{x}) \psi(t,\boldsymbol{x}) = N \tag{7.2}$$
$$\text{mit } N \in \mathbb{R}\ ,\ N \neq 0\ ,\ -\infty < N < +\infty$$

einen reellen, endlichen, von Null verschiedenen Wert hat. Oft ist es praktisch wenn $N = 1$ ist, oder wenigstens lorentzinvariant ist. Notwendig ist beides aber nicht. Um Gleichungen zu vereinfachen oder Zusammenhänge transparent zu machen, werden wir oft auch andere Normierungen verwenden.

Sollte man ein endliches oder unendliches Normierungsvolumen Ω wählen?

Physikalisch sinnvoll ist nur ein endliches Normierungsvolumen. Denn das sichtbare Weltall ist endlich. Wenn es jenseits des sichtbaren Weltalls noch irgend etwas geben sollte, so können wir doch auf keine Weise davon erfahren. Nichts, was außerhalb des sichtbaren Weltalls liegt, kann irgend eine Wirkung ausüben, die bei uns beobachtbar wäre. Wir interpretieren

$$\frac{1}{N}\int_{\Omega} \mathrm{d}^3x\, \psi^*(t,\boldsymbol{x})\psi(t,\boldsymbol{x}) \overset{(7.2)}{=} 1 \tag{7.3}$$

so, dass beispielsweise ein Teilchen, von dessen Existenz wir mit Sicherheit wissen, dessen Aufenthaltsort wir aber nicht kennen, mit Wahrscheinlichkeit 1 irgendwo im Normierungsvolumen Ω auffindbar sein muss. Keinesfalls kann sich ein Teilchen, von dessen Existenz wir wissen, außerhalb des sichtbaren Weltalls befinden. In aller Regel ist der Raumbereich, in dem es sich mit Sicherheit befinden muss, sogar weitaus kleiner. Wenn wir beispielsweise beschreiben wollen, was bei einem Hochenergieexperiment in einem Elektron-Positron-Collider passiert, dann wissen wir mit Sicherheit, dass eine Nanosekunde nach der Kollision sämtliche erzeugten Felder innerhalb einer Kugel von 30 cm Radius um den Kollisionspunkt auffindbar sein müssen. Ein vernünftiges Normierungsvolumen kann maximal die endliche Größe des sichtbaren Weltalls haben, in nahezu allen praktischen Fällen wird man es wesentlich kleiner wählen.

Allerdings bringt die Normierung auf ein endliches Volumen auch einen Nachteil mit sich: Es ist inkompatibel mit ebenen Wellen. Streng genommen gibt es keine ebenen Wellen, denn jedes Feld muss am (und erst recht jenseits vom) Rand des Normierungsvolumens verschwinden. Nur Wellenpakete haben endliche Ausdehnung, im Gegensatz zu ebenen Wellen. In guter Näherung kann man aber Wellenpakete, deren Amplitude sich im beobachteten Bereich – der in diesem Fall sehr viel kleiner als das Normierungsvolumen ist – nicht merklich ändert, als ebene Wellen betrachten. Wir wollen die immense Schreibarbeit sparen, solche quasi-ebenen Wellen als Wellenpakete zu beschreiben. Stattdessen möchten wir sie als einfache ebene Wellen $\psi(x) \sim \exp\{-i(\omega t - \boldsymbol{k}\boldsymbol{x})\}$ behandeln.

Deshalb weichen wir die Normierungsforderung auf zwei Weisen auf: Entweder definieren wir das Normierungsvolumen $\Omega = S^1 \cdot S^2 \cdot S^3$ als Kasten

mit Seitenlängen S^1,S^2,S^3, und postulieren periodische Randbedingungen

$$\psi(t, x^1 + 2z_1 S^1, x^2 + 2z_2 S^2, x^3 + 2z_3 S^3) = \psi(t, \boldsymbol{x}) \qquad (7.4)$$
$$\text{mit } z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{Z} \; .$$

Diese Normierung lässt ebene Wellen zu. Als zweite Möglichkeit betrachten wir, trotz der erwähnten physikalischen Einwände, den Grenzübergang $\Omega \to \infty$. Dabei werden wir oft folgende Formel verwenden:

$$\lim_{\Omega\to\infty} \frac{1}{\Omega} \sum_{\boldsymbol{k}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3} \; . \qquad (7.5)$$

Wir untersuchen jetzt ein Feld $\psi(\boldsymbol{x}) \equiv \psi(t = 0, \boldsymbol{x})$ zur Zeit $t = 0$. Das endliche Normierungsvolumen bewirkt, dass $\psi(\boldsymbol{x})$ in einer Fourier-Reihe

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\Omega} \sum_{\boldsymbol{k}} w_{\boldsymbol{k}} \exp\{+i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}\} \qquad (7.6a)$$

$$w_{\boldsymbol{k}} = \int_{\Omega} \mathrm{d}^3 x \, \psi(\boldsymbol{x}) \exp\{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}\} \qquad (7.6b)$$

entwickelt werden kann. Anmerkung: Einige Autoren definieren (7.6b) als $w_{-\boldsymbol{k}}$ und/oder verteilen den Normierungsfaktor in der Form $\sqrt{1/\Omega}$ auf beide Zeilen von (7.6).

Summiert wird in (7.6a) über sämtliche Wellenzahlen $\boldsymbol{k}$ die mit der Randbedingung (7.4) verträglich sind. Bei einem großen Normierungsvolumen Ω ist das Spektrum der Wellenzahlen messtechnisch nicht auflösbar, es erscheint als Kontinuum. Dennoch sind die Wellenzahlen, weil Ω endlich ist, eine diskrete, abzählbar unendliche Menge, über die summiert werden kann.

Autoren, die ein unendlich großes Normierungsvolumen wählen, erhalten anstelle der Fourier-Reihe ein Fourier-Integral:

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3} \, w(\boldsymbol{k}) \exp\{+i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}\} \qquad (7.7a)$$

$$w(\boldsymbol{k}) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}^3x\, \psi(\boldsymbol{x}) \exp\{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}\} \tag{7.7b}$$

Die Deltafunktion wird durch

$$\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}) = 0 \quad \text{falls } \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{z} \tag{7.8a}$$

$$\int \mathrm{d}^3x\, \delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z})\phi(\boldsymbol{x}) = \phi(\boldsymbol{z}) \tag{7.8b}$$

definiert, wobei das Integrationsvolumen den Punkt $\boldsymbol{z}$ überdecken muss. Bei endlichem Normierungsvolumen Ω kann sie in der Form

$$\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}) = \frac{1}{\Omega} \sum_{\boldsymbol{k}} \exp\{\pm i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z})\} \tag{7.9}$$

geschrieben werden, bei unendlichem Normierungsvolumen als

$$\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\, \exp\{\pm i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z})\}\ . \tag{7.10}$$

Bei unendlichem Normierungsvolumen kann die dreidimensionale Deltafunktion der Wellenzahlen

$$\delta^{(3)}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{f}) = 0 \quad \text{falls } \boldsymbol{k} \neq \boldsymbol{f} \qquad , \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}^3k\, \delta^{(3)}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{f}) = 1$$

geschrieben werden als

$$\delta^{(3)}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{f}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}^3x\, \exp\{\pm i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{f})\boldsymbol{x}\}\ . \tag{7.11}$$

Bei endlichem Normierungsvolumen ist das Spektrum der Wellenzahlen diskret, und die Deltafunktion $\delta^{(3)}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{f})$, die die Dimension Volumen hat, wird durch das dimensionslose Kronecker-Symbol $\delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{f}}$ ersetzt:

$$\delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{f}} = \frac{1}{\Omega} \int\limits_{\Omega} \mathrm{d}^3x \, \exp\{\pm i(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{f})\boldsymbol{x}\} \tag{7.12}$$

Wir werden auch die Erweiterungen der Fourier-Entwicklungen und Deltafunktionen auf vier Raumzeitdimensionen benötigen. Bei unendlichem Normierungsvolumen folgt aus (7.7)

$$\psi(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4} \, w(k) \exp\{-ikx\} \tag{7.13a}$$

$$w(k) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}^4x \, \psi(x) \exp\{+ikx\} \ , \tag{7.13b}$$

und die Deltafunktionen lauten

$$\delta^{(4)}(x - z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4} \, \exp\{\pm ik(x - z)\} \tag{7.14a}$$

$$\delta^{(4)}(k - f) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}^4x}{(2\pi)^4} \, \exp\{\pm i(k - f)x\} \ . \tag{7.14b}$$

Das endliche Normierungsvolumen Ω bezieht sich nur auf die drei räumlichen Dimensionen, die Zeit nehmen wir als unbegrenzt an. Deshalb müssen wir bei endlichem Normierungsvolumen die vierdimensionale Fourier-Transformationen aus (7.6) und (7.13) kombinieren:

$$\psi(x) = \frac{1}{\Omega} \sum_{\boldsymbol{k}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}k^0}{2\pi} \, w_{\boldsymbol{k}}(k^0) \exp\{-i(k^0x^0 - \boldsymbol{k}\boldsymbol{x})\} \tag{7.15a}$$

$$w_{\boldsymbol{k}}(k^0) = \int\limits_{\Omega} \mathrm{d}^3x \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x^0 \, \psi(x) \exp\{+i(k^0x^0 - \boldsymbol{k}\boldsymbol{x})\} \tag{7.15b}$$

Die vierdimensionalen Deltafunktionen entstehen bei endlichem Normierungsvolumen aus der Kombination von (7.9), (7.12), und (7.14):

$$\delta^{(4)}(x-z) = \frac{1}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{k}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}k^0}{2\pi}\, \exp\{-ik(x-z)\} \tag{7.16a}$$

$$\delta(k^0-f^0)\,\delta_{\boldsymbol{kf}} = \frac{1}{2\pi\Omega}\int_{\Omega} \mathrm{d}^3x \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x^0\, \exp\{+i(k-f)x\} \tag{7.16b}$$

Als Integrationsvariable nimmt k^0 in (7.13) bis (7.16a) sämtliche Werte zwischen $-\infty$ und $+\infty$ an. Aber als Null-Komponente des Wellenzahlvektors einer ebenen Welle $\exp\{-i(\omega_{\boldsymbol{k}}t - \boldsymbol{kx})\}$ hängt die Frequenz $\omega_{\boldsymbol{k}} = ck^0$ mit den Raumkomponenten $\boldsymbol{k}$ der Wellenzahl durch das invariante Wellenzahlquadrat

$$k_\nu k^\nu = (k^0)^2 - \boldsymbol{k}^2 = \Big(\frac{\omega_{\boldsymbol{k}}}{c}\Big)^2 - \boldsymbol{k}^2 = \frac{m^2c^2}{\hbar^2} \tag{7.17}$$

der Speziellen Relativitätstheorie zusammen, ist also keine unabhängige Variable. Das Vorzeichen von $k^0 = \omega_{\boldsymbol{k}}/c$ legen wir per Definition fest:

Wir vereinbaren, dass mit

$$k^0 = \frac{\omega_{\boldsymbol{k}}}{c} = +\sqrt{\boldsymbol{k}^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}} > 0 \tag{7.18}$$

immer die positive Wurzel gemeint ist, eine negative Frequenz also als $-\omega_{\boldsymbol{k}} = -ck^0 < 0$ geschrieben wird.

(Der Fall $\omega_{\boldsymbol{k}} = 0$ kann bei Feldern mit endlicher Masse $m \neq 0$ nicht auftreten. Und ein masseloses Feld mit Frequenz Null wäre schlichtweg nicht existent.) Um sämtliche möglichen Wellen zu erfassen muss die Fourier-Entwicklung nach den dreidimensionalen raumartigen Wellenzahlen $\boldsymbol{k}$ dann zu jeder Wellenzahl einen Summanden mit $+\omega_{\boldsymbol{k}} > 0$ und einen Summanden mit $-\omega_{\boldsymbol{k}} < 0$ enthalten:

$$\psi(x) = \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{1}{\sqrt{N\Omega}} \Big(a_{\boldsymbol{k}} \exp\{-ikx\} + b^*_{\boldsymbol{k}} \exp\{+ikx\} \Big) \tag{7.19}$$
$$= \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{1}{\sqrt{N\Omega}} \Big(a_{\boldsymbol{k}} \exp\{-i(\omega_{\boldsymbol{k}} t - \boldsymbol{kx})\} + b^*_{\boldsymbol{k}} \exp\{+i(\omega_{\boldsymbol{k}} t - \boldsymbol{kx})\} \Big)$$

Die Summe läuft über sämtliche positiven und sämtliche negativen Wellenzahlen $\boldsymbol{k}$, die mit der Bedingung (7.4) vereinbar sind. Aber $k^0 = \omega_{\boldsymbol{k}}/c > 0$ ist immer positiv. Den Normierungsfaktor $1/\sqrt{N\Omega}$ mit zunächst unbestimmtem N haben wir eingeführt, um die Normierung flexibel für den jeweiligen Einzelfall optimieren zu können. Die Schreibweise mit den Fourier-Koeffizienten $a_{\boldsymbol{k}}$ und $b^*_{\boldsymbol{k}}$ hat den zusätzlichen Vorteil dass man – falls gewünscht – einfach und übersichtlich sicherstellen kann dass das Feld $\psi(x)$ reell ist: Dazu braucht man lediglich für sämtliche Wellenzahlen $b_{\boldsymbol{k}} = a_{\boldsymbol{k}}$ zu spezifizieren.

Das endliche Normierungsvolumen ist nicht nur physikalisch sinnvoller als ein unendliches, es erspart uns auch eine Komplikation hinsichtlich der Lorentzinvarianz des Normierungsintegrals. Die ebene Welle

$$|\boldsymbol{k}\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \exp\{-ikx\} = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \exp\{-i(\omega_{\boldsymbol{k}} t - \boldsymbol{kx})\} \tag{7.20}$$

sei eine Lösung einer Feldgleichung. Mit endlichem Normierungsvolumen Ω ist

$$\langle \boldsymbol{q}|\boldsymbol{k}\rangle = \frac{\exp\{-i(\omega_{\boldsymbol{k}} - \omega_{\boldsymbol{q}})t\}}{\Omega} \int_\Omega \mathrm{d}^3x \, \exp\{i(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{q})\boldsymbol{x}\} \overset{(7.12)}{=} \delta_{\boldsymbol{qk}} \tag{7.21}$$

wegen $\omega_{\boldsymbol{k}} = \omega_{\boldsymbol{q}}$ bei $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{q}$. Betrachtet aus einem Koordinatensystem′, das sich mit der Geschwindigkeit v relativ zum ungestrichenen Systems bewegt, ist das im ungestrichenen System ruhende Normierungsvolumen um den Faktor

$$\sqrt{1 - (v/c)^2} \equiv \gamma^{-1} \tag{7.22}$$

geschrumpft, so dass

$$\Omega' = \gamma^{-1}\Omega < \Omega \tag{7.23}$$

gilt [32, (45a)]. Das Normierungsvolumen ist durch relativistische Längenkontraktion im gestrichenen System (in dem es sich bewegt) kleiner als im ungestrichenen System (in dem es ruht). Genau das gleiche gilt für das infinitesimale Volumen d^3x, über das in (7.21) summiert wird. Die Schrumpfung von d^3x und die Schrumpfung von Ω kompensieren sich. Deshalb ist generell das Normierungsintegral

$$\frac{1}{\Omega}\int\limits_{\Omega} \mathrm{d}^3x\, \psi^*(t,\boldsymbol{x})\psi(t,\boldsymbol{x}) \tag{7.24}$$

lorentzinvariant, wenn die Wahrscheinlichkeitsdichte $\psi^*(t,\boldsymbol{x})\psi(t,\boldsymbol{x})$ lorentzinvariant ist.

Mit unendlichem Normierungsvolumen erhält man stattdessen für ebene Wellen

$$|\boldsymbol{k}\rangle \equiv \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{N}}\exp\{-ikx\} = \frac{1}{\sqrt{N}}\exp\{-i(\omega_{\boldsymbol{k}}t - \boldsymbol{kx})\}$$

das Normierungsintegral

$$\langle \boldsymbol{q}|\boldsymbol{k}\rangle = \frac{\exp\{-i(\omega_{\boldsymbol{k}} - \omega_{\boldsymbol{q}})t\}}{N}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^3x\,\exp\{i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q})\boldsymbol{x}\} =$$

$$\overset{(7.11)}{=} \frac{(2\pi)^3}{N}\delta^{(3)}(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k})\,. \tag{7.25}$$

Dies Integral ist nicht lorentzinvariant, wenn der Normierungsfaktor N lorentzinvariant ist. Denn es gilt $\mathrm{d}^3x' = \gamma^{-1}\mathrm{d}^3x < \mathrm{d}^3x$. Wenn man diese Schrumpfung kompensieren will, dann muss man einen Normierungsfaktor mit gleicher Schrumpfung wählen. Alternativ kann man für den Kehrwert $1/N$ des Normierungsfaktors die zeitartige Komponente eines beliebigen Lorentzvektors einsetzen, denn diese Komponente wird bei einer Drehung der Raum-Zeit-Koordinaten um den Faktor γ gestreckt. Viele Autoren wählen dafür die Energie $\hbar\omega$, definieren also bei unendlichem Normierungsvolumen das lorentzinvariante Normierungsintegral

$$\langle \boldsymbol{q}|\boldsymbol{k}\rangle = \sqrt{\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}\hbar\omega_{\boldsymbol{q}}}\exp\{-i(\omega_{\boldsymbol{k}}-\omega_{\boldsymbol{q}})t\}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^3x\,\exp\{i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q})\boldsymbol{x}\} =$$

$$\overset{(7.11)}{=} \hbar\omega_{\boldsymbol{k}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k})\;. \tag{7.26}$$

Obwohl wir in diesem Buch bei der Normierung (7.21) auf ein endliches Volumen bleiben werden, sollte der Leser auch mit der Normierung auf unendliches Volumen vertraut sein, weil sie ihm in der Literatur häufig begegnen wird. Normierungsfaktoren wie $\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}$ dürften ziemlich verblüffend wirken wenn man nicht weiß, dass sie zum Zweck der Lorentzinvarianz des Normierungsintegrals (7.26) willkürlich eingeschoben werden.

8 Das klassische Dirac-Feld

8.1 Die Diracgleichung

Mit dem Energie-Impuls-Vektor der Speziellen Relativitätstheorie

$$p = (p^\nu) = \begin{pmatrix} E/c \\ p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{pmatrix} \tag{8.1}$$

ist

$$\sqrt{c^2 p_\nu p^\nu} = \sqrt{E^2 - (c\boldsymbol{p})^2} = mc^2 \tag{8.2}$$

die unter Lorentztransformationen invariante Ruhenergie. Deshalb sollte eine relativistisch invariante Feldgleichung mit dem Energieoperator $i\hbar \mathrm{d}_t$ und dem Impulsoperator $-i\hbar\boldsymbol{\nabla}$ die Form

$$\sqrt{\left(i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\right)^2 - \left(-i\hbar c\boldsymbol{\nabla}\right)^2}\,\psi = mc^2\psi \tag{8.3}$$

haben. Diese Gleichung ist wegen der Wurzel überaus sperrig und formal schwierig zu handhaben. Wenn man die Wurzel in einer unendlichen Reihe entwickelt, gelangt man – weil die Differentialoperatoren in infiniter Potenz vorkommen – zu einer nichtlokalen Theorie, was eine Fülle neuer Probleme mit sich bringt. Dirac hatte die Idee, diese Gleichung mithilfe von zunächst unbekannten Entwicklungskoeffizienten γ^μ in die lineare Form

$$\begin{aligned}(i\hbar c\gamma^0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,ct} + i\hbar c\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\nabla})\psi = \\ i\hbar c\gamma^\mu \mathrm{d}_\mu\psi = mc^2\psi\end{aligned} \tag{8.4}$$

zu bringen. Die so gewonnene Diracgleichung

$$\boxed{(i\hbar c\gamma^\mu \mathrm{d}_\mu - mc^2)\psi = 0} \tag{8.5}$$

erwies sich als höchst erfolgreiches Konzept.

Um die Entwicklungskoeffizienten γ^μ zu bestimmen, quadrieren wir Gleichung (8.2)

$$E^2 - (c\boldsymbol{p})^2 = (mc^2)^2 \,, \tag{8.6}$$

und iterieren (8.4) seitenweise:

$$\begin{aligned} i\hbar c\gamma^\mu \mathrm{d}_\mu i\hbar c\gamma^\sigma \mathrm{d}_\sigma \psi &= (mc^2)^2\psi \\ (i\hbar c)^2\Big(\gamma^0\gamma^0\mathrm{d}_0\mathrm{d}_0 + (\gamma^0\gamma^k + \gamma^k\gamma^0)\mathrm{d}_0\mathrm{d}_k + \gamma^k\gamma^j\mathrm{d}_k\mathrm{d}_j\Big)\psi &= (mc^2)^2\psi \end{aligned} \tag{8.7}$$

Der Vergleich mit (8.6) zeigt, dass beide Gleichungen unter der Bedingung

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \tag{8.8}$$

verträglich sind. Auch die stärkere Bedingung $\gamma^\mu\gamma^\nu = g^{\mu\nu}$ hätte zum richtigen Ergebnis geführt, wäre aber eine ungerechtfertigte Einschränkung, weil auch die schwächere Bedingung (8.8) ausreicht. Denn Bedingung (8.8) kann auch mit Imaginärteilen $\mathrm{Im}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = -\mathrm{Im}(\gamma^\nu\gamma^\mu)$ erfüllt werden, während die stärkere Bedingung $\gamma^\mu\gamma^\nu = g^{\mu\nu}$ nur mit $\mathrm{Im}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 0$ erfüllbar ist.

Mit Zahlen gibt es keine Lösung von (8.8). Aus diesem Grund schlug Dirac vor, die Koeffizienten γ^ν als Matrizen zu interpretieren. Dadurch wird aus der Bedingung (8.8) die Bedingung

$$\boxed{\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}\mathbb{1}} \,. \tag{8.9}$$

$\mathbb{1}$ ist eine n-dimensionale Einheitsmatrix im n-dimensionalen, von den Spinoren ψ aufgespannten Spinorraum. Der Spinorraum ist ein abstrakter Funktionenraum der Theorie. Er darf nicht mit dem vierdimensionalen Zeit-Orts-Raum verwechselt werden.

Bis jetzt wissen wir nicht, wie die γ-Matrizen explizit aussehen. Wir

haben noch nicht einmal ihre Dimension festgelegt. Um genaueres über die Matrizen herauszufinden, multiplizieren wir (8.5) von links mit γ^0:

$$(i\hbar c\underbrace{\gamma^0\gamma^0}_{=\mathbb{1}\text{ wegen }(8.9)}\mathrm{d}_0 + i\hbar c\gamma^0\gamma^j\mathrm{d}_j - \gamma^0 mc^2)\psi = 0 \tag{8.10}$$

Der Energieoperator $i\hbar c\mathrm{d}_0$ ist – wie jeder Operator der Quantentheorie, der eine messbare Größe repräsentiert – hermitesch (= selbstadjungiert). Das gleiche gilt für den Impulsoperator $-i\hbar\mathrm{d}_j$ und den einfach aus einem reellen Faktor bestehenden Operator mc^2. Also müssen auch $\gamma^0\gamma^j$ und γ^0 hermitesch sein:

$$\gamma^{0\dagger} = \gamma^0 \tag{8.11a}$$

$$(\gamma^0\gamma^j)^\dagger = \gamma^0\gamma^j \overset{(8.9)}{=} (-\gamma^j\gamma^0)^\dagger = -\gamma^{0\dagger}\gamma^{j\dagger} = -\gamma^0\gamma^{j\dagger}$$

$$\Longrightarrow \quad \gamma^{j\dagger} = -\gamma^j \tag{8.11b}$$

Das kann zusammengefasst werden in der Gleichung

$$\boxed{\gamma^{\mu\dagger} = g_{\mu\nu}\gamma^\nu}\,. \tag{8.12}$$

Dies ist die zweite und letzte Bedingung, denen die γ-Matrizen genügen müssen. Außer (8.9) und (8.12) gibt es keine weitere Randbedingung.

In Anhang A.8 wird bewiesen, dass die γ-Matrizen gradzahlige Dimension haben müssen. Naheliegenderweise versucht man, Matrizen mit möglichst kleiner Dimension zu finden, die alle Anforderungen erfüllen. Tatsächlich hat

$$\gamma^k \equiv i\sigma^k \qquad \text{nur vorläufig!} \tag{8.13}$$

mit den Pauli-Matrizen

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{8.14}$$

die erforderlichen Eigenschaften (8.9) und (8.12). Es existiert aber für γ^0 keine vierte 2×2 Matrix, die diese Bedingungen ebenfalls erfüllt. Also muss

die Dimension der γ-Matrizen mindestens 4×4 sein.

Immerhin zeigt aber der Teilerfolg, dass wir mit den Pauli-Matrizen auf der richtigen Spur sind. Also bietet es sich an, die gesuchten vierdimensionalen Matrizen als direktes Produkt $\rho \otimes \sigma$ geeigneter 2×2 Matrizen ρ und der Pauli-Matrizen zu konstruieren. Statt die γ^k wie im Versuch (8.13) durch Multiplikation der σ^k mit i antihermitesch zu machen, können wir ρ^k als $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ definieren. Für σ^0 wird üblicherweise einfach $\mathbb{1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ gewählt, was mit $\rho^0 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ oder $\rho^0 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ zum Erfolg führt. Dirac entschied sich für letztere Möglichkeit, die auch als „Standardform“ bezeichnet wird. Weil diese Form der γ-Matrizen sehr weit verbreitet ist, werden wir sie in Abschnitt 8.7 kurz vorstellen. In diesem Buch bevorzugen wir aber die andere, „chiral“ genannte Form der Matrizen, weil mit ihnen die Struktur der Diracgleichung und ihr Zusammenhang mit den Weyl-Gleichungen transparenter wird. Die chirale Form der Dirac-Matrizen ist:

$$\gamma^0 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g_{00} & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{8.15a}$$

$$\gamma^1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g_{11} & 0 \end{pmatrix} \otimes \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{8.15b}$$

$$\gamma^2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g_{22} & 0 \end{pmatrix} \otimes \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{8.15c}$$

$$\gamma^3 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g_{33} & 0 \end{pmatrix} \otimes \sigma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^3 \\ -\sigma^3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{8.15d}$$

Durch direktes Nachrechnen weist man ohne Schwierigkeit nach, dass diese Matrizen tatsächlich die Bedingungen

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu \overset{(8.9)}{=} 2g^{\mu\nu}\mathbb{1} \tag{8.16}$$

$$\gamma^{\mu\dagger} \overset{(8.12)}{=} g_{\mu\nu}\gamma^\nu \tag{8.17}$$

für $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ erfüllen. Achtung: Der Spinorraum der Dirac-Theorie hat nur zufällig die gleiche Dimension – nämlich vier – wie der Zeit-Orts-Raum. Der Spinorraum ist ein abstrakter mathematischer Raum, der nicht mit dem Zeit-Orts-Raum identisch ist.

Die vier γ-Matrizen sind Konstanten, also Lorentz-Skalare. Sie ändern sich nicht bei einer Rotation der Raum-Zeit-Koordinaten. Anders gesagt: Sie bilden *nicht* einen vierdimensionalen Lorentzvektor $\gamma = (\gamma^\mu)$. Also ist der Faktor $\gamma^\mu \mathrm{d}_\mu$ in der Diracgleichung $(i\hbar c\gamma^\mu \mathrm{d}_\mu - mc^2)\psi \overset{(8.5)}{=} 0$ kein Lorentz-Skalar. Deshalb ist die Lorentz-Invarianz der Dirac-Gleichung keineswegs offensichtlich, sondern erfordert eine genauere Untersuchung, die wir in Abschnitt 8.3 durchführen werden.

In manchen Berechnungen wird eine fünfte Matrix nützlich sein, die folgendermaßen definiert wird:

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \tag{8.18}$$

Achtung: Autoren, die eine andere Form der γ-Matrizen (8.15) wählen, erhalten natürlich auch für γ^5 eine andere Form.

Wir werden feststellen, dass die vierdimensionalen Dirac-Spinoren bei der von uns gewählten chiralen Form der γ-Matrizen nichts anderes sind als die direkte Summe zweidimensionaler links- und rechtshändiger Weyl-Spinoren, die wir bereits aus (6.78) kennen. Die beiden oberen Komponenten jedes Dirac-Spinors sind ein linkshändiger Weyl-Spinor, seine beiden unteren Komponenten sind ein rechtshändiger Weyl-Spinor:

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} L_1(x) \\ L_2(x) \\ R_1(x) \\ R_2(x) \end{pmatrix} = L(x) \oplus R(x) \tag{8.19}$$

Mithilfe der Matrix γ^5 kann man Projektionsoperatoren ${}^{L}P$ und ${}^{R}P$ konstruieren, die die links- und rechtshändigen Komponenten aus Diracspinoren herausprojizieren:

$${}^{L}P\psi \equiv \frac{1}{2}(\mathbb{1} - \gamma^5) \begin{pmatrix} L \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L \\ 0 \end{pmatrix} \tag{8.20a}$$

$${}^{R}P\psi \equiv \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \gamma^5) \begin{pmatrix} L \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ R \end{pmatrix} \tag{8.20b}$$

Es ist dieser transparente Zusammenhang zwischen den zweidimensionalen Weyl-Darstellungen und der vierdimensionalen Dirac-Darstellung der Gruppe $\{\mathcal{B}\}$, wegen dem wir die chirale Form der γ-Matrizen bevorzugen.

8.2 Lagrangedichte

In Abschnitt 4.5 haben wir die Lagrangedichte des Diracfeldes $\psi(x)$ und seines Eichfeldes $A(x)$ bereits angegeben:

$$\boxed{\mathcal{L} \overset{(4.120)}{=} \overline{\psi}_a \left(i\hbar c \gamma^{\nu}_{ab} (\mathrm{d}_\nu + \frac{i}{\hbar} q A_\nu) - mc^2 \delta_{ab} \right) \psi_b - \frac{1}{4\mu_0} F_{\sigma\tau} F^{\sigma\tau}} \tag{8.21}$$

Die Indizes a, b sind Spinorindizes, über die bei doppeltem Auftreten in einem Produkt nach der Summenkonvention automatisch zu summieren ist, in diesem Fall von 1 bis 4. Die Indizes ν, σ, τ sind Raum-Zeit-Indizes, über die bei doppeltem Auftreten in einem Produkt nach der Summenkonvention automatisch von 0 bis 3 zu summieren ist. Bei Raum-Zeit-Indizes unterscheiden wir zwischen oben stehenden kontravarianten Indizes und unten stehenden kovarianten Indizes. Der Spinorraum ist ein euklidischer Raum, und wir schreiben Spinorindizes immer unten. Wir betonen nochmals, dass Zeit-Orts-Raum und Spinorraum unterschiedliche Räume sind, die nur

zufällig in der Diractheorie die gleiche Dimension haben.

Besonders bemerkenswert sind die Dirac-Matrizen $(\gamma_{ab})^\nu$. Es handelt sich um vier 4×4-Matrizen im Spinorraum. In (8.15) sind die Matrizen explizit angegeben. Die Matrizen sind *nicht* Komponenten eines Lorentzvektors, sondern Konstanten (Lorentzskalare). Dennoch tragen sie – nicht ohne Grund – einen suggestiv wirkenden Raum-Zeit-Index. Darauf werden wir eingehen, wenn wir im Abschnitt 8.3 die Lorentzinvarianz der Lagrangedichte untersuchen.

Das Feld $\overline{\psi}(x)$ hängt mit dem Feld $\psi(x)$ durch seine Definition

$$\overline{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0 \tag{8.22}$$

eng zusammen. $\psi^\dagger$ ist der adjungierte, also transponierte konjugiert-komplexe Spinor von ψ. Oft wird abkürzend – wenn auch etwas ungenau – $\overline{\psi}$ ebenfalls als adjungierter Spinor von ψ bezeichnet. Da wir uns in (8.15) bereits für eine konkrete Form der Dirac-Matrizen entschieden haben, können wir $\overline{\psi}$ explizit angeben:

$$\begin{aligned} \psi &= \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \qquad\qquad \psi^\dagger = \begin{pmatrix} \psi_1^* & \psi_2^* & \psi_3^* & \psi_4^* \end{pmatrix} \\ \overline{\psi} &= \psi^\dagger \gamma^0 \overset{(8.15a)}{=} \begin{pmatrix} \psi_3^* & \psi_4^* & \psi_1^* & \psi_2^* \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{8.23}$$

Die Dimension von ψ und $\overline{\psi}$ ist Volumen$^{-1/2}$, die Dimension der Lagrangedichte $\mathcal{L}$ ist Energie/Volumen.

Die „kovariante Ableitung“ $\mathrm{d}_\nu + \frac{i}{\hbar} q A_\nu$, die an die Stelle der „normalen“ Ableitung d_ν tritt, haben wir in Abschnitt 4.5 aus der Forderung nach Eichinvarianz des geladenen Diracfeldes begründet. Auch den Summanden $-\frac{1}{4\mu_0} F_{\sigma\tau} F^{\sigma\tau}$, der sich ausschließlich auf das Eichfeld bezieht, haben wir dort begründet. Dagegen ist der Rest der Lagrangedichte nicht irgendwie unabhängig hergeleitet worden. Erst nachdem Dirac die Feldgleichung (8.5) gefunden hatte, wurde die Lagrangedichte so konstruiert, das diese Feldgleichung durch Variation der Variablen aus ihr folgt. Die Lagrangedichte ist

deshalb nützlich, weil man Symmetrien und Erhaltungssätze der Theorie mit ihrer Hilfe systematisch und übersichtlich durchleuchten kann. Wir werden in Abschnitt 8.3 die Lagrangedichte nutzen, um die Lorentzinvarianz der Diracgleichung zu untersuchen.

Bei der Quantisierung der Felder werden wir so vorgehen, dass wir zunächst das „freie“, mit nichts wechselwirkende Diracfeld und das „freie“, mit nichts wechselwirkende Elektromagnetische Feld jeweils für sich allein quantisieren, und anschließend die Wechselwirkung zwischen den quantisierten Feldern untersuchen. Deshalb ist es sinnvoll, die Lagrangedichte des freien Diracfeldes zu definieren, in der das Eichfeld abgeschaltet ist:

$$\mathcal{L} \overset{(8.21)}{=} \overline{\psi}_a \left(i\hbar c \gamma^\nu_{ab} \mathrm{d}_\nu - mc^2 \delta_{ab} \right) \psi_b \tag{8.24}$$

Zum Schluss dieses Abschnitts überprüfen wir nun, dass die Feldgleichungen tatsächlich aus der Lagrangedichte abgeleitet werden können. $\psi(x)$, $\overline{\psi}(x)$, und die vier Komponenten $A^\mu(x)$ des Eichfeldes sind die sechs Variablen, nach denen die Lagrangedichte (8.21) zur Herleitung der sechs Feldgleichungen variiert werden muss. Im Anschluss an (3.37c) haben wir erklärt, warum bei der Ableitung der Feldgleichungen $\overline{\psi}(x)$ als unabhängig von $\psi(x)$ betrachtet werden muss. Die Feldgleichungen für $A^\mu(x)$ haben wir bereits in Abschnitt 4.5 abgeleitet und untersucht, deshalb betrachten wir im Folgenden nur die Feldgleichungen für $\psi(x)$ und $\overline{\psi}(x)$.

Durch Variation von $\mathcal{L}$ nach $\psi(x)$ findet man die Feldgleichung

$$\begin{aligned} 0 &\overset{(3.37b)}{=} \mathrm{d}_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\nu \psi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \\ &= \mathrm{d}_\nu \, \overline{\psi}_a \, i\hbar c \gamma^\nu_{ab} - \overline{\psi}_a \left(i\hbar c \gamma^\nu_{ab} (\frac{i}{\hbar} q A_\nu) - mc^2 \delta_{ab} \right) \\ &= i\hbar c (\mathrm{d}_\nu - \frac{i}{\hbar} q A_\nu) \, \overline{\psi}_a \, \gamma^\nu_{ab} + mc^2 \delta_{ab} \, \overline{\psi}_a = 0 \, , \end{aligned} \tag{8.25a}$$

und durch Variation nach $\overline{\psi}(x)$ die Feldgleichung

$$0 \overset{(3.37b)}{=} \mathrm{d}_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\nu \overline{\psi})} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \, \overline{\psi}} = \left(i\hbar c \gamma^\nu_{ab} (\mathrm{d}_\nu + \frac{i}{\hbar} q A_\nu) - mc^2 \delta_{ab} \right) \psi_b \, . \tag{8.25b}$$

(8.25b) ist die a-te Zeile der Spinorgleichung

$$\Big(i\hbar c\gamma^\nu(\mathrm{d}_\nu + \frac{i}{\hbar}qA_\nu) - mc^2\Big)\psi = 0\,, \tag{8.26a}$$

die – abgesehen davon dass hier die normale Ableitung d_ν durch die kovariante Ableitung $\mathrm{d}_\nu + \frac{i}{\hbar}qA_\nu$ ersetzt ist, vergleiche Abschnitt 4.5 – mit der Diracgleichung (8.5) identisch ist. (8.25a) ist die b-te Spalte der Spinorgleichung

$$-i\hbar c(\mathrm{d}_\nu - \frac{i}{\hbar}qA_\nu)\,\overline{\psi}\,\gamma^\nu - mc^2\,\overline{\psi} = 0\,. \tag{8.26b}$$

Wir zeigen jetzt, dass dies keine unabhängige Gleichung ist, sondern die adjungierte von (8.26a): Mit der für beliebige Matrizen gültigen Regel $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ sowie $i^\dagger = -i$ ist

$$\begin{aligned} 0 &\overset{(8.26a)}{=} \Big((i\hbar c\gamma^\nu(\mathrm{d}_\nu + \frac{i}{\hbar}qA_\nu) - mc^2)\psi\Big)^\dagger \\ &= -i\hbar c(\mathrm{d}_\nu - \frac{i}{\hbar}qA_\nu)\psi^\dagger\gamma^{\nu\dagger} - mc^2\psi^\dagger\,. \end{aligned} \tag{8.27}$$

Multiplikation von rechts mit γ^0 ergibt

$$0 = -i\hbar c(\mathrm{d}_\nu - \frac{i}{\hbar}qA_\nu)\psi^\dagger \underbrace{\gamma^{\nu\dagger}\gamma^0}_{\gamma^0\gamma^\nu} - mc^2\psi^\dagger\gamma^0\,. \tag{8.28}$$

$$\begin{aligned} \gamma^{\nu\dagger}\gamma^0 \text{ ist im Fall } \nu = 0: &\quad \gamma^{\nu+}\gamma^0 \overset{(8.12)}{=} \gamma^0\gamma^0 = \gamma^0\gamma^\nu \\ \text{im Fall } \nu \neq 0: &\quad \gamma^{\nu\dagger}\gamma^0 \overset{(8.12)}{=} -\gamma^\nu\gamma^0 \overset{(8.9)}{=} \gamma^0\gamma^\nu\,. \end{aligned}$$

Also ist (8.28) wegen $\psi^\dagger\gamma^0 \overset{(8.22)}{=} \overline{\psi}$

$$-i\hbar c(\mathrm{d}_\nu - \frac{i}{\hbar}qA_\nu)\,\overline{\psi}\,\gamma^\nu - mc^2\,\overline{\psi} = 0\,, \tag{8.29}$$

was mit (8.26b) identisch ist.

8.3 Lorentzinvarianz

In Abschnitt 6.3 haben wir angegeben, wie Spinorfelder bei einer Rotation der Raum-Zeit-Koordinaten transformiert werden:

$$\psi'(x') \overset{(6.92b)}{=} D\psi(\Lambda^{-1}x) = \exp\Big\{\frac{i}{2\hbar}\Omega_{\sigma\tau}S^{\sigma\tau}\Big\}\psi(\Lambda^{-1}x) \tag{8.30a}$$

In Abschnitt 8.4 werden wir den Beweis dafür nachtragen, dass das Feld $\overline{\psi}$ durch D^{-1} transformiert wird:

$$\overline{\psi}'(x') = \overline{\psi}(\Lambda^{-1}x)D^{-1} = \overline{\psi}(\Lambda^{-1}x)\exp\Big\{-\frac{i}{2\hbar}\Omega_{\sigma\tau}S^{\sigma\tau}\Big\} \tag{8.30b}$$

Die Gruppe $\{D\}$ der Spinortransformationen $D = (8.30)$ ist eine Darstellung der Gruppe $\{\mathcal{B}\}$, der Bedeckungsgruppe der Lorentzgruppe $\{\ell\}$. Die Lie-Algebren von $\{D\}$ und $\{\mathcal{B}\}$ bzw. $\{\ell\}$ müssen also identisch sein. Damit sind die Transformationen D beziehungsweise ihre Generatoren S aber noch nicht eindeutig festgelegt. Es bleibt ein Spielraum, den wir für die Definition der Generatoren nutzen werden. Wir untersuchen die Lorentzinvarianz der Lagrangedichte (8.21) mit Spinortransformationen der Form (8.30), deren Generatoren S aber zunächst unbestimmt sind. Daraus wird sich dann eine genaue Bedingung für die Generatoren S der Spinortransformationen ergeben. Anschließend werden wir prüfen, ob die so bestimmten Generatoren auch die richtige Lie-Algebra haben.

Die Diracgleichung ist lorentzinvariant, wenn die Lagrangedichte (8.21), aus der wir sie in (8.26a) abgeleitet haben, lorentzinvariant ist. Der Term $-\frac{1}{4\mu_0}F_{\sigma\tau}F^{\sigma\tau}$ ist offensichtlich lorentzinvariant, weil alle seine Raum-Zeit-Indizes kontrahiert sind (d. h. er ist ein Lorentzskalar). Also genügt es, nur die anderen Terme zu betrachten. Die in ein gestrichenes Koordinatensystem$'$ transformierte Lagrangedichte ist

$$\mathcal{L}'(x') \overset{(8.21)}{=} \overline{\psi}'_a(x')\Big(i\hbar c\gamma^\nu_{ab}(\mathrm{d}_\nu{}' + \frac{i}{\hbar}qA'_\nu(x')) - mc^2\delta_{ab}\Big)\psi'_b(x') \ .$$

Damit uns die Flut der Indizes nicht über den Kopf wächst, schreiben wir Spinorindizes im Folgenden nur dort explizit aus, wo das wirklich erforderlich

ist.

$$\mathcal{L}'(x') \overset{(8.21)}{=} \overline{\psi}'(x')\Big(i\hbar c\gamma^\nu(\mathrm{d}_\nu' + \frac{i}{\hbar}qA'_\nu(x')) - mc^2\Big)\psi'(x')$$

$$\mathcal{L}'(\Lambda^{-1}x) = \overline{\psi}(\Lambda^{-1}x)D^{-1}\Big(i\hbar c\gamma^\nu\,\Lambda^{-1\,\mu}{}_\nu(\mathrm{d}_\mu + \frac{i}{\hbar}qA_\mu(\Lambda^{-1}x)) - mc^2\Big)D\psi(\Lambda^{-1}x)$$

$$\mathcal{L}'(x) = \overline{\psi}(x)\Big(i\hbar cD^{-1}\gamma^\nu D\,\Lambda^{-1\,\mu}{}_\nu(\mathrm{d}_\mu + \frac{i}{\hbar}qA_\mu(x)) - mc^2\Big)\psi(x) \qquad (8.31)$$

Im letzten Schritt wurde die Raum-Zeit-Variable von $\Lambda^{-1}x$ nach x umbenannt. Man beachte erstens, dass die Matrizen γ^ν bei der Transformation keinen Strich$'$ bekommen haben, da sie nicht Komponenten eines Lorentzvektors, sondern Konstanten, also Lorentzskalare sind. Man beachte zweitens, dass die Matrixoperatoren im Zeit-Orts-Raum (nämlich die Lorentztransformationen Λ^{-1}) mit den Matrixoperatoren im Spinor-Raum (nämlich den Spinortransformationen D und D^{-1}) kommutieren.

Die Lagrangedichte ist invariant unter der Rotation der Raum-Zeit-Koordinaten, wenn

$$D^{-1}\gamma^\nu D\,\Lambda^{-1\,\mu}{}_\nu = \gamma^\mu$$

$$\boxed{D^{-1}\gamma^\nu D = \Lambda^\nu{}_\mu\gamma^\mu} \qquad (8.32)$$

gilt. Wir sollten an dieser Stelle nochmal deutlich aussprechen, was wir hier eigentlich tun: Es geht nicht darum, die Lorentzinvarianz einer vorgegebenen Theorie zu beweisen; vielmehr sind wir dabei, eine lorentzinvariante Theorie zu *konstruieren*. Die Spinortransformationen D sind nicht vorgegeben, sondern wir können sie frei definieren. Wir versuchen sie so zu definieren, dass erstens die Gruppe $\{D\}$ eine Darstellung der Bedeckungsgruppe $\{\mathcal{B}\}$ der Lorentzgruppe ist, und dass die Elemente D dieser Gruppe zweitens Gleichung (8.32) erfüllen. Diese Gleichung ist ein zentraler Punkt in Diracs Spinortheorie, wir werden oft auf sie zurückkommen. Sie beschreibt, wie die Raum-Zeit-Transformationen $\Lambda^\nu{}_\mu$ und die Spinortransformationen D aufeinander abgestimmt sein müssen, damit sie im Zusammenwirken eine lorentzinvariante Theorie bilden. Die γ-Matrizen bilden die Schnittstelle, an der Transformationen im Spinorraum und im Zeit-Orts-Raum einander

beeinflussen.

Aus (8.32) wird deutlich, warum die γ-Matrizen, obwohl sie Konstanten sind, wie die Komponenten eines Lorentzvektors indiziert werden: In Abschnitt 5.6 haben wir festgestellt, dass ein Vektorfeld $A(x)$ bei einer Rotation der Raum-Zeit-Koordinaten durch

$$A^\mu(x) \xrightarrow{\ell(\Omega)} A'^\mu(x') \overset{(5.90c)}{=} \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(\Lambda^{-1}x) \tag{8.33}$$

transformiert wird. Das Feld

$$K^\mu(x) \equiv \overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) \tag{8.34}$$

wird bei einer Koordinatenrotation gemäß

$$K'^\mu(x') \overset{(8.30)}{=} \overline{\psi}(\Lambda^{-1}x)D^{-1}\gamma^\mu D\psi(\Lambda^{-1}x) \tag{8.35}$$

transformiert. Wenn (8.32) gilt, dann ist

$$K'^\mu(x') = \overline{\psi}(\Lambda^{-1}x)\Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu\psi(\Lambda^{-1}x) = \Lambda^\mu{}_\nu K^\nu(\Lambda^{-1}x). \tag{8.36}$$

Nicht γ^μ, wohl aber $\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$ ist also die μ-Komponente eines kontravarianten Lorentz-Vierervektors.

Satz: Wenn bei einer Rotation der Raum-Zeit-Koordinaten das Spinorfeld $\psi(x)$ fehlerhafterweise so transformiert wird wie ein skalares Feld, und wenn gleichzeitig die konstanten Spinormatrizen γ^μ fehlerhafterweise so transformiert werden wie die Komponenten eines Lorentzvektors, dann kompensieren sich die beiden Fehler in Produkten der Art $\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ oder $\overline{\psi}(x)\gamma^\mu A_\mu\psi(x)$ mit beliebigen Lorentzvektoren A_μ exakt, und man erhält unter dem Strich ein korrektes Ergebnis. (8.37)

Deshalb wird auch die Methode des Ziehens von Indizes mithilfe des metrischen Tensors auf die γ-Matrizen übertragen:

$$\overline{\psi}\gamma_\mu\psi = g_{\mu\nu}\overline{\psi}\gamma^\nu\psi \quad \Longrightarrow \quad \gamma_\mu = g_{\mu\nu}\gamma^\nu \tag{8.38}$$

Um passende Generatoren $S^{\sigma\tau}$ zu konstruieren, schreiben wir Gleichung (8.32) in infinitesimaler Form:

$$(\mathbb{1} - \frac{i}{2\hbar}\,\omega_{\sigma\tau}\,S^{\sigma\tau})\gamma^{\nu}(\mathbb{1} + \frac{i}{2\hbar}\,\omega_{\sigma\tau}\,S^{\sigma\tau}) = (g^{\nu}{}_{\mu} + \frac{i}{2\hbar}\,\omega_{\sigma\tau}\,B^{\sigma\tau\nu}{}_{\mu})\gamma^{\mu} \tag{8.39}$$

Bei Vernachlässigung von Summanden $\mathcal{O}(\omega^2)$ muss gelten:

$$\begin{aligned}\gamma^{\nu} + \frac{i}{2\hbar}\,\omega_{\sigma\tau}\Big(\gamma^{\nu}S^{\sigma\tau} - S^{\sigma\tau}\gamma^{\nu}\Big) &= \gamma^{\nu} + \frac{i}{2\hbar}\,\omega_{\sigma\tau}B^{\sigma\tau\nu}{}_{\mu}\gamma^{\mu}\\ [\gamma^{\nu}, S^{\sigma\tau}] &= B^{\sigma\tau\nu}{}_{\mu}\gamma^{\mu}\end{aligned} \tag{8.40}$$

Die Nebenrechnung in Anhang A.6 ergibt:

$$[\gamma^{\nu}, S^{\sigma\tau}] \overset{(A.43)}{=} \Big[\gamma^{\nu}, \frac{i\hbar}{4}[\gamma^{\sigma}, \gamma^{\tau}]\Big] \tag{8.41}$$

Die Lagrangedichte (8.21) und damit auch die Diracgleichung (8.26a) sind demnach lorentzinvariant, wenn erstens die Generatoren der Spinortransformationen die Form

$$\boxed{S^{\sigma\tau} = \frac{i\hbar}{4}[\gamma^{\sigma}, \gamma^{\tau}]}\,, \tag{8.42}$$

haben, und wenn zweitens die so definierten Spinortransformationen die Lie-Algebra der Lorentzgruppe haben. Der

Satz: Eine Gruppe von Transformationen mit den sechs Generatoren

$$S^{\sigma\tau} \equiv \frac{i\hbar}{4}[\gamma^{\sigma}, \gamma^{\tau}]$$

hat die Lie-Algebra der Lorentzgruppe, wenn die vier n-dimensionalen Matrizen $\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$ den Relationen

$$\{\gamma^{\sigma}, \gamma^{\tau}\} \equiv \gamma^{\sigma}\gamma^{\tau} + \gamma^{\tau}\gamma^{\sigma} \overset{(8.9)}{=} 2g^{\sigma\tau}\mathbb{1}$$

genügen. (8.43)

besagt, dass das sogar unabhängig von der Dimension der Spinoren der Fall ist. Bewiesen wird der Satz dadurch, dass man die Lie-Algebra direkt berechnet (Die Nebenrechnungen findet man in Anhang A.7):

$$\begin{aligned}[S^{\alpha\beta}, S^{\eta\delta}] &= -\frac{\hbar^2}{16}\Big((\gamma^\alpha\gamma^\beta - \gamma^\beta\gamma^\alpha)(\gamma^\eta\gamma^\delta - \gamma^\delta\gamma^\eta) - \\ &\qquad - (\gamma^\eta\gamma^\delta - \gamma^\delta\gamma^\eta)(\gamma^\alpha\gamma^\beta - \gamma^\beta\gamma^\alpha)\Big) \\ &\overset{(A.44)}{=} i\hbar\Big(g^{\beta\eta}S^{\alpha\delta} - g^{\beta\delta}S^{\alpha\eta} - g^{\alpha\eta}S^{\beta\delta} + g^{\alpha\delta}S^{\beta\eta}\Big) \qquad (8.44)\end{aligned}$$

Diese Lie-Algebra ist tatsächlich identisch mit der Lie-Algebra (5.24b) der Lorentzgruppe. Die Gruppe $\{D\}$ der Transformationen

$$D = \exp\Big\{\frac{i}{2\hbar}\,\Omega_{\sigma\tau}\,S^{\sigma\tau}\Big\} \qquad (8.45)$$

mit Generatoren gemäß (8.43) ist eine treue Darstellung der Lorentzgruppe, wenn ihre Parameter-Mannigfaltigkeit identisch mit der Parameter-Mannigfaltigkeit der Lorentzgruppe ist. Wenn man die Parameter-Mannigfaltigkeit der Gruppe $\{D\}$ identisch mit der Parameter-Mannigfaltigkeit der Gruppe $\{\mathcal{B}\}$ – der universellen Bedeckungsgruppe der Lorentzgruppe – wählt, dann ist $\{D\}$ eine treue Darstellung von $\{\mathcal{B}\}$. Denn die Lorentzgruppe $\{\ell\}$ und ihre Bedeckungsgruppe $\{\mathcal{B}\}$ haben die gleiche Lie-Algebra, und unterscheiden sich nur durch ihre Parameter-Mannigfaltigkeit.

8.4 Wahrscheinlichkeitsdichte

In Analogie zur nichtrelativistischen Quantentheorie hätte man das Produkt $\psi^\dagger\psi$ als Wahrscheinlichkeitsdichte erwartet, tatsächlich wird aber in der Diractheorie das Produkt $\overline{\psi}\,\psi$ als Wahrscheinlichkeitsdichte definiert. Das hat folgenden Grund:

Es ist unabdingbar, dass die Zustandsfunktionen der Quantentheorie normierbar sind. Das bedeutet, dass es eine reelle Zahl N (eventuell multipliziert mit einer physikalischen Einheit) geben muss mit der Eigenschaft

$$\frac{1}{N}\int_{\Omega} \mathrm{d}^3x\ \overline{\psi}(x)\psi(x) = 1 \quad \text{mit } N \in \mathbb{R}\ ,\ -\infty < N < +\infty\ . \tag{8.46}$$

Im Fall des Diracfeldes ist N dimensionslos, weil wir ja $[\psi] = \text{Volumen}^{-1/2}$ festgelegt haben. Wir werden jetzt zeigen, dass diese Normierungsbedingung mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $\overline{\psi}\psi$ immer erfüllbar ist, jedoch in bestimmten Fällen nicht erfüllbar wäre, wenn man $\psi^\dagger\psi$ anstelle von $\overline{\psi}\psi$ als Wahrscheinlichkeitsdichte definieren würde.

In Abschnitt 8.3 haben wir eine Darstellung der Gruppe $\{\mathcal{B}\}$ auf der Basis von Dirac-Spinoren konstruiert. Die Elemente der Darstellung sind

$$D(\Omega) = \exp\left\{\frac{i}{2\hbar}\Omega_{\sigma\tau}S^{\sigma\tau}\right\} \tag{8.47}$$
$$\text{mit}\quad S^{\sigma\tau} \overset{(8.43)}{=} \frac{i\hbar}{4}[\gamma^\sigma, \gamma^\tau]\ .$$

Die zu $S^{\sigma\tau}$ adjungierten (also transponierten konjugiert-komplexen) Generatoren sind

$$\begin{aligned} S^{\sigma\tau\dagger} &= -\frac{i\hbar}{4}(\gamma^{\tau\dagger}\gamma^{\sigma\dagger} - \gamma^{\sigma\dagger}\gamma^{\tau\dagger}) = \\ &\overset{(8.12)}{=} -\frac{i\hbar}{4}(g^{\beta\tau}\gamma^\beta g^{\alpha\sigma}\gamma^\alpha - g^{\alpha\sigma}\gamma^\alpha g^{\beta\tau}\gamma^\beta) = \\ &= -g^{\alpha\sigma}g^{\beta\tau}S^{\beta\alpha} = +g^{\alpha\sigma}g^{\beta\tau}S^{\alpha\beta} = \\ &= \begin{cases} +S^{\sigma\tau} \text{ falls } (\sigma=0\,,\,\tau=0) \text{ oder } (\sigma\neq 0\,,\,\tau\neq 0) \\ -S^{\sigma\tau} \text{ falls } (\sigma=0\,,\,\tau\neq 0) \text{ oder } (\sigma\neq 0\,,\,\tau=0)\ . \end{cases} \end{aligned} \tag{8.48}$$

Die Generatoren $S^{\sigma\tau}$ der Spinorrotationen sind bei den Indexkombinationen eines Lorentzboosts nicht selbstadjungiert, und demzufolge ist die Darstellung D der Boosts nicht unitär. Das ist nicht überraschend. Die Lorentzgruppe und ihre Bedeckungsgruppe $\{\mathcal{B}\}$ haben entsprechend Satz (5.56) keine endlich-dimensionalen unitären Darstellungen, weil ihre Parameter-Mannigfaltigkeiten nicht kompakt sind. Um die Auswirkungen dieser Tatsache auf die Wahrscheinlichkeitsdichte der Dirac-Theorie zu klären, untersuchen wir zunächst eine infinitesimale Transformation des Produktes

$\psi^\dagger\psi$, wobei wir Summanden $\mathcal{O}(\omega^2)$ vernachlässigen dürfen:

$$\begin{aligned}\psi'^\dagger\,\psi' &= (D_{\text{INF}}\psi)^\dagger\,(D_{\text{INF}}\psi) = \psi^\dagger\,D_{\text{INF}}^\dagger\,D_{\text{INF}}\,\psi\;= \\ &\overset{(8.48)}{=} \psi^\dagger\Big(1-\frac{i}{2\hbar}\,\omega_{\sigma\tau}\,g^{\alpha\sigma}g^{\beta\tau}S^{\alpha\beta}\Big)\Big(1+\frac{i}{2\hbar}\,\omega_{\sigma\tau}\,S^{\sigma\tau}\Big)\psi\;= \\ &= \psi^\dagger\Big(1-\frac{i}{2\hbar}\,\omega_{\sigma\tau}(\,g^{\alpha\sigma}g^{\beta\tau}S^{\alpha\beta}-\,S^{\sigma\tau})\Big)\psi \qquad (8.49)\end{aligned}$$

$$\begin{cases}=\psi^\dagger\psi \text{ falls } (\sigma=0\,,\,\tau=0) \text{ oder } (\sigma\neq0\,,\,\tau\neq0)\\ \neq\psi^\dagger\psi \text{ falls } (\sigma=0\,,\,\tau\neq0) \text{ oder } (\sigma\neq0\,,\,\tau=0)\end{cases} \qquad (8.50)$$

Jetzt bringt man durch die Definition $\overline{\psi}\overset{(8.22)}{=}\psi^\dagger\gamma^0$ die Matrix γ^0 ins Spiel, die mit $S^{\sigma\tau}$ folgendermaßen kommutiert:

$$\begin{aligned}S^{\alpha\beta}\gamma^0 &\overset{(8.43)}{=} \frac{i\hbar}{4}(\gamma^\alpha\gamma^\beta-\gamma^\beta\gamma^\alpha)\gamma^0 \\ &\overset{(8.9)}{=} \begin{cases}+\gamma^0S^{\alpha\beta} \text{ falls } (\alpha=0\,,\,\beta=0) \text{ oder } (\alpha\neq0\,,\,\beta\neq0)\\ -\gamma^0S^{\alpha\beta} \text{ falls } (\alpha=0\,,\,\beta\neq0) \text{ oder } (\alpha\neq0\,,\,\beta=0)\end{cases} \\ &= \gamma^0g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}S^{\mu\nu} \qquad (8.51)\end{aligned}$$

Dies sind genau die gleichen Fallunterscheidungen wie in (8.48). Also kompensieren sich die Vorzeichenwechsel bei der Transformation von $\bar\psi\psi$, die analog zu (8.50) durchgeführt wird:

$$\begin{aligned}\overline{\psi}\,'\psi' &= \psi'^\dagger\gamma^0\psi' = \psi^\dagger\,D_{\text{INF}}^\dagger\,\gamma^0D_{\text{INF}}\,\psi\;= \\ &\overset{(8.48)}{=} \psi^\dagger\Big(1-\frac{i}{2\hbar}\,\omega_{\sigma\tau}\,g^{\alpha\sigma}g^{\beta\tau}S^{\alpha\beta}\Big)\gamma^0\Big(1+\frac{i}{2\hbar}\,\omega_{\sigma\tau}\,S^{\sigma\tau}\Big)\psi\;= \\ &= \psi^\dagger\gamma^0\Big(1-\frac{i}{2\hbar}\,\omega_{\sigma\tau}(\underbrace{g^{\alpha\sigma}g^{\mu\alpha}g^{\beta\tau}g^{\nu\beta}S^{\mu\nu}}_{S^{\sigma\tau}}-S^{\sigma\tau})\Big)\psi \\ &= \overline{\psi}\,\psi \qquad (8.52)\end{aligned}$$

$\overline{\psi}$, aber nicht $\psi^\dagger$, wird also mit D^{-1} transformiert:

$$\overline{\psi}\,' = \overline{\psi}\,D^{-1} \qquad\qquad \psi'^\dagger = \psi^\dagger D^\dagger \neq \psi^\dagger D^{-1} \qquad (8.53)$$

Weil $\overline{\psi}\psi$ lorentzinvariant ist, ist die Bedingung (8.46) in jedem Koordinatensystem erfüllbar. Es gibt aber keine Zahl $\widetilde{N} \in \mathbb{R}$, die die Gleichung

$$\frac{1}{N}\int\limits_{\Omega} \mathrm{d}^3x\ \overline{\psi}\psi = \int\limits_{\Omega} \mathrm{d}^3x\, \psi^\dagger \frac{\gamma^0}{N}\psi = \int\limits_{\Omega} \mathrm{d}^3x\, \psi^\dagger \frac{1}{\widetilde{N}}\psi \tag{8.54}$$

erfüllt. Deshalb ist das Diracfeld nur normierbar, wenn $\overline{\psi}\psi$, aber nicht $\psi^\dagger\psi$, als Wahrscheinlichkeitsdichte definiert wird.

8.5 Das freie Feld

Ein Dirac-Feld ist „frei“, wenn es nicht mit irgendeinem anderen Feld wechselwirkt. Jegliche Wechselwirkung des Diracfeldes wird durch Eichfelder vermittelt. Indem die Eichfelder abgeschaltet werden, erhält die Gleichung des freien Diracfeldes die einfache Form

$$(i\hbar c\gamma^\mu \mathrm{d}_\mu - mc^2)\psi(x) \overset{(8.5)}{=} 0\ . \tag{8.55}$$

Ausgehend von (7.19) beginnen wir mit dem allgemeinen Lösungsansatz

$$\psi(x) = \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{1}{\sqrt{N\Omega}}\Big(a_{\boldsymbol{k}} u^{\boldsymbol{k}} \exp\{-ikx\} + b^*_{\boldsymbol{k}} v^{\boldsymbol{k}} \exp\{+ikx\}\Big)\ . \tag{8.56}$$

Hier wurden die Viererspinoren

$$u^{\boldsymbol{k}} \equiv \begin{pmatrix} u_1^{\boldsymbol{k}} \\ u_2^{\boldsymbol{k}} \\ u_3^{\boldsymbol{k}} \\ u_4^{\boldsymbol{k}} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v^{\boldsymbol{k}} \equiv \begin{pmatrix} v_1^{\boldsymbol{k}} \\ v_2^{\boldsymbol{k}} \\ v_3^{\boldsymbol{k}} \\ v_4^{\boldsymbol{k}} \end{pmatrix} \tag{8.57}$$

aus den Fourier-Koeffizienten ausgeklammert. Denn $\psi(x)$ ist als Lösung der Diracgleichung ein Viererspinor. Die Fourier-Koeffizienten sollen aber Spinor-Skalare bleiben. Man beachte, dass in den Produkten $a_{\boldsymbol{k}}u^{\boldsymbol{k}}$ und $b^*_{\boldsymbol{k}}v^{\boldsymbol{k}}$ *nicht* automatisch über die Wellenzahlen $\boldsymbol{k}$ summiert wird. Nur über Raumzeitindizes und Spinorindizes wird automatisch summiert. Weil die $\boldsymbol{k}$ keine Raumzeit-Indizes sind, hat ihre Hoch- oder Tiefstellung auch nichts

mit kontra- oder kovariant zu tun, wir haben sie einfach dorthin gestellt, wo gerade Platz war.

Im Folgenden werden wir diejenigen Lösungen der klassischen (nicht quantisierten) Diracgleichung genauer betrachten, in denen nur ein Fourier-Koeffizient $a_{\boldsymbol{k}} = 1$ oder $b^*_{\boldsymbol{k}} = 1$ ist, und sämtliche anderen Fourier-Koeffizienten Null sind. Sie haben die Form

$$\left.\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{1}{\sqrt{N\Omega}}\, u^{\boldsymbol{k}} \exp\{-ikx\} \\ \psi(x) &= \frac{1}{\sqrt{N\Omega}}\, v^{\boldsymbol{k}} \exp\{+ikx\} \end{aligned}\right\} \text{ mit } \omega_{\boldsymbol{k}} > 0\,. \tag{8.58a}$$

Die adjungierten Lösungen $\overline{\psi}(x) = \psi^\dagger(x)\gamma^0$ sind

$$\begin{aligned} \overline{\psi}(x) &= \frac{1}{\sqrt{N\Omega}}\, \bar{u}^{\boldsymbol{k}} \exp\{+ikx\} \\ \overline{\psi}(x) &= \frac{1}{\sqrt{N\Omega}}\, \bar{v}^{\boldsymbol{k}} \exp\{-ikx\} \\ \text{mit} \quad \bar{u}^{\boldsymbol{k}} &\equiv u^{\boldsymbol{k}\dagger}\gamma^0 \quad , \quad \bar{v}^{\boldsymbol{k}} \equiv v^{\boldsymbol{k}\dagger}\gamma^0\,. \end{aligned} \tag{8.58b}$$

Würde man diese Lösungen als Zustandsfunktionen der Punktteilchen-Quantenmechanik interpretieren, dann wäre ihre Energie

$$i\hbar\,\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = E\psi = i\hbar(\mp i\omega_{\boldsymbol{k}})\psi = \pm\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}\psi\,. \tag{8.59}$$

Die Lösungen $\exp\{+ikx\}$ mit negativer Frequenz hätten negative Energie. Um zu verhindern dass das System unter Energieabgabe in einen Zustand unendlich negativer Energie übergeht, erfand Dirac seine Löcher-Theorie (siehe z. B. [33, Kap. 5]). Wir brauchen uns darum nicht zu kümmern. Denn wir werden sehen, dass die Lösungen mit negativer Energie bei geeigneter Quantisierung des Dirac-Feldes verschwinden. Das quantisierte Diracfeld hat ausschließlich Lösungen mit positiver Energie (oder Energie 0).

Einsetzen von (8.58a) in (8.55) ergibt mit dem Impuls-Vierervektor $p \equiv \hbar k$

$$\begin{aligned} (+c\gamma^\mu p_\mu - mc^2)u^{\boldsymbol{k}} &= 0 \\ (-c\gamma^\mu p_\mu - mc^2)v^{\boldsymbol{k}} &= 0\,. \end{aligned} \tag{8.60}$$

Falls $m \neq 0$ ist gibt es ein Koordinatensystem, in dem das Feld ruht ($\boldsymbol{p} = \hbar\boldsymbol{k} = 0$). Mit dem invarianten Wellenzahlquadrat und dem invarianten Impulsquadrat

$$k_\nu k^\nu = \left(\frac{\omega_{\boldsymbol{k}}}{c}\right)^2 - \boldsymbol{k}^2 = \frac{m^2c^2}{\hbar^2} \tag{8.61}$$

$$\hbar k_\nu \hbar k^\nu = p_\nu p^\nu = \left(\frac{\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}}{c}\right)^2 - \boldsymbol{p}^2 = m^2c^2 \tag{8.62}$$

wird (8.60) im Ruhesystem des Feldes zu

$$(c\gamma^0 mc - mc^2)u^{\mathbf{0}} \overset{(8.15a)}{=} \begin{pmatrix} -\mathbb{1} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & -\mathbb{1} \end{pmatrix} mc^2 u^{\mathbf{0}} =$$

$$= mc^2 \begin{pmatrix} -u_1^{\mathbf{0}} + u_3^{\mathbf{0}} \\ -u_2^{\mathbf{0}} + u_4^{\mathbf{0}} \\ +u_1^{\mathbf{0}} - u_3^{\mathbf{0}} \\ +u_2^{\mathbf{0}} - u_4^{\mathbf{0}} \end{pmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} u_3^{\mathbf{0}} = u_1^{\mathbf{0}} \\ u_4^{\mathbf{0}} = u_2^{\mathbf{0}} \end{cases} \tag{8.63a}$$

$$\text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} -\mathbb{1} & -\mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & -\mathbb{1} \end{pmatrix} mc^2 v^{\mathbf{0}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} v_3^{\mathbf{0}} = -v_1^{\mathbf{0}} \\ v_4^{\mathbf{0}} = -v_2^{\mathbf{0}} \end{cases}. \tag{8.63b}$$

Man beachte, dass wir entsprechend (7.18) in beiden Gleichungen $p^0 = mc^2 > 0$ eingesetzt haben. Wegen (8.63) hat ein Dirac-Spinor im Ruhesystem nur zwei unabhängige Komponenten, und es gibt je zwei linear unabhängige Spinoren $u^{\mathbf{0}}$ und $v^{\mathbf{0}}$, die wir als ${}^1u^{\mathbf{0}}$, ${}^2u^{\mathbf{0}}$, ${}^1v^{\mathbf{0}}$, ${}^2v^{\mathbf{0}}$ bezeichnen:

$${}^r u^{\mathbf{0}} = \begin{pmatrix} {}^r u_1^{\mathbf{0}} \\ {}^r u_2^{\mathbf{0}} \\ {}^r u_1^{\mathbf{0}} \\ {}^r u_2^{\mathbf{0}} \end{pmatrix} \qquad {}^r v^{\mathbf{0}} = \begin{pmatrix} {}^r v_1^{\mathbf{0}} \\ {}^r v_2^{\mathbf{0}} \\ -{}^r v_1^{\mathbf{0}} \\ -{}^r v_2^{\mathbf{0}} \end{pmatrix} \qquad r = 1, 2 \tag{8.64}$$

Im Ruhesystem hat die Diracgleichung die vier Lösungen

$$\left.\begin{aligned}\psi(x) &= \frac{1}{\sqrt{N\Omega}}\,{}^r u^{\mathbf{0}} \exp\Big\{-i\,\frac{mc^2}{\hbar}\,t\Big\}\\ \psi(x) &= \frac{1}{\sqrt{N\Omega}}\,{}^r v^{\mathbf{0}} \exp\Big\{+i\,\frac{mc^2}{\hbar}\,t\Big\}\end{aligned}\right\}\ \text{mit } r=1,2\,. \tag{8.65}$$

Das Feld hat Wellenzahl $\boldsymbol{k}=0$ bzw. unendliche Wellenlänge, und schwingt mit der durch seine Ruhemasse vorgegebenen Frequenz $mc^2/\hbar > 0$.

Die Lösungen mit von Null verschiedenem Impuls $\boldsymbol{p}=\hbar\boldsymbol{k}\neq 0$ findet man dadurch, dass man das Feld (8.65) aus einem relativ zum Feld bewegten Koordinatensystem betrachtet. Im bewegten System hat die freie Dirac-Gleichung die vier Lösungen

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{N\Omega}}\,{}^r u^{\boldsymbol{k}} e^{-ikx} = \frac{1}{\sqrt{N\Omega}}\,D\,{}^r u^{\mathbf{0}} e^{-ikx} \tag{8.66a}$$

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{N\Omega}}\,{}^r v^{\boldsymbol{k}} e^{+ikx} = \frac{1}{\sqrt{N\Omega}}\,D\,{}^r v^{\mathbf{0}} e^{+ikx} \tag{8.66b}$$

$$\text{mit } r=1,2\,.$$

Die Transformation

$$D \overset{(11.5)}{=} \exp\Big\{\frac{i}{\hbar}\Big(\Theta_j\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\sigma^j & 0\\ 0 & \sigma^j\end{pmatrix} + \eta_j\frac{i\hbar}{2}\begin{pmatrix}\sigma^j & 0\\ 0 & -\sigma^j\end{pmatrix}\Big)\Big\}$$

kann für einen reinen Boost (Rapidität $\boldsymbol{\eta}\neq 0$, räumliche Drehung $\boldsymbol{\theta}=0$) in folgender Form geschrieben werden (Nebenrechnung in Anhang A.9):

$$D \overset{(A.50)}{=} \begin{pmatrix}\mathbb{1}\cosh\left(\frac{\eta}{2}\right) - \frac{\eta_j}{\eta}\sigma^j\sinh\left(\frac{\eta}{2}\right) & 0\\ 0 & \mathbb{1}\cosh\left(\frac{\eta}{2}\right) + \frac{\eta_j}{\eta}\sigma^j\sinh\left(\frac{\eta}{2}\right)\end{pmatrix} \tag{8.67}$$

Alternativ kann man diese Transformation auch als Funktion der drei Impulskomponenten p_j des Feldes und seiner Energie E im bewegten Koordinatensystem beschreiben (Nebenrechnung in Anhang A.9):

$$D \overset{(A.57)}{=} \sqrt{\frac{1}{2mc^2(E+mc^2)}}\begin{pmatrix}(E+mc^2)\mathbb{1} + cp_j\sigma^j & 0\\ 0 & (E+mc^2)\mathbb{1} - cp_j\sigma^j\end{pmatrix} \tag{8.68}$$

Weil die vierkomponentige Diracgleichung im Grenzfall vernachlässigbar kleiner Ruhemasse m in die beiden zweikomponentigen Weyl-Gleichungen zerfällt (siehe Abschnitt 8.9), und weil man in der Regel vermeiden möchte dass dann die Normierung nochmals neu definiert werden muss, wählt man bereits bei der Diracgleichung die *Zweier*spinoren

$$\begin{pmatrix} {}^{r}u_1^{\mathbf{0}} \\ {}^{r}u_2^{\mathbf{0}} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} {}^{r}v_1^{\mathbf{0}} \\ {}^{r}v_2^{\mathbf{0}} \end{pmatrix} \quad \text{mit } r = 1, 2 \tag{8.69}$$

als orthogonale Vektoren und gibt ihnen per Definition die Dimension $\sqrt{\text{Energie}}$:

$$\begin{pmatrix} {}^{r}u_1^{\mathbf{0}*} & {}^{r}u_2^{\mathbf{0}*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^{s}u_1^{\mathbf{0}} \\ {}^{s}u_2^{\mathbf{0}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{r}v_1^{\mathbf{0}*} & {}^{r}v_2^{\mathbf{0}*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^{s}v_1^{\mathbf{0}} \\ {}^{s}v_2^{\mathbf{0}} \end{pmatrix} \equiv mc^2\, \delta_{rs} \tag{8.70}$$

$$\text{mit } r = 1, 2 \quad s = 1, 2$$

Mit (8.64) gilt für die adjungierten *Vierer*spinoren

$$\left.\begin{aligned} {}^{r}\bar{u}^{\mathbf{0}} &= {}^{r}u^{\mathbf{0}+} \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} = {}^{r}u^{\mathbf{0}+} \\ {}^{r}\bar{v}^{\mathbf{0}} &= {}^{r}v^{\mathbf{0}+} \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} = -\,{}^{r}v^{\mathbf{0}+} \end{aligned}\right\} \quad \text{mit } r = 1, 2\ . \tag{8.71}$$

Bei einer Drehung des Koordinatensystems werden ${}^{r}\bar{u}^{\boldsymbol{k}}$ und ${}^{r}\bar{v}^{\boldsymbol{k}}$ genau wie $\bar{\psi}$ durch D^{-1} transformiert. Deshalb sind die Produkte

$${}^{r}\bar{u}^{\boldsymbol{k}}\, {}^{s}u^{\boldsymbol{k}} = {}^{r}\bar{u}^{\mathbf{0}} D^{-1} D\, {}^{s}u^{\mathbf{0}} = 2mc^2\, \delta_{rs} \tag{8.72a}$$

$${}^{r}\bar{v}^{\boldsymbol{k}}\, {}^{s}v^{\boldsymbol{k}} = {}^{r}\bar{v}^{\mathbf{0}} D^{-1} D\, {}^{s}v^{\mathbf{0}} = -2mc^2\, \delta_{rs} \tag{8.72b}$$

$${}^{r}\bar{u}^{\boldsymbol{k}}\, {}^{s}v^{\boldsymbol{k}} = {}^{r}u_1^{\mathbf{0}*}\, {}^{s}v_1^{\mathbf{0}} + {}^{r}u_2^{\mathbf{0}*}\, {}^{s}v_2^{\mathbf{0}} - {}^{r}u_1^{\mathbf{0}*}\, {}^{s}v_1^{\mathbf{0}} - {}^{r}u_2^{\mathbf{0}*}\, {}^{s}v_2^{\mathbf{0}} = 0 \tag{8.72c}$$

$${}^{r}\bar{v}^{\boldsymbol{k}}\, {}^{s}u^{\boldsymbol{k}} = -{}^{r}v_1^{\mathbf{0}*}\, {}^{s}u_1^{\mathbf{0}} - {}^{r}v_2^{\mathbf{0}*}\, {}^{s}u_2^{\mathbf{0}} + {}^{r}v_1^{\mathbf{0}*}\, {}^{s}u_1^{\mathbf{0}} + {}^{r}v_2^{\mathbf{0}*}\, {}^{s}u_2^{\mathbf{0}} = 0 \tag{8.72d}$$

lorentzinvariant.

Mit der Transformation (8.68) und mit den Pauli-Matrizen (8.14) lassen sich die Spinoren $u^{\boldsymbol{k}}, v^{\boldsymbol{k}}$ mit Wellenzahl $\boldsymbol{k}$ direkt angeben:

$$
{}^{r}u^{\boldsymbol{k}} = D\,{}^{r}u^{\mathbf{0}} = \sqrt{\frac{1}{2mc^2(E+mc^2)}}\cdot
$$
$$
\cdot\begin{pmatrix}
(E+mc^2+cp_3)\,{}^{r}u_1^{\mathbf{0}} + (cp_1 - icp_2)\,{}^{r}u_2^{\mathbf{0}} \\
(cp_1+icp_2)\,{}^{r}u_1^{\mathbf{0}} + (E+mc^2-cp_3)\,{}^{r}u_2^{\mathbf{0}} \\
(E+mc^2-cp_3)\,{}^{r}u_1^{\mathbf{0}} + (-cp_1+icp_2)\,{}^{r}u_2^{\mathbf{0}} \\
(-cp_1-icp_2)\,{}^{r}u_1^{\mathbf{0}} + (E+mc^2+cp_3)\,{}^{r}u_2^{\mathbf{0}}
\end{pmatrix} \tag{8.73a}
$$

$$
{}^{r}v^{\boldsymbol{k}} = D\,{}^{r}v^{\mathbf{0}} = \sqrt{\frac{1}{2mc^2(E+mc^2)}}\cdot
$$
$$
\cdot\begin{pmatrix}
(E+mc^2+cp_3)\,{}^{r}v_1^{\mathbf{0}} + (cp_1 - icp_2)\,{}^{r}v_2^{\mathbf{0}} \\
(cp_1+icp_2)\,{}^{r}v_1^{\mathbf{0}} + (E+mc^2-cp_3)\,{}^{r}v_2^{\mathbf{0}} \\
(-E-mc^2+cp_3)\,{}^{r}v_1^{\mathbf{0}} + (cp_1-icp_2)\,{}^{r}v_2^{\mathbf{0}} \\
(cp_1+icp_2)\,{}^{r}v_1^{\mathbf{0}} + (-E-mc^2-cp_3)\,{}^{r}v_2^{\mathbf{0}}
\end{pmatrix} \tag{8.73b}
$$

$$
r = 1,2 \quad , \quad D = (8.68) \text{ mit } \begin{cases} E = \hbar\omega_{\boldsymbol{k}} > 0 \\ p_j = \hbar k_j\ . \end{cases}
$$

Im Folgenden tun wir uns leichter, wenn wir für die Spinoren mit $\boldsymbol{k} = 0$ unter Beachtung der Bedingungen (8.64) und (8.70) folgende explizite Form festlegen:

$$
{}^{1}u^{0} \equiv \sqrt{mc^2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad {}^{2}u^{0} \equiv \sqrt{mc^2}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}
$$
$$
{}^{1}v^{0} \equiv \sqrt{mc^2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix} \qquad {}^{2}v^{0} \equiv \sqrt{mc^2}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix} \tag{8.74}
$$

Damit wird

$$
{}^{1}u^{\boldsymbol{k}} = \sqrt{\frac{1}{2(E+mc^2)}}\begin{pmatrix}E+mc^2+cp_3\\cp_1+icp_2\\E+mc^2-cp_3\\-cp_1-icp_2\end{pmatrix} \tag{8.75a}
$$

$$ {}^{2}u^{\boldsymbol{k}} = \sqrt{\frac{1}{2(E+mc^2)}} \begin{pmatrix} cp_1 - icp_2 \\ E + mc^2 - cp_3 \\ -cp_1 + icp_2 \\ E + mc^2 + cp_3 \end{pmatrix} \tag{8.75b} $$

$$ {}^{1}v^{\boldsymbol{k}} = \sqrt{\frac{1}{2(E+mc^2)}} \begin{pmatrix} E + mc^2 + cp_3 \\ cp_1 + icp_2 \\ -E - mc^2 + cp_3 \\ cp_1 + icp_2 \end{pmatrix} \tag{8.75c} $$

$$ {}^{2}v^{\boldsymbol{k}} = \sqrt{\frac{1}{2(E+mc^2)}} \begin{pmatrix} cp_1 - icp_2 \\ E + mc^2 - cp_3 \\ cp_1 - icp_2 \\ -E - mc^2 - cp_3 \end{pmatrix} \tag{8.75d} $$

$$ \text{with } E = \hbar\omega_{\boldsymbol{k}} > 0 \ , \ p_j = \hbar k_j = -p^j = -\hbar k^j \ . $$

Mithilfe von (8.75) werden in Anhang A.10 die folgenden Spinor-Relationen berechnet, die wir bei der Quantisierung des Feldes benötigen werden. Für beliebiges $\boldsymbol{k}$ gilt:

$$ \sum_r \left({}^{r}u_a^{\boldsymbol{k}} \, {}^{r}u_b^{\boldsymbol{k}\dagger} + {}^{r}v_a^{\text{-}\boldsymbol{k}} \, {}^{r}v_b^{\text{-}\boldsymbol{k}\dagger} \right) \overset{(A.61)}{=} 2E \, \delta_{ab} = 2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}} \, \delta_{ab} \tag{8.76a} $$

$$ {}^{r}u^{\boldsymbol{k}\dagger} \, {}^{s}u^{\boldsymbol{k}} \overset{(A.62)}{=} {}^{r}v^{\boldsymbol{k}\dagger} \, {}^{s}v^{\boldsymbol{k}} \overset{(A.62)}{=} 2E \, \delta_{rs} = 2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}} \, \delta_{rs} \tag{8.76b} $$

$$ {}^{r}u^{\text{-}\boldsymbol{k}\dagger} \, {}^{s}v^{\boldsymbol{k}} \overset{(A.63)}{=} {}^{r}v^{\text{-}\boldsymbol{k}\dagger} \, {}^{s}u^{\boldsymbol{k}} \overset{(A.63)}{=} 0 \tag{8.76c} $$

In Anhang A.11 wird gezeigt:

$$ \sum_{r=1}^{2} {}^{r}u^{\boldsymbol{k}} \, {}^{r}\bar{u}^{\boldsymbol{k}} \overset{(A.67a)}{=} c\gamma^\mu p_\mu + mc^2 \tag{8.77a} $$

$$ \sum_{r=1}^{2} {}^{r}v^{\boldsymbol{k}} \, {}^{r}\bar{v}^{\boldsymbol{k}} \overset{(A.67b)}{=} c\gamma^\mu p_\mu - mc^2 \tag{8.77b} $$

Dies ist eine 4×4 Matrix im Spinorraum mit $mc^2 \equiv \mathbb{1}mc^2$. Schließlich werden in Anhang A.27 noch die Relationen

$$ {}^r\bar{u}^{\boldsymbol{k}}\gamma^\rho\, {}^s u^{\boldsymbol{k}} \overset{(A.205)}{=} {}^r\bar{v}^{\boldsymbol{k}}\gamma^\rho\, {}^s v^{\boldsymbol{k}} \overset{(A.205)}{=} 2c\hbar k^\rho \delta_{rs} \tag{8.78a} $$

$$ {}^r\bar{u}^{\boldsymbol{k}}\gamma^\rho\, {}^s v^{\boldsymbol{k}} \overset{(A.205)}{\neq} 0 \quad , \quad {}^r\bar{v}^{\boldsymbol{k}}\gamma^\rho\, {}^s u^{\boldsymbol{k}} \overset{(A.205)}{\neq} 0 \tag{8.78b} $$

bewiesen.

Die Wahrscheinlichkeitsdichte der vier Lösungen (8.66) ist

$$ \bar{\psi}\psi = \frac{1}{N\Omega} \exp\{+ikx\}\, {}^r\bar{u}^{\boldsymbol{k}}\, {}^r u^{\boldsymbol{k}} \exp\{-ikx\} = \frac{2mc^2}{N\Omega} \tag{8.79a} $$

$$ \bar{\psi}\psi = \frac{1}{N\Omega} \exp\{-ikx\}\, {}^r\bar{v}^{\boldsymbol{k}}\, {}^r v^{\boldsymbol{k}} \exp\{+ikx\} = \frac{-2mc^2}{N\Omega} \ . \tag{8.79b} $$

Mit der Definition

$$ N \equiv +2E = 2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}} \tag{8.80} $$

erhält man eine lorentzinvariante Wahrscheinlichkeitsdichte, denn das Produkt $E\Omega$ ist lorentzinvariant, wie am Ende von Abschnitt 7 diskutiert. Ursache der ungewöhnlichen negativen Wahrscheinlichkeitsdichte in (8.79b) ist die ebenso ungewöhnliche Bildung von $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ mithilfe der Dirac-Matrix γ^0. In Übereinstimmung mit den Anmerkungen zu (7.1) und (7.2) ist auch bei negativer Wahrscheinlichkeitsdichte die Wahrscheinlichkeit $W(V)$ dafür, das Feld im Volumen V vorzufinden, immer ≥ 0 und ≤ 1, wie es sein muss:

$$ 0 \leq W(V) = \frac{\int\limits_V \mathrm{d}^3x\ \bar{\psi}(t,\boldsymbol{x})\psi(t,\boldsymbol{x})}{\int\limits_\Omega \mathrm{d}^3x\ \bar{\psi}(t,\boldsymbol{x})\psi(t,\boldsymbol{x})} \leq +1 \tag{8.81} $$

Die Nebenbedingungen (8.63), die die Freiheitsgrade der Dirac-Spinoren auf 2 einschränken, gelten auch in den geboosteten Spinoren weiter. Wenn ein Feld die Spin-Quantenzahl s hat, so ist die Anzahl seiner Spin-Freiheitsgrade gleich $2s+1$. Also beschreiben Dirac-Spinoren, obwohl sie 4 Komponenten haben, Felder mit Spin $s = 1/2$, nicht etwa $s = 3/2$.

$$ \boxed{\text{Dirac-Felder haben den Spin } s = 1/2\ .} \tag{8.82} $$

Wir haben uns in diesem Abschnitt auf Lösungen der Diracgleichung konzentriert, in denen ein einziger Fourier-Koeffizient der allgemeinen Lösung (8.56) gleich 1 ist, und alle andern Fourier-Koeffizienten 0 sind. Jetzt wollen wir noch die allgemeine Lösung angeben. Weil es von jedem Spinor ${}^r u^{\boldsymbol{k}}$ und ${}^r v^{\boldsymbol{k}}$ zwei linear unabhängige Varianten $r = 1, 2$ gibt, gibt es auch je zwei Fourier-Koeffizienten ${}^r a_{\boldsymbol{k}}$ und ${}^r b^*_{\boldsymbol{k}}$ mit $r = 1, 2$. Außerdem setzen wir die Normierung (8.80) ein:

$$\psi(x) \overset{(8.56)}{=} \sum_{\boldsymbol{k},r} \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}\Omega}} \Big({}^r a_{\boldsymbol{k}}\, {}^r u^{\boldsymbol{k}} \exp\{-ikx\} + {}^r b^*_{\boldsymbol{k}}\, {}^r v^{\boldsymbol{k}} \exp\{+ikx\} \Big) \tag{8.83a}$$

$$\overline{\psi}(x) = \sum_{\boldsymbol{k},r} \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}\Omega}} \Big({}^r a^*_{\boldsymbol{k}}\, {}^r \bar{u}^{\boldsymbol{k}} \exp\{+ikx\} + {}^r b_{\boldsymbol{k}}\, {}^r \bar{v}^{\boldsymbol{k}} \exp\{-ikx\} \Big) \tag{8.83b}$$

Die zu $\psi(x)$ und $\overline{\psi}(x)$ kanonisch konjugierten Impulsdichten sind

$$\pi_\psi \overset{(4.40)}{\equiv} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{c\, \partial(\mathrm{d}_0 \psi)} \overset{(8.24)}{=} i\hbar\, \overline{\psi}\gamma^0 \tag{8.84a}$$

$$\pi_{\overline{\psi}} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{c\, \partial(\mathrm{d}_0 \overline{\psi})} \overset{(8.24)}{=} 0\ . \tag{8.84b}$$

Auf die eigentümliche Asymmetrie zwischen (8.84a) und (8.84b) werden wir in (8.99)ff eingehen. Die kanonisch konjugierte Impulsdichte des Dirac-Feldes hat die Dimension Wirkung $\cdot$ Volumen$^{-1/2}$. Man beachte, dass die zum Spaltenspinor ψ kanonisch konjugierte Impulsdichte ein Zeilenspinor ist. Einsetzen von (8.83) ergibt die kanonisch konjugierte Impulsdichte

$$\pi(x) \overset{(8.84a)}{=} i\hbar\psi^\dagger = \sum_{\boldsymbol{k},r} \frac{i\hbar}{\sqrt{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}\Omega}} \Big({}^r a^*_{\boldsymbol{k}}\, {}^r u^{\dagger \boldsymbol{k}} \exp\{+ikx\} + {}^r b_{\boldsymbol{k}}\, {}^r v^{\dagger \boldsymbol{k}} \exp\{-ikx\} \Big). \tag{8.85}$$

(8.83) und (8.85) werden in Kapitel 16 den Ausgangspunkt für die Quantisierung des Diracfeldes bilden.

8.6 Erhaltungsgrößen

Die Komponenten des Energiedichte-Stress-Tensors (ES-Tensors) des Diracfeldes sind

$$\begin{aligned}\mathcal{T}^{\rho\sigma} &\overset{(4.32)}{=} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\rho\psi)}\,\mathrm{d}^\sigma\psi + (\mathrm{d}^\sigma\overline{\psi})\,\underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\rho\overline{\psi})}}_{0} - g^{\rho\sigma}\mathcal{L} \\ &\overset{(8.24)}{=} \overline{\psi}\,i\hbar c\gamma^\rho\mathrm{d}^\sigma\psi - g^{\rho\sigma}\,\overline{\psi}\left(i\hbar c\gamma^\nu\mathrm{d}_\nu - mc^2\right)\psi \\ &\overset{(8.5)}{=} i\hbar c\,\overline{\psi}\gamma^\rho\mathrm{d}^\sigma\psi\ . \end{aligned} \tag{8.86}$$

Die Dimension des Tensors ist Energie/Volumen. In der ersten Zeile haben wir die Faktoren so angeordnet, dass jeder Summand eine Zahl, aber keine Spinor-Matrix ist. In Vorbereitung auf die Untersuchung anderer Felder legen wir diese allgemeine Regel[1] fest:

> Alle Produkte von Feldern und ihren Ableitungen müssen in der Lagrangedichte $\mathcal{L}$ und in den Komponenten $\mathcal{T}^{\rho\sigma}$ des ES-Tensors so angeordnet werden, dass alle Terme Skalare in der Raum-Zeit, im Spinor-Raum, im schwachen Isospin-Raum, und im Farb-Raum sind. (8.87)

Speziell ist die Energiedichte (Hamiltondichte) des Diracfeldes

$$\mathcal{H} \overset{(4.34)}{=} \mathcal{T}^{00} = i\hbar c\,\overline{\psi}\gamma^0\mathrm{d}_0\psi\ , \tag{8.88}$$

und seine Physikalische Impulsdichte

$$\mathcal{P}^j \overset{(4.35)}{=} \frac{1}{c}\,\mathcal{T}^{0j} = i\hbar\,\overline{\psi}\gamma^0\mathrm{d}^j\psi\ . \tag{8.89}$$

Durch Einsetzen der Felder (8.83) kann man den ES-Tensor noch etwas detaillierter evaluieren:

[1] Der schwache Isospin wird in Kapitel 29 eingeführt. Farbe wird in Kapitel 28 eingeführt.

$$\mathcal{T}^{\rho\sigma} = i\hbar c \sum_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{k},s,r} \frac{ik^\sigma}{2\Omega\hbar\sqrt{\omega_{\boldsymbol{f}}\omega_{\boldsymbol{k}}}} \Big(- {}^s a^*_{\boldsymbol{f}}\, {}^r a_{\boldsymbol{k}}\, {}^s\bar{u}^{\boldsymbol{f}} \gamma^\rho\, {}^r u^{\boldsymbol{k}} \exp\{+i(f-k)x\} +$$
$$+ {}^s a^*_{\boldsymbol{f}}\, {}^r b^*_{\boldsymbol{k}}\, {}^s\bar{u}^{\boldsymbol{f}} \gamma^\rho\, {}^r v^{\boldsymbol{k}} \exp\{+i(f+k)x\} - {}^s b_{\boldsymbol{f}}\, {}^r a_{\boldsymbol{k}}\, {}^s\bar{v}^{\boldsymbol{f}} \gamma^\rho\, {}^r u^{\boldsymbol{k}} \exp\{-i(f+k)x\} +$$
$$+ {}^s b_{\boldsymbol{f}}\, {}^r b^*_{\boldsymbol{k}}\, {}^s\bar{v}^{\boldsymbol{f}} \gamma^\rho\, {}^r v^{\boldsymbol{k}} \exp\{-i(f-k)x\} \Big) \tag{8.90}$$

Dies Resultat wollen wir jetzt im dreidimensionalen Ortsraum über das Normierungsvolumen Ω integrieren. Dabei wollen wir in allen Termen Nutzen aus dem Kronecker-Symbol

$$\frac{1}{\Omega}\int_\Omega \mathrm{d}^3x\, \exp\{\pm i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{f})\boldsymbol{x}\} \overset{(7.12)}{=} \delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{f}} \tag{8.91}$$

ziehen. Weil die Summationen symmetrisch über alle positiven und negativen Wellenzahlen $\boldsymbol{k}$ und $\boldsymbol{f}$ laufen, kann man z. B. schreiben:

$$\sum_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{k},s,r} {}^s a^*_{\boldsymbol{f}}\, {}^r b^*_{\boldsymbol{k}}\, {}^s\bar{u}^{\boldsymbol{f}} \gamma^\rho\, {}^r v^{\boldsymbol{k}} \frac{1}{\Omega}\int_\Omega \mathrm{d}^3x\, \exp\{+i(f+k)x\} =$$
$$= \sum_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{k},s,r} {}^s a^*_{\boldsymbol{f}}\, {}^r b^*_{-\boldsymbol{k}}\, {}^s\bar{u}^{\boldsymbol{f}} \gamma^\rho\, {}^r v^{-\boldsymbol{k}} \exp\{+i(f^0+k^0)x_0\} \cdot$$
$$\cdot \underbrace{\frac{1}{\Omega}\int_\Omega \mathrm{d}^3x\, \exp\{+i(f^j-k^j)x_j\}}_{\delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{f}}}$$

Auf diese Weise erhält man

$$T^{\rho\sigma} \equiv \int_\Omega \mathrm{d}^3x\, \mathcal{T}^{\rho\sigma} = -\hbar c \sum_{\boldsymbol{k},s,r} \frac{k^\sigma}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}} \Big($$
$$- {}^s a^*_{\boldsymbol{k}}\, {}^r a_{\boldsymbol{k}}\, {}^s\bar{u}^{\boldsymbol{k}} \gamma^\rho\, {}^r u^{\boldsymbol{k}} + {}^s a^*_{-\boldsymbol{k}}\, {}^r b^*_{\boldsymbol{k}}\, {}^s\bar{u}^{-\boldsymbol{k}} \gamma^\rho\, {}^r v^{\boldsymbol{k}} \exp\{+i2k^0x_0\}$$
$$- {}^s b_{-\boldsymbol{k}}\, {}^r a_{\boldsymbol{k}}\, {}^s\bar{v}^{-\boldsymbol{k}} \gamma^\rho\, {}^r u^{\boldsymbol{k}} \exp\{-i2k^0x_0\} + {}^s b_{\boldsymbol{k}}\, {}^r b^*_{\boldsymbol{k}}\, {}^s\bar{v}^{\boldsymbol{k}} \gamma^\rho\, {}^r v^{\boldsymbol{k}} \Big) . \tag{8.92}$$

Hier haben wir unsere Konvention (7.18) angewandt, nach der die Null-Komponente der Wellenzahl freier Felder immer ≥ 0 gewählt wird. Die Terme

mit den Exponentialfunktionen beschreiben sehr schnelle Oszillationen. Ihre Frequenz hängt von der Energie des Feldes ab. Selbst für relativ leichte Teilchen mit Ruheenergie 1 MeV haben diese Oszillationen die hohe Frequenz

$$2k^0 c > \frac{2\,\mathrm{MeV}}{\hbar} \approx 3 \cdot 10^{21}\mathrm{Hz}\ . \tag{8.93}$$

Schrödinger [34], der sie entdeckte (theoretisch, diese Oszillationen wurden niemals experimentell beobachtet), nannte sie „Zitterbewegung“. Der Mittelwert dieser Terme ist Null, und wegen der hohen Frequenz können sie unbesorgt vernachlässigt werden, obwohl ihre Koeffizienten nach (8.78b) von Null verschieden sind. Damit vereinfacht sich der ES-Tensor zu

$$T^{\rho\sigma} \equiv \int_\Omega \mathrm{d}^3x\, \mathcal{T}^{\rho\sigma} = \sum_{\boldsymbol{k},s} \frac{c^2\hbar^2 k^\rho k^\sigma}{\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}} \Big({}^s a^*_{\boldsymbol{k}}\, {}^s a_{\boldsymbol{k}} - {}^s b_{\boldsymbol{k}}\, {}^s b^*_{\boldsymbol{k}} \Big)\ . \tag{8.94}$$

Insbesondere ist die Hamilton-Funktion (Energie) gleich

$$H \equiv T^{00} = \sum_{\boldsymbol{k},s} \hbar\omega_{\boldsymbol{k}} \Big({}^s a^*_{\boldsymbol{k}}\, {}^s a_{\boldsymbol{k}} - {}^s b_{\boldsymbol{k}}\, {}^s b^*_{\boldsymbol{k}} \Big)\ , \tag{8.95}$$

und der Physikalische Impuls des Feldes ist

$$P^j \equiv \frac{1}{c}\, T^{0j} = \sum_{\boldsymbol{k},s} \hbar k^j \Big({}^s a^*_{\boldsymbol{k}}\, {}^s a_{\boldsymbol{k}} - {}^s b_{\boldsymbol{k}}\, {}^s b^*_{\boldsymbol{k}} \Big)\ . \tag{8.96}$$

Die Ladungsstromdichte

$$j^\nu \overset{(4.87)}{=} qc\,\overline{\psi}\gamma^\nu\psi \tag{8.97}$$

des Diracfeldes haben wir bereits in Abschnitt 4.4 berechnet. Für sie gilt die Kontinuitätsgleichung

$$c\mathrm{d}_0 \underbrace{q\overline{\psi}\gamma^0\psi}_{\text{Ladungsdichte}\,=\,q\psi^\dagger\psi} \overset{(4.88b)}{=} -\mathrm{d}_k q\overline{\psi}c\gamma^k\psi\ . \tag{8.98}$$

Die Ladungsdichte unterscheidet sich von der lorentzinvarianten Wahr-

scheinlichkeitsdichte $\overline{\psi}\psi$ des Diracfeldes durch den konstanten Faktor q und zusätzlich durch den Faktor γ^0, der die Spinorkomponenten 1 und 2 mit den Spinorkomponenten 3 und 4 vertauscht. Die Ladung ist eine Erhaltungsgröße, nicht jedoch die Ladungsdichte. Denn bei Lorentztransformationen ändert sich die Größe des Volumens, in dem sich die unveränderte Ladung befindet.

Die Asymmetrie $\pi_\psi \overset{(8.84a)}{\neq} 0$, $\pi_{\overline{\psi}} \overset{(8.84b)}{=} 0$ der kanonisch konjugierten Impulsdichten wird von einigen Autoren als irritierend empfunden. Sie definieren deshalb die Lagrangedichte

$$\mathcal{L}' = -\frac{i\hbar c}{2}(\mathrm{d}_\nu\overline{\psi})\gamma^\nu\psi + \frac{i\hbar c}{2}\overline{\psi}\gamma^\nu\mathrm{d}_\nu\psi - \overline{\psi}mc^2\psi\ , \tag{8.99}$$

in der die Felder $\overline{\psi}$ und ψ symmetrischer auftreten. Diese Lagrangedichte führt zu den gleichen Feldgleichungen wie $\mathcal{L} = (8.24)$:

$$0 = \mathrm{d}_\nu\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial(\mathrm{d}_\nu\psi)} - \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\psi} = i\hbar c\mathrm{d}_\nu\overline{\psi}\gamma^\nu + \overline{\psi}mc^2 \tag{8.100a}$$

$$0 = \mathrm{d}_\nu\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial(\mathrm{d}_\nu\overline{\psi})} - \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\overline{\psi}} = -i\hbar c\gamma^\nu\mathrm{d}_\nu\psi + mc^2\psi \tag{8.100b}$$

Aus der Lagrangedichte (8.99) erhält man die kanonisch konjugierten Impulsdichten

$$\pi'_\psi \equiv \frac{\partial\mathcal{L}'}{c\,\partial(\mathrm{d}_0\psi)} = \frac{i\hbar}{2}\,\overline{\psi}\gamma^0 \tag{8.101a}$$

$$\pi'_{\overline{\psi}} \equiv \frac{\partial\mathcal{L}'}{c\,\partial(\mathrm{d}_0\,\overline{\psi})} = -\frac{i\hbar}{2}\gamma^0\psi\ , \tag{8.101b}$$

die wesentlich symmetrischer als (8.84) sind. Aber natürlich sind die Lagrangedichten $\mathcal{L}$ und $\mathcal{L}'$ nur dann vollständig gleichwertig, wenn sie auch zum gleichen ES-Tensor führen. Mit $\mathcal{L}' = (8.99)$ erhält man folgenden ES-Tensor:

$$\mathcal{T}'^{\rho\sigma} \overset{(8.86)}{=} \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\mathrm{d}_\rho \psi)}\,\mathrm{d}^\sigma\psi + (\mathrm{d}^\sigma\overline{\psi})\,\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\mathrm{d}_\rho\overline{\psi})} - g^{\rho\sigma}\mathcal{L}'$$
$$\overset{(8.99)}{=} \frac{i\hbar c}{2}\Big(\overline{\psi}\gamma^\rho\,\mathrm{d}^\sigma\psi - (\mathrm{d}^\sigma\overline{\psi})\,\gamma^\rho\psi\Big) - g^{\rho\sigma}\mathcal{L}' \tag{8.102}$$

Man findet insbesondere die Energiedichte

$$\mathcal{H}' = \frac{i\hbar}{2}\,\overline{\psi}\gamma^0\,c\mathrm{d}_0\psi - (c\mathrm{d}_0\,\overline{\psi})\,\frac{i\hbar}{2}\gamma^0\psi - \mathcal{L}'$$
$$= \frac{i\hbar c}{2}\,(\mathrm{d}_j\overline{\psi})\gamma^j\psi - \frac{i\hbar c}{2}\,\overline{\psi}\gamma^j\mathrm{d}_j\psi + \overline{\psi}mc^2\psi\ , \tag{8.103}$$

die auch als

$$\mathcal{H}' = (8.103) - \underbrace{(8.100\mathrm{a})}_{0}\cdot\frac{\psi}{2} - \frac{\overline{\psi}}{2}\cdot\underbrace{(8.100\mathrm{b})}_{0}$$
$$= -\frac{i\hbar c}{2}\,(\mathrm{d}_0\overline{\psi})\gamma^0\psi + \frac{i\hbar c}{2}\,\overline{\psi}\gamma^0\mathrm{d}_0\psi \tag{8.104}$$

geschrieben werden kann. Als physikalische Impulsdichte ergibt sich

$$\mathcal{P}'^j \equiv \frac{i\hbar}{2}\,\overline{\psi}\gamma^0\mathrm{d}^j\psi - (\mathrm{d}^j\,\overline{\psi})\frac{i\hbar}{2}\gamma^0\psi\ . \tag{8.105}$$

Bei der genaueren Untersuchung in Abschnitt 16.2 werden wir feststellen, dass tatsächlich (8.104) = (8.88) und (8.105) = (8.89) ist. Man kann also wahlweise $\mathcal{L} =$ (8.24) oder $\mathcal{L}' =$ (8.99) verwenden.

Zum Abschluss dieses Abschnitts noch eine Anmerkung zur Allgemeinen Relativitätstheorie (ART): Die Feldgleichung

$$R_{\mu\nu}(x) - \frac{R(x)}{2}\,g_{\mu\nu}(x) + \Lambda\,g_{\mu\nu}(x) = -\frac{8\pi G}{c^4}\,\mathcal{T}_{\mu\nu}(x) \tag{8.106}$$

beschreibt, wie die Geometrie der vierdimensionalen Raum-Zeit durch ihren Inhalt an Energie und Impuls deformiert wird. Der Tensor $R_{\mu\nu}$ und seine Kontraktion R beschreiben die Krümmung der Raum-Zeit am Punkt x. Λ ist die kosmologische Konstante, und G ist Newton's Gravitationskonstante. $\mathcal{T}_{\mu\nu}$ ist der ES-Tensor sämtlicher Felder am Raum-Zeit Punkt x, mit Ausnahme

des metrischen Feldes $g_{\mu\nu}$.

In Abschnitt 2.1 wurde gezeigt, dass der metrische Tensor der ART symmetrisch ist

$$g_{\mu\nu} \overset{(2.5)}{=} g_{\nu\mu} \ , \tag{8.107}$$

und deshalb nur 10 seiner Komponenten unabhängig sind. Folglich muss nach (8.106) $\mathcal{T}_{\mu\nu}$ ebenfalls symmetrisch sein. Aber weder $\mathcal{T} =$ (8.86) noch $\mathcal{T}' =$ (8.102) sind symmetrisch, d. h. für beide Formen gilt $\mathcal{T}^{\rho\sigma} \neq \mathcal{T}^{\sigma\rho}$ und $\mathcal{T}'^{\rho\sigma} \neq \mathcal{T}'^{\sigma\rho}$.

Zunächst scheint hier ein ernsthaftes Problem aufzutauchen. Es wird aber in Anhang A.12 gezeigt, dass man für beliebige Vektor- und Spinorfelder symmetrische ES-Tensoren konstruieren kann, die zu den gleichen Kontinuitätsgleichungen führen wie die Form (8.86). Im Fall des Diracfeldes ist der symmetrische ES-Tensor

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{T}}^{\rho\sigma} \overset{(A.86)}{=} \frac{i\hbar c}{4}\Big(&- (\mathrm{d}^\rho\overline{\psi})\gamma^\sigma\psi - (\mathrm{d}^\sigma\overline{\psi})\gamma^\rho\psi + \overline{\psi}\gamma^\rho\mathrm{d}^\sigma\psi + \overline{\psi}\gamma^\sigma\mathrm{d}^\rho\psi\Big) - \\ &- g^{\rho\sigma}\ \underbrace{\overline{\psi}(i\hbar c\gamma^\nu\mathrm{d}_\nu - mc^2)\psi}_{\mathcal{L}} \ .\end{aligned} \tag{8.108}$$

Um nicht aus der Reihe der meisten Lehrbücher der Quantenfeldtheorie auszuscheren, behalten wir zwar im Hinterkopf dass der symmetrische ES-Tensor (8.108) existiert (und auch benutzt werden muss wenn man Berechnungen im Rahmen der ART durchführen möchte), werden aber in diesem Buch durchwegs die asymmetrische Form (8.86) verwenden.

8.7 Die Standardform der Dirac-Matrizen

In (8.15) haben wir uns für die chirale Form der Dirac-Matrizen entschieden, und werden auch im gesamten Buch bei dieser Wahl bleiben. Weil die „Standardform“ der Matrizen aber in der Literatur weit verbreitet ist, sollte der Leser sie ebenfalls kennen.

Wir definieren die vierdimensionale unitäre Spinor-Transformation

$$U \equiv \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix} \qquad U^+ = \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix} = U^{-1} \,, \tag{8.109}$$

in der $\mathbb{1}$ die zweidimensionale Einheitsmatrix ist. Die vierdimensionale Einheitsmatrix $\mathbb{1} = U^\dagger U$ setzen wir zweimal in die Lagrangedichte des Dirac-Feldes ein:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\overset{(8.21)}{=} \overline{\psi}(x)\Big(i\hbar c\gamma^\nu(\mathrm{d}_\nu + \frac{i}{\hbar}qA_\nu(x)) - mc^2\Big)\psi(x) \\ &= \overline{\psi}(x)U^\dagger\Big(i\hbar cU\gamma^\nu U^\dagger(\mathrm{d}_\nu + \frac{i}{\hbar}qA_\nu(x)) - mc^2\Big)U\psi(x) \end{aligned} \tag{8.110}$$

Die transformierten γ-Matrizen sind

$$\begin{aligned} U\gamma^0U^\dagger &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbb{1} & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \\ U\gamma^jU^\dagger &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbb{1} & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{8.111}$$

Dies ist die „Standardform“ der Dirac-Matrizen. Sie unterscheidet sich von der chiralen Form nur durch die Schreibweise von γ^0, die drei Matrizen γ^j sind in beiden Formen identisch. Die Spinoren haben in der Standardform die Gestalt

$$U\psi = \sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L+R \\ -L+R \end{pmatrix} \,. \tag{8.112}$$

Die Standardform eignet sich besonders gut zur Untersuchung des nichtrelativistischen Grenzfalls. Das wird z. B. in [33, Kapitel 1.4] beschrieben. Ihr Nachteil ist, dass man den Spinoren (8.112) nicht mehr auf Anhieb ansieht, dass sie sich nur durch eine unitäre Transformation von der direkten Summe eines links- und eines rechtshändigen Weyl-Spinors unterscheiden, und dass deshalb – wie wir in Abschnitt (8.9) besprechen werden – die vierdimensionale Dirac-Darstellung hochenergetischer Felder in die zweidimensionalen Weyl-Darstellungen reduziert werden kann.

8.8 Eine Anmerkung zum Spin des Elektrons

Der Spin $\hbar/2$ des Elektrons wurde in den frühen zwanziger Jahren des vergangenen Jahrhunderts durch Analyse der optischen Absorptionsspektren von Atomen entdeckt. Eine überraschende Verdopplung fast aller Spektrallinien (das Phänomen wurde als anormaler Zeeman-Effekt bezeichnet) konnte als Wirkung eines zusätzlichen Freiheitsgrades des Elektrons erklärt werden, nämlich als die beiden möglichen Projektionen seines „Spins“ auf eine Achse des Ortsraums. Pauli erweiterte die Schrödinger-Gleichung zu einer nicht-relativistischen Gleichung für zwei-komponentige Spinoren (eine Komponente für jede mögliche Projektion des Spins auf jene Achse), und konnte damit die meisten spektroskopischen Beobachtungen zufriedenstellend reproduzieren. Dennoch erschien der Spin als eine überraschende und „unnötige“ Komplikation. Warum war das Elektron nicht einfach ein elementares Punktteilchen, das durch seine Masse und Ladung vollständig charakterisiert wird?

In der Einleitung zur Veröffentlichung [35] seiner Gleichung (8.5) schrieb Dirac: “The question remains as to why Nature should have chosen this particular model for the electron instead of being satisfied with the point-charge. One would like to find some incompleteness in the previous methods of applying quantum mechanics to the point-charge electron such that, when removed, the whole of the duplexity phenomena follow without arbitrary assumptions. In the present paper it is shown that this is the case, the incompleteness of the previous theories lying in their disagreement with relativity”.

In der Tat verlangte Dirac lediglich, dass (8.3) eine korrekte, Lorentz-invariante Gleichung sein muss, und linearisierte sie in der Form (8.4). Wie in den vorangegangenen Abschnitten gezeigt resultieren die Diracgleichung und die Form der γ-Matrizen aus diesem Ansatz ohne irgend welche weiteren kunstvollen Annahmen. Und in [33, chapter 1.4] wird gezeigt, dass die Pauli-Gleichung nichts anderes ist als der nicht-relativistische Grenzfall der Diracgleichung (8.5) (wobei zwei Spinorkomponenten in diesem Grenzfall vernachlässigt werden können). Also ist das Elektron mit Spin $\hbar/2$ wirklich die einfachste Konstruktion, welche die Natur für eine Punktladung wählen konnte, die mit der Speziellen Relativitätstheorie kompatibel sein soll.

Eine Warnung mag zum Schluss nicht überflüssig sein. Man darf das zuweilen verwendete Bild des Elektrons als ein rotierendes Kügelchen nicht wortwörtlich verstehen, weil dies Modell in mehrerer Hinsicht unvereinbar mit den Beobachtungstatsachen wäre: In diesem Modell müsste die Geschwindigkeit des Elektrons am Äquator weitaus höher als die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum sein, wenn man nicht einen Radius des Kügelchens annimmt der viel größer ist als mit den experimentellen Beobachtungen vereinbar. Dagegen betrachtet Dirac das Elektron als wirklich mathematisches Punktteilchen, das überhaupt keine Ausdehnung hat. Außerdem bewirkt die Bahnbewegung eines Teilchens mit Ladung q, Masse m, und Bahndrehimpuls $\boldsymbol{L}$ ein magnetisches Moment der Größe

$$\boldsymbol{\mu}_L = g_L \frac{q}{2m} \boldsymbol{L} \quad \text{mit } g_L = 1 \,, \tag{8.113a}$$

während das magnetische Moment eines Elektrons aufgrund seines Spins in guter Näherung

$$\boldsymbol{\mu}_S = g_S \frac{(-e)}{2m} \boldsymbol{S} \quad \text{mit } g_S = 2 \text{ und } |\boldsymbol{S}| = \hbar/2 \tag{8.113b}$$

ist. In Diracs Theorie ergibt sich der Faktor $g_S = 2$ – wie in [33, chapter 1.4] gezeigt wird – sehr einfach und ohne irgend welche zusätzlichen Annahmen. (In Kapitel 26 werden wir quantenfeldtheoretische Korrekturen dieses Faktors berechnen.) Überraschenderweise lassen sich die g-Faktoren mit dem Modell des rotierenden Kügelchens durchaus in Einklang bringen, denn der beobachtete Faktor $g_S \approx 2$ kann in diesem Modell als relativistisch-kinematischer Effekt erklärt werden [36]. Jedoch betont Dirac in seiner Publikation [35] dass nur die Summe von Bahndrehimpuls und Spin eine Erhaltungsgröße ist, aber weder der Bahndrehimpuls noch der Spin des Elektrons für sich allein. Das zeigt wieder, dass das Modell eines rotierenden Kügelchens in die Irre führen würde, weil in diesem Fall (z. B. im Fall eines rotierenden Planeten der um die Sonne kreist) sowohl der Bahndrehimpuls als auch der Spin jeweils für sich allein Erhaltungsgrößen wären.

Deshalb muss der Spin als ziemlich abstraktes mathematisches Konzept interpretiert werden, das kein Analogon in der klassischen Physik hat, und

nicht in das anschauliche Modell des rotierenden Kügelchens gezwängt werden kann.

8.9 Weylgleichungen

Die Dirac-Gleichung $(i\hbar c\gamma^\mu \mathrm{d}_\mu - mc^2)\psi \overset{(8.5)}{=} 0$ lässt sich durch Einsetzen der γ-Matrizen (8.15) folgendermaßen schreiben:

$$(i\hbar c \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}_0 + i\hbar c \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}_k - mc^2)\psi = \begin{pmatrix} -mc^2 & i\hbar c(\mathrm{d}_0 + \sigma^k \mathrm{d}_k) \\ i\hbar c(\mathrm{d}_0 - \sigma^k \mathrm{d}_k) & -mc^2 \end{pmatrix} \psi = 0 \tag{8.114}$$

Wenn $m = 0$ ist, oder wenn die Energie des Feldes so hoch ist, dass seine Ruhenergie mc^2 vernachlässigt werden kann, dann entkoppeln die Komponenten der vierdimensionalen Diracgleichung (8.114) in die zweidimensionalen *Weyl-Gleichungen*:

$$i\hbar c(\mathrm{d}_0 - \sigma^k \mathrm{d}_k) \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{8.115a}$$

$$i\hbar c(\mathrm{d}_0 + \sigma^k \mathrm{d}_k) \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{8.115b}$$

Hier haben wir die Notation von Abschnitt 6.2.1 wieder aufgenommen, in dem wir zweidimensionale Spinoren als Basen von links- und rechtshändigen Darstellungen der Bedeckungsgruppe $\{\mathcal{B}\}$ der Lorentzgruppe verwendet haben. Im folgenden Abschnitt werden wir Lösungen der Weyl-Gleichungen (8.115) diskutieren, und den Begriff ihrer Helizität, die auch als Chiralität oder Händigkeit bezeichnet wird, klären.

8.10 Das freie Weyl-Feld

Weil die vierkomponentige Diracgleichung bei vernachlässigbar kleiner Ruhemasse (und erst recht bei Ruhemasse Null) in eine zweikomponentige

rechtshändige und in eine zweikomponentige linkshändige Weyl-Gleichung zerfällt, lassen sich auch die Lösungen der Weyl-Gleichungen dadurch konstruieren, dass man von den Lösungen der Diracgleichung ausgeht, und dann den Grenzübergang $m \to 0$ ausführt.

Wir schränken unsere Überlegungen jetzt wieder auf Lösungen $\psi(x)$ ein, bei denen nur ein einziger Fourier-Koeffizient in (8.83) gleich 1 ist, und alle anderen Fourier-Koeffizienten 0 sind, und wählen die Spinoren (8.75) als Ausgangspunkt unserer Überlegungen. Wir führen einen so starken passiven Boost in Richtung der *negativen* x^3-Achse aus, dass $E \approx c^2 p^2 \gg mc^2$ gilt. Es ist $p^3 > 0$, $p_3 < 0$ und $E + cp_3 \approx 0$, $E - cp_3 \approx 2E$. Dadurch erhält man anstelle von (8.75) folgende Spinoren:

$$
\begin{aligned}
{}^1u^{\boldsymbol{k}} &= \sqrt{\frac{1}{2E}} \begin{pmatrix} \mathcal{O}(mc^2) \\ 0 \\ 2E \\ 0 \end{pmatrix} & {}^2u^{\boldsymbol{k}} &= \sqrt{\frac{1}{2E}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2E \\ 0 \\ \mathcal{O}(mc^2) \end{pmatrix} \\
{}^1v^{\boldsymbol{k}} &= \sqrt{\frac{1}{2E}} \begin{pmatrix} \mathcal{O}(mc^2) \\ 0 \\ -2E \\ 0 \end{pmatrix} & {}^2v^{\boldsymbol{k}} &= \sqrt{\frac{1}{2E}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2E \\ 0 \\ \mathcal{O}(mc^2) \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{8.116}
$$

Im Grenzfall $m \to 0$ kann man aus den beiden oberen Komponenten dieser Spinoren linkshändige Weyl-Spinoren ableiten, und aus den beiden unteren Komponenten rechtshändige Weyl-Spinoren. Wir kennzeichnen linkshändige Spinoren mit dem Index L, rechtshändige mit dem Index R. Den zusätzlichen Index $>$, der $p^3 = \hbar k^3 > 0$ bedeutet, werden wir nur kurzzeitig beibehalten:

$$
\begin{aligned}
{}^1u^{\boldsymbol{k}R>} &= \sqrt{2E} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & {}^2u^{\boldsymbol{k}L>} &= \sqrt{2E} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
{}^1v^{\boldsymbol{k}R>} &= \sqrt{2E} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} & {}^2v^{\boldsymbol{k}L>} &= \sqrt{2E} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .
\end{aligned}
\tag{8.117}
$$

Spinoren $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, die triviale Lösungen der Weyl-Gleichungen sind, wurden von vornherein gestrichen.

Bei einem sehr starken passiven Boost in Richtung der *positiven* x^3-Achse ist $p^3 < 0$, $p_3 > 0$, und $E + cp_3 \approx 2E$, $E - cp_3 \approx 0$. Dadurch erhält man anstelle von (8.75) die Spinoren

$$
\begin{aligned}
{}^1u^{\boldsymbol{k}} &= \sqrt{\frac{1}{2E}} \begin{pmatrix} 2E \\ 0 \\ \mathcal{O}(mc^2) \\ 0 \end{pmatrix} & {}^2u^{\boldsymbol{k}} &= \sqrt{\frac{1}{2E}} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{O}(mc^2) \\ 0 \\ 2E \end{pmatrix} \\
{}^1v^{\boldsymbol{k}} &= \sqrt{\frac{1}{2E}} \begin{pmatrix} 2E \\ 0 \\ \mathcal{O}(mc^2) \\ 0 \end{pmatrix} & {}^2v^{\boldsymbol{k}} &= \sqrt{\frac{1}{2E}} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{O}(mc^2) \\ 0 \\ -2E \end{pmatrix} .
\end{aligned}
\tag{8.118}
$$

Im Grenzfall $m \to 0$ kann man aus diesen Dirac-Spinoren folgende nichttrivialen Weyl-Spinoren extrahieren:

$$
\begin{aligned}
{}^1u^{\boldsymbol{k}L<} &= \sqrt{2E} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & {}^2u^{\boldsymbol{k}R<} &= \sqrt{2E} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
{}^1v^{\boldsymbol{k}L<} &= \sqrt{2E} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & {}^2v^{\boldsymbol{k}R<} &= \sqrt{2E} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{8.119}
$$

Beim Diracfeld waren in (8.73a) bzw. (8.74) die Spinoren vom Typ v linear unabhängig von den Spinoren des Typs u. Bei den Weyl-Spinoren ist das nicht mehr der Fall. Sowohl in (8.117) als auch in (8.119) sind die v-Spinoren linear abhängig von (oder sogar identisch mit) den u-Spinoren. Deshalb behalten wir nur die Spinoren des Typs u bei.

Die Helizität eines zweikomponentigen Spinors ist per Definition der Eigenwert des Operators

$$
\text{Helizitätsoperator} \equiv Z \equiv -\frac{1}{2} \frac{p_j}{p} \sigma^j \tag{8.120}
$$

definiert. Wenn sich das Feld in Richtung der positiven x^3-Achse bewegt ist $p^3 > 0$, und der Helizitätsoperator enthält den Faktor $p_3/p = -1$. Die Helizität der Spinoren ist in diesem Fall

$$Z^1 u^{\boldsymbol{k}R>} = +\frac{1}{2}\sigma^3 \sqrt{2E}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = +\frac{1}{2}{}^1u^{\boldsymbol{k}R>} \tag{8.121a}$$

$$Z^2 u^{\boldsymbol{k}L>} = +\frac{1}{2}\sigma^3 \sqrt{2E}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}{}^2u^{\boldsymbol{k}L>} \ . \tag{8.121b}$$

Wenn sich das Feld in Richtung der negativen x^3-Achse bewegt, enthält wegen $p^3 < 0$ der Helizitätsoperator den Faktor $p_3/p = +1$, und die Spinoren haben in diesem Fall die Helizität

$$Z^1 u^{\boldsymbol{k}L<} = -\frac{1}{2}\sigma^3 \sqrt{2E}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}{}^1u^{\boldsymbol{k}L<} \tag{8.121c}$$

$$Z^2 u^{\boldsymbol{k}R<} = -\frac{1}{2}\sigma^3 \sqrt{2E}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = +\frac{1}{2}{}^2u^{\boldsymbol{k}R<} \ . \tag{8.121d}$$

Alle vier Spinoren sind Eigenvektoren des Helizitätsoperators. Die R-Spinoren haben positive Helizität, die L-Spinoren haben negative Helizität. Das rechtfertigt im Nachhinein die Unterteilung der Spinoren in rechts- und linkshändige, die wir bereits in (6.78) und (8.115) eingeführt hatten.

Wir haben die Lösungen der freien Weyl-Gleichungen nur für Boosts entlang der x^3-Achse hergeleitet, entsprechende Lösungen gelten aber bei Boosts in beliebiger Richtung. Die allgemeine Form (8.73) der Diracspinoren enthält alle drei Produkte $p_j\sigma^j$, genau so wie der Helizitätsoperator (8.120). Unabhängig von der Richtung des Boost haben die Weyl-Spinoren, die aus den beiden oberen Komponenten der geboosteten Dirac-Spinoren gebildet werden, immer die Helizität $-\frac{1}{2}$. Weyl-Spinoren, die aus den beiden unteren Komponenten der geboosteten Dirac-Spinoren gebildet werden, haben immer die Helizität $+\frac{1}{2}$.

Ab sofort verzichten wir auf die Indizes $>$ und $<$. Denn diese Information ist ja schon im Index $\boldsymbol{k}$ enthalten. Wir unterscheiden aber weiterhin zwischen links- und rechtshändigen Spinoren, da sie ja – obwohl formal identisch – zu Lösungen der unterschiedlichen Gleichungen (8.115a) und (8.115b) gehören.

$$ {}^{1}u^{\boldsymbol{k}L} = \sqrt{2E}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad {}^{2}u^{\boldsymbol{k}L} = \sqrt{2E}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \tag{8.122a} $$

$$ {}^{1}u^{\boldsymbol{k}R} = \sqrt{2E}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad {}^{2}u^{\boldsymbol{k}R} = \sqrt{2E}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \tag{8.122b} $$

Die Produkte

$$ ({}^{r}u^{\boldsymbol{k}L})^{\dagger}\, {}^{s}u^{\boldsymbol{k}L} = ({}^{r}u^{\boldsymbol{k}R})^{\dagger}\, {}^{s}u^{\boldsymbol{k}R} = 2E\,\delta_{rs} \tag{8.123} $$

sind nicht lorentzinvariant, anders als die entsprechenden Produkte (8.72) der Dirac-Spinoren. Als Normierungsfaktor der vollständigen Lösung wählen wir wie beim Diracfeld in (8.80)

$$ N \equiv 2E\ , \tag{8.124} $$

und erhalten die vollständigen Weyl-Spinoren

$$ \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2E\Omega}} \begin{cases} {}^{1}u^{\boldsymbol{k}L}\exp\{-ikx\} \\ {}^{2}u^{\boldsymbol{k}L}\exp\{-ikx\} \\ {}^{1}u^{\boldsymbol{k}L}\exp\{+ikx\} \\ {}^{2}u^{\boldsymbol{k}L}\exp\{+ikx\} \\ {}^{1}u^{\boldsymbol{k}R}\exp\{-ikx\} \\ {}^{2}u^{\boldsymbol{k}R}\exp\{-ikx\} \\ {}^{1}u^{\boldsymbol{k}R}\exp\{+ikx\} \\ {}^{2}u^{\boldsymbol{k}R}\exp\{+ikx\}\ . \end{cases} \tag{8.125} $$

mit $E = c\hbar k^0 = \hbar\omega_{\boldsymbol{k}} > 0$ und ${}^{r}u^{X} = (8.122)$.

Weyl-Felder haben die Masse $m = 0$, oder vernachlässigbar kleine Masse, Spin $s = 1/2$ und Helizität $Z = +1/2$ oder $Z = -1/2$. Linkshändige Weyl-Felder (Helizität $= -1/2$) entstehen im Grenzfall $m \to 0$ aus den beiden oberen Komponenten von Dirac-Spinoren, rechtshändige Weyl-Felder (Helizität $= +1/2$) entstehen im Grenzfall $m \to 0$ aus den beiden unteren Komponenten von Dirac-Spinoren. (8.126)

Der letzte Satz gilt nur, wenn die Dirac-Matrizen so definiert werden wie wir das in (8.15) getan haben. Bei anderer Definition ist der Zusammenhang zwischen Weyl-Spinoren und Dirac-Spinoren weniger transparent.

8.11 Weyl-Feld: Wahrscheinlichkeitsdichte

In Abschnitt 8.4 haben wir festgestellt, dass als Wahrscheinlichkeitsdichte des Diracfeldes das Produkt $\overline{\psi}\,\psi$ anstatt des Produkts $\psi^\dagger\,\psi$ eingeführt werden muss, damit das Feld normierbar ist. In Abschnitt 8.10 werden wir zeigen, dass bei den zweikomponentigen Weyl-Spinoren, obwohl sie identisch sind mit den beiden oberen oder den beiden unteren Komponenten von Dirac-Spinoren, keine entsprechende Komplikation auftritt. Weyl-Spinoren sind mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $\psi^\dagger\psi$ normierbar.

Bei einer Drehung der Raum-Zeit-Koordinaten wird der Weyl-Spinor $\psi(x)$ transformiert durch

$$\psi' \overset{(6.78)}{=} \underbrace{\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\Big(\Theta_k\frac{\hbar\sigma^k}{2} \pm \eta_k i\frac{\hbar\sigma^k}{2}\Big)\right\}}_{D}\psi\,. \tag{8.127}$$

Mit $\sigma^j \overset{(8.14)}{=} \sigma^{j\dagger}$ erhält man die infinitesimale Transformation (bei der Summanden $\mathcal{O}(\Theta^2), \mathcal{O}(\eta^2), \mathcal{O}(\Theta\eta)$ vernachlässigt werden können):

$$\begin{aligned}
&\psi'^\dagger\,\psi' = (D_{\text{INF}}\psi)^\dagger\,(D_{\text{INF}}\psi) = \psi^\dagger\,D_{\text{INF}}^\dagger\,D_{\text{INF}}\,\psi = \\
&\overset{(8.127)}{=} \psi^\dagger\left(1 - \frac{i}{\hbar}\Big(\Theta_k\frac{\hbar\sigma^{k\dagger}}{2} - \eta_k i\frac{\hbar\sigma^{k\dagger}}{2}\Big)\right)\left(1 + \frac{i}{\hbar}\Big(\Theta_k\frac{\hbar\sigma^{k}}{2} + \eta_k i\frac{\hbar\sigma^{k}}{2}\Big)\right)\psi = \\
&= \psi^\dagger\left(1 + \frac{i}{2}\Theta_k(\sigma^k - \sigma^{k\dagger}) - \frac{1}{2}\eta_k(\sigma^k + \sigma^{k\dagger})\right)\psi = \\
&= \psi^\dagger\Big(1 - \eta_k\sigma^k\Big)\psi \neq \psi^\dagger\psi
\end{aligned} \tag{8.128}$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichte $\psi^\dagger\,\psi$ des Weyl-Feldes ist bei einer rein räumlichen Koordinatendrehung ($\boldsymbol{\Theta} \neq 0, \boldsymbol{\eta} = 0$) invariant, unter einem Lorentzboost ($\boldsymbol{\eta} \neq 0$) jedoch nicht.

Wir erinnern jedoch daran, dass nicht die Wahrscheinlichkeitsdichte sondern das Raumintegral über die Wahrscheinlichkeitsdichte lorentzinvariant sein muss. Das Weyl-Feld erfüllt dies Kriterium:

$$\int_\Omega \mathrm{d}^3x\, \psi^\dagger(t,\boldsymbol{x})\psi(t,\boldsymbol{x}) \overset{(8.123),(8.125)}{=} \frac{1}{\Omega}\int_\Omega \mathrm{d}^3x \;= 1 \tag{8.129}$$

9 Das klassische elektromagnetische Feld

In Abschnitt 4.5 haben wir gesehen, dass das elektromagnetische Feld das Eichfeld von Feldern mit elektrischer Ladung (z. B. des Dirac-Feldes) ist, und dass seine Lagrangedichte fast vollständig festgelegt wird durch das Postulat, dass das geladene Feld unter lokalen Eichtransformationen invariant sein soll.

9.1 Lagrangedichte und Feldgleichung

Dies ist die Lagrangedichte des freien elektromagnetischen Feldes, d. h. des elektromagnetischen Feldes, das nicht mit irgend einem anderen Feld wechselwirkt:

$$\boxed{\mathcal{L} \overset{(4.120)}{=} -\frac{1}{4\mu_0} F_{\sigma\tau} F^{\sigma\tau} \overset{(4.114)}{=} -\frac{1}{4\mu_0} (\mathrm{d}_\sigma A_\tau - \mathrm{d}_\tau A_\sigma)(\mathrm{d}^\sigma A^\tau - \mathrm{d}^\tau A^\sigma)} \tag{9.1}$$

Der zweite Term in der Feldgleichung

$$\mathrm{d}_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\nu A_\mu)} - \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu}}_{-j^\mu} \overset{(3.37)}{=} 0 \quad \text{mit } \mu = 0, 1, 2, 3 \tag{9.2}$$

ist die Stromdichte $j^\mu = (4.113)$. Im Fall des freien elektromagnetischen Feldes ist dieser Term Null. Mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\nu A_\mu)} &= -\frac{2}{4\mu_0} (g_\nu{}^\sigma g_\mu{}^\tau - g_\nu{}^\tau g_\mu{}^\sigma)(\mathrm{d}^\sigma A^\tau - \mathrm{d}^\tau A^\sigma) = \\ &= -\frac{1}{2\mu_0} (\mathrm{d}^\nu A^\mu - \mathrm{d}^\mu A^\nu - \mathrm{d}^\mu A^\nu + \mathrm{d}^\nu A^\mu) = \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{\mu_0}\left(\mathrm{d}^\nu A^\mu - \mathrm{d}^\mu A^\nu\right) \overset{(4.114)}{=} -\frac{1}{\mu_0} F^{\nu\mu} \tag{9.3}$$

erhalten wir diese Gleichung für das freie elektromagnetische Feld:

$$\boxed{\mathrm{d}_\nu F^{\nu\mu} = \mathrm{d}_\nu(\mathrm{d}^\nu A^\mu - \mathrm{d}^\mu A^\nu) = 0 \quad \text{mit } \mu = 0,1,2,3} \tag{9.4}$$

Am Ende von Abschnitt 4.5 wurde gezeigt, dass diese vierdimensionale Gleichung gleichwertig ist mit den vier wohlbekannten dreidimensionalen Maxwell-Gleichungen.

9.2 Erhaltungsgrößen

Für den ES-Tensor

$$\begin{aligned}\boxed{\mathcal{T}^{\sigma\tau} \overset{(4.32)}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\sigma A_\rho)}\,\mathrm{d}^\tau A_\rho - g^{\sigma\tau}\mathcal{L}} \\ \overset{(9.3),(9.1)}{=} -\frac{1}{\mu_0} F^{\sigma\rho}\,\mathrm{d}^\tau A_\rho + g^{\sigma\tau}\frac{1}{4\mu_0} F_{\nu\rho}F^{\nu\rho}\end{aligned} \tag{9.5}$$

des freien elektromagnetischen Feldes gelten diese vier Kontinuitätsgleichungen:

$$\mathrm{d}_\sigma \mathcal{T}^{\sigma\tau} \overset{(4.33)}{=} 0 \quad \text{mit } \sigma\tau = 0,1,2,3 \tag{9.6}$$

Zur Erinnerung: $\mathcal{H} \overset{(4.34)}{=} \mathcal{T}^{00}$ ist die Energiedichte des Feldes, und die j-Komponente seiner Impulsdichte ist $\mathcal{P}^j \overset{(4.34)}{=} \mathcal{T}^{0j}/c$.

In Abschnitt 5.7 haben wir die sechs Kontinuitätsgleichungen

$$\mathrm{d}_\rho \mathcal{M}^{\rho\sigma\tau} \overset{(5.102)}{=} 0 \quad \text{mit } \sigma\tau = 10, 20, 30, 23, 31, 12 \tag{9.7}$$

gefunden, die für den Drehimpuls-Dichte-Tensor

$$\mathcal{M}^{\rho\sigma\tau} \overset{(5.100)}{=} x^\sigma \frac{\mathcal{T}^{\rho\tau}}{c} - x^\tau \frac{\mathcal{T}^{\rho\sigma}}{c} + \mathcal{S}^{\rho\sigma\tau} \tag{9.8}$$

gelten. Dabei ist

$$\mathcal{S}^{\rho\sigma\tau} \overset{(5.99)}{=} \frac{1}{c}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\rho A_\sigma)} A^\tau - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\rho A_\tau)} A^\sigma \tag{9.9}$$

die Spindichte des elektromagnetischen Feldes. In der Diskussion bei Gleichung (4.74) haben wir bereits festgestellt, dass nur die rein raum-artigen Drehimpulse

$$M^{jl} \overset{(5.104)}{=} \underbrace{\int_\Omega \mathrm{d}^3x \left(x^j \mathcal{P}^l - x^l \mathcal{P}^j\right)}_{\text{Bahn-Drehimpuls}} + \underbrace{\int_\Omega \mathrm{d}^3x\, \mathcal{S}^{0jl}}_{\text{Spin}} \tag{9.10}$$

mit $jl = 23, 31, 12$

in der Praxis nützliche Größen sind. Man beachte dass Erhaltungssätze nur für den Gesamt-Drehimpuls M^{jl} gelten, aber nicht für Bahndrehimpuls oder Spin separat.

Der ES-Tensor $\mathcal{T} =$ (9.5) ist offensichtlich nicht symmetrisch, d. h. es gilt $\mathcal{T}^{\rho\sigma} \neq \mathcal{T}^{\sigma\rho}$. Um (8.106) herum wurde erklärt, dass das zu Problemen bei Rechnungen im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie führt, weil ES-Tensoren in der ART symmetrisch sein *müssen*. In Anhang A.12 wird jedoch gezeigt, wie man symmetrische ES-Tensoren für beliebige Vektor- und Spinorfelder konstruieren kann, die zu den selben Kontinuitätsgleichungen führen wie der asymmetrische ES-tensor (9.5). Im Fall des elektromagnetischen Feldes ist der symmetrische ES-Tensor

$$\widetilde{\mathcal{T}}^{\sigma\tau} \overset{(A.83)}{=} -\frac{1}{\mu_0} F^{\sigma\nu} F^\tau{}_\nu + g^{\sigma\tau}\frac{1}{4\mu_0} F_{\nu\rho}F^{\nu\rho}\ . \tag{9.11}$$

Um nicht aus der Reihe der meisten Lehrbücher der Quantenfeldtheorie auszuscheren, behalten wir zwar im Hinterkopf dass der symmetrische ES-Tensor (9.11) existiert (und auch benutzt werden muss wenn man Berechnungen im Rahmen der ART durchführen möchte), werden aber in diesem Buch durchwegs die asymmetrische Form (9.5) verwenden.

10 Das klassische Klein-Gordon-Feld

10.1 Feldgleichung

In Abschnitt 8.1 haben wir den Ansatz für die Diracgleichung iteriert, und dadurch eine Gleichung für das Quadrat der Energie erhalten:

$$(i\hbar c)^2\Big(\gamma^0\gamma^0 \mathrm{d}_0\mathrm{d}_0 + (\gamma^0\gamma^k + \gamma^k\gamma^0)\mathrm{d}_0\mathrm{d}_k + \gamma^k\gamma^j \mathrm{d}_k\mathrm{d}_j\Big)\phi \overset{(8.7)}{=} (mc^2)^2\phi \quad (10.1)$$

Daraus haben wir die Diracgleichung abgeleitet, die in der Energie linear ist. Man kann aber auch bei Gleichung (10.1) stehenbleiben. Wir setzen die γ-Matrizen aus (8.15) ein, beachten

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu \overset{(8.9)}{=} 2g^{\mu\nu}\mathbb{1}\,,$$

und finden

$$\Big((i\hbar c)^2(\mathbb{1}\mathrm{d}_0\mathrm{d}_0 - \mathbb{1}\mathrm{d}_k\mathrm{d}_k) - (mc^2)^2\Big)\phi = 0 \quad .$$

Die vier Komponenten dieser Gleichung sind alle identisch, so dass es sich tatsächlich um nur eine Gleichung handelt:

$$\boxed{(\hbar^2c^2\mathrm{d}^\mu\mathrm{d}_\mu + m^2c^4)\phi = 0} \quad (10.2)$$

Das Feld $\phi(x)$ ist also ein Spinor mit nur einer Komponente, d. h. ein Skalar im Spinor-Raum (und ein Skalar in der Raum-Zeit). Schrödinger fand diese Gleichung noch vor seiner nichtrelativistischen Gleichung

$$\Big(i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Big)\psi = 0\,, \quad (10.3)$$

verwarf sie aber. Denn um aus (10.2) eine Kontinuitätsgleichung zu berechnen, multiplizierte er die Gleichung mit der konjugiert-komplexen Funktion ϕ^*, multiplizierte die konjugiert-komplexe Gleichung mit ϕ, und subtrahierte beide voneinander:

$$\begin{aligned} 0 &= \phi^*(\hbar^2 c^2 \mathrm{d}^\mu \mathrm{d}_\mu + m^2 c^4)\phi - \phi(\hbar^2 c^2 \mathrm{d}^\mu \mathrm{d}_\mu + m^2 c^4)\phi^* \\ &= \hbar^2 c^2 (\phi^* \mathrm{d}^\mu \mathrm{d}_\mu \phi - \phi \mathrm{d}^\mu \mathrm{d}_\mu \phi^*) = \hbar^2 c^2 \mathrm{d}^\mu (\phi^* \mathrm{d}_\mu \phi - \phi \mathrm{d}_\mu \phi^*) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\phi^* \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} - \phi \frac{\mathrm{d}\phi^*}{\mathrm{d}t}\Big) &= -c^2 \mathrm{d}^k \Big(\phi^* \mathrm{d}_k \phi - \phi \mathrm{d}_k \phi^*\Big) \end{aligned} \tag{10.4}$$

Der Ausdruck $\phi^*\dot{\phi} - \phi\dot{\phi}^*$ kann auch negative Werte annehmen. Wenn man dagegen (10.3) mit ψ^* multipliziert, die konjugiert-komplexe Gleichung mit ψ multipliziert, und beide Gleichungen voneinander subtrahiert, dann erhält man

$$\begin{aligned} i\hbar\Big(\psi^* \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} + \psi \frac{\mathrm{d}\psi^*}{\mathrm{d}t}\Big) &= -\frac{\hbar^2}{2m}\Big(\psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^*\Big) \\ i\hbar \frac{\mathrm{d}(\psi^*\psi)}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla \Big(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*\Big) \,. \end{aligned} \tag{10.5}$$

$\psi^*\psi$ ist offensichtlich positiv definit, und ist deshalb – im Gegensatz zu $\phi^*\dot{\phi} - \phi\dot{\phi}^*$ – als Ausdruck für die Wahrscheinlichkeitsdichte (bzw. nach Schrödingers Verständnis Ende 1925 als Ausdruck für die Materiedichte) des Elektronenfeldes geeignet. Aus diesem Grund gab Schrödinger seinen Ansatz (10.2) auf, und konzentrierte sich zunächst auf die nichtrelativistische Gleichung (10.3). Um Verwechselungen beider Gleichungen zu vermeiden, setzte sich für Schrödinger's offensichtlich relativistisch invariante Gleichung (10.2) „ungerechterweise“ der Name *Klein-Gordon-Gleichung* durch.

Obwohl (10.2) wegen (10.4) als Gleichung für ein Teilchen unbrauchbar ist, erweist sich die Klein-Gordon-Gleichung im Rahmen der Quantenfeldtheorie als sinnvoll und nützlich.

10.2 Das freie Klein-Gordon-Feld

Die Gleichung eines freien, mit keinem anderen Feld wechselwirkenden Klein-Gordon-Feldes ist

$$(\hbar^2 c^2 \mathrm{d}^\mu \mathrm{d}_\mu + m^2 c^4)\phi(x) \overset{(10.2)}{=} 0\,. \tag{10.6}$$

Wir überzeugen uns davon, dass diese Gleichung durch ebene Wellen der Form

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp\{\mp ikx\} = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp\{\mp i(\omega_{\boldsymbol{k}} t - \boldsymbol{kx})\} \tag{10.7}$$

gelöst wird, indem wir den Ansatz zur Prüfung in die Feldgleichung einsetzen:

$$(-\hbar^2\omega_{\boldsymbol{k}}^2 + \hbar^2 c^2 \boldsymbol{k}^2 + m^2 c^4)\, \frac{\exp\{\mp ikx\}}{\sqrt{N}} \overset{(7.17)}{=} 0 \cdot \frac{\exp\{\mp ikx\}}{\sqrt{N}}$$

Jede beliebige reelle oder komplexe Lösung der Klein-Gordon-Gleichung kann nach den allgemeinen Überlegungen von Kapitel 7 in der Form

$$\phi(x) \overset{(7.19)}{=} \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{1}{\sqrt{N\Omega}} \Big(a_{\boldsymbol{k}} \exp\{-ikx\} + b_{\boldsymbol{k}}^* \exp\{+ikx\} \Big) \tag{10.8}$$

als Linearkombination ebener Wellen geschrieben werden. Würde man diese Lösungen als Zustandsfunktionen der Punktteilchen-Quantenmechanik interpretieren, dann wäre ihre Energie

$$i\hbar \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = E\phi = \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{1}{\sqrt{N\Omega}} \Big(\hbar\omega_{\boldsymbol{k}} a_{\boldsymbol{k}} \exp\{-ikx\} - \hbar\omega_{\boldsymbol{k}} b_{\boldsymbol{k}}^* \exp\{+ikx\} \Big)\,.$$

Weil wir in (7.18) vereinbart haben, dass $k^0 = \omega/c > 0$ immer positiv ist, hätten die Lösungen $b_{\boldsymbol{k}}^* \exp\{+ikx\}$ negative Energie $-\hbar\omega_{\boldsymbol{k}} < 0$. Wir werden sehen, dass die Energie in der Quantenfeldtheorie auf andere Weise berechnet wird, und das quantisierte Klein-Gordon-Feld immer positive Energie hat.

Sowohl reelle als auch komplexe Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung

sind wichtig. Denn in Abschnitt 4.4 haben wir ja festgestellt, dass die globale Phasentransformation

$$\phi(x) \xrightarrow{\Gamma} \phi'(x) \overset{(4.77)}{=} e^{\frac{i}{\hbar}Kq}\phi(x) \quad \text{mit } K, q \in \mathbb{R}$$

mit der Erhaltung der Ladung q korreliert. Diese Transformation ist nur bei einem komplexen Feld sinnvoll.

Reelle Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung eignen sich zur Beschreibung von Feldern mit Spin $s = 0$ und Masse $m \neq 0$ oder $m = 0$, die keine erhaltene Ladung haben. Sie haben die Form (10.8) mit $b_{\boldsymbol{k}} = a_{\boldsymbol{k}}$ für sämtliche Wellenzahlen $\boldsymbol{k}$.
Komplexe Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung eignen sich zur Beschreibung von Feldern mit Spin $s = 0$ und Masse $m \neq 0$ oder $m = 0$, die (mindestens) eine erhaltene Ladung haben. Sie haben die Form (10.8) mit $a_{\boldsymbol{k}} \neq b_{\boldsymbol{k}}$ für mindestens eine Wellenzahl $\boldsymbol{k}$. (10.9)

10.3 Lagrangedichte

Die Gleichung (10.2) des Klein-Gordon-Feldes kann aus der Lagrangedichte

$$\boxed{\mathcal{L} = c^2\hbar^2(\mathrm{d}_\mu\phi^*)\mathrm{d}^\mu\phi - m^2c^4\phi^*\phi} \tag{10.10}$$

abgeleitet werden. Im Anschluss an (3.37c) haben wir erklärt, warum bei der Ableitung der Feldgleichungen ϕ und ϕ^* als unabhängige Variable von $\mathcal{L}$ betrachtet werden müssen. Wegen

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}_\mu\phi^*)\mathrm{d}^\mu\phi &= g_{\mu\sigma}g^{\mu\tau}(\mathrm{d}^\sigma\phi^*)\mathrm{d}_\tau\phi = \delta_{\sigma\tau}(\mathrm{d}^\sigma\phi^*)\mathrm{d}_\tau\phi \\ &= (\mathrm{d}^\sigma\phi^*)\mathrm{d}_\sigma\phi = (\mathrm{d}^\mu\phi^*)\mathrm{d}_\mu\phi\end{aligned}$$

ist die Lagrangedichte in ϕ und ϕ^* völlig symmetrisch, und man erhält aus ihrer Variation nach ϕ^* und ϕ die identische Feldgleichung

$$\mathrm{d}_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\mu \phi_r)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} \overset{(3.37b)}{=} 0$$

$$c^2\hbar^2 \mathrm{d}_\mu \mathrm{d}^\mu \phi + m^2 c^4 \phi = 0 \tag{10.11a}$$

$$c^2\hbar^2 \mathrm{d}_\mu \mathrm{d}^\mu \phi^* + m^2 c^4 \phi^* = 0\,, \tag{10.11b}$$

nämlich die Klein-Gordon-Gleichung (10.2).

Bei genauerem Hinsehen erkennt man, dass eine Umdefinition der Dimension des Feldes $\phi(x)$ erforderlich ist. Wir haben die Klein-Gordon-Gleichung (10.2) als iterierte Dirac-Gleichung hergeleitet. Das Diracfeld hat die Dimension Volumen$^{-1/2}$. Würden wir auch für das Klein-Gordon-Feld bei dieser Definition bleiben, dann hätte die Lagrangedichte (10.10) die exotische Dimension Energie^2/Volumen. Das ist nicht akzeptabel. Damit der kanonische Formalismus nicht aus den Fugen gerät, müssen Lagrange- und Hamiltondichte zwingend die Dimension Energie/Volumen haben. Deshalb legen wir für das Klein-Gordon-Feld die Dimension

$$[\text{Klein-Gordon-Feld}] = [\phi(x)] = \sqrt{\frac{1}{\text{Energie} \cdot \text{Volumen}}} \tag{10.12}$$

fest. Folglich muss, weil die Fourierkoeffizienten dimensionslose Zahlen sind, der Normierungsfaktor N in

$$\phi(x) \overset{(10.8)}{=} \sum_{\boldsymbol{f}} \frac{1}{\sqrt{N\Omega}} \Big(a_{\boldsymbol{f}} \exp\{-ifx\} + b^*_{\boldsymbol{f}} \exp\{+ifx\} \Big) \tag{10.13a}$$

$$\phi^*(x) = \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{1}{\sqrt{N\Omega}} \Big(a^*_{\boldsymbol{k}} \exp\{+ikx\} + b_{\boldsymbol{k}} \exp\{-ikx\} \Big) \tag{10.13b}$$

die Dimension $[N] =$ Energie haben.

Mit $\dot\phi = c\mathrm{d}_0\phi = c\mathrm{d}^0\phi$ ist die konjugierte Impulsdichte π des Feldes ϕ

$$\pi(x) \overset{(3.57)}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\phi(x)} = c\hbar^2 \mathrm{d}^0 \phi^* = \hbar^2 \dot\phi^*\,, \tag{10.14a}$$

und die konjugierte Impulsdichte des Feldes ϕ^* ist

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^*(x)} = c\hbar^2 \mathrm{d}^0\phi = \hbar^2 \dot{\phi} = \pi^*(x) \ . \tag{10.14b}$$

Die Dimension der konjugierten Impulsdichten ist Energie$^{\frac{1}{2}}$·Wirkung·Volumen$^{-\frac{1}{2}}$. Das Produkt der Feldamplitude $\phi(x)$ und seiner konjugierten Impulsdichte $\pi(x)$ hat damit die Dimension Wirkung·Volumen^{-1}, und das Produkt der Feldamplitude und ihres konjugierten Impulses hat die Dimension Wirkung. Das Produkt kanonisch konjugierter Größen muss *immer* die Dimension Wirkung haben, unsere Wahl der Dimensionen ist also vernünftig.

10.4 Erhaltungsgrößen

Der ES-Tensor des klassischen Klein-Gordon-Feldes hat die Komponenten

$$\mathcal{T}^{\rho\sigma} \overset{(4.32)}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\rho\phi)}\, \mathrm{d}^\sigma\phi + (\mathrm{d}^\sigma\phi^*)\, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\rho\phi^*)} - g^{\rho\sigma}\mathcal{L} \ . \tag{10.15}$$

Man beachte dass wir hier, und ebenso in der Lagrangedichte (10.10), stets die komplex-konjugierten Faktoren ϕ^* und $\mathrm{d}^\sigma\phi^*$ links von den Faktoren ϕ und $\mathrm{d}^\sigma\phi$ platziert haben. Da das Klein-Gordon-Feld ein Skalar ist, kann man aus der allgemeinen Regel (8.87) keinen Hinweis auf die Anordnung dieser Faktoren ableiten, und tatsächlich ist ihre Reihenfolge völlig egal. Das ändert sich jedoch, wenn das Feld in Kapitel 15 quantisiert wird. Dann werden die Amplituden zu Operatoren mit nicht-kommutativer Algebra, und ihre Reihenfolge wird signifikante Konsequenzen haben. Da wir sowohl die Diracgleichung als auch die Klein-Gordon-Gleichung aus (10.1) abgeleitet haben, sind diese beiden Felder eng verwandt. Aus diesem Grund ordnen wir die Faktoren in der Klein-Gordon-Theorie so an, wie wir das in der Diractheorie getan haben, mit den komplex-konjugierten Faktoren ϕ^* und $\mathrm{d}^\sigma\phi^*$ links von ϕ und $\mathrm{d}^\sigma\phi$.

Durch Einsetzen von

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\rho\phi)} = c^2\hbar^2 \mathrm{d}^\rho\phi^* \qquad\qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\rho\phi^*)} = c^2\hbar^2 \mathrm{d}^\rho\phi$$

in (10.15) findet man folgende Komponenten des ES-Tensors:

$$\mathcal{T}^{\rho\sigma} = c^2\hbar^2\Big((\mathrm{d}^\rho\phi^*)\,\mathrm{d}^\sigma\phi + (\mathrm{d}^\sigma\phi^*)\,\mathrm{d}^\rho\phi - \\ - g^{\rho\sigma}(\mathrm{d}_\mu\phi^*)\,\mathrm{d}^\mu\phi + g^{\rho\sigma}\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\,\phi^*\phi\Big) \tag{10.16a}$$

Insbesondere ist die Hamilton-Dichte

$$\mathcal{H} \overset{(4.35)}{\equiv} \mathcal{T}^{00} = 2c^2\hbar^2(\mathrm{d}_0\phi^*)\mathrm{d}^0\phi - c^2\hbar^2(\mathrm{d}_\mu\phi^*)\mathrm{d}^\mu\phi + m^2c^4\phi^*\phi \\ = c^2\hbar^2(\mathrm{d}^\mu\phi^*)\mathrm{d}^\mu\phi + m^2c^4\phi^*\phi\ , \tag{10.16b}$$

und die Physikalische Impulsdichte ist

$$\mathcal{P}^j \overset{(4.35)}{\equiv} \frac{1}{c}\,\mathcal{T}^{0j} = c\hbar^2\Big((\mathrm{d}^0\phi^*)\,\mathrm{d}^j\phi + (\mathrm{d}^j\phi^*)\,\mathrm{d}^0\phi\Big)\ . \tag{10.16c}$$

Durch Einsetzen der Felder (10.13) kann man die Untersuchung des ES-Tensors (10.16a) noch etwas weiter treiben:

$$\mathcal{T}^{\rho\sigma} = \sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{f}} \frac{c^2\hbar^2}{2\Omega\hbar\sqrt{\omega_{\boldsymbol{k}}\omega_{\boldsymbol{f}}}}\Big[i^2k^\rho f^\sigma\Big(a^*_{\boldsymbol{k}}\exp\{+ikx\} - b_{\boldsymbol{k}}\exp\{-ikx\}\Big)\cdot \\ \cdot\Big(-a_{\boldsymbol{f}}\exp\{-ifx\} + b^*_{\boldsymbol{f}}\exp\{+ifx\}\Big) + \\ + i^2f^\rho k^\sigma\Big(a^*_{\boldsymbol{k}}\exp\{+ikx\} - b_{\boldsymbol{k}}\exp\{-ikx\}\Big)\cdot \\ \cdot\Big(-a_{\boldsymbol{f}}\exp\{-ifx\} + b^*_{\boldsymbol{f}}\exp\{+ifx\}\Big) - \\ - g^{\rho\sigma}i^2k_\mu f^\mu\Big(a^*_{\boldsymbol{f}}\exp\{+ifx\} - b_{\boldsymbol{f}}\exp\{-ifx\}\Big)\cdot \\ \cdot\Big(-a_{\boldsymbol{k}}\exp\{-ikx\} + b^*_{\boldsymbol{k}}\exp\{+ikx\}\Big) + \\ + g^{\rho\sigma}\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\Big(a^*_{\boldsymbol{k}}\exp\{+ikx\} + b_{\boldsymbol{k}}\exp\{-ikx\}\Big)\cdot \\ \cdot\Big(a_{\boldsymbol{f}}\exp\{-ifx\} + b^*_{\boldsymbol{f}}\exp\{+ifx\}\Big)\Big] =$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{f}} \frac{c^2\hbar^2}{2\Omega\hbar\sqrt{\omega_{\boldsymbol{k}}\omega_{\boldsymbol{f}}}} \Big[i^2(k^\rho f^\sigma + f^\rho k^\sigma)\Big(\\
&\quad - a^*_{\boldsymbol{k}} a_{\boldsymbol{f}} \exp\{+i(k-f)x\} + a^*_{\boldsymbol{k}} b^*_{\boldsymbol{f}} \exp\{+i(k+f)x\} + \\
&\quad + b_{\boldsymbol{k}} a_{\boldsymbol{f}} \exp\{-i(k+f)x\} - b_{\boldsymbol{k}} b^*_{\boldsymbol{f}} \exp\{-i(k-f)x\}\Big) - \\
&\quad - g^{\rho\sigma} i^2 k_\mu f^\mu \Big(\\
&\quad - a^*_{\boldsymbol{f}} a_{\boldsymbol{k}} \exp\{+i(f-k)x\} + a^*_{\boldsymbol{f}} b^*_{\boldsymbol{k}} \exp\{+i(f+k)x\} + \\
&\quad + b_{\boldsymbol{f}} a_{\boldsymbol{k}} \exp\{-i(f+k)x\} - b_{\boldsymbol{f}} b^*_{\boldsymbol{k}} \exp\{-i(f-k)x\}\Big) + \\
&\quad + g^{\rho\sigma} \frac{m^2c^2}{\hbar^2} \Big(\\
&\quad a^*_{\boldsymbol{k}} a_{\boldsymbol{f}} \exp\{+i(k-f)x\} + a^*_{\boldsymbol{k}} b^*_{\boldsymbol{f}} \exp\{+i(k+f)x\} + \\
&\quad + b_{\boldsymbol{k}} a_{\boldsymbol{f}} \exp\{-i(k+f)x\} + b_{\boldsymbol{k}} b^*_{\boldsymbol{f}} \exp\{-i(k-f)x\}\Big)\Big]
\end{aligned}
\tag{10.17}
$$

Dies Resultat wollen wir jetzt im dreidimensionalen Ortsraum über das Normierungsvolumen Ω integrieren. Dabei wollen wir in allen Termen das Kronecker-Symbol

$$
\frac{1}{\Omega}\int_\Omega \mathrm{d}^3x\, \exp\{\pm i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{f})\boldsymbol{x}\} \overset{(7.12)}{=} \delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{f}} \tag{10.18}
$$

nutzen. Weil symmetrisch über sämtliche positiven und negativen Wellenzahlen $\boldsymbol{k}$ und $\boldsymbol{f}$ summiert wird, kann man z. B.

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{f}} a^*_{\boldsymbol{f}} b^*_{\boldsymbol{k}} \frac{1}{\Omega}\int_\Omega \mathrm{d}^3x\, \exp\{+i(f+k)x\} = \sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{f}} a^*_{-\boldsymbol{f}} b^*_{\boldsymbol{k}} \cdot \\
&\cdot \exp\{+i(f^0+k^0)x_0\} \frac{1}{\Omega}\int_\Omega \mathrm{d}^3x\, \exp\{+i(-f^j+k^j)x_j\} \overset{(10.18)}{=} \\
&= \sum_{\boldsymbol{k}} a^*_{-\boldsymbol{k}} b^*_{\boldsymbol{k}}\, \exp\{+i2k^0x_0\}
\end{aligned}
\tag{10.19}
$$

schreiben. Hier haben wir unsere Konvention (7.18) angewandt, nach der

die Null-Komponente der Wellenzahl freier Felder stets ≥ 0 gewählt wird. Mit (10.19) erhält man

$$
\begin{aligned}
T^{\rho\sigma} \equiv \int_{\Omega} \mathrm{d}^3x\, \mathcal{T}^{\rho\sigma} = \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{c^2\hbar^2}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}} \Big[\\
- 2k^\rho k^\sigma \Big(- a^*_{\boldsymbol{k}} a_{\boldsymbol{k}} + a^*_{\boldsymbol{k}} b^*_{-\boldsymbol{k}} \exp\{+i2k^0x_0\} + \\
+ b_{\boldsymbol{k}} a_{-\boldsymbol{k}} \exp\{-i2k^0x_0\} - b_{\boldsymbol{k}} b^*_{\boldsymbol{k}} \Big) - \\
+ g^{\rho\sigma} k_\mu k^\mu \Big(- a^*_{\boldsymbol{k}} a_{\boldsymbol{k}} + a^*_{-\boldsymbol{k}} b^*_{\boldsymbol{k}} \exp\{+i2k^0x_0\} + \\
+ b_{-\boldsymbol{k}} a_{\boldsymbol{k}} \exp\{-i2k^0x_0\} - b_{\boldsymbol{k}} b^*_{\boldsymbol{k}} \Big) + \\
+ g^{\rho\sigma} \frac{m^2c^2}{\hbar^2} \Big(+ a^*_{\boldsymbol{k}} a_{\boldsymbol{k}} + a^*_{\boldsymbol{k}} b^*_{-\boldsymbol{k}} \exp\{+i2k^0x_0\} + \\
+ b_{\boldsymbol{k}} a_{-\boldsymbol{k}} \exp\{-i2k^0x_0\} + b_{\boldsymbol{k}} b^*_{\boldsymbol{k}} \Big) \Big] \,. \qquad (10.20)
\end{aligned}
$$

Die Terme mit den Exponentialfunktionen beschreiben sehr schnelle Oszillationen. Ihre Frequenz hängt von der Masse des Feldes ab. Selbst für relativ leichte Teilchen mit Ruheenergie 1 MeV ist die Frequenz der Oszillationen

$$
2k^0c > \frac{2\,\mathrm{MeV}}{\hbar} \approx 3 \cdot 10^{21}\mathrm{Hz} \,. \qquad (10.21)
$$

Schrödinger [34], der sie entdeckte (theoretisch, diese Oszillationen wurden niemals experimentell beobachtet), nannte sie „Zitterbewegung“. Der Mittelwert dieser Terme ist Null, und aufgrund ihrer hohen Frequenz kann man sie sicherlich vernachlässigen.

Da für freie Felder $k_\mu k^\mu = m^2c^2/\hbar^2$ gilt, erhält man das Ergebnis

$$
T^{\rho\sigma} = \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{c^2\hbar^2}{\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}} k^\rho k^\sigma \Big(a^*_{\boldsymbol{k}} a_{\boldsymbol{k}} + b_{\boldsymbol{k}} b^*_{\boldsymbol{k}} \Big) \,. \qquad (10.22)
$$

Man beachte dass wir – in Hinblick auf die Quantisierung des KG-Feldes, die in Kapitel 15 erfolgen wird – an keiner Stelle der Herleitung dieses Resultats

die Reihenfolge der Fourier-Koeffizient in irgend einem Produkt geändert haben. Denn obwohl diese Koeffizienten in der klassischen Formel (10.22) kommutierende Zahlen sind, werden sie durch die Quantisierung zu nicht-kommutativen Operatoren werden.

Das Klein-Gordon-Feld trägt eine erhaltene Ladung q, wenn es invariant ist unter einer globalen Phasentransformation

$$\phi(x) \xrightarrow{\Gamma} \phi'(x) \overset{(4.77)}{=} e^{\frac{i}{\hbar}Kq}\phi(x) \quad \text{mit } K, q \in \mathbb{R} \,. \tag{10.23}$$

Diese Transformation ist nur für ein komplexes Feld sinnvoll. Ein reelles Klein-Gordon-Feld hat keine erhaltene Ladung.

Um herauszufinden ob es ein $\mathcal{G}$ gibt, mit dem die hinreichende Symmetriebedingung (4.11)

$$\exists\, \mathcal{G}: \quad \mathcal{L} \xrightarrow{I+\frac{i}{\hbar}w\gamma} \mathcal{L}\,' = \mathcal{L} + \frac{i}{\hbar} w\gamma\mathcal{L} = \mathcal{L} + \mathrm{d}_\rho \mathcal{G}^\rho \tag{10.24}$$

erfüllt werden kann, untersuchen wir die infinitesimale Transformation. Wegen

$$e^{\frac{i}{\hbar}Kq} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{i}{\hbar}\underbrace{\frac{K}{n}}_{\equiv k} q\right)^n \quad \text{mit } n \in \mathbb{N} \tag{10.25}$$

hat sie die Form

$$\phi(x) \xrightarrow{I+\frac{i}{\hbar}w\gamma} \phi'(x) = \phi(x) + \frac{i}{\hbar} kq\phi(x) \,. \tag{10.26}$$

Das transformierte konjugiert-komplexe Feld ist

$$\phi^{*\prime}(x) = \phi^*(x) - \frac{i}{\hbar} kq\phi^*(x) \,. \tag{10.27}$$

Man beachte das Minuszeichen. Damit lässt sich die Wirkung der infinitesimalen Transformation auf $\mathcal{L}$ berechnen, wobei Summanden $\mathcal{O}(k^2)$ vernachlässigt werden:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}' &= c^2\hbar^2(\mathrm{d}_\mu\phi^* - \frac{i}{\hbar}kq\mathrm{d}_\mu\phi^*)(\mathrm{d}^\mu\phi + \frac{i}{\hbar}kq\mathrm{d}^\mu\phi)\\ &\quad - m^2c^4(\phi^* - \frac{i}{\hbar}kq\phi^*)(\phi + \frac{i}{\hbar}kq\phi)\\ &= \mathcal{L} + c^2\hbar^2(\mathrm{d}_\mu\phi^*)\frac{i}{\hbar}kq\mathrm{d}^\mu\phi - c^2\hbar^2\frac{i}{\hbar}kq(\mathrm{d}_\mu\phi^*)\mathrm{d}^\mu\phi\\ &\quad - m^2c^4\phi^*\frac{i}{\hbar}kq\phi + m^2c^4\frac{i}{\hbar}kq\phi^*\phi + \mathcal{O}(k^2) = \mathcal{L}\end{aligned}$$

Die hinreichende Symmetriebedingung (10.24) wird durch

$$\mathrm{d}_\rho\mathcal{G}^\rho = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathcal{G} = \text{constant} \tag{10.28}$$

erfüllt. Wir sparen Schreibarbeit, indem wir $\mathcal{G} \equiv 0$ wählen. Die erhaltene Stromdichte

$$j^\rho \overset{(4.16)}{=} C\Big(\sum_r \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\rho\phi_r)}w\gamma\phi_r + i\hbar\mathcal{G}^\rho\Big)$$

ist mit $C \equiv 1/(i\hbar k)$

$$\begin{aligned}j^\rho &= \frac{1}{i\hbar k}\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\rho\phi)}kq\phi - kq\phi^*\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\rho\phi^*)}\Big)\\ &= \frac{1}{i\hbar k}\Big(c^2\hbar^2(\mathrm{d}^\rho\phi^*)kq\phi - c^2\hbar^2kq\phi^*\mathrm{d}^\rho\phi\Big)\\ &= -iqc^2\hbar\Big((\mathrm{d}^\rho\phi^*)\phi - \phi^*\mathrm{d}^\rho\phi\Big)\ .\end{aligned} \tag{10.29}$$

Für j gilt die Kontinuitätsgleichung

$$\mathrm{d}_\rho j^\rho = 0 \tag{10.30}$$

$$-ic^2\hbar q\mathrm{d}_0\Big((\mathrm{d}^0\phi^*)\phi - \phi^*\mathrm{d}^0\phi\Big) = +ic^2\hbar q\mathrm{d}_j\Big((\mathrm{d}^j\phi^*)\phi - \phi^*\mathrm{d}^j\phi\Big)\ .$$

Integration über das Volumen V ergibt mit dem Gauß'schen Satz:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underbrace{\int\limits_V \mathrm{d}^3x\, i\hbar q\Big(\frac{\mathrm{d}\phi^*}{\mathrm{d}t}\phi-\phi^*\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\Big)}_{Q(V)} = -\int\limits_{O(V)}\mathrm{d}f_j\ \underbrace{iqc^2\hbar q\Big((\mathrm{d}^j\phi^*)\phi-\phi^*\mathrm{d}^j\phi\Big)}_{j^j} \tag{10.31}$$

Im Integral Q erkennt man – abgesehen von konstanten Faktoren – den Ausdruck (10.4) wieder. Als Wahrscheinlichkeitsdichte ist dieser Ausdruck unbrauchbar, aber als Ladungsdichte ist er akzeptabel, weil eine Ladung durchaus negativ sein kann. Ein komplexes Klein-Gordon-Feld kann also eine positive oder negative erhaltene Ladung haben.

Wenn man das Volumenintegral über das gesamte Normierungsvolumen Ω ausdehnt, dann wird die rechte Seite von (10.31) Null, weil ϕ und ϕ^* auf der Oberfläche des Normierungsvolumens Null sind. Setzt man außerdem

$$\pi(x) \overset{(10.14a)}{=} \hbar^2\dot{\phi}^*(x) \qquad\qquad \pi^*(x) \overset{(10.14b)}{=} \hbar^2\dot{\phi}(x)$$

ein, dann kann man die gesamte erhaltene Ladung des Klein-Gordon-Feldes in der Form

$$\boxed{Q=\int\limits_\Omega \mathrm{d}^3x\,\frac{iq}{\hbar}\Big(\pi\phi-\phi^*\pi^*\Big)} \tag{10.32}$$

schreiben.

10.5 Das reelle Klein-Gordon-Feld

Im Vergleich zum Vektorfeld der elektromagnetischen Wechselwirkung oder den Spinor-Feldern der Dirac-Theorie und der Weyl-Theorie lässt sich das geladene Klein-Gordon-Feld schon recht problemlos handhaben. Nochmals einfacher ist die formale Behandlung des reellen Klein-Gordon-Feldes. Definiert wird es durch seine Lagrangedichte

$$\boxed{\mathcal{L}=\frac{c^2\hbar^2}{2}(\mathrm{d}_\mu\phi)\mathrm{d}^\mu\phi-\frac{1}{2}m^2c^4\phi^2}\,. \tag{10.33}$$

Genau wie das geladene KG-Feld wird auch das ungeladene KG-Feld definiert mit der Dimension (10.12) = (Energie · Volumen)$^{-1/2}$. Dadurch wird sichergestellt, das die Lagrangedichte und die Hamiltondichte die Dimension Energie/Volumen haben.

Durch Variation von $\mathcal{L}$ nach ϕ findet man die Feldgleichung

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} &\overset{(3.37b)}{=} 0 \\ c^2\hbar^2 \mathrm{d}_\mu \mathrm{d}^\mu \phi + m^2 c^4 \phi &= 0 \ , \end{aligned} \tag{10.34}$$

die mit (10.11a) identisch ist.

Die konjugierte Impulsdichte π des reellen KG-Feldes Feldes ist

$$\pi(x) \overset{(3.57)}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(x)} = c\hbar^2 \mathrm{d}^0 \phi \ , \tag{10.35}$$

und die Komponenten seines Energiedichte-Spannungs-Tensors sind

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{\rho\sigma} &\overset{(4.32)}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\rho \phi)} \mathrm{d}^\sigma \phi - g^{\rho\sigma} \mathcal{L} = \\ &= c^2\hbar^2 (\mathrm{d}^\rho \phi)\mathrm{d}^\sigma \phi - g^{\rho\sigma} \frac{c^2\hbar^2}{2} (\mathrm{d}_\mu \phi)\mathrm{d}^\mu \phi + g^{\rho\sigma} \frac{1}{2} m^2 c^4 \phi^2 \ . \end{aligned} \tag{10.36}$$

Insbesondere ist seine Energiedichte (Hamiltondichte)

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &\overset{(4.34)}{=} \mathcal{T}^{00} = \frac{c^2\hbar^2}{2} (\mathrm{d}^0 \phi)\mathrm{d}^0 \phi - \frac{c^2\hbar^2}{2} (\mathrm{d}_j \phi)\mathrm{d}^j \phi + \frac{1}{2} m^2 c^4 \phi^2 \\ &= \frac{c^2\hbar^2}{2} (\mathrm{d}^\mu \phi)\mathrm{d}^\mu \phi + \frac{1}{2} m^2 c^4 \phi^2 \ , \end{aligned} \tag{10.37}$$

seine physikalische Impulsdichte ist

$$\mathcal{P}^j \overset{(4.34)}{=} \frac{1}{c} \mathcal{T}^{0j} = c\hbar^2 (\mathrm{d}^0 \phi)\mathrm{d}^j \phi \overset{(10.35)}{=} \pi(x)\mathrm{d}^j \phi \ , \tag{10.38}$$

und sein mittlerer Druck ist

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P} &\overset{(4.45a)}{=} \frac{1}{3}\Big(\mathcal{S}^{P11} + \mathcal{S}^{P22} + \mathcal{S}^{P33}\Big) = \frac{1}{3}\,\mathcal{T}^{jj} \\
&= \frac{c^2\hbar^2}{3}(\mathrm{d}^j\phi)\mathrm{d}^j\phi - \frac{g^{jj}}{3}\frac{c^2\hbar^2}{2}(\mathrm{d}_\mu\phi)\mathrm{d}^\mu\phi + \frac{g^{jj}}{6}\,m^2c^4\phi^2 \\
&= +\frac{c^2\hbar^2}{2}(\mathrm{d}_0\phi)\mathrm{d}_0\phi - \frac{c^2\hbar^2}{6}(\mathrm{d}_j\phi)\mathrm{d}_j\phi - \frac{1}{2}\,m^2c^4\phi^2\ . \qquad (10.39)
\end{aligned}
$$

11 Diskrete Symmetrien

11.1 Die erweiterte Lorentzgruppe

Die Lorentzgruppe $\{\ell\}$ ist eine kontinuierliche Gruppe. Jedes ihrer Elemente kann in einer Taylorreihe um das Einselement der Gruppe entwickelt werden. Anschaulich bedeutet das: Jedes ihrer Elemente kann als Produkt unendlich vieler unendlich kleiner Elemente betrachtet werden.

Zusätzlich gibt es zwei diskrete Änderungen der Raum-Zeit-Koordinaten, die ebenfalls das Produkt $A_\nu B^\nu$ invariant lassen: Die Spiegelung P der drei Raumkoordinaten x^1, x^2, x^3, und die Spiegelung T der Zeitkoordinate x^0. Die Raumspiegelung wird auch als Paritätstransformation bezeichnet, die Spiegelung der Zeitachse auch als Zeitumkehr. Die Vereinigungsmenge $\{\{\ell\}, T, P\}$ enthält sämtliche Transformationen der kartesischen Raum-Zeit-Koordinaten, die das Produkt $A_\nu B^\nu$ invariant lassen, denn alle Spiegelungen einzelner Koordinatenachsen oder beliebiger Kombinationen von Koordinatenachsen können durch Produkte von P, T, und Elementen von $\{\ell\}$ erzeugt werden.

Die Lorentzgruppe $\{\ell\}$ wird genauer auch als *eigentliche orthochrone* Lorentzgruppe $\{\ell_+^\uparrow\}$ bezeichnet. Der Pfeil $^\uparrow$ und das Wort orthochron deuten an, dass die Elemente der Lorentzgruppe die Zeitachse nicht aus dem Lichtkegel heraus drehen. Das Pluszeichen $_+$ und das Wort eigentlich besagen, dass sämtliche Elemente aller Matrixdarstellungen der Lorentzgruppe die Determinante +1 haben. Wir werden auch weiterhin die eigentliche orthochrone Lorentzgruppe $\{\ell_+^\uparrow\}$ abkürzend als Lorentzgruppe $\{\ell\}$ bezeichnen.

Die *orthochrone uneigentliche* Lorentzmenge $\{\ell_-^\uparrow\}$ ist die Menge $\{P\{\ell\}\}$ aller Produkte $P\ell = \ell P$ der Raumspiegelung und der Elemente der Lorentzgruppe. $\{\ell_-^\uparrow\}$ ist keine Gruppe, denn das Produkt zweier Elemente aus $\{\ell_-^\uparrow\}$ ist kein Element von $\{\ell_-^\uparrow\}$, sondern ein Element aus $\{\ell\}$. Die Vereinigungsmenge $\{\{\ell\}, P\} = \{\{\ell\}, \{\ell_-^\uparrow\}\}$ ist eine Gruppe.

Die *nichtorthochrone uneigentliche* Lorentzmenge $\{\ell^{\downarrow}_{-}\}$ ist die Menge $\{T\{\,\ell\,\}\}$ aller Produkte $T\ell = \ell T$ der Zeitumkehr und der Elemente der Lorentzgruppe. $\{\ell^{\downarrow}_{-}\}$ ist keine Gruppe, denn das Produkt zweier Elemente aus $\{\ell^{\downarrow}_{-}\}$ ist kein Element aus $\{\ell^{\downarrow}_{-}\}$, sondern ein Element aus $\{\,\ell\,\}$. Die Vereinigungsmenge $\{\{\,\ell\,\}, T\} = \{\{\,\ell\,\}, \{\ell^{\downarrow}_{-}\}\}$ ist eine Gruppe.

Die Menge $\{TP\{\,\ell\,\}\}$ aller Produkte $TP\ell$ der Zeitumkehr und der Raumspiegelung und der Elemente der Lorentzgruppe ist die *nichtorthochrone eigentliche* Lorentzmenge $\{\ell^{\downarrow}_{+}\}$. Da T und P miteinander und mit allen Elementen der Lorentzgruppe kommutieren ist es egal, in welcher Reihenfolge man das Produkt schreibt. $\{\ell^{\downarrow}_{+}\}$ ist keine Gruppe, denn das Produkt zweier Elemente aus $\{\ell^{\downarrow}_{+}\}$ ist kein Element aus $\{\ell^{\downarrow}_{+}\}$, sondern ein Element aus $\{\,\ell\,\}$. Die Vereinigungsmenge $\{\{\,\ell\,\}, TP\} = \{\{\,\ell\,\}, \{\ell^{\downarrow}_{+}\}\}$ ist eine Gruppe.

Die Vereinigungsmenge $\{\{\,\ell\,\}, T, P\} = \{\{\,\ell\,\}, \{\ell^{\uparrow}_{-}\}, \{\ell^{\downarrow}_{-}\}, \{\ell^{\downarrow}_{+}\}\}$ wird als *erweiterte Lorentzgruppe* bezeichnet. Wegen der Elemente T und P ist die erweiterte Lorentzgruppe keine kontinuierliche Gruppe. Ihre Parameter-Mannigfaltigkeit ist nicht zusammenhängend, sondern in die vier Parameter-Mannigfaltigkeiten ihrer Komponenten $\{\,\ell\,\}$, $\{\ell^{\uparrow}_{-}\}$, $\{\ell^{\downarrow}_{-}\}$, und $\{\ell^{\downarrow}_{+}\}$ aufgespalten. Kein Punkt A in einer dieser vier Komponenten kann mit einem Punkt B in einer anderen der vier Komponenten durch einen kontinuierlichen Weg verbunden werden, ohne die Parameter-Mannigfaltigkeit zu verlassen. Jede einzelne dieser vier Zusammenhangskomponenten ist zweifach zusammenhängend, da die in ihnen enthaltene Parameter-Mannigfaltigkeit von $\{\,\ell\,\}$ zweifach zusammenhängend ist.

11.2 Diskrete Symmetrien des Dirac-Feldes

Die in Satz (8.43) definierten Generatoren

$$S^{\sigma\tau} \overset{(8.43)}{=} \frac{i\hbar}{4}[\gamma^{\sigma}, \gamma^{\tau}] \tag{11.1}$$

schreiben wir mithilfe der Definition der γ-Matrizen

$$\gamma^0 \overset{(8.15a)}{=} \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma^k \overset{(8.15)}{=} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix} \tag{11.2}$$

in 2×2 Blockformat:

$$\begin{aligned} S^{k0} &= \frac{i\hbar}{4}\left(\begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{i\hbar}{2} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & -\sigma^k \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{11.3a}$$

$$\begin{aligned} S^{kl} &= \frac{i\hbar}{4}\left(\begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^l \\ -\sigma^l & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \sigma^l \\ -\sigma^l & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= -\frac{i\hbar}{4} \begin{pmatrix} [\sigma^k, \sigma^l] & 0 \\ 0 & [\sigma^k, \sigma^l] \end{pmatrix} \overset{(6.24)}{=} \epsilon^{klm} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \sigma^m & 0 \\ 0 & \sigma^m \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{11.3b}$$

Außerdem verwenden wir wieder die einfach indizierte Schreibweise

$$\Theta_k S_R^k + \eta_k S_B^k \equiv \frac{1}{2} \Omega_{\sigma\tau} S^{\sigma\tau} \tag{11.4}$$

mit den Rotationsgeneratoren S_R und den Boostgeneratoren S_B. Damit können wir die Transformation (8.30) des Diracfeldes bei einer Drehung der Raum-Zeit-Koordinaten folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned} &\psi'(x') = D\psi(\Lambda^{-1}x) = \\ &= \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \left(\Theta_k \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} + \eta_k \frac{i\hbar}{2} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & -\sigma^k \end{pmatrix} \right) \right\} \psi(\Lambda^{-1}x) \end{aligned} \tag{11.5}$$

$\{D\}$ ist nichts anderes als die direkte Summe der links- und rechtshändigen zweidimensionalen Darstellungen (6.78) der Gruppe $\{\mathcal{B}\}$. Folglich sind auch die vierdimensionalen Diracspinoren

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} L(x) \\ R(x) \end{pmatrix} \tag{11.6}$$

nichts anderes als die direkte Summe der zweidimensionalen Weyl-Spinoren L und R, auf denen die links- und rechtshändigen Darstellungen (6.78) basieren.

Warum befassen wir uns überhaupt mit der scheinbar reduziblen Darstel-

lung (11.5), und zerlegen sie nicht in die beiden irreduziblen Darstellungen (6.78)? Der Grund liegt darin, dass das Diracfeld nicht nur unter den kontinuierlichen Transformationen der Lorentzgruppe invariant ist, sondern auch unter den diskreten Symmetrien P und T, und darüber hinaus auch noch unter einer weiteren diskreten Transformation, nämlich der Ladungskonjugation C. Die Gruppe $\{D = (11.5)\}$ wäre zwar als Darstellung der Gruppe $\{\mathcal{B}\}$ reduzibel, als Darstellung der Gruppe $\{\{\mathcal{B}\}, P, T, C\}$ – der Bedeckungsgruppe der erweiterten Lorentzgruppe plus C – ist sie aber *irreduzibel*. In den Abschnitten 11.2.1 und 11.2.3 werden wir sehen, dass es die Raumspiegelung P und die Ladungskonjugation C sind, die die rechtshändigen und linkshändigen Spinorkomponenten verkoppeln.

Bei der Konstruktion der Diracgleichung haben wir an keiner Stelle explizit verlangt, dass die Gleichung nicht nur lorentzinvariant, sondern auch invariant unter Raumspiegelung und Zeitumkehr sein soll. Aber wir haben in Abschnitt 8.1 verlangt, dass die Darstellung kompatibel mit der Energie-Impuls-Gleichung $\sqrt{E^2 - (c\boldsymbol{p})^2} \overset{(8.2)}{=} mc^2$ der Speziellen Relativitätstheorie sein muss. Wegen $E^2 = (-E)^2$ und $\boldsymbol{p}^2 = (-\boldsymbol{p})^2$ ist diese Gleichung invariant unter Zeitspiegelung und Raumspiegelung, und hat uns zu einer Theorie geführt die nicht nur lorentzinvariant ist, sondern auch invariant unter diesen diskreten Transformationen.

11.2.1 Raumspiegelung

Wir benötigen die Darstellung der Raumspiegelung auf der Basis von Vierervektoren im Zeit-Orts-Raum, und wir benötigen die Darstellung der Raumspiegelung auf der Basis von Spinoren. Die vierdimensionale Darstellung

$$\Lambda_P \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{11.7}$$

auf Basis von Raum-Zeit-Vektoren wird per Definition vorgegeben. Die Darstellung D_P auf Basis von Spinoren wird daraus berechnet mithilfe der Gleichung

$$D_P^{-1}\gamma^\nu D_P \overset{(8.32)}{=} \Lambda^\nu_{P\mu}\gamma^\mu \ . \tag{11.8}$$

Wegen $\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu \overset{(8.9)}{=} 2g^{\mu\nu}\mathbb{1}$ ist $\gamma^0\gamma^0\gamma^0 = +\gamma^0$, und $\gamma^0\gamma^k\gamma^0 = -\gamma^k$. Deshalb ist

$$D_P \equiv e^{i\varphi}\gamma^0 \overset{(8.15a)}{=} e^{i\varphi}\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \tag{11.9}$$

mit unbestimmtem Phasenfaktor φ eine Darstellung der Paritätstransformation auf der Basis von Diracspinoren, die Gleichung (11.8) erfüllt.

Wir wenden die Elemente dieser Darstellung von P auf das Diracfeld $\psi(x)$ an. Mit $\Lambda_P^{-1} = \Lambda_P$ ist

$$\begin{aligned} P\Big(\psi(x)\Big) = \psi'(x') = D_P\psi(\Lambda_P^{-1}x) \ = \\ = \begin{pmatrix} L_1'(x') \\ L_2'(x') \\ R_1'(x') \\ R_2'(x') \end{pmatrix} = e^{i\varphi}\begin{pmatrix} R_1(x^0,-\boldsymbol{x}) \\ R_2(x^0,-\boldsymbol{x}) \\ L_1(x^0,-\boldsymbol{x}) \\ L_2(x^0,-\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} \ . \end{aligned} \tag{11.10}$$

D_P vertauscht die Spinorkomponenten R mit den Spinorkomponenten L. Also kann die Darstellung $\{D, D_P, D_T, D_C\}$ der Gruppe $\{\{\mathcal{B}\}, P, T, C\}$ nicht in zwei zweidimensionale Darstellungen reduziert werden.

11.2.2 Zeitumkehr

Wir benötigen die Darstellung der Zeitumkehr auf der Basis von Vierervektoren im Zeit-Orts-Raum, und wir benötigen die Darstellung der Zeitumkehr auf der Basis von Spinoren. Bei den Vektoren im Zeit-Orts-Raum gibt es eine Komplikation: Die Matrix

$$\Lambda_T \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{11.11}$$

liefert zwar die richtige Transformation von x und d_ν, aber das Eichfeld A muss bei Zeitumkehr anders transformiert werden:

$$T(A) = A' = \begin{pmatrix} \phi'/c \\ \boldsymbol{A}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\phi/c \\ -\boldsymbol{A} \end{pmatrix} \tag{11.12}$$

Man sieht das beispielsweise anhand der Maxwell'schen Gleichung

$$\boldsymbol{E} \overset{(4.128a)}{=} -\boldsymbol{\nabla}\Phi - \mathrm{d}_t \boldsymbol{A} \,. \tag{11.13}$$

Bei der Raumspiegelung P gilt $P(\boldsymbol{E}) = -\boldsymbol{E}$, und wegen $P(\boldsymbol{\nabla}) = -\boldsymbol{\nabla}$ und $P(\mathrm{d}_t) = +\mathrm{d}_t$ folgt $P(\phi) = +\phi$ und $P(\boldsymbol{A}) = -\boldsymbol{A}$. Bei Zeitumkehr T gilt $T(\boldsymbol{E}) = +\boldsymbol{E}$, und wegen $T(\boldsymbol{\nabla}) = +\boldsymbol{\nabla}$ und $T(\mathrm{d}_t) = -\mathrm{d}_t$ folgt $T(\phi) = +\phi$ und $T(\boldsymbol{A}) = -\boldsymbol{A}$. Raumspiegelung und Zeitumkehr haben also auf x^ν und d_ν unterschiedliche Wirkung, jedoch auf das Eichfeld A die identische Wirkung! Wegen der gegenläufigen Vorzeichenänderung von d_ν und A_ν bei Zeitumkehr existiert – anders als bei der Raumspiegelung – kein Matrixoperator, der diese Transformation darstellen kann.

Deshalb definiert man die Zeitumkehrtransformation T so, dass eine Lösung ψ der Diracgleichung

$$\Big(i\hbar c\gamma^\nu(\mathrm{d}_\nu + \frac{i}{\hbar}qA_\nu) - mc^2\Big)\psi \overset{(8.26a)}{=} 0 \tag{11.14a}$$

in eine Lösung ψ^* ihrer konjugiert-komplexen Gleichung

$$\Big(-i\hbar c\gamma^{\nu *}(\mathrm{d}_\nu - \frac{i}{\hbar}qA_\nu) - mc^2\Big)\psi^* = 0 \tag{11.14b}$$

transformiert wird. Das erreicht man durch die folgenden Definitionen:

$$T\Big(\gamma^\nu\Big) \equiv -D_T^{-1}\gamma^{\nu *}D_T \tag{11.15a}$$

$$T\Big(V\Big) \equiv \Lambda_T V \quad \text{mit } \Lambda_T = (11.11) \tag{11.15b}$$

$$T\Big(q\Big) \equiv -q \tag{11.15c}$$

$$T\Big(\psi(x)\Big) \equiv D_T \psi^*(\Lambda_T^{-1} x) \tag{11.15d}$$

V ist ein beliebiger Lorentzvektor. Durch diese Definition von T werden – genau wie benötigt – die Vorzeichen von d_ν und A_ν in (11.14) gegenläufig geändert. Wie die Ladungskonjugation C, die wir im folgenden Abschnitt besprechen, ändert auch die Zeitumkehr T das Vorzeichen des Ladungsparameters q. Im Übrigen sind T und C aber unterschiedliche Transformationen. D_T ist die Darstellung der Zeitumkehrtransformation auf der Basis von Spinoren. Man findet sie mithilfe von (8.32):

$$-D_T^{-1}\gamma^{\nu *} D_T \overset{(8.32)}{=} \Lambda^\nu_{T\,\mu}\gamma^\mu \overset{(11.11)}{=} -g_{\nu\mu}\gamma^\mu \tag{11.16}$$

Man beachte, dass auf der linken Seite der Gleichung $-\gamma^{\nu *}$ aus (11.14b) auftaucht, auf der rechten Seite aber γ^ν aus (11.14a). Denn die linke Seite von (8.32) beschreibt die Transformation der γ-Matrizen im Spinorraum, so dass (11.15a) einzusetzen ist. Dagegen beschreibt die rechte Seite von (8.32), wie die vier γ-Matrizen transformiert werden, wenn man sie formal als Komponenten eines Lorentzvektors betrachtet, so dass (11.15b) einzusetzen ist. Diese Gleichung wird gelöst durch

$$\begin{aligned} D_T = e^{i\chi}\gamma^1\gamma^3 &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^3 \\ -\sigma^3 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= e^{i\chi}\begin{pmatrix} -\sigma^1\sigma^3 & 0 \\ 0 & -\sigma^1\sigma^3 \end{pmatrix} = ie^{i\chi}\begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{11.17}$$

mit unbestimmtem Phasenfaktor χ, wie man mit den Definitionen von γ^ν in (8.15) und mit

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu \overset{(8.9)}{=} 2g^{\mu\nu}\mathbb{1} \implies (\gamma^\alpha)^{-1} = \gamma^\alpha \tag{11.18}$$

durch direktes Einsetzen überprüft. An der Form der Matrix (11.17) erkennt man, dass die Zeitumkehr die L- und R-Komponenten des Diracfeldes $\psi(x)$ *nicht* verkoppelt:

$$T\Big(\psi(x)\Big) = \psi'(x') = D_T\psi^*(\Lambda_T^{-1}x) \; =$$
$$= ie^{i\chi}\begin{pmatrix}\sigma^2 & 0\\ 0 & \sigma^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}L_1^*(\Lambda_T^{-1}x)\\ L_2^*(\Lambda_T^{-1}x)\\ R_1^*(\Lambda_T^{-1}x)\\ R_2^*(\Lambda_T^{-1}x)\end{pmatrix} = -e^{i\chi}\begin{pmatrix}-L_2^*(-x^0,\boldsymbol{x})\\ +L_1^*(-x^0,\boldsymbol{x})\\ -R_2^*(-x^0,\boldsymbol{x})\\ +R_1^*(-x^0,\boldsymbol{x})\end{pmatrix} \tag{11.19}$$

Das Verfahren der Zeitumkehr wirkt reichlich gekünstelt und wenig elegant. Einmal mehr fällt auf, dass der Begriff der Zeit sich nur mit Mühe in die Quantentheorie einfügen lässt.

11.2.3 Ladungskonjugation

Der Name dieser diskontinuierlichen Transformation gibt ihre Wirkung nur sehr unvollständig wieder. Die Ladungskonjugation ist per Definition eine Transformation, welche Lösungen der Dirac-Gleichung

$$(8.26a) = i\hbar c\gamma^\nu(\mathrm{d}_\nu + \frac{i}{\hbar}qA_\nu)\psi - mc^2\psi = 0 \tag{11.20a}$$

in Lösungen ihrer adjungierten transponierten Gleichung

$$(8.26b)^\sim = i\hbar c(-\gamma^{\nu\sim})(\mathrm{d}_\nu - \frac{i}{\hbar}qA_\nu)\,\overline{\psi}^\sim - mc^2\,\overline{\psi}^\sim = 0 \tag{11.20b}$$

umwandelt. Weil in anderem Zusammenhang adjungiert das gleiche bedeutet wie komplex konjugiert und transponiert, würde dort adjungiert transponiert das gleiche bedeuten wie komplex konjugiert. In der Diractheorie kommt aber, wenn man den adjungierten Spinor bildet, noch die Multiplikation (von rechts) mit der Matrix γ^0 hinzu. Deshalb ist $\overline{\psi}^\sim \neq \psi^*$.

Mit Blick auf (11.20) wird die Ladungskonjugation C folgendermaßen definiert:

$$C\Big(\gamma^\nu\Big) \equiv -D_C^{-1}\gamma^{\nu\sim}D_C \tag{11.21a}$$
$$C\Big(q\Big) \equiv -q \tag{11.21b}$$

$$C\Big(V\Big) \equiv \Lambda_C V(\Lambda_C^{-1}x) \overset{(11.22)}{=} V \tag{11.21c}$$

$$C\Big(\psi(x)\Big) \equiv D_C\overline{\psi}^{\sim}(\Lambda_C^{-1}x)\ . \tag{11.21d}$$

V ist ein beliebiger Lorentzvektor, Λ_C ist eine Darstellung von C auf der Basis von Lorentzvektoren, die wir gleich definieren werden. D_C ist eine Darstellung von C auf der Basis von Spinoren.

Die Ladungskonjugation C ist dann eine Symmetrie des Diracfeldes, wenn $D_C\overline{\psi}^{\sim}$ einen beobachtbaren Zustand beschreibt, falls ψ einen beobachtbaren Zustand beschreibt. $D_C\overline{\psi}^{\sim}$ beschreibt die Antiteilchen der Teilchen, die durch ψ beschrieben werden. (Wir verwenden die Begriffe „Feld“, „Welle“, und „Teilchen“ hier – wie auch überall sonst in diesem Buch – synonym.) Deshalb wird die Ladungskonjugation in der quantisierten Theorie oft auch Teilchen-Antiteilchen-Konjugation genannt.

Als Darstellung der Ladungskonjugation C auf Basis von Lorentzvektoren wählt man die triviale Darstellung

$$\Lambda_C V \equiv \mathbb{1}V = V\ . \tag{11.22}$$

Damit gilt insbesondere für den vierdimensionalen Ortsvektor

$$\Lambda_C x = x\ .$$

Die Ladungskonjugation wird so definiert, dass sie nur Änderungen im Spinorraum und beim Parameter q bewirkt. Anders als P und T ändert C nicht die Raum-Zeit-Koordinaten der Felder.

Jetzt ermitteln wir D_C mithilfe von (8.32):

$$-D_C^{-1}\gamma^{\nu\sim}D_C \overset{(8.32)}{=} \Lambda^{\nu}_{C\mu}\gamma^{\mu} \overset{(11.22)}{=} \gamma^{\nu} \tag{11.23}$$

Man beachte, dass auf der linken Seite der Gleichung $-\gamma^{\nu\sim}$ aus (11.20b) auftaucht, auf der rechten Seite aber γ^{ν} aus (11.20a). Denn die linke Seite von (8.32) beschreibt die Transformation der γ-Matrizen im Spinorraum, so dass (11.21a) einzusetzen ist. Dagegen beschreibt die rechte Seite von (8.32), wie die vier γ-Matrizen transformiert werden, wenn man sie formal als

Komponenten eines Lorentzvektors betrachtet, so dass (11.21c) einzusetzen ist. Die Gleichung wird gelöst durch

$$D_C \equiv ie^{i\zeta}\gamma^0\gamma^2 = ie^{i\zeta}\begin{pmatrix}0 & \mathbb{1}\\ \mathbb{1} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \sigma^2\\ -\sigma^2 & 0\end{pmatrix} = ie^{i\chi}\begin{pmatrix}-\sigma^2 & 0\\ 0 & \sigma^2\end{pmatrix}, \quad (11.24)$$

wie man mit den Definitionen von γ^ν in (8.15) und mit (11.18) durch direkte Berechnung der vier Produkte nachprüft. ζ ist ein unbestimmter Phasenfaktor. Man vergleiche (11.24) mit (11.17)! D_C unterscheidet sich von D_T nur durch ein Vorzeichen (bzw. 2 Vorzeichen, wenn man beide Komponenten von σ^2 einzeln zählt). Dass die Ladungskonjugation dennoch – anders als die Zeitumkehr – die L- und R-Komponenten der Spinoren vertauscht liegt daran, dass bei der Ladungskonjugation zusätzlich noch gemäß (11.21d) der Übergang $\psi \to \overline{\psi}^{\sim}$ durchgeführt wird:

$$C\Big(\psi(x)\Big) = \psi'(x') = D_C\overline{\psi}^{\sim}(\Lambda_C^{-1}x) =$$
$$= ie^{i\zeta}\gamma^0\gamma^2\begin{pmatrix}\psi_3^*(x)\\ \psi_4^*(x)\\ \psi_1^*(x)\\ \psi_2^*(x)\end{pmatrix} = e^{i\zeta}\begin{pmatrix}-\psi_4^*(x)\\ +\psi_3^*(x)\\ +\psi_2^*(x)\\ -\psi_1^*(x)\end{pmatrix} = e^{i\zeta}\begin{pmatrix}-R_2^*(x)\\ +R_1^*(x)\\ +L_2^*(x)\\ -L_1^*(x)\end{pmatrix}$$

Die Ladungskonjugation vertauscht die rechts- und linkshändigen Spinorkomponenten, vertauscht die beiden rechtshändigen und die beiden linkshändigen Komponenten nochmal untereinander, ändert je ein Vorzeichen der rechts- und linkshändigen Komponenten, und bildet das Konjugiert-Komplexe.

Neben der Symmetrie unter Raumspiegelung ist die Symmetrie unter Ladungskonjugation der zweite (und letzte) Grund dafür, dass die vierdimensionale Darstellung $\{D, D_P, D_T, D_C\}$ der Gruppe $\{\{\mathcal{B}\}, P, T, C\}$ nicht in zwei zweidimensionale Darstellungen reduziert werden kann.

11.3 Diskrete Symmetrien des Weyl-Feldes

Die vierdimensionale Dirac-Darstellung der Gruppe $\{\mathcal{B}\}$ ist die direkte Summe der linkshändigen und rechtshändigen zweidimensionalen Weyl-Darstellungen (6.78). Umgekehrt formuliert: Die vierdimensionale Dirac-

Darstellung der Gruppe $\{\mathcal{B}\}$ kann in die beiden zweidimensionalen Weyl-Darstellungen reduziert werden, *wenn* sie nicht zusätzlich die diskreten Symmetrien der Raumspiegelung und/oder der Ladungskonjugation enthält. Denn diese beiden Symmetrien vertauschen die beiden linkshändigen mit den beiden rechtshändigen Komponenten der Dirac-Spinoren und machen dadurch die vierdimensionale Darstellung irreduzibel, sind also keine Symmetrien der Weyl-Darstellungen. Nur die Darstellung der Zeitumkehr auf Basis von vierdimensionalen Dirac-Spinoren

$$T\Big(\psi(x)\Big) = D_T \psi^*(\Lambda_T^{-1} x) \overset{(11.19)}{=} ie^{i\chi} \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix} \psi^*(\Lambda_T^{-1} x) \tag{11.25}$$

ist reduzibel, und deshalb auch eine diskrete Symmetrie der linkshändigen und rechtshändigen Weyl-Felder:

$$D_T = ie^{i\chi} \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix} = ie^{i\chi} (\sigma^2 \oplus \sigma^2) \tag{11.26}$$

11.4 Diskrete Symmetrien des Klein-Gordon-Feldes

Die Lagrangedichte des Klein-Gordon-Feldes

$$\mathcal{L} \overset{(10.10)}{=} c^2 \hbar^2 (\mathrm{d}_\mu \psi^*) \mathrm{d}^\mu \psi - m^2 c^4 \psi^* \psi \tag{11.27}$$

ist aufgrund ihrer quadratischen Struktur und ihrer Invarianz bei Wechsel zur konjugiert-komplexen Gleichung offensichtlich invariant unter Zeitspiegelung, unter Raumspiegelung, sowie unter Ladungskonjugation. Da wir die Klein-Gordon-Gleichung aus der Dirac-Gleichung abgeleitet haben ist es nicht überraschend, dass beide nicht nur lorentzinvariant sind, sondern auch die gleichen diskreten Symmetrien aufweisen.

12 Inhomogene Felder

12.1 Die Greensfunktion des Klein-Gordon-Feldes

Die homogene Klein-Gordon-Gleichung

$$(\hbar^2 c^2 \mathrm{d}^\mu \mathrm{d}_\mu + m^2 c^4)\psi^{(0)}(x) \overset{(10.2)}{=} 0 \tag{12.1}$$

beschreibt ein freies, mit nichts wechselwirkendes Feld. Wenn es Wechselwirkungen gibt, dann wird sie zu einer inhomogenen Gleichung, in der Wechselwirkungen als Quellterme $j(x)$ auftauchen:

$$(\hbar^2 c^2 \mathrm{d}^\mu \mathrm{d}_\mu + m^2 c^4)\psi(x) = j(x) \tag{12.2}$$

Die Lösungen dieser inhomogenen Gleichung können als

$$\psi(x) = \psi^{(0)}(x) + \int\limits_\Omega \mathrm{d}^3 y \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}y^0 \, \frac{i}{\hbar c} \, G(x,y) j(y) \tag{12.3}$$

angesetzt werden. $\psi^{(0)}(x)$ ist eine Lösung der homogenen Gleichung (12.1). Der Quellterm j bewirkt am Raumzeitpunkt y einen zusätzlichen Anteil, der sich – durch die Funktion $\frac{i}{\hbar c} G(x,y)$ beschrieben – von y nach x ausbreitet. Nach dem Huygens'schen Prinzip kann man sich $\frac{i}{\hbar c} G(x,y) j(y)$ als eine Welle vorstellen, die vom Quellpunkt y ausgeht, und sich am Raumzeitpunkt x mit dem freien Feld und den Wellen, die von sämtlichen anderen Quellpunkten ausgehen, zum inhomogenen Feld $\psi(x)$ überlagert.

Summiert wird in (12.3) nicht etwa nur über die Orte y im Rückwärts-Lichtkegel von x, sondern über alle Orte im Normierungsvolumen und über alle Zeitpunkte der Vergangenheit und der Zukunft. Denn erstens werden wir Wellen, die sich rückwärts in der Zeit ausbreiten, interpretieren als

Wellen von Antifeldern, die sich vorwärts in der Zeit ausbreiten. Zweitens greifen wir hier schon vor auf die beabsichtigte Quantisierung. Wir werden sehen, dass sich raumartige Wechselwirkungen von Feldern und Antifeldern außerhalb des Vorwärts- und Rückwärts-Lichtkegels gegenseitig exakt auf Null kompensieren. Während man Antifelder durchaus auch als klassische Felder definieren kann, ist die Kompensation raumartiger virtueller Felder nur im Rahmen der Quantentheorie verständlich.

$G(x,y)$ wird als Greensfunktion[1] bezeichnet. In der Feldtheorie ist der Name Propagator[2] üblich. Hinweis: Statt des Faktors $i/\hbar c$ klammern einige Autoren den Faktor $-i/\hbar c$ und einige Autoren überhaupt keinen Faktor aus der Greensfunktion aus.

Indem man den Ansatz (12.3) in die inhomogene Gleichung (12.2) einsetzt, findet man

$$\begin{aligned} 0 + \int_\Omega \mathrm{d}^3y \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}y^0 \, (\hbar^2c^2 \mathrm{d}^\mu \mathrm{d}_\mu + m^2c^4) \, \frac{i}{\hbar c} \, G(x,y) j(y) \; = \\ = j(x) = \int_\Omega \mathrm{d}^3y \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}y^0 \, \delta^{(4)}(x-y) j(y) \\ \Longrightarrow \quad (\hbar^2c^2 \mathrm{d}^\mu \mathrm{d}_\mu + m^2c^4) \, \frac{i}{\hbar c} \, G(x,y) = \delta^{(4)}(x-y) \; . \end{aligned} \tag{12.4}$$

$\frac{i}{\hbar c} G(x,y)$ ist eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung, wenn die inhomogene Quelle $j(x)$ zu einem unendlich kurzen, unendlich harten „Probeschlag“ in Form der Deltafunktion verdichtet wird.

Falls das betrachtete System translationsinvariant ist, hängt $G(x,y)$ nur von der Differenz $(x-y)$ ab, und man kann die Fourier-Transformation

$$G(x-y) \overset{(7.15)}{=} \frac{1}{\Omega} \sum_{\boldsymbol{k}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}k^0}{2\pi} \, \widetilde{G}(k) \exp\{-ik(x-y)\} \tag{12.5}$$

ausführen. Durch Einsetzen von (12.5) und

[1] benannt nach ihrem Erforscher George Green (1793 - 1841)
[2] lateinisch: propagare = fortpflanzen, ausbreiten

$$\delta^{(4)}(x-y) \overset{(7.16a)}{=} \frac{1}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{k}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}k^0}{2\pi}\, \exp\{-ik(x-y)\} \tag{12.6}$$

in (12.4) folgt

$$(-\hbar^2c^2k^2 + m^2c^4)\,\frac{i}{\hbar c}\,\widetilde{G}(k) = 1$$

$$\boxed{\widetilde{G}(k) = \frac{+i}{\hbar c\Big(k^2 - m^2\frac{c^2}{\hbar^2} + i\epsilon'\Big)}} \tag{12.7a}$$

$$\widetilde{G}(k) = \frac{+i}{\hbar c\Big(k^0 + \frac{\omega_{\boldsymbol{k}}}{c} - i\epsilon\Big)\Big(k^0 - \frac{\omega_{\boldsymbol{k}}}{c} + i\epsilon\Big)}\,. \tag{12.7b}$$

Hier wurde

$$k^2 - \frac{m^2c^2}{\hbar^2} = (k^0)^2 - \Big(\boldsymbol{k}^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\Big) = \Big(k^0 + \frac{\omega_{\boldsymbol{k}}}{c}\Big)\Big(k^0 - \frac{\omega_{\boldsymbol{k}}}{c}\Big)$$

$$\frac{\omega_{\boldsymbol{k}}}{c} \overset{(7.18)}{=} +\sqrt{\boldsymbol{k}^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}} \tag{12.8}$$

benutzt. Nur „auf der Masseschale“ ist k^0 die Nullkomponente eines Vierervektors mit dem relativistisch invarianten Quadrat $k^2 = (k^0)^2 - \boldsymbol{k}^2 = m^2c^2/\hbar^2$. Dagegen ist unter dem Integral (12.5) die Integrationsvariable k^0 ein von $\boldsymbol{k}$ unabhängiger Parameter, der das gesamte Kontinuum von Werten zwischen $-\infty$ und $+\infty$ annimmt. Bei $k = \mp\, mc/\hbar$ bzw. $k^0 = \mp\omega_{\boldsymbol{k}}/c$ hätte $\widetilde{G}(k)$ zwei Pole erster Ordnung, wenn nicht der infinitesimal kleine imaginäre Summand $-i\epsilon$ zu $\omega_{\boldsymbol{k}}/c$ addiert worden wäre:

$$\omega_{\boldsymbol{k}}/c \;\to\; \omega_{\boldsymbol{k}}/c - i\epsilon \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \epsilon \in \mathbb{R}\,,\ \epsilon > 0 \\ \dfrac{\epsilon}{\omega_{\boldsymbol{k}}/c} \le \dfrac{\epsilon}{mc/\hbar} \ll 1 \end{cases} \tag{12.9a}$$

Dadurch werden die Pole, die in Abb. 12.1 als rote Punkte eingetragen sind, von der reellen Achse in die komplexe Ebene geschoben. Es gibt insgesamt vier verschiedene Möglichkeiten, die beiden Pole in die obere oder

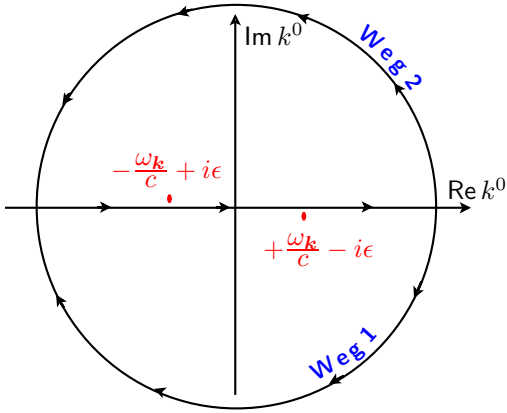


Abb. 12.1 : Pole und Integrationswege

untere komplexe k^0-Ebene zu schieben. Den Vorteil der hier getroffene Wahl, die zum Feynman-Propagator führt, werden wir angeben, sobald wir die Integration ausgeführt haben. Den infinitesimalen Parameter ϵ' definiert man durch

$$\Big(k^0+(\omega_{\boldsymbol{k}}/c-i\epsilon)\Big)\Big(k^0-(\omega_{\boldsymbol{k}}/c-i\epsilon)\Big) \;=$$
$$= k^2-m^2\frac{c^2}{\hbar^2}+i\epsilon\,\frac{2\omega_{\boldsymbol{k}}}{c}+\mathcal{O}(\epsilon^2)\equiv k^2-m^2\frac{c^2}{\hbar^2}+i\epsilon'$$
$$\text{mit } \epsilon'\in\mathbb{R}\ ,\ 0<\epsilon'\ll m^2\frac{c^2}{\hbar^2}\ . \tag{12.9b}$$

Falls $x^0>y^0$ ist, kann man den Integrationsweg von (12.5) – ohne den Wert des Integrals zu ändern – in der unteren komplexen Halbebene schließen (Weg 1 in Abb. 12.1) und mithilfe des Residuen-Satzes[3] berechnen. Denn bei großem Realteil von k^0 bewirkt der Summand $(k^0)^2$ im Nenner, bei großem negativen Imaginärteil von k^0 die Exponentialfunktion im Zähler, dass das Integral über den unteren Halbkreis Null ergibt.

[3] In [37] findet man eine auf den Bedarf von Physikern zugeschnittene, kurz gefasste Erklärung dieses wichtigen mathematischen Werkzeugs.

Damit wird der Pol bei $k^0 = +\omega_{\boldsymbol{k}}/c - i\epsilon$ vom Integrationsweg eingeschlossen, und man findet bei Vernachlässigung von Summanden $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ als Lösung von (12.5) die Greensfunktion

$$\begin{aligned} G(x-y) &\overset{x^0\geq y^0}{=} \frac{i}{\Omega 2\pi}\sum_{\boldsymbol{k}} \exp\{+i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\}\cdot \\ &\qquad \cdot \oint_{\circlearrowleft} \mathrm{d}k^0 \, \frac{\exp\{-ik^0(x^0-y^0)\}}{\hbar c\Big(k^0+\frac{\omega_{\boldsymbol{k}}}{c}-i\epsilon\Big)\Big(k^0-\frac{\omega_{\boldsymbol{k}}}{c}+i\epsilon\Big)} \\ &= \frac{+1}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{k}} \exp\{+i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\}\,\frac{\exp\{-i(\omega_{\boldsymbol{k}}/c-i\epsilon)(x^0-y^0)\}}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}-2i\epsilon}\,. \end{aligned} \tag{12.10}$$

Hier gab es einen Vorzeichenwechsel, weil der Integrationsweg im Uhrzeigersinn durchlaufen wurde. Jetzt kann man ϵ gegenüber $\omega_{\boldsymbol{k}}/c$ vernachlässigen, und erhält die Greensfunktion

$$G(x-y) \overset{x^0\geq y^0}{=} \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{\exp\{-ik(x-y)\}}{\Omega 2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}} \equiv G^a(x-y)\,. \tag{12.11a}$$

Falls $x^0 < y^0$ ist, schließt man das Integral in der oberen komplexen Halbebene (Weg 2 in Abb. 12.1):

$$\begin{aligned} G(x-y) &\overset{x^0\leq y^0}{=} \frac{i}{\Omega 2\pi}\sum_{\boldsymbol{k}} \exp\{+i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\}\cdot \\ &\qquad \cdot \oint_{\circlearrowleft} \mathrm{d}k^0 \, \frac{\exp\{-ik^0(x^0-y^0)\}}{\hbar c\Big(k^0+\frac{\omega_{\boldsymbol{k}}}{c}-i\epsilon\Big)\Big(k^0-\frac{\omega_{\boldsymbol{k}}}{c}+i\epsilon\Big)} \\ &= \frac{-1}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{k}} \exp\{+i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\}\,\frac{\exp\{-i(-\omega_{\boldsymbol{k}}/c+i\epsilon)(x^0-y^0)\}}{-2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}+2i\epsilon} \end{aligned}$$

Weil symmetrisch über sämtliche positiven und negativen Wellenzahlen $\boldsymbol{k}$ summiert wird, und $\omega_{-\boldsymbol{k}} = \omega_{\boldsymbol{k}}$ ist, darf man $\boldsymbol{k}$ gegen $-\boldsymbol{k}$ tauschen, und erhält bei Vernachlässigung von ϵ

$$G(x-y) \overset{x^0 \le y^0}{=} \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{\exp\{-ik(y-x)\}}{\Omega 2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}} \equiv G^b(y-x) \ . \tag{12.11b}$$

Die Reihenfolge von x und y wurde in den Argumenten von $G^a(x-y)$ und $G^b(y-x)$ so definiert, dass sie immer die Form $G^x(\text{später} - \text{früher})$ haben. Für $G(x-y)$ gilt diese Regel nicht. Nur als Integrationsvariable nimmt k^0 unabhängig von $\boldsymbol{k}$ sämtliche Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ an. In (12.11) gilt wieder $k^0 = \omega_{\boldsymbol{k}}/c = +\sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2c^2/\hbar^2} > 0$, und k^0 ist durch $\boldsymbol{k}$ festgelegt.

In beiden Propagatoren (12.11) hat die Null-Komponente der Exponentialfunktion die Form

$$\exp\{-i \cdot (\underbrace{\text{Frequenz}}_{\ge 0} \cdot \underbrace{\text{Zeitintervall}}_{>0})\} \tag{12.12}$$

mit positivem Frequenz-Zeitintervall-Produkt. Das ist auf die Wahl der Verschiebung der Pole zurückzuführen, die in Abbildung 12.1 skizziert ist. Jede der drei anderen Möglichkeiten, die Pole in die komplexe Ebene zu schieben, hätte zu mindestens einem Residuum mit negativem Frequenz-Zeitintervall-Produkt geführt. Nur Lösungen mit positivem Frequenz-Zeitintervall-Produkt können interpretiert werden als Felder oder Antifelder mit positiver Energie, die sich vorwärts durch die Zeit bewegen.

Als Summen ebener Wellen sind $G^a(x-y)$ und $G^b(y-x)$ Lösungen der homogenen Klein-Gordon-Gleichung (12.1), aber keine Lösungen der inhomogenen Gleichung (12.4), obwohl wir (12.11) doch aus (12.4) abgeleitet haben! Die Erklärung dafür steckt in den Randbedingungen $x^0 > y^0$ bzw. $x^0 < y^0$, die in (12.11) über den Gleichheitszeichen stehen. Wir müssen diese Randbedingungen auch formal in die Lösungen integrieren, damit sie zu Lösungen der inhomogenen Gleichung (12.4) werden. Das gelingt mithilfe der Stufenfunktion

$$\theta(x^0 - y^0) \equiv \begin{cases} 1 & \text{falls } x^0 > y^0 \\ 1/2 & \text{falls } x^0 = y^0 \\ 0 & \text{falls } x^0 < y^0 \end{cases} \tag{12.13a}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^0}\theta(x^0 - y^0) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^0}\theta(y^0 - x^0) = \delta(x^0 - y^0) \ . \tag{12.13b}$$

Weil die Stufenfunktion bei $x^0 = y^0$ einen Sprung macht, ist ihre Ableitung die Deltafunktion. Mit der Stufenfunktion lassen sich die beiden Gleichungen (12.11) zu

$$G(x-y) \overset{x^0 \neq y^0}{=} \theta(x^0-y^0) \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{\exp\{-ik(x-y)\}}{\Omega 2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}} + \\ + \theta(y^0-x^0) \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{\exp\{-ik(y-x)\}}{\Omega 2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}} \tag{12.14}$$

zusammenfassen.

Um uns zu vergewissern, dass dies nun eine Lösung der inhomogenen Gleichung (12.4) ist, setzen wir in (12.4) zunächst die Lösung $(i/\hbar c)\theta(x^0 - y^0)G^a(x-y)$ ein. d_μ sind Ableitungen nach x^μ, bei denen y^μ als Konstante zu betrachten ist. Außerdem werden wir in (12.17)

$$\mathrm{d}_\mu \theta(x^0-y^0) = \delta_{0\mu}\, \delta(x^0-y^0) \tag{12.15}$$

und die Eigenschaft

$$f(\tau)\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\delta(\tau) = -\delta(\tau)\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} f(\tau) \tag{12.16}$$

der Deltafunktion verwenden.

$$\begin{aligned}
&(\hbar^2 c^2 \mathrm{d}^\mu \mathrm{d}_\mu + m^2c^4) \frac{i}{\hbar c} \theta(x^0-y^0) G^a(x-y) \;= \\
&= i\hbar c \Big(\mathrm{d}^\mu \mathrm{d}_\mu \theta(x^0-y^0)\Big) G^a(x-y) + 2i\hbar c \Big(\mathrm{d}^\mu \theta(x^0-y^0)\Big) \mathrm{d}_\mu G^a(x-y) + \\
&\quad + \theta(x^0-y^0) \underbrace{(\hbar^2 c^2 \mathrm{d}^\mu \mathrm{d}_\mu + m^2c^4) \frac{i}{\hbar c} G^a(x-y)}_{0} = \\
&= -i\hbar c \delta(x^0-y^0)\, \mathrm{d}_0 G^a(x-y) + 2i\hbar c \delta(x^0-y^0)\, \mathrm{d}_0 G^a(x-y) = \\
&= i\delta(x^0-y^0) \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{(-i\hbar c k^0) \exp\{-ik(x-y)\}}{\Omega 2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}} =
\end{aligned}$$

$$= +\frac{1}{2}\underbrace{\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{\exp\{+i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\}}{\Omega}}_{\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\underbrace{\delta(x^0-y^0)\exp\{-ik^0(x_0-y_0)\}}_{\delta(x^0-y^0)} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\delta^{(4)}(x-y) \tag{12.17}$$

Wenn man $\theta(y^0-x^0)G^b(y-x)$ anstelle von $\theta(x^0-y^0)G^a(x-y)$ in (12.4) einsetzt, erhält man einen Vorzeichenwechsel aufgrund des unterschiedlichen Vorzeichens von x in der Exponentialfunktion, und einen zweiten Vorzeichenwechsel wegen (12.13b), insgesamt also das gleiche Ergebnis. Die Summe der beiden Lösungen stimmt mit (12.4) überein.

12.2 Die Greensfunktion des Dirac-Feldes

Bei der Definition und Berechnung der Greensfunktion des Dirac-Feldes gehen wir in enger Analogie zum Klein-Gordon-Feld vor. Das freie, mit nichts wechselwirkende Dirac-Feld $\psi^{(0)}(x)$ ist eine Lösung der Gleichung

$$(i\hbar c\gamma^\mu \mathrm{d}_\mu - mc^2)\psi^{(0)}(x) \overset{(8.5)}{=} 0\ . \tag{12.18}$$

Wenn Wechselwirkungen als Quellterme $j(x)$ auf der rechten Seite der Gleichung

$$(i\hbar c\gamma^\mu \mathrm{d}_\mu - mc^2)\psi(x) = j(x) \tag{12.19}$$

auftreten, dann kann man das Feld $\psi(x)$ als Überlagerung von Wellen darstellen, die sich von Quelltermen $j(y)$ zum Raumzeitpunkt x ausbreiten und dort mit dem ungestörten Feld $\psi^{(0)}(x)$ zum inhomogenen Feld

$$\psi(x) = \psi^{(0)}(x) + \int_\Omega \mathrm{d}^3y \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}y^0\,\frac{(-i)}{\hbar c}\,S(x,y)j(y) \tag{12.20}$$

überlagern. $S(x,y)$ ist die Greensfunktion des Diracfeldes. Wie beim Klein-Gordon-Feld wird in dieser Gleichung nicht nur über die Orte y im Rückwärts-

Lichtkegel von x, sondern über alle Orte im Normierungsvolumen und über alle Zeitpunkte der Vergangenheit und der Zukunft summiert. Die Greensfunktion ist eine Lösung der inhomogenen Diracgleichung, wenn die Quelle $j(x)$ zu einer Deltafunktion verdichtet wird:

$$(i\hbar c\gamma^\mu \mathrm{d}_\mu - mc^2)\,\frac{(-i)}{\hbar c}\,S(x,y) = \delta^{(4)}(x-y) \tag{12.21}$$

Falls das betrachtete System translationsinvariant ist, hängt $S(x,y)$ nur von der Differenz $(x-y)$ ab, und man kann die Fourier-Transformation

$$S(x-y) \overset{(7.15)}{=} \frac{1}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{k}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}k^0}{2\pi}\,\widetilde{S}(k)\exp\{-ik(x-y)\} \tag{12.22}$$

ausführen. Man setzt diese Gleichung und die Form (12.6) der Deltafunktion in die inhomogene Gleichung (12.21) ein, und findet

$$(+\hbar c\gamma^\mu k_\mu - mc^2)\,\frac{(-i)}{\hbar c}\,\widetilde{S}(k) = 1\ . \tag{12.23}$$

Wegen

$$\gamma^\mu k_\mu \gamma^\nu k_\nu = \tfrac{1}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu k_\mu k_\nu + \tfrac{1}{2}\gamma^\nu\gamma^\mu k_\nu k_\mu = \underbrace{\tfrac{1}{2}\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}}_{\overset{(8.9)}{=}\,g^{\mu\nu}} k_\mu k_\nu = k^2$$

ist

$$\gamma^\mu k_\mu - m\tfrac{c}{\hbar} = \left(\gamma^\mu k_\mu - m\tfrac{c}{\hbar}\right)\frac{\left(\gamma^\nu k_\nu + m\frac{c}{\hbar}\right)}{\left(\gamma^\nu k_\nu + m\frac{c}{\hbar}\right)} = \frac{k^2 - m^2\frac{c^2}{\hbar^2}}{\left(\gamma^\nu k_\nu + m\frac{c}{\hbar}\right)}\ .$$

Damit erhält man

$$\boxed{\widetilde{S}(k) = \frac{i(\gamma^\nu k_\nu + m\frac{c}{\hbar})}{k^2 - m^2\frac{c^2}{\hbar^2} + i\epsilon'}}\ . \tag{12.24}$$

$\gamma^\nu k_\nu$ kann nur bei $k = 0$ eine diagonale Spinormatrix bilden, siehe (8.15). Also ist der Faktor $\gamma^\nu k_\nu + \mathbb{1} m\frac{c}{\hbar}$ im Zähler niemals Null. Hätten wir den Bruch nicht erweitert, sondern den Faktor $\gamma^\mu k_\mu - \mathbb{1} m\frac{c}{\hbar}$ im Nenner stehen lassen, so hätte man ihm nicht ohne weiteres angesehen, dass er Nullstellen hat. Er hat sie aber, denn $\widetilde{S}(k)$ *hat* Pole. Offenbar sind die Eigenschaften von Ausdrücken mit Gamma-Matrizen im Nenner schwer erkennbar. Deshalb tut man gut daran, sämtliche Spinoren und Spinor-Matrizen stets in den Zähler zu transferieren.

Um bei der Integration (12.22) den beiden Polstellen erster Ordnung auszuweichen, die $\widetilde{S}(k)$ wegen

$$k^2 - m^2\tfrac{c^2}{\hbar^2} \overset{(12.8)}{=} \Big(k^0 + \frac{\omega_{\boldsymbol{k}}}{c}\Big)\Big(k^0 - \frac{\omega_{\boldsymbol{k}}}{c}\Big)$$

bei $k = \mp mc/\hbar$ bzw. $k^0 = \mp\omega_{\boldsymbol{k}}/c$ hat, wurde zu $\omega_{\boldsymbol{k}}/c$ der infinitesimal kleine imaginäre Summand $-i\epsilon$ bzw. zu k^2 der infinitesimal kleine imaginäre Summand $+i\epsilon'$ addiert, siehe (12.9). Dadurch wird – wie in Abb. 12.1 gezeigt – der Pol bei $k^0 = -\omega_{\boldsymbol{k}}/c$ von der reellen Achse in den zweiten Quadranten, der Pol bei $k^0 = +\omega_{\boldsymbol{k}}/c$ in den vierten Quadranten der komplexen k^0-Ebene geschoben. Diese Verschiebung führt zum Feynman-Propagator, dessen Frequenz-Zeit-Produkt stets positiv ist, vergleiche (12.12).

Falls $x^0 > y^0$ ist, kann man den Integrationsweg – ohne den Wert des Integrals zu ändern – in der unteren komplexen Halbebene schließen (Weg 1 in Abb. 12.1). Damit findet man die Greensfunktion

$$\begin{aligned} S(x-y) &\overset{x^0\geq y^0}{=} \frac{i}{\Omega 2\pi}\sum_{\boldsymbol{k}} \exp\{+i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\}\cdot \\ &\qquad \cdot \oint_{\cup} \mathrm{d}k^0\, \frac{(\gamma^\nu k_\nu + m\frac{c}{\hbar})\exp\{-ik^0(x^0-y^0)\}}{(k^0 + \frac{\omega_{\boldsymbol{k}}}{c} - i\epsilon)(k^0 - \frac{\omega_{\boldsymbol{k}}}{c} + i\epsilon)} \\ &= \frac{+1}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{k}} \exp\{-i(\omega_{\boldsymbol{k}}/c - i\epsilon)(x^0-y^0) + i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\}\cdot \\ &\qquad \cdot \frac{(\gamma^0(\omega_{\boldsymbol{k}}/c - i\epsilon) + \gamma^j k_j + m\frac{c}{\hbar})}{2\omega_{\boldsymbol{k}}/c - 2i\epsilon}\ . \end{aligned} \tag{12.25}$$

Die Integrationsvariable nimmt sämtliche Werte $-\infty \le k^0 \le +\infty$ an. Nach der Integration ist $k^0 = +\omega_{\boldsymbol{k}}/c$ wieder der k^0-Wert auf der Masseschale. Außerdem kann ϵ jetzt gegenüber $\omega_{\boldsymbol{k}}/c$ vernachlässigt werden. Man erhält die Greensfunktion

$$S(x-y) \overset{x^0 \ge y^0}{=} \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{(\gamma^\mu k_\mu + mc/\hbar)\exp\{-ik(x-y)\}}{\Omega 2\omega_{\boldsymbol{k}}/c} \,. \tag{12.26a}$$

Falls $x^0 < y^0$ ist, schließt man den Integrationsweg in der oberen komplexen Halbebene (Weg 2 in Abb. 12.1), und erhält die Greensfunktion

$$S(x-y) \overset{x^0 \le y^0}{=} \frac{-1}{\Omega} \sum_{\boldsymbol{k}} \exp\{+i(\omega_{\boldsymbol{k}}/c - i\epsilon)(x^0-y^0) + i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\} \cdot \\ \cdot \frac{(-\gamma^0(\omega_{\boldsymbol{k}}/c - i\epsilon) + \gamma^j k_j + mc/\hbar)}{-2\omega_{\boldsymbol{k}}/c + 2i\epsilon} \,.$$

Weil symmetrisch über sämtliche positiven und negativen Wellenzahlen $\boldsymbol{k}$ summiert wird, und $\omega_{-\boldsymbol{k}} = \omega_{\boldsymbol{k}}$ ist, darf man $\boldsymbol{k}$ gegen $-\boldsymbol{k}$ tauschen, und erhält bei Vernachlässigung von ϵ

$$S(x-y) \overset{x^0 \le y^0}{=} \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{(-\gamma^\mu k_\mu + mc/\hbar)\exp\{+ik(x-y)\}}{\Omega 2\omega_{\boldsymbol{k}}/c} \,. \tag{12.26b}$$

Wir beachten $\hbar k_\mu = p_\mu$, erweitern die beiden Gleichungen (12.26) mit dem Faktor $\hbar c$, und fassen sie mithilfe der Stufenfunktion (12.13) zusammen zum Feynman-Propagator:

$$\begin{aligned} &S(x-y) \overset{x^0 \ne y^0}{=} \\ &= \theta(x^0-y^0) \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{(+\gamma^\mu c p_\mu + mc^2)\exp\{-ik(x-y)\}}{\Omega 2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}} + \\ &+ \theta(y^0-x^0) \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{(-\gamma^\mu c p_\mu + mc^2)\exp\{-ik(y-x)\}}{\Omega 2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}} \end{aligned} \tag{12.27}$$

Man beachte das unterschiedliche Vorzeichen von $\pm\gamma$. Der Propagator ist eine 4×4 Spinormatrix, der Summand mc^2 ist als $\mathbb{1}mc^2$ zu lesen. Das

Gleiche gilt auch für den Fourier-transformierten Propagator (12.24).

12.3 Die Greensfunktion des Eichfeldes $A(x)$

Die Feldgleichung

$$\mathrm{d}_\nu F^{\nu\rho} \overset{(4.125)}{=} \mu_0 j^\rho \quad \text{mit } \rho = 0,1,2,3$$

des Eichfeldes, die wir in Abschnitt 4.5 hergeleitet haben, lautet mit (4.114) für das quellenfreie ($j^\rho = 0$) Feld

$$\mathrm{d}_\nu \mathrm{d}^\nu A^\rho - \mathrm{d}_\nu \mathrm{d}^\rho A^\nu = 0 \quad \text{mit } \rho = 0,1,2,3\ .$$

$A(x)$ ist eine analytische Funktion, d.h. es gilt $\mathrm{d}_\nu \mathrm{d}^\rho A^\nu = \mathrm{d}^\rho \mathrm{d}_\nu A^\nu$. Die Eichinvarianz des Feldes bewirkt, dass die Vierердivergenz $\mathrm{d}_\nu A^\nu$ frei gewählt werden kann. (In Abschnitt 17.1 werden wir diesen Aspekt der Eichinvarianz etwas genauer erläutern.) In diesem Buch wählen wir durchwegs die

$$\text{Lorentzeichung:} \quad \mathrm{d}_\nu A^\nu \equiv 0\ , \tag{12.28}$$

mit der die quellenfreie Feldgleichung die einfache Form

$$\mathrm{d}_\nu \mathrm{d}^\nu A^\rho = 0 \quad \text{mit } \rho = 0,1,2,3 \tag{12.29}$$

erhält. Wenn Wechselwirkungen als Quellterme $\mu_0 j(x)$ auf der rechten Seite der Gleichung

$$\mathrm{d}_\nu \mathrm{d}^\nu A^\rho(x) = \mu_0 j^\rho(x) \quad \text{mit } \rho = 0,1,2,3 \tag{12.30}$$

auftreten, dann kann man das Feld $A(x)$ als Überlagerung von Wellen darstellen, die sich von Quelltermen $\mu_0 j(y)$ zum Raumzeitpunkt x ausbreiten und dort mit dem ungestörten Feld $A^{(0)}(x)$ zum inhomogenen Feld mit den Komponenten

$$A^{\rho}(x) = A^{\rho(0)}(x) + \int_{\Omega} \mathrm{d}^3 y \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}y^0 \, \frac{(-i)}{\mu_0 \hbar c} \, D^{\rho\sigma}(x,y) \, g_{\sigma\tau} \, \mu_0 j^{\tau}(y) \tag{12.31}$$

überlagern. Die Matrix $D(x,y)$ mit 4×4 Raum-Zeit-Komponenten ist die Greensfunktion des Eichfeldes $A(x)$. Warum ein Faktor $-i/\mu_0\hbar c$ aus der Greensfunktion ausgeklammert wird, werden wir in Abschnitt 12.4 erklären.

Indem man den Ansatz (12.31) in die inhomogene Gleichung (12.30) einsetzt, findet man

$$\begin{aligned} 0 + \int_{\Omega} \mathrm{d}^3 y \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}y^0 \, \mathrm{d}_\nu \mathrm{d}^\nu \frac{(-i)}{\hbar c} D^{\rho\sigma}(x,y) g_{\sigma\tau} j^{\tau}(y) \; = \\ = \mu_0 j^{\rho}(x) = \int_{\Omega} \mathrm{d}^3 y \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}y^0 \, \delta^{(4)}(x-y) \underbrace{g^{\rho}{}_{\tau}}_{g^{\rho\sigma} g_{\sigma\tau}} \mu_0 \, j^{\tau}(y) \\ \Longrightarrow \quad \mathrm{d}_\nu \mathrm{d}^\nu \frac{(-i)}{\hbar c \mu_0} D^{\rho\sigma}(x,y) = \delta^{(4)}(x-y) g^{\rho\sigma} \; . \end{aligned} \tag{12.32}$$

Falls das betrachtete System translationsinvariant ist, hängt $D^{\rho\sigma}(x,y)$ nur von der Differenz $(x-y)$ ab, und man kann die Fourier-Transformation

$$D^{\rho\sigma}(x-y) \overset{(7.15)}{=} \frac{1}{\Omega} \sum_{\boldsymbol{k}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}k^0}{2\pi} \, \widetilde{D}^{\rho\sigma}(k) \exp\{-ik(x-y)\}$$

ausführen. Durch Einsetzen von dieser Gleichung und (12.6) in (12.32) folgt

$$-k^2 \frac{(-i)}{\hbar c} \widetilde{D}^{\rho\sigma}(k) = g^{\rho\sigma} \mu_0$$

$$\boxed{\widetilde{D}^{\rho\sigma}(k) = \frac{-i g^{\rho\sigma} \mu_0 \hbar c}{k^2 + i\epsilon'}} \tag{12.33a}$$

$$\widetilde{D}^{\rho\sigma}(k) = \frac{-i g^{\rho\sigma} \mu_0 \hbar c}{\left(k^0 + \frac{\omega_{\boldsymbol{k}}}{c} - i\epsilon\right)\left(k^0 - \frac{\omega_{\boldsymbol{k}}}{c} + i\epsilon\right)} \; . \tag{12.33b}$$

Dabei gilt für das masselose Eichfeld $A(x)$

$$\frac{\omega_{\boldsymbol{k}}}{c} \overset{(7.18)}{=} + \sqrt{\boldsymbol{k}^2} = |\boldsymbol{k}| \ > 0 \ .$$

Wie gewohnt wurde ein imaginärer kleiner Summand eingefügt, um die Divergenz an den Polstellen $k^0 = \pm\omega_{\boldsymbol{k}}/c$ zu vermeiden. Aus dem Vergleich mit dem Propagator des Klein-Gordon-Feldes

$$\begin{aligned} \widetilde{G}(k) &\overset{(12.7)}{=} \frac{+i}{\hbar c\Big(k^2 - m^2\frac{c^2}{\hbar^2} + i\epsilon'\Big)} \\ G(x-y) &\overset{(12.14)}{=} \theta(x^0-y^0)\sum_{\boldsymbol{k}} \frac{\exp\{-ik(x-y)\}}{\Omega 2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}} + \\ &\quad + \theta(y^0-x^0)\sum_{\boldsymbol{k}} \frac{\exp\{-ik(y-x)\}}{\Omega 2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}} \end{aligned}$$

kann man den Propagator des Eichfeldes $A(x)$ im Zeit-Orts-Raum direkt ablesen:

$$\begin{aligned} D^{\rho\sigma}(x-y) &\overset{x^0\neq y^0}{=} \theta(x^0-y^0)(-g^{\rho\sigma}\mu_0\hbar^2c^2)\sum_{\boldsymbol{k}} \frac{\exp\{-ik(x-y)\}}{\Omega 2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}} \\ &\quad + \theta(y^0-x^0)(-g^{\rho\sigma}\mu_0\hbar^2c^2)\sum_{\boldsymbol{k}} \frac{\exp\{-ik(y-x)\}}{\Omega 2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}} \end{aligned} \tag{12.34}$$

$D(x-y)$ und $\widetilde{D}(k)$ sind 4×4-Matrizen im Zeit-Orts-Raum. Alle ihre Nicht-Diagonalelemente sind Null.

12.4 Dimensionen

Das Klein-Gordon-Feld, das Dirac-Feld, und sein Eichfeld, haben nach unseren Definitionen die Dimensionen

$$\Big[\psi_{\text{KG}}(x)\Big] \overset{(10.12)}{=} \sqrt{\frac{1}{\text{Energie}\cdot\text{Volumen}}}$$

$$\Big[\psi_{\text{Dirac}}(x)\Big] = \sqrt{\frac{1}{\text{Volumen}}}$$
$$\Big[A(x)\Big] \overset{(4.106)}{=} \frac{\text{Impuls}}{\text{Ladung}} \ .$$

Die Propagatoren haben wir anhand der inhomogenen Feldgleichungen definiert:

$$(\hbar^2 c^2 \mathrm{d}^\mu \mathrm{d}_\mu + m^2 c^4)\psi_{\text{KG}}(x) \overset{(12.2)}{=} j(x)$$
$$(\hbar^2 c^2 \mathrm{d}^\mu \mathrm{d}_\mu + m^2 c^4)\,\frac{i}{\hbar c}\,G(x,y) \overset{(12.4)}{=} \delta^{(4)}(x-y) \tag{12.35a}$$
$$(i\hbar c\gamma^\mu \mathrm{d}_\mu - mc^2)\psi_{\text{Dirac}}(x) \overset{(12.19)}{=} j(x)$$
$$(i\hbar c\gamma^\mu \mathrm{d}_\mu - mc^2)\,\frac{(-i)}{\hbar c}\,S(x,y) \overset{(12.21)}{=} \delta^{(4)}(x-y) \tag{12.35b}$$
$$\mathrm{d}_\nu \mathrm{d}^\nu A^\rho(x) \overset{(12.30)}{=} \mu_0 j^\rho(x)$$
$$\mathrm{d}_\nu \mathrm{d}^\nu \frac{(-i)}{\hbar c \mu_0} D^{\rho\sigma}(x,y) \overset{(12.32)}{=} \delta^{(4)}(x-y) g^{\rho\sigma} \tag{12.35c}$$

Willkürlich ist bei den ausgeklammerten Faktoren nur das $\pm i$. Für die Faktoren $\hbar c$ bzw. $\hbar c \mu_0$ gibt es einen triftigen Grund, der aus den Dimensionen der Greensfunktionen erkennbar wird. Wegen

$$\Big[\delta^{(4)}(x-y)\Big] = \frac{1}{\text{Länge}^4}$$

haben sie die Dimensionen

$$\Big[G(x,y)\Big] \overset{(12.35a)}{=} \frac{1}{\text{Energie} \cdot \text{Volumen}} = \Big[\psi_{\text{KG}}(x)\,\psi_{\text{KG}}(y)\Big]$$
$$\Big[S(x,y)\Big] \overset{(12.35b)}{=} \frac{1}{\text{Volumen}} = \Big[\psi_{\text{Dirac}}(x)\,\psi_{\text{Dirac}}(y)\Big]$$
$$\Big[D(x,y)\Big] \overset{(12.35c)}{=} \frac{\text{Impuls}^2}{\text{Ladung}^2} = \Big[A(x)\,A(y)\Big] \ .$$

Bei der Quantisierung werden die Feldamplituden zu Feldoperatoren, und wir werden im zweiten Teil des Buches die Propagatoren der Quantenfeldtheorien als Bilinearformen ihrer Feldoperatoren konstruieren. Dank der Definitionen (12.35) haben sie von vornherein die richtigen Dimensionen.

Teil 2:
Quantisierung der Felder

13 Warum Quantenfeldtheorie?

Man kann diese Frage auf zwei Weisen verstehen:

1. Warum benötigt man anstelle der Klassischen Feldtheorie eine Quantenfeldtheorie?
2. Warum benötigt man anstelle der Quantenmechanik der Punktteilchen eine Quantenfeldtheorie?

Wir wollen versuchen, in diesem Kapitel auf beide Fragen eine Antwort zu geben.

Die erste Frage führt uns direkt ins Geburtsjahr der Quantentheorie. Sie entstand im Jahr 1900 bei der Analyse zweier Theorien, die seit Jahrzehnten bekannt und bewährt waren, der Klassischen Thermodynamik und der Maxwell'schen Elektrodynamik. Das Problem, mit dem sich Planck abmühte bestand nicht darin, dass eine dieser Theorien für sich allein genommen versagt hätte, sondern darin, dass sie sich nicht widerspruchsfrei zusammenfügen ließen.

Planck versuchte damals, mit den Mitteln der Maxwell'schen Elektrodynamik und der Klassischen Thermodynamik die Energiedichte in einem „Schwarzen Strahler" als Funktion der Temperatur zu berechnen. Ein Schwarzer Strahler ist ein Ofen, dessen Wände mit dem elektromagnetischen Strahlungsfeld, das den Ofen erfüllt, im thermodynamischen Gleichgewicht stehen. Die Anzahl der Freiheitsgrade des Elektromagnetischen Feldes in einem schmalen Frequenzintervall $\Delta\nu$ um die Frequenz ν ist identisch mit der Anzahl der im Ofen möglichen Strahlungsmoden (sprich stehenden Wellen) mit dieser Frequenz. Das mit der Maxwell'schen Elektrodynamik berechnete Ergebnis [38] für einen Ofen mit dem Volumen V ist

$$\text{Anzahl der Freiheitsgrade} = V \cdot \frac{16\pi\nu^2}{c^3}\Delta\nu \,. \tag{13.1}$$

Auf der anderen Seite gibt es den „Gleichverteilungssatz“ der Klassischen Thermodynamik. Nach ihm hat jeder Freiheitsgrad eines dynamischen Systems im thermischen Gleichgewicht bei der Temperatur T die Energie

$$E = \frac{1}{2}kT \tag{13.2}$$

mit der Boltzmann-Konstanten $k = 1.38 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J/K}$. Fügt man beide Gleichungen zusammen, dann sollte die elektromagnetische Energie in einem Ofen mit dem Volumen V im Frequenzband $\Delta\nu$ um die Frequenz ν bei der Temperatur T gleich

$$E = V\frac{16\pi\nu^2}{c^3}\Delta\nu \cdot \frac{1}{2}kT \tag{13.3}$$

sein, und demzufolge die Energiedichte im Frequenzband $\Delta\nu$ gleich

$$\rho = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot kT\ . \tag{13.4}$$

Dies Strahlungsgesetz ergibt sich zwingend aus der Kombination von Klassischer Elektrodynamik und Klassischer Thermodynamik. Wenn es falsch ist, dann muss mindestens eine der beiden Klassischen Theorien grundlegende Fehler enthalten. Es ist tatsächlich falsch, und das gleich in doppelter Hinsicht:

Erstens steigt nach (13.4) die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes bei gegebener Temperatur T mit der Frequenz ν quadratisch an. Für kleine Frequenzen stimmt das sehr gut mit der Beobachtung überein, aber für große Frequenzen divergiert die Gleichung. Dies offensichtlich unsinnige Ergebnis wurde als „Ultraviolett-Katastrophe“ bezeichnet.

Zweitens hängt (13.4) linear von der Temperatur T ab. Wenn die Temperatur erhöht wird, sollte nach dieser Gleichung also die Energiedichte für alle Frequenzen gleichmäßig ansteigen. Tatsächlich erscheint aber, wenn man einen Ofen langsam hochheizt, bei niedriger Temperatur zunächst eine tiefrote Farbe, die bei steigender Temperatur über Orange und Gelb schließlich zu Weiß wechselt. Die Energie wird offenbar keineswegs gleichmäßig auf alle Strahlungsmoden verteilt, sondern der Anteil der höherfrequenten Moden

an der Resonatorstrahlung ist bei niedriger Temperatur zunächst relativ gering, steigt dann aber mit zunehmender Temperatur deutlich sichtbar an.

Planck erkannte schließlich, dass er folgende einfache, aber unerwartete und mit den Prinzipien der Klassischen Physik unvereinbare Annahme machen musste, um die Strahlungsformel mit der Realität in Einklang zu bringen: Der Austausch von Energie zwischen den schwingenden Ladungen in den Wänden des Ofens und dem elektrodyamischen Strahlungsfeld ist kein kontinuierlicher Vorgang, sondern geschieht stets in Energie-Quanten der Größe $h\nu$, mit der später nach Planck benannten Konstanten $h = 6.63 \cdot 10^{-34}$J. Mit dieser Annahme leitete Planck die Formel

$$\rho = \frac{8\pi h\nu^3/c^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \tag{13.5}$$

her, die mit allen Beobachtungen ausgezeichnet übereinstimmt.

Es stellte sich bald heraus, dass die quantisierte Energie nicht – wie von Planck zunächst vorsichtigerweise angenommen – eine Eigenschaft der schwingenden Ladungen in den Wänden des Ofens ist, sondern eine Eigenschaft des Elektromagnetischen Feldes selbst, und auch eine Eigenschaft jedes anderen Feldes. Denn die „Ultraviolett-Katastrophe“ ist nach (13.4) in jedem Feld unvermeidbar, das erstens in unendlich vielen Moden (d.h. mit unendlich vielen verschiedenen Wellenzahlen) schwingen kann, und dessen Schwingungsmoden zweitens ein Kontinuum von Energiewerten annehmen können. Umgekehrt formuliert: Die spezifische Wärme eines Feldes mit unendlich vielen Schwingungsmoden und kontinuierlichem Energiespektrum ist nach (13.4) zwangsläufig unendlich groß. Denn unendlich viel Energie ist erforderlich, um auf jeden von unendlich vielen Freiheitsgraden die Energiemenge $\frac{1}{2}kT$ zu verteilen. Die Quantenfeldtheorie behauptet dagegen, dass jede Schwingungsmode nur diskrete Energiewerte, die proportional zu ihrer Wellenzahl sind, annehmen kann. Wenn eine endliche Energiemenge auf die Schwingungsmoden des Feldes verteilt wird, dann werden deshalb die Schwingungsmoden mit den höchsten Frequenzen überhaupt nicht angeregt. Die Energie wird nur auf die endliche Anzahl niederfrequenter Schwingungsmoden verteilt, und demzufolge ist auch die spezifische Wärme endlich.

Die Erinnerung an die Geburtsstunde der Quantentheorie hat uns unmittelbar zum Thema des zweiten Teils diese Buches geführt: Wir sehen uns gezwungen, die Theorie *aller* Felder so zu formulieren, dass die Energie im thermodynamischen Gleichgewicht *nicht* gleichmäßig auf alle Freiheitsgrade verteilt wird. Wie das zu tun sei, blieb nach Planck's grundlegender Entdeckung noch ein Viertel Jahrhundert lang unklar.

Eine physikalische Theorie beschreibt mithilfe mathematischer Gleichungen Abläufe von Vorgängen in der Natur, und die zwischen diesen Vorgängen bestehenden Wechselwirkungen und Zusammenhänge. Das bedeutet nicht, dass die Objekte der physikalischen Forschung mit den Elementen der mathematischen Sprache identisch wären. Sondern es besteht eine „Korrespondenz" zwischen ihnen: Den physikalischen Objekten werden die Elemente der mathematischen Sprache als Repräsentanten zugeordnet. Die Zusammenhänge und wechselseitigen Abhängigkeiten zwischen den mathematischen Elementen repräsentieren entsprechende Zusammenhänge und Abhängigkeiten zwischen den Objekten der physikalischen Beobachtung. Dadurch besteht eine *strukturelle Ähnlichkeit* zwischen der mathematisch formulierten Theorie und dem beschriebenen physikalischen Phänomen.

Seit Galilei's Tagen hatten die Physiker sich daran gewöhnt, dass Zahlen – eventuell multipliziert mit Einheiten wie Meter pro Sekunde oder Coulomb mal Volt – sich als angemessene und brauchbare Repräsentanten sämtlicher physikalischer Objekte bewährten. Deshalb war es eine große Überraschung, als Heisenberg im Juni 1925 ein eigenartiges System – er sprach von „Zahlenschemata"– austüftelte, mit denen sich die diskreten Energiewerte, die ein quantenmechanischer Oszillator annehmen kann, korrekt berechnen ließen. Es stellte sich heraus, dass die „Zahlenschemata" Matrizen waren, und dass ihr Erfolgsgeheimnis darauf beruhte, dass die Algebra von Matrizen – anders als die Algebra von Zahlen – nicht kommutativ ist.

Schrödinger fand Heisenberg's Matrizenmechanik so „schrecklich", dass er sich sofort an den Entwurf einer „schöneren" Quantentheorie machte. Schon wenige Monate später konnte er seine Wellenmechanik veröffentlichen, die zwar ohne Matrizen auskommt, aber nicht zur kommutativen Zahlenalgebra zurückführt. Vielmehr werden in Schrödingers Wellenmechanik physikalische Messgrößen durch Operatoren repräsentiert, und diese Operatoren haben genau die gleiche nicht-kommutative Algebra wie Heisen-

berg's Matrizen. Schrödinger selbst wies bald darauf nach, dass Heisenberg's Matrizenmechanik und seine eigene Wellenmechanik tatsächlich mathematisch völlig equivalent und lediglich unterschiedliche Formulierungen der gleichen mathematischen Struktur sind.

Ob man nun Matrizen wählt, oder Operatoren, oder mathematische Elemente welcher Art auch immer – entscheidend ist, dass die Repräsentanten der Messgrößen von Quantenphänomenen einer nicht-kommutativen Algebra gehorchen müssen. Der Kommutator oder Anti-Kommutator kanonisch konjugierter Messgrößen, beispielsweise von Ort und Impuls eines Teilchens, ist in dieser Algebra gleich dem reduzierten Planck'schen Wirkungsquantum $\hbar$, multipliziert mit $i = \sqrt{-1}$.

Damit ist auch die zweite mathematische Änderung der Quantentheorie gegenüber der Klassischen Theorie angesprochen: Während alle klassischen Theorien mit reellen Zahlen formuliert werden können, und imaginäre Zahlen nur hier und da aus Bequemlichkeit verwendet werden, kommt die Quantentheorie nicht ohne imaginäre Zahlen aus.

Nun kommen wir zur zweiten der beiden Fragen, die am Anfang dieses Kapitels gestellt wurden: Warum braucht man eine Quantenfeldtheorie, nachdem eine Quantenmechanik der Punktteilchen zur Verfügung steht? Es gibt dafür hauptsächlich drei Gründe, die eng miteinander zusammenhängen:

* Der Versuch, eine Quantenmechanik der Punktteilchen zu konstruieren, die mit der speziellen Relativitätstheorie in Einklang steht, führt zu Lösungen mit negativer Energie. Für Fermionen konnte Dirac dies Problem mithilfe seiner Löcher-Theorie notdürftig beheben, für Bosonen ist keine Abhilfe bekannt. Die Quantenfeldtheorie löst das Problem vollständig. Quantisierte Felder haben immer positive Energie.
* Erfahrungsgemäß können Teilchen in andere Teilchen zerfallen, oder bei einer Kollision aus anderen Teilchen entstehen. Die Quantenfeldtheorie beschreibt solche Vorgänge qualitativ und quantitativ in ausgezeichneter Übereinstimmung mit der Beobachtung. In der relativistischen Punktteilchen-Quantenmechanik ist die Anzahl der Teilchen unveränderlich.
* Raumartig voneinander getrennte Messungen an einem Quantensystem dürfen sich nicht gegenseitig beeinflussen, wenn die Theorie mit der Relativitätstheorie übereinstimmen soll. Es ist niemandem gelungen, diese

Forderung mit einer relativistischen Punktteilchen-Quantenmechanik in Strenge zu erfüllen. Die Quantenfeldtheorie erreicht dies Ziel elegant und perfekt durch den Austausch virtueller raumartiger Teilchen und Antiteilchen.

Es gibt also triftige Gründe für die Entwicklung einer Quantenfeldtheorie. In den folgenden Kapiteln werden wir klären, wie dies im Detail gelingt.

14 Kanonische Quantisierung

Bei der kanonischen Quantisierung von Feldern bildet man die zur Feldamplitude kanonisch-konjugierte Impulsdichte und postuliert eine Algebra, nach der der Kommutator oder Antikommutator dieser beiden Variablen gleich $i\hbar$ sein muss. Ob Kommutator oder Antikommutator hängt davon ab, ob es sich um ein bosonisches oder fermionisches Feld handelt. Wir werden sehen, dass hier keine Freiheit besteht: Bei der Definition der Algebra bosonischer Felder muss zwingend der Kommutator verwendet werden, und bei der Definition der Algebra fermionischer Felder muss zwingend der Antikommutator verwendet werden, damit man ein quantisiertes Feld erhält, das (a) mit den Prinzipien der Relativitätstheorie kompatibel ist, und (b) niemals negative Energie hat.

14.1 Quantenmechanik

Wir setzen die Kenntnis der nichtrelativistischen Quantenmechanik der Punktteilchen voraus. In diesem Abschnitt werden wir in sehr knapper Form fünf Aspekte der Quantenmechanik rekapitulieren, die sich als besonders nützlich erweisen werden, wenn wir uns anschließend der Quantisierung von Feldern zuwenden:

* Die kanonische Quantisierung der Punktmechanik
* Darstellungen der Quantenmechanik
* Der Zeitentwicklungsoperator
* Schrödinger-Bild und Heisenberg-Bild
* Der Harmonische Oszillator

14.1.1 Quantisierung der Punktmechanik

Es seien q_j und p_j mit $j = 1, 2, \ldots, 3N$ die verallgemeinerten Koordinaten und die zu ihnen kanonisch konjugierten Impulse eines klassisch beschriebenen Systems von N Punktteilchen. Man definiert die Poisson[1]-Klammern für beliebige Größen A und B durch

$$\{A, B\}_{\mathrm{PK}} \equiv \sum_j \left(\frac{\partial A}{\partial p_j} \frac{\partial B}{\partial q_j} - \frac{\partial B}{\partial p_j} \frac{\partial A}{\partial q_j} \right) . \tag{14.1}$$

Die totale Ableitung einer Funktion $A(q_j(t), p_j(t), t)$ nach der Zeit ist

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} &= \sum_j \left(\frac{\partial A}{\partial q_j} \frac{\mathrm{d}q_j}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial A}{\partial p_j} \frac{\mathrm{d}p_j}{\mathrm{d}t} \right) + \frac{\partial A}{\partial t} \\ &\overset{(3.22)}{=} \sum_j \left(\frac{\partial A}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial A}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) + \frac{\partial A}{\partial t} \\ &= \{H, A\}_{\mathrm{PK}} + \frac{\partial A}{\partial t} \quad , \end{aligned} \tag{14.2}$$

wobei H die Hamiltonfunktion des Systems ist. Die Zeitabhängigkeit der Größe A wird also im kanonischen Formalismus in zwei Teile zerlegt: In die *kanonische Zeitabhängigkeit* (einige Autoren bezeichnen sie als dynamische Zeitabhängigkeit), die durch die Poisson-Klammer $\{H, A\}_{\mathrm{PK}}$ bestimmt wird, und in die *explizite Zeitabhängigkeit* (einige Autoren bezeichnen sie als parametrische Zeitabhängigkeit), die in der partiellen Ableitung $\partial A/\partial t$ zum Ausdruck kommt.

Das System der N Punktteilchen hat $6N + 1$ Variable, nämlich die (wiederum von der Zeit abhängenden) $3N$ Koordinaten $q_j(t)$, die (wiederum von der Zeit abhängenden) $3N$ Impulse $p_j(t)$, und die Zeit t. Jede Funktion $A(q_j(t), p_j(t), t)$ ist eine Funktion dieser $6N + 1$ Variablen, oder eines Teils von ihnen. Das gilt auch für die Funktionen $q_k(q_j(t), p_j(t), t)$ und $p_k(q_j(t), p_j(t), t)$, bei denen im kanonischen Formalismus in etwas subtiler Weise zwischen Funktionen und Variablen unterschieden wird. Die Funktio-

[1] benannt nach Siméon Denis Poisson, 1781 - 1840

nen

$$q_k(q_j(t), p_j(t), t) \equiv q_k(q_k(t)) \neq q_k(t) \tag{14.3a}$$

$$\underbrace{p_k(q_j(t), p_j(t), t) \equiv p_k(p_k(t))}_{\text{Funktionen}} \neq \underbrace{p_k(t)}_{\text{Variable}} \tag{14.3b}$$

werden als Funktionen der Variablen $q_k(t)$ bzw. $p_k(t)$ betrachtet, aber nicht als Funktionen der Variablen t. Deshalb gilt für diese Funktionen

$$\frac{\mathrm{d}\, q_k}{\mathrm{d}\, t} \neq 0 = \frac{\partial q_k}{\partial t} \qquad\qquad \frac{\mathrm{d}\, p_k}{\mathrm{d}\, t} \neq 0 = \frac{\partial p_k}{\partial t} \ . \tag{14.4}$$

Dass die Festlegungen (14.3) sinnvoll sind erkennt man, wenn man die totale zeitliche Ableitung der Funktionen q_k und p_k nach der Zeit berechnet:

$$\frac{\mathrm{d}\, q_k}{\mathrm{d}\, t} = \sum_j \left(\underbrace{\frac{\partial q_k}{\partial q_j}}_{\delta_{kj}} \underbrace{\frac{\mathrm{d}\, q_j}{\mathrm{d}\, t}}_{\frac{\partial H}{\partial p_j}} + \underbrace{\frac{\partial q_k}{\partial p_j}}_{0} \underbrace{\frac{\mathrm{d}\, p_j}{\mathrm{d}\, t}}_{-\frac{\partial H}{\partial q_j}} \right) + \underbrace{\frac{\partial q_k}{\partial t}}_{0} = \{H, q_k\}_{\mathrm{PK}} \tag{14.5a}$$

$$\frac{\mathrm{d}\, p_k}{\mathrm{d}\, t} = \sum_j \left(\underbrace{\frac{\partial p_k}{\partial q_j}}_{0} \underbrace{\frac{\mathrm{d}\, q_j}{\mathrm{d}\, t}}_{\frac{\partial H}{\partial p_j}} + \underbrace{\frac{\partial p_k}{\partial p_j}}_{\delta_{kj}} \underbrace{\frac{\mathrm{d}\, p_j}{\mathrm{d}\, t}}_{-\frac{\partial H}{\partial q_j}} \right) + \underbrace{\frac{\partial p_k}{\partial t}}_{0} = \{H, p_k\}_{\mathrm{PK}} \tag{14.5b}$$

Es wäre nicht konsistent mit (3.22), wenn man q_k und p_k als Funktionen von t betrachten würde. Deshalb ist die Festlegung (14.3) notwendig. Die Variablen $q_k(t)$ und $p_k(t)$ sind explizit zeitabhängig, während die Funktionen q_k und p_k nur kanonisch, aber nicht explizit zeitabhängig sind.

Die kanonische Quantisierung der Punktteilchen-Mechanik besteht darin, dass die Poisson-Klammern durch die mit $i/\hbar$ multiplizierten Kommutatoren ersetzt werden:

$$\boxed{\begin{aligned} \{A, B\}_{\mathrm{PK}} \equiv \sum_j \left(\frac{\partial A}{\partial p_j} \frac{\partial B}{\partial q_j} - \frac{\partial B}{\partial p_j} \frac{\partial A}{\partial q_j} \right) \quad \longrightarrow \\ \longrightarrow \quad \frac{i}{\hbar} [A\,, B] \equiv \frac{i}{\hbar} (AB - BA) \end{aligned}} \tag{14.6}$$

Damit werden die Gleichungen (14.5) zu

$$\frac{\mathrm{d}q_k}{\mathrm{d}t} = \frac{i}{\hbar}[H, q_k] \equiv \frac{i}{\hbar}(Hq_k - q_kH) \overset{(14.5a)}{=} \frac{\partial H}{\partial p_k} \tag{14.7a}$$

$$\frac{\mathrm{d}p_k}{\mathrm{d}t} = \frac{i}{\hbar}[H, p_k] \equiv \frac{i}{\hbar}(Hp_k - p_kH) \overset{(14.5b)}{=} -\frac{\partial H}{\partial q_k} \ , \tag{14.7b}$$

und (14.2) wird zu

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{i}{\hbar}[H, A] + \frac{\partial A}{\partial t} \quad . \tag{14.8}$$

Die Quantisierung verändert nur die kanonische Zeitabhängigkeit der Funktionen. Die explizite Zeitabhängigkeit bleibt unverändert.

Wenn H explizit von p_k bzw. von q_k abhängt, dann sind die rechten Seiten von (14.7) von Null verschieden, und folglich müssen auch die Kommutatoren von H mit p_k bzw. q_k von Null verschieden sein. H, p_k, und q_k können also nicht mehr (mit Einheiten multiplizierte) Zahlen sein, sondern werden durch die Quantisierung zu nicht-kommutierenden Größen. Man kann den Kommutator von q_k und p_l direkt berechnen, indem man in (14.6) q_k für A und p_l für B einsetzt:

$$\{q_k, p_l\}_{\mathrm{PK}} \equiv \sum_j \left(\underbrace{\frac{\partial q_k}{\partial p_j}}_{0} \underbrace{\frac{\partial p_l}{\partial q_j}}_{0} - \underbrace{\frac{\partial p_l}{\partial p_j}}_{\delta_{lj}} \underbrace{\frac{\partial q_k}{\partial q_j}}_{\delta_{kj}} \right) = -\delta_{kl} \quad \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\frac{i}{\hbar}[q_k, p_l] \equiv \frac{i}{\hbar}(q_kp_l - p_lq_k) = -\delta_{kl}} \tag{14.9}$$

In Heisenbergs Matrizenmechanik wird die nicht-kommutative Algebra (14.9) dadurch realisiert, dass die Messgrößen q_k und p_l durch Matrizen repräsentiert werden. In Schrödingers Wellenmechanik wird die nicht-kommutative Algebra dadurch realisiert, dass man die Messgrößen q_k und p_l durch Operatoren repräsentiert, die auf Wellenfunktionen wirken. Wir merken an, dass die Größen, die in den Kommutator eingesetzt werden, zur gleichen Zeit t gemessen werden müssen. (14.9) macht keine Aussage über den Wert des Kommutators, wenn die Messungen von q_k und p_l zu verschiedenen Zeiten

erfolgen.

Wenn das Planck'sche Wirkungsquantum gegenüber der Wirkung S des Massepunkts vernachlässigbar klein ist, dann ist der Kommutator vernachlässigbar klein:

$$[q_k, p_l] = q_k p_l - p_l q_k \overset{(14.9)}{=} i\hbar\delta_{kl} \approx 0 \quad \text{falls } \hbar/S \ll 1 \tag{14.10}$$

Genau dieser Grenzfall definiert den Gültigkeitsbereich der Klassischen Physik. Nur in diesem Fall gilt für die Koordinaten und ihre kanonisch konjugierten Impulse die kommutative Zahlenalgebra. Andernfalls muss die nichtkommutative Algebra (14.9) verwendet werden.

Wir betrachten die nicht-kommutative Algebra (14.6) bzw. (14.9) als ein Naturgesetz, das nicht hergeleitet werden kann. Heisenberg fand es durch geniales Raten. Gerechtfertigt werden kann es allein dadurch, dass die auf ihm beruhenden Schlussfolgerungen im Gültigkeitsbereich der nichtrelativistischen Quantenmechanik von Punktteilchen mit den experimentellen Beobachtungen übereinstimmen. Sobald wir Übereinstimmung mit der Speziellen Relativitätstheorie fordern, wird die Erweiterung auf (14.74) erforderlich.

14.1.2 Darstellungen der Quantenmechanik

Die verschiedenen Darstellungen, in denen die Theorie bei der Entdeckung der Quantenmechanik seit 1925 zunächst unabhängig voneinander formuliert wurde, können nach Dirac's Vorschlag [39] in folgender Weise aufeinander bezogen und ineinander transformiert werden:

Alle (möglicherweise zeitabhängigen) Elemente des Hilbertraums sind zunächst als „basisunabhängige" Vektoren $|\psi(t)\rangle$ zu betrachten. Dann führt man im Hilbertraum verschiedene „Koordinatensysteme" dadurch ein, dass man Systeme orthonormaler Vektoren als Basen definiert.

$$|F_1\rangle, |F_2\rangle, |F_3\rangle, \ldots, |F_f\rangle, \ldots \in \mathcal{H} \tag{14.11}$$

sei ein ein derartiges vollständiges System von Orthonormalvektoren, die den Hilbertraum aufspannen, d. h. es gilt

$$\langle F_f|F_g\rangle = \delta_{fg} \qquad , \qquad \sum_f |F_f\rangle\langle F_f| = 1 \ . \tag{14.12}$$

In dieser Schreibweise ist $|F_g\rangle$ ein „Ket-Vektor“, $\langle F_g|$ ist der zu ihm duale „Bra-Vektor“, und die Zusammenfassung des Kets $|F_g\rangle$ und des Bras $\langle F_f|$ zur Bracket $\langle F_f|F_g\rangle = \langle F_g|F_f\rangle^*$ bezeichnet das Skalarprodukt der Vektoren $|F_g\rangle$ und $|F_f\rangle$.

Der Projektionsoperator $|F_f\rangle\langle F_f|$ erzeugt, wenn er auf einen beliebigen Ket $|\phi\rangle$ angewendet wird, die Projektion

$$|F_f\rangle\langle F_f|\phi\rangle \equiv |F_f\rangle\phi_f \tag{14.13}$$

des Vektors $|\phi\rangle$ auf den Vektor $|F_f\rangle$. Wenn die Summe (14.12) über die Projektionsoperatoren gleich dem identischen Operator 1 ist, dann heißt das Orthonormalsystem „vollständig“. Wenn ein System von orthonormalen Basisvektore vollständig ist, dann kann jedes Element $|\psi(t)\rangle \in \mathcal{H}$ nach diesem System entwickelt werden:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_f |F_f\rangle\langle F_f|\psi(t)\rangle \equiv \sum_f |F_f\rangle\psi_f(t) \tag{14.14}$$

Die Zahlen $\psi_f(t) \in \mathbb{C}$ sind die Komponenten des Vektors $|\psi(t)\rangle$ in der F-Darstellung. Man kann sie auch als „Koordinaten“ von $|\psi(t)\rangle$ im „Koordinatensystem“ $|F_1\rangle$, $|F_2\rangle$, $|F_3\rangle$, ... betrachten. Die vollständige Kenntnis der Funktionen $\psi_f(t)$ für alle f ist gleichwertig zur vollständigen Kenntnis von $|\psi(t)\rangle$. Sämtliche Aussagen der Theorie, die mithilfe von $|\psi(t)\rangle$ berechnet werden können, lassen sich auch mithilfe der vollständigen Menge der Funktionen $\psi_f(t)$ berechnen.

Wenn der basisfreie Zustandsvektor auf 1 normiert ist

$$\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = 1 \ , \tag{14.15}$$

dann ist der Erwartungswert $\langle S\rangle$ eines beliebigen Operators S in der F-Darstellung:

$$\langle S\rangle = \langle\psi(t)|S|\psi(t)\rangle = \sum_f \sum_g \langle\psi(t)|F_f\rangle\langle F_f|S|F_g\rangle\langle F_g|\psi(t)\rangle =$$
$$= \sum_f \sum_g \psi_f^*(t) \underbrace{\langle F_f|S|F_g\rangle}_{S_{fg}\in\mathbb{C}} \psi_g(t) \tag{14.16}$$

$S_{fg} \in \mathbb{C}$ ist die fg-Komponente des Operators S in der F-Darstellung. Falls die Vektoren $|F_g\rangle$ Eigenvektoren von S sind, sind wegen

$$S_{fg} = \langle F_f|S|F_g\rangle = \underbrace{\langle F_f|F_g\rangle}_{\delta_{fg}} S_g = \begin{cases} S_f \text{ falls } f = g \\ 0 \text{ falls } f \neq g \end{cases} \tag{14.17}$$

nur die Diagonalelemente der Matrix S_{fg} von Null verschieden.

Gibt es auch eine Basis, in der Schrödingers Wellenfunktion $\psi_{\boldsymbol{x}}(t) \equiv \psi(t, \boldsymbol{x})$ die $\boldsymbol{x}$-Komponente des basisfreien Zustandsvektors $|\psi(t)\rangle$ ist? Es gibt sie, nämlich die Eigenvektoren $|\boldsymbol{y}\rangle$ des Ortsoperators $\boldsymbol{x}$ mit dem Eigenwert $\boldsymbol{y}$:

$$\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}\rangle = \boldsymbol{y}|\boldsymbol{y}\rangle \tag{14.18a}$$

Weil die Basis $|\boldsymbol{x}\rangle$ den kontinuierlichen Index $\boldsymbol{x}$ hat, im Gegensatz zum diskreten Index f der Basis $|F_f\rangle$, kann das Skalarprodukt

$$\langle\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}\rangle \equiv \delta^{(3)}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \tag{14.18b}$$

der Basisvektoren nicht wie in Gleichung (14.12) das Kronecker-Symbol sein. Dirac erweiterte das Kronecker-Symbol durch die Definition der Deltafunktion auf kontinuierliche Indizes:

$$\delta^{(3)}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \equiv 0 \text{ für } \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y} \tag{14.19a}$$
$$\int \mathrm{d}^3x\, \delta^{(3)}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\phi(\boldsymbol{x}) \equiv \phi(\boldsymbol{y}) \tag{14.19b}$$

Dabei muss das Integrationsvolumen den Punkt $\boldsymbol{y}$ überdecken. Wegen des kontinuierlichen Index der Basis $|\boldsymbol{x}\rangle$ taucht in der Entwicklung des basisfreien Zustandsvektors $|\psi(t)\rangle$ nach den Vektoren $|\boldsymbol{x}\rangle$ – die im Übrigen völlig analog

zu (14.14) durchgeführt wird – anstelle der Summe ein Integral auf:

$$|\psi(t)\rangle = \int_\Omega \mathrm{d}^3x\, |\boldsymbol{x}\rangle\langle\boldsymbol{x}|\psi(t)\rangle = \int_\Omega \mathrm{d}^3x\, |\boldsymbol{x}\rangle\psi(t,\boldsymbol{x}) \tag{14.20}$$

Die Darstellung mit der Basis $|\boldsymbol{x}\rangle$ wird als lokale Darstellung oder Ortsdarstellung bezeichnet. Sie ist identisch mit Schrödingers Wellenmechanik, und die Funktionen $\psi(t,\boldsymbol{x})$ sind identisch mit Schrödingers Wellenfunktionen. In der Ortsdarstellung hat das Skalarprodukt zweier Vektoren $\in \mathcal{H}$ die Form

$$\langle\phi|\psi\rangle = \int_\Omega \mathrm{d}^3x\, \langle\phi|\boldsymbol{x}\rangle\langle\boldsymbol{x}|\psi\rangle = \int_\Omega \mathrm{d}^3x\, \phi^*(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{x})\ . \tag{14.21}$$

Erheblich mehr Aufwand ist erforderlich um zu zeigen, dass die Matrixelemente beliebiger Operatoren in der Ortsdarstellung die Form

$$\begin{aligned}\langle\phi|S|\psi\rangle &= \int_\Omega \mathrm{d}^3x \int_\Omega \mathrm{d}^3y\, \langle\phi|\boldsymbol{x}\rangle\langle\boldsymbol{x}|S|\boldsymbol{y}\rangle\langle\boldsymbol{y}|\psi\rangle \\ &= \int_\Omega \mathrm{d}^3x\, \phi^*(\boldsymbol{x})\, S\, \psi(\boldsymbol{x})\end{aligned} \tag{14.22}$$

haben. In Anhang A.19 kann man den Beweis nachlesen.

14.1.3 Der Zeitentwicklungsoperator

Wenn der Hamiltonoperator H nicht explizit von der Zeit abhängt, dann kann die Schrödingergleichung der Wellenmechanik

$$i\hbar\,\frac{\partial\psi(t,\boldsymbol{x})}{\partial t} = H\psi(t,\boldsymbol{x}) \tag{14.23}$$

formal integriert werden:

$$\psi(t,\boldsymbol{x}) = e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)H}\psi(t_0,\boldsymbol{x}) \tag{14.24}$$

Der Hamiltonoperator H im Exponenten ist als abkürzende Schreibweise für die Reihe

$$e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)H} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\Big(-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)H\Big)^n \qquad (14.25)$$
$$\text{mit } H^n\psi \equiv \underbrace{H(\ldots H(H(H(H}_{n\times}\psi)))\ldots)$$

zu verstehen. Mithilfe von (14.24) kann die Zustandsfunktion für beliebige Zeiten t berechnet werden, wenn sie zum Zeitpunkt t_0 bekannt ist.

Wir verallgemeinern (14.24) durch die Definition des Zeitentwicklungsoperators U, der die zeitliche Entwicklung der Wellenfunktion beschreibt:

$$\psi(t,\boldsymbol{x}) \equiv U(t,t_0)\psi(t_0,\boldsymbol{x}) \qquad (14.26)$$

Einsetzen in (14.23) ergibt

$$i\hbar\,\frac{\partial U(t,t_0)}{\partial t}\,\psi(t_0,\boldsymbol{x}) = HU(t,t_0)\psi(t_0,\boldsymbol{x})\ ,$$

beziehungsweise die Operator-Gleichung

$$i\hbar\,\frac{\partial U(t,t_0)}{\partial t} = HU(t,t_0)\ . \qquad (14.27)$$

Nur wenn der Hamiltonoperator nicht zeitabhängig ist, hat diese Gleichung die einfache Lösung

$$U(t,t_0) \overset{(14.24)}{=} e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)H}\ . \qquad (14.28a)$$

Ohne Beweis geben wir die Lösung von (14.27) bei zeitabhängigem Hamiltonoperator an:

$$U(t,t_0) = T\,\exp\Big\{-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\tau\, H(\tau)\Big\} = T\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\Big(-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}\tau\, H(\tau)\Big)^j \qquad (14.28b)$$

T ist der Zeitordnungsoperator. Er ordnet die Produkte zeitabhängiger Operatoren – in diesem Fall $H(\tau_i)H(\tau_j)H(\tau_k)\ldots$ – so um, dass jüngere Operatoren mit größerem Zeitargument stets links von älteren Operatoren mit kleinerem Zeitargument stehen. Wir listen einige Eigenschaften des Zeitentwicklungsoperators auf:

$$U^\dagger(t,t_0) = U^{-1}(t,t_0) \tag{14.29a}$$
$$U(t,t_0) = U(t,t_1)\,U(t_1,t_0) \tag{14.29b}$$
$$U(t,t_1)\,U(t_1,t_0) = U(t_1,t_0)\,U(t,t_1) \tag{14.29c}$$
$$U(t,t_0) = U^{-1}(t_0,t) \quad\Longrightarrow\quad U(t_0,t_0) = 1 \tag{14.29d}$$
$$[U,H] = 0 \tag{14.29e}$$

Im einfachen Fall (14.28a) sind diese Eigenschaften des Zeitentwicklungsoperators evident. Ohne Beweis stellen wir fest dass alle Relationen (14.29) auch für den Zeitentwicklungsoperator (14.28b) mit explizit zeitabhängigem H gelten.

Wir erinnern daran, dass die Wellenfunktion $\psi(t,\boldsymbol{x})$ gleich dem Skalarprodukt des basisunabhängigen Zustandsvektors $|\psi(t)\rangle$ und des Vektors $|\boldsymbol{x}\rangle$ der lokalen Basis ist:

$$\begin{aligned}\psi(t,\boldsymbol{x}) &\overset{(14.20)}{=} \langle\boldsymbol{x}|\psi(t)\rangle \overset{(14.26)}{=} U(t,t_0)\psi(t_0,\boldsymbol{x}) = \\ &\overset{(14.20)}{=} U(t,t_0)\langle\boldsymbol{x}|\psi(t_0)\rangle = \langle\boldsymbol{x}|U(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle\end{aligned} \tag{14.30}$$

Der Zeitentwicklungsoperator konnte in die Klammer gezogen werden, weil $|\boldsymbol{x}\rangle$ nicht zeitabhängig ist. Dies Resultat legt folgende Verallgemeinerung der Definition (14.26) nahe:

$$|\psi(t)\rangle \equiv U(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle \tag{14.31}$$

Außerdem definieren wir die zeitabhängige Ortsbasis durch

$$|t,\boldsymbol{x}\rangle \equiv U^{-1}(t,0)\,|\boldsymbol{x}\rangle\ . \tag{14.32}$$

Diese Definition ist mit den vorangegangenen Gleichungen konsistent wegen

$$\psi(t,\boldsymbol{x}) \overset{(14.20)}{=} \langle \boldsymbol{x}|\psi(t)\rangle \overset{(14.31)}{=} \langle \boldsymbol{x}|\, U(t,0)\,|\psi(t{=}0)\rangle \;=$$
$$= \Big(U^{-1}(t,0)\,|\boldsymbol{x}\rangle\Big)^{\dagger}|\,\psi(t{=}0)\rangle = \langle t,\boldsymbol{x}|\,\psi(t{=}0)\rangle\;. \qquad (14.33)$$

Man beachte, dass die Zeitentwicklung bei der Ortsbasis gerade umgekehrt verläuft wie die Zeitentwicklung (14.31) bzw. (14.26) des Zustandsvektores $|\psi(t)\rangle$ bzw. der Wellenfunktion $\psi(t,\boldsymbol{x})$. Das muss so sein, weil der Zeitparameter t in

$$\psi(t,\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{x}|\psi(t)\rangle = \langle t,\boldsymbol{x}|\psi\rangle \qquad \text{mit } |\psi\rangle \equiv |\psi(t{=}0)\rangle \qquad (14.34)$$

einmal im Ket und einmal im Bra steht. In $\langle \boldsymbol{x}|\psi(t)\rangle$ wird der zeitabhängige Vektor $|\psi(t)\rangle$ auf die zeitunabhängigen Koordinaten $|\boldsymbol{x}\rangle$ des Hilbertraums projiziert, d.h. es handelt sich um eine aktive zeitartige Translation im Hilbertraum. In $\langle t,\boldsymbol{x}|\psi\rangle$ wird der zeitunabhängige Vektor $|\,\psi\rangle$ auf die zeitabhängigen Koordinaten $|t,\boldsymbol{x}\rangle$ des Hilbertraums projiziert, d.h. es handelt sich um eine passive zeitartige Translation im Hilbertraum. Aufgrund der eigenartigen Art der Zeitabhängigkeit wollen einige Autoren die $|t,\boldsymbol{x}\rangle$ überhaupt nicht als zeitabhängige Vektoren betrachten. Diese Betrachtungsweise ist nicht konsistent. Sowohl $|\psi(t)\rangle$ als auch $|t,\boldsymbol{x}\rangle$ sind beide offensichtlich zeitabhängige Vektoren. Der Unterschied beruht darauf, dass $|t,\boldsymbol{x}\rangle$ ein zeitabhängiger Basisvektor ist, während $|\psi(t)\rangle$ ein zeitabhängiger „normaler“ Vektor ist.

Unter der Voraussetzung, dass in den Vektoren und im Operator die identische Zeit t steht, sind die Vektoren der zeitabhängigen Ortsbasis Eigenvektoren des zeitabhängigen Ortsoperators:

$$\boldsymbol{y} \overset{(14.18a)}{=} \langle \boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}\rangle = \underbrace{\langle \boldsymbol{y}|\,U(t,0)}_{\langle t,\boldsymbol{y}|}\;\underbrace{U^{-1}(t,0)\,\boldsymbol{x}\,U(t,0)}_{\boldsymbol{x}(t)}\;\underbrace{U^{-1}(t,0)\,|\boldsymbol{y}\rangle}_{|t,\boldsymbol{y}\rangle} \qquad (14.35)$$

Weil die zeitunabhängigen Ortsvektoren eine Orthonormalbasis des Hilbertraums bilden, tun die zeitabhängigen Ortsvektoren es ebenfalls, denn sie erfüllen (bei gleichem t in allen Vektoren) die Orthonormalitäts- und Vollständigkeitsrelation:

$$\langle t, \boldsymbol{x}|t, \boldsymbol{y}\rangle = \langle \boldsymbol{x}|\, U(t,0)\, U^{-1}(t,0)\, |\boldsymbol{y}\rangle = \langle \boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}\rangle \overset{(14.18b)}{=} \delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{14.36a}$$

$$\int\limits_\Omega \mathrm{d}^3x\, |t,\boldsymbol{x}\rangle\langle t,\boldsymbol{x}| = \int\limits_\Omega \mathrm{d}^3x\, |\boldsymbol{x}\rangle U^{-1}(t,0)\, U(t,0)\langle \boldsymbol{x}| = \int\limits_\Omega \mathrm{d}^3x\, |\boldsymbol{x}\rangle\langle \boldsymbol{x}| \overset{(14.20)}{=} 1 \tag{14.36b}$$

Abschließend geben wir noch die Wahrscheinlichkeitsamplitude

$$\begin{aligned} U(t_2,\boldsymbol{z},t_1,\boldsymbol{y}) \equiv \langle \boldsymbol{z}|\, U(t_2,t_1)\, |\boldsymbol{y}\rangle &= \langle \boldsymbol{z}|\, U(t_2,0)\, U(0,t_1)\, |\boldsymbol{y}\rangle \;= \\ &= \langle \boldsymbol{z}|\, U(t_2,0)\, U^{-1}(t_1,0)\, |\boldsymbol{y}\rangle = \langle t_2,\boldsymbol{z}|t_1,\boldsymbol{y}\rangle \end{aligned} \tag{14.37}$$

an, die bei der Methode der Pfadintegrale, die wir in Kapitel 18 entwickeln werden, eine zentrale Rolle spielt. Dies Matrixelement wird interpretiert als die Wahrscheinlichkeitsamplitude dafür, dass ein zur Zeit t_1 am Ort $\boldsymbol{y}$ beobachtetes quantenmechanisches Punktteilchen zur späteren Zeit t_2 am Ort $\boldsymbol{z}$ detektiert werden kann.

14.1.4 Schrödinger-Bild und Heisenberg-Bild

In Abschnitt 14.1.1 haben wir die Zeitableitungen der Operatoren

$$\frac{\mathrm{d}\, q_{k\,\mathsf{H}}}{\mathrm{d}\, t} \overset{(14.7a)}{=} \frac{i}{\hbar}[H, q_{k\,\mathsf{H}}] \qquad\qquad \frac{\mathrm{d}\, p_{k\,\mathsf{H}}}{\mathrm{d}\, t} \overset{(14.7b)}{=} \frac{i}{\hbar}[H, p_{k\,\mathsf{H}}]$$

und

$$\frac{\mathrm{d}\, A_{\mathsf{H}}}{\mathrm{d}\, t} \overset{(14.8)}{=} \frac{i}{\hbar}[H, A_{\mathsf{H}}] + \frac{\partial A_{\mathsf{H}}}{\partial t} \tag{14.38}$$

angegeben. Sie sind Operatoren im *Heisenberg-Bild*, was hier durch den zusätzlichen Index H gekennzeichnet wurde. Operatoren im Heisenberg-Bild haben eine kanonische Zeitabhängigkeit, deren Größe durch den mit $i/\hbar$ multiplizierten Kommutator des Operators mit dem Hamiltonoperator bestimmt wird, und eventuell zusätzlich eine explizite Zeitabhängigkeit, die in der partiellen Ableitung zum Ausdruck kommt.

Verwirrender- aber üblicherweise ändert man bei der Quantisierung auch die Schreibweise der Variablen:

$$q_k\Big(q_k(t)\Big) \quad \longrightarrow \quad q_{k\,\mathsf{H}}(t) \tag{14.39a}$$

$$p_k\Big(p_k(t)\Big) \quad \longrightarrow \quad p_{k\,\mathsf{H}}(t) \tag{14.39b}$$

$$A\Big(q_j(t), p_j(t), t\Big) \quad \longrightarrow \quad A_{\mathsf{H}}(t) \tag{14.39c}$$

Während bei den klassischen Funktionen strikt unterschieden wird zwischen der Variablen t, die die explizite Zeitabhängigkeit beschreibt, und der kanonischen Zeitabhängigkeit, die durch die Variablen $q_j(t)$ und $p_j(t)$ vermittelt wird, sind in der Variablen t der Operatoren beide Zeitabhängigkeiten zusammengefasst.

Mithilfe des Zeitentwicklungsoperators kann man die Operatoren des Heisenberg-Bildes ins *Schrödinger-Bild* transformieren, das wir durch den Index S kennzeichnen:

$$A_{\mathsf{S}} \equiv U(t,0)\, A_{\mathsf{H}}(t)\, U^{-1}(t,0) \overset{\text{evtl.}}{=} e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} A_{\mathsf{H}}(t)\, e^{+\frac{i}{\hbar}Ht} \tag{14.40}$$

Das Gleichheitszeichen gilt „eventuell“, nämlich genau dann, wenn der Hamiltonoperator nicht explizit von der Zeit abhängt. Dagegen gelten alle Gleichungen des Zeitentwicklungsoperators U in diesem Kapitel auch dann, wenn diese Voraussetzung nicht erfüllt ist.

Der Hamiltonoperator ist in beiden Bildern identisch:

$$H_{\mathsf{S}} = U(t,0)\, H_{\mathsf{H}}\, U^{-1}(t,0) \overset{(14.29e)}{=} H_{\mathsf{H}} \overset{\text{evtl.}}{=} e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} H_{\mathsf{H}} e^{+\frac{i}{\hbar}Ht} \tag{14.41}$$

Deshalb kann man beim Hamiltonoperator auf den Index H oder S verzichten.

Wir berechnen die totale Ableitung des Operators A_{S} im Schrödinger-Bild nach der Zeit:

$$\frac{\mathrm{d}\, A_{\mathsf{S}}}{\mathrm{d}\, t} = \frac{\mathrm{d}\, U}{\mathrm{d}\, t}\, A_{\mathsf{H}}\, U^{-1} + U\, \frac{\mathrm{d}\, A_{\mathsf{H}}}{\mathrm{d}\, t}\, U^{-1} + U\, A_{\mathsf{H}}\, \frac{\mathrm{d}\, U^{-1}}{\mathrm{d}\, t} \tag{14.42}$$

Wegen $U^{\dagger}(t,t_0) \overset{(14.29a)}{=} U^{-1}(t,t_0)$ lautet die zu

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,U(t,0) = \frac{\partial}{\partial t}\,U(t,0) \overset{(14.27)}{=} -\frac{i}{\hbar} H\,U(t,0) \tag{14.43a}$$

adjungierte Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,U^{-1}(t,0) = +\frac{i}{\hbar} H\,U^{-1}(t,0)\ . \tag{14.43b}$$

Einsetzen in (14.42) ergibt

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\,A_{\mathsf{S}}}{\mathrm{d}t} &= -\frac{i}{\hbar} H \underbrace{U A_{\mathsf{H}} U^{-1}}_{A_{\mathsf{S}}} + U \underbrace{\frac{\mathrm{d}\,A_{\mathsf{H}}}{\mathrm{d}t}}_{\overset{(14.38)}{=}\frac{i}{\hbar}[H,A_{\mathsf{H}}]+\frac{\partial A_{\mathsf{H}}}{\partial t}} U^{-1} \overset{(14.29e)}{+} \frac{i}{\hbar} \underbrace{U A_{\mathsf{H}} U^{-1}}_{A_{\mathsf{S}}} H \\ &= -\frac{i}{\hbar}[H,A_{\mathsf{S}}] + \frac{i}{\hbar}[H,A_{\mathsf{S}}] + U\,\frac{\partial A_{\mathsf{H}}}{\partial t}\,U^{-1} = \frac{\partial A_{\mathsf{S}}}{\partial t}\ .\end{aligned} \tag{14.44}$$

Die Transformation (14.40) mit dem Zeitentwicklungsoperator hat die durch $\frac{i}{\hbar}[H, A_{\mathsf{H}}]$ bestimmte kanonische Zeitabhängigkeit des Operators A_{H} exakt kompensiert. Die Zeitabhängigkeit von A_{S} geht allein auf die explizite Zeitabhängigkeit von A_{H} zurück. Wir merken an:

$$A_{\mathsf{H}}(t{=}0) = A_{\mathsf{S}} \tag{14.45}$$

Operatoren im Heisenberg-Bild sind kanonisch und eventuell explizit zeitabhängig. Operatoren im Schrödinger-Bild sind nicht kanonisch, sondern nur eventuell explizit zeitabhängig. Der Zeitentwicklungsoperator transformiert die Operatoren vom einen ins andere Bild: (14.46a)

$$\begin{aligned} A_{\mathsf{S}} &= U(t,0)\,A_{\mathsf{H}}(t)\,U^{-1}(t,0) \\ A_{\mathsf{H}}(t) &= U^{-1}(t,0)\,A_{\mathsf{S}}\,U(t,0) \end{aligned}$$

Observable mit expliziter Zeitabhängigkeit treten nur recht selten auf. Deshalb kennzeichnen viele Autoren Operatoren im Heisenberg- bzw. im Schrödinger-Bild nicht durch Indizes H bzw. S, sondern durch die Angabe bzw. Nicht-Angabe einer Zeitabhängigkeit:

$$A(t) \equiv A_{\mathsf{H}}(t) \qquad\qquad A \equiv A_{\mathsf{S}}$$

Wir werden uns dieser vereinfachten Notation in der Regel anschließen, nur in diesem Abschnitt bleiben wir noch bei der deutlicheren Kennzeichnung durch die Indizes H und S.

Definition: Eigenfunktionen von Operatoren im Heisenberg-Bild werden als Vektoren im Heisenberg-Bild betrachtet. Eigenfunktionen von Operatoren im Schrödinger-Bild werden als Vektoren im Schrödinger-Bild betrachtet. (14.46b)

Bei der Berechnung des zeitabhängigen Erwartungswerts

$$\begin{aligned}\langle A\rangle(t) &= \langle\psi_{\mathsf{S}}(t)|\, A_{\mathsf{S}}\,|\psi_{\mathsf{S}}(t)\rangle && (14.47a)\\ &= \langle\psi_{\mathsf{S}}(t)|\, U(t,0)\, A_{\mathsf{H}}(t)\, U^{-1}(t,0)\,|\psi_{\mathsf{S}}(t)\rangle \\ &= \langle\psi_{\mathsf{H}}|\, A_{\mathsf{H}}(t)\,|\psi_{\mathsf{H}}\rangle && (14.47b)\end{aligned}$$

wird die kanonische Zeitabhängigkeit durch Transformation mit dem Zeitentwicklungsoperator U zwischen dem Operator und den Zustandsfunktionen hin- und hergeschoben. Die Transformation

$$|\psi_{\mathsf{S}}(t)\rangle = U(t,0)\,|\psi_{\mathsf{H}}\rangle = U(t,0)\,|\psi_{\mathsf{S}}(t{=}0)\rangle \tag{14.48}$$

transformiert den zeitunabhängigen Vektor $|\psi_{\mathsf{H}}\rangle$ des Heisenberg-Bildes in den zeitabhängigen Vektor $|\psi_{\mathsf{S}}(t)\rangle$ des Schrödinger-Bildes. Umgekehrt kann man sagen: Der Vektor $|\psi_{\mathsf{H}}\rangle$ im Heisenberg-Bild ist der zur Zeit $t = 0$ eingefrorene Vektor $|\psi_{\mathsf{S}}(t = 0)\rangle$ im Schrödinger-Bild. Zuweilen ist es zweckmäßig, den Vektor des Schrödinger-Bildes nicht zur Zeit $t = 0$, sondern zu einer anderen Zeit $t_0 \neq 0$ einzufrieren:

$$|\psi_{\mathsf{S}}(t-t_0)\rangle = U(t,t_0)\,|t_0,\psi_{\mathsf{H}}\rangle = U(t,t_0)\,|\psi_{\mathsf{S}}(t{=}t_0)\rangle \tag{14.49}$$

t_0 ist kein laufender Zeitparameter, sondern ein Index der dokumentiert, wann der zeitunabhängige Vektor $|t_0,\psi_{\mathsf{H}}\rangle$ eingefroren wurde.

Im Hinblick auf (14.47a) und (14.47b) könnte man vermuten, dass Zustandsvektoren im Schrödinger-Bild stets zeitabhängig wären, während

Zustandsvektoren im Heisenberg-Bild stets zeitunabhängig wären. Aber das ist nicht in immer der Fall. Es gibt auch zeitabhängige Zustandsfunktionen im Heisenberg-Bild und zeitunabhängige Zustandsfunktionen im Schrödinger-Bild.

Ein wichtiges Beispiel sind die Vektoren der zeitunabhängigen bzw. der zeitabhängigen Ortsbasis, die wir in Abschnitt 14.1.2 untersucht haben. Sie sind Eigenvektoren des zeitunabhängigen Ortsvektors $\boldsymbol{x}_\mathsf{S}$ im Schrödinger-Bild bzw. Eigenvektoren des zeitabhängigen Ortsvektors $\boldsymbol{x}_\mathsf{H}(t)$ im Heisenberg-Bild:

$$\langle \boldsymbol{x}_\mathsf{S} \rangle = \underbrace{\langle \boldsymbol{y}_\mathsf{S}| \overbrace{U(t,0)}^{1}}_{\langle t, \boldsymbol{y}_\mathsf{H}|} \underbrace{U^{-1}(t,0)\, \boldsymbol{x}_\mathsf{S} \overbrace{U(t,0)}^{1}}_{\boldsymbol{x}_\mathsf{H}(t)} \underbrace{U^{-1}(t,0)\, |\boldsymbol{y}_\mathsf{S}\rangle}_{|t, \boldsymbol{y}_\mathsf{H}\rangle} = \langle \boldsymbol{x}_\mathsf{H}(t) \rangle = \boldsymbol{y} \tag{14.50}$$

Die Zustandsvektoren

$$|\psi_\mathsf{H}\rangle \overset{(14.48)}{=} U^{-1}(t,0)\, |\psi_\mathsf{S}(t)\rangle \tag{14.51a}$$

$$|\boldsymbol{y}_\mathsf{S}\rangle \overset{(14.50)}{=} U(t,0)\, |t, \boldsymbol{y}_\mathsf{H}\rangle \tag{14.51b}$$

sind offensichtlich zeitunabhängig, während die Vektoren

$$|\psi_\mathsf{S}(t)\rangle \overset{(14.48)}{=} U(t,0)\, |\psi_\mathsf{H}\rangle \tag{14.51c}$$

$$|t, \boldsymbol{y}_\mathsf{H}\rangle \overset{(14.50)}{=} U^{-1}(t,0)\, |\boldsymbol{y}_\mathsf{S}\rangle \tag{14.51d}$$

offensichtlich zeitabhängig sind. Im Anschluss an (14.33) wurde der Grund für die anti-kanonische Zeitabhängigkeit von (14.51d) gegenüber der kanonischen Zeitabhängigkeit von (14.51c) diskutiert und erklärt.

Der Zeitentwicklungsoperator ist wegen $U\,U\,U^{-1} = U$ trivialerweise invariant unter der Zeitentwicklungstransformation. Er lässt sich weder dem Schrödinger- noch dem Heisenberg-Bild zuordnen, sondern steht zwischen den Bildern und vermittelt die Transformation zwischen ihnen.

14.1.5 Der Harmonische Oszillator

Die Energie eines mit der Kreisfrequenz ω, der verallgemeinerten Koordinate q, und dem verallgemeinerten Impuls p harmonisch oszillierenden klassischen Massepunktes der Masse m ist

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} \quad . \tag{14.52}$$

Der Oszillator wird dadurch quantisiert, dass man für p und q die nichtkommutative Algebra

$$[q,p] \equiv qp - pq \overset{(14.9)}{=} i\hbar \tag{14.53}$$

postuliert. Der dimensionslose Leiteroperator a wird definiert durch

$$a \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\, q + i\sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}}\, p \quad . \tag{14.54a}$$

Der zu a adjungierte Operator ist

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\, q - i\sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}}\, p \; . \tag{14.54b}$$

Wir brauchen in (14.54b) nicht $q^\dagger$ und $p^\dagger$ zu schreiben, weil die hermiteschen Operatoren q und p selbstadjungiert sind, also $q^\dagger = q$ und $p^\dagger = p$ gilt. Der Kommutator der Leiteroperatoren ist

$$\begin{aligned}
[a, a^\dagger] &= \frac{m\omega}{2\hbar}\, q^2 - \frac{i}{2\hbar}[q,p] + \frac{1}{2m\omega\hbar}\, p^2 \\
&\quad - \frac{m\omega}{2\hbar}\, q^2 - \frac{i}{2\hbar}\,[q,p] - \frac{1}{2m\omega\hbar}\, p^2 \\
&= -\frac{i}{\hbar}[q,p] = -\frac{i}{\hbar} i\hbar = 1 \; .
\end{aligned} \tag{14.55}$$

Durch Addition bzw. Subtraktion von (14.54a) und (14.54b) findet man

$$q = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a^\dagger + a) \tag{14.56a}$$

$$p = i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}(a^\dagger - a)\ . \tag{14.56b}$$

Mit diesen Gleichungen lässt sich der Hamiltonoperator (14.52) in folgender Form schreiben:

$$\begin{aligned} H &= -\frac{1}{2m}\frac{m\omega\hbar}{2}(a^\dagger a^\dagger - a^\dagger a - aa^\dagger + aa) + \\ &\quad + \frac{m\omega^2}{2}\frac{\hbar}{2m\omega}(a^\dagger a^\dagger + a^\dagger a + aa^\dagger + aa) \\ &= \frac{\hbar\omega}{2}(a^\dagger a + aa^\dagger) = \hbar\omega(a^+ a \dagger \frac{1}{2}\underbrace{[a, a^\dagger]}_{1}) \end{aligned} \tag{14.57}$$

$|n\rangle$ sei ein Eigenvektor von H mit der Energie E_n:

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle \tag{14.58}$$

Wir berechnen die Energie des Oszillators im Zustand $a^\dagger|n\rangle$:

$$\begin{aligned} Ha^\dagger|n\rangle &= \frac{\hbar\omega}{2}(a^\dagger a + aa^\dagger)a^\dagger|n\rangle \\ &= \frac{\hbar\omega}{2}(a^\dagger aa^\dagger + aa^\dagger a^\dagger)|n\rangle \\ &= \frac{\hbar\omega}{2}\Big(a^\dagger(1 + a^\dagger a) + (1 + a^\dagger a)a^\dagger\Big)|n\rangle \\ &= \hbar\omega a^\dagger|n\rangle + a^\dagger \underbrace{\frac{\hbar\omega}{2}(a^\dagger a + aa^\dagger)|n\rangle}_{=H|n\rangle = E_n|n\rangle} \\ &= (E_n + \hbar\omega)a^\dagger|n\rangle \end{aligned} \tag{14.59}$$

Also ist $a^\dagger|n\rangle$ ebenfalls ein Eigenvektor von H. Im Zustand $a^\dagger|n\rangle$ hat der Oszillator eine um $\hbar\omega$ höhere Energie als im Zustand $|n\rangle$. Seine Energie im Zustand $a|n\rangle$ ist

$$
\begin{aligned}
Ha|n\rangle &= \frac{\hbar\omega}{2}(a^\dagger a + aa^\dagger)a|n\rangle \\
&= \frac{\hbar\omega}{2}(a^\dagger aa + aa^\dagger a)|n\rangle \\
&= \frac{\hbar\omega}{2}\Big((-1+aa^\dagger)a + a(-1+aa^\dagger)\Big)|n\rangle = \\
&= -\hbar\omega a|n\rangle + a\underbrace{\frac{\hbar\omega}{2}(a^\dagger a + aa^\dagger)|n\rangle}_{=H|n\rangle=E_n|n\rangle} = (E_n - \hbar\omega)a|n\rangle \ . \qquad (14.60)
\end{aligned}
$$

Durch j-malige Anwendung des Operators a auf den Zustand $|n\rangle$ mit der Energie E_n kann man also einen Zustand mit der Energie $E_n - j\hbar\omega$ konstruieren. Das ist aber nicht unbegrenzt möglich. Denn p und q haben als hermitesche Operatoren nur reelle Eigenwerte. Da beide im Hamilton-Operator quadratisch vorkommen, kann der Hamilton-Operator keine negativen Eigenwerte haben. Unbegrenzte Fortsetzung des Verfahrens (14.60) wird dadurch vermieden, dass es einen Zustand mit niedrigster Energie gibt, den wir $|0\rangle$ nennen, und für den wir

$$a|0\rangle = 0 \qquad (14.61)$$

postulieren. Mit diesem Postulat ist die Energie des Grundzustands – der meist als „Vakuum“ bezeichnet wird –

$$
\begin{aligned}
H|0\rangle &= \frac{\hbar\omega}{2}(a^\dagger \underbrace{a|0\rangle}_{=0} + aa^\dagger|0\rangle) = \frac{\hbar\omega}{2}(-a^\dagger \underbrace{a|0\rangle}_{=0} + aa^\dagger|0\rangle) = \\
&= \frac{\hbar\omega}{2}\underbrace{[a,a^\dagger]}_{1}|0\rangle = \frac{\hbar\omega}{2}|0\rangle \ . \qquad (14.62)
\end{aligned}
$$

Ein quantisierter Harmonischer Oszillator hat mindestens die Energie $\frac{1}{2}\hbar\omega$, er kann nicht die Energie Null haben.

Jede Anwendung des Operators $a^\dagger$ erhöht die Energie des Oszillators um ein Energiequant $\hbar\omega$ („ein Energiequant wird erzeugt“), jede Anwendung des Operators a erniedrigt die Energie des Oszillators um ein Energiequant $\hbar\omega$ („ein Energiequant wird vernichtet“). Deshalb wird $a^\dagger$ als Erzeugungs-

operator, a als Vernichtungsoperator bezeichnet. Beide heißen auch Leiteroperatoren, weil man mit ihnen auf der Energieleiter auf- und absteigen kann. Wir werden sehen, dass die Leiteroperatoren in der Quantenfeldtheorie aus den Koeffizienten der Fourier-Entwicklungen entstehen, die in Kapitel 7 beschrieben wurden.

Bisher haben wir uns noch keine Gedanken über die Normierung der Zustandsfunktionen $|n\rangle$ gemacht. Die Normierung wird durch die beiden folgenden Postulate festgelegt:

$$\left.\begin{aligned}\langle n|n\rangle &= 1\\ \langle n|a^\dagger a|n\rangle &= n\end{aligned}\right\} \quad \text{für } n = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{14.63}$$

$a^\dagger a$ wird als Teilchenzahl-Operator bezeichnet. Sein Eigenwert n gibt an, wie viele Energiequanten $\hbar\omega$ im Zustand $|n\rangle$ des Oszillators angeregt sind. Wir definieren zwei Zahlen r_n und s_n durch

$$a|n\rangle = r_n|n-1\rangle \qquad\qquad a^\dagger|n\rangle = s_n|n+1\rangle\ . \tag{14.64}$$

Der Erwartungswert des Operators $a^\dagger a$ im Zustand $|n\rangle$ ist

$$\begin{aligned}&\langle n|a^\dagger a|n\rangle = n = \langle an|an\rangle = |r_n|^2\langle n-1|n-1\rangle = |r_n|^2\\ &\quad\Longrightarrow\quad r_n = \sqrt{n} \qquad (14.65)\\ &\langle n|a^\dagger a|n\rangle = n = \sqrt{n}\langle n|a^\dagger|n-1\rangle = \sqrt{n}s_{n-1}\langle n|n\rangle\\ &\quad\Longrightarrow\quad s_{n-1} = \sqrt{n}\ , \qquad (14.66)\end{aligned}$$

woraus

$$a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle \qquad\qquad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle \tag{14.67}$$

folgt. Die normierte Eigenfunktion des n-ten Zustands ist demnach

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\,(a^\dagger)^n|0\rangle\ , \tag{14.68}$$

und seine Energie ist

$$H|n\rangle = \underbrace{(n+\tfrac{1}{2})\hbar\omega}_{E_n}|n\rangle \ . \tag{14.69}$$

14.2 Quantisierung von Feldern

Wir wollen das Quantisierungsverfahren (14.9) der Punktmechanik auf die Feldtheorie übertragen, d. h. wir wollen für die Feldamplituden $\psi(t,\boldsymbol{x})$ und die zu ihnen kanonisch konjugierten Impulsdichten $\pi(t,\boldsymbol{x})$ die gleiche nichtkommutative Algebra postulieren, die wir bei der Quantisierung der Koordinaten q_j und der Impulse p_j der Punktteilchen in Abschnitt 14.1.1 festgelegt haben. Formal bedeutet das, dass wir $\psi(t,\boldsymbol{x})$ und $\pi(t,\boldsymbol{x})$ als Operatoren betrachten, die auf die Elemente $|s\rangle$ eines Hilbertraums wirken.

Allerdings sind die quantisierten q_j und p_j zeitunabhängige Operatoren, also Operatoren im Schrödinger-Bild, während die quantisierten $\psi(t,\boldsymbol{x})$ und $\pi(t,\boldsymbol{x})$ zeitabhängige Operatoren im Heisenberg-Bild sind. Es ist nicht von vornherein offensichtlich, wie bei der Quantisierung mit der Zeitkoordinate umzugehen ist, ob beispielsweise

$$[\psi(t_1,\boldsymbol{x}),\pi(t_2,\boldsymbol{y})] \overset{?}{=} i\hbar\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\delta(t_1-t_2) \quad \text{ist falsch!}$$

postuliert werden sollte. Tatsächlich ist dieser Ansatz falsch. Das sieht man, wenn man die Feldoperatoren mithilfe des Zeitentwicklungsoperators $U(t)$ durch

$$\psi(\boldsymbol{x}) \overset{(14.46a)}{=} U(t_1,0)\,\psi(t_1,\boldsymbol{x})\,U^{-1}(t_1,0) \tag{14.70}$$

$$\pi(\boldsymbol{x}) \overset{(14.46a)}{=} U(t_2,0)\,\pi(t_2,\boldsymbol{x})\,U^{-1}(t_2,0) \tag{14.71}$$

ins Schrödinger-Bild transformiert. Im Schrödinger-Bild muss der Kommutator wegen der Analogie mit (14.9) auf jeden Fall

$$[\psi(\boldsymbol{x}),\pi(\boldsymbol{y})] = i\hbar\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{14.72}$$

lauten. Diese Gleichung vergleichen wir mit

$$
\begin{aligned}
&[\psi(t_1,\boldsymbol{x}),\pi(t_2,\boldsymbol{y})] = \\
&\quad = U^{-1}(t_1,0)\psi(\boldsymbol{x})U(t_1,0)\,U^{-1}(t_2,0)\pi(\boldsymbol{y})U(t_2,0) \\
&\qquad - U^{-1}(t_2,0)\pi(\boldsymbol{y})U(t_2,0)\,U^{-1}(t_1,0)\psi(\boldsymbol{x})U(t_1,0)\ . \qquad (14.73)
\end{aligned}
$$

Wenn $t_2 = t_1$ ist, dann folgt daraus

$$
\begin{aligned}
&[\psi(t_1,\boldsymbol{x}),\pi(t_1,\boldsymbol{y})] = \\
&= U^{-1}(t_1,0)\Big(\underbrace{\psi(\boldsymbol{x})\,\pi(\boldsymbol{y}) - \pi(\boldsymbol{y})\,\psi(\boldsymbol{x})}_{i\hbar\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\Big)U(t_1,0) = i\hbar\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\ ,
\end{aligned}
$$

weil der Zeitentwicklungsoperator mit der Zahl $i\hbar\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ kommutiert.

Wenn aber $t_2 \neq t_1$ ist, dann kompensieren sich die Zeitentwicklungsoperatoren in (14.73) nicht, und dann ist der Kommutator nicht eine Zahl $\in \mathbb{C}$, sondern ein Operator. Welchen Wert dieser Operator haben könnte, lässt sich aus der Analogie mit (14.9) nicht erschließen. Deshalb machen wir über den Fall $t_2 \neq t_1$ im Folgenden keine Aussage, sondern beschränken uns ausdrücklich auf den Fall $t_2 = t_1$.

Mit den Indizes a, b bezeichnen wir die Komponenten von Vektor- oder Spinor-Feldern. Entsprechend (14.9) postulieren wir für bosonische Felder die nichtkommutative Algebra

Bei ganzzahligem Spin $0, 1, 2, 3, \ldots$ des Feldes und gleicher Zeit t in beiden Operatoren gilt:

$$
\begin{aligned}
&[\psi_a(t,\boldsymbol{x}),\pi_b(t,\boldsymbol{y})] \equiv \\
&\qquad \equiv \psi_a(t,\boldsymbol{x})\pi_b(t,\boldsymbol{y}) - \pi_b(t,\boldsymbol{y})\psi_a(t,\boldsymbol{x}) \\
&\qquad = i\hbar\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\delta_{ab} \\
&[\psi_a(t,\boldsymbol{x}),\psi_b(t,\boldsymbol{y})] = [\pi_a(t,\boldsymbol{x}),\pi_b(t,\boldsymbol{y})] = 0
\end{aligned}
\qquad (14.74a)
$$

Abweichend von (14.9) postulieren wir für fermionische Felder die nichtkommutative Algebra

Bei halbzahligem Spin $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$ des Feldes und gleicher Zeit t in beiden Operatoren gilt:

$$\begin{aligned} \{\psi_a(t,\boldsymbol{x}), \pi_b(t,\boldsymbol{y})\} &\equiv \\ &\equiv \psi_a(t,\boldsymbol{x})\pi_b(t,\boldsymbol{y}) + \pi_b(t,\boldsymbol{y})\psi_a(t,\boldsymbol{x}) \\ &= i\hbar\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\delta_{ab} \\ \{\psi_a(t,\boldsymbol{x}), \psi_b(t,\boldsymbol{y})\} &= \{\pi_a(t,\boldsymbol{x}), \pi_b(t,\boldsymbol{y})\} = 0 \end{aligned} \tag{14.74b}$$

$[\psi(t,\boldsymbol{x}), \pi(t,\boldsymbol{y})]$ wird als Kommutator bezeichnet, $\{\psi(t,\boldsymbol{x}), \pi(t,\boldsymbol{y})\}$ als Antikommutator. Dass hier, anders als in der Quantenmechanik der Punktteilchen, zusätzlich ein Antikommutator auftaucht liegt daran, dass wir die Quantenfeldtheorie – anders als die Quantenmechanik der Punktteilchen – so formulieren möchten, dass sie erstens mit der Speziellen Relativitätstheorie in Einklang steht, und dass zweitens ein quantisiertes Feld niemals negative Energie hat. Nach dem „Spin-Statistik-Theorem“ [40] von Pauli[2] können diese beiden Forderungen nur mit der für Bosonen und Fermionen unterschiedlichen Quantisierungsregel (14.74) gleichzeitig erfüllt werden. Wir werden das Spin-Statistik-Theorem nicht allgemein beweisen, aber anhand der Felder, die wir in den folgenden Kapiteln quantisieren, beispielhaft überprüfen.

Die kanonische Quantisierung (14.74) ist nicht lorentzinvariant, weil die Deltafunktion nicht lorentzinvariant ist. Denn die Deltafunktion kann ja nur sinnvoll verwendet werden unter einem Integral

$$\int_V \mathrm{d}^3x\, \delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = 1 \qquad \text{falls } \boldsymbol{y} \text{ in } V \text{ liegt.} \tag{14.75}$$

Die Zahl 1 ist lorentzinvariant. Das infinitesimale Volumen d^3x ist nicht lorentzinvariant, sondern schrumpft durch relativistische Längenkontraktion um den Faktor γ^{-1}, vergleiche die Anmerkungen bei Gleichung (7.22). Die Deltafunktion hat die Dimension Volumen^{-1}, wird also bei einer Lorentztransformation um den Faktor γ gedehnt. Das Ziel einer Quantenfeldtheorie, die mit der Speziellen Relativitätstheorie im Einklang steht, scheint durch

[2] Von Wolfgang Pauli (1900-1958) stammen zahlreiche grundlegende Arbeiten zur Quantentheorie.

(14.74) in Frage gestellt zu werden. Dennoch halten wir uns so eng wie möglich an die Quantisierungsregel (14.9), die Heisenberg im Sommer 1925 erriet. Dafür nehmen wir einige Umwege in Kauf, die uns schließlich doch zu einer Quantenfeldtheorie führen werden, die mit der Speziellen Relativitätstheorie kompatibel ist.

Wir können aus der klassischen Physik keinerlei Begründung für die Quantisierungsbedingung (14.74) herleiten. Es handelt sich um ein erratenes Naturgesetz, das allein dadurch gerechtfertigt werden kann, dass die aus ihm gezogenen Schlussfolgerungen mit allen Beobachtungen übereinstimmen.

14.3 Keine „zweite“ Quantisierung

Wir erwähnen den Begriff „zweite Quantisierung“, weil er immer noch (wenn auch mit deutlich rückläufiger Tendenz) in vielen Büchern auftaucht, wenn es um die Quantisierung von Feldern geht. Der Begriff dürfte dadurch entstanden sein, dass Schrödinger seine Wellengleichung, die doch offenbar eine Quantentheorie ist, mit einem klassischen, nicht quantisierten ψ-Feld formulierte. Als es sich dann als notwendig erwies, dieses Feld (und die entsprechenden Felder anderer Quantentheorien) zu quantisieren, lag der Begriff „zweite Quantisierung“ dafür nahe. Tatsächlich gibt es aber sowohl in der Quantenmechanik der Punktteilchen als auch in der Quantenfeldtheorie nur jeweils eine Quantisierung.

Die Variablen der Klassischen Punktmechanik sind (mit physikalischen Einheiten multiplizierte) Zahlen, also kommutierende Größen. Quantisiert wird die Punktmechanik dadurch, dass man für die Variablen eine nicht-kommutative Algebra postuliert. Mathematisch realisiert wird diese nicht-kommutative Algebra dadurch, dass man die Variablen durch Matrizen repräsentiert, oder dass man sie zu Operatoren ernennt, die auf die Elemente eines Hilbertraums wirken. Dies ist die erste und einzige Quantisierung auf dem Weg von der Klassischen Mechanik der Punktteilchen zur Quantenmechanik der Punktteilchen.

Im ersten Teil dieses Buches haben wir einige Klassische Felder und die zu ihnen kanonisch konjugierten Impulsdichten beschrieben. Quantisiert werden diese Felder dadurch, dass man die nicht-kommutative Algebra (14.74) postuliert. Indirekt erhalten dadurch auch die Erhaltungsgrößen (wie

z. B. Energie, Impuls, Ladung) des Feldes, die Funktionen der Amplitude und des kanonisch konjugierten Impulses sind, eine nicht-kommutative Algebra. Mathematisch realisiert wird die nicht-kommutative Algebra dadurch, dass man die Feldamplitude und ihre kanonisch konjugierte Impulsdichte (und damit indirekt die aus ihnen gebildeten Produkte) zu Operatoren ernennt, die auf die Elemente eines Hilbertraums wirken. Dies ist die erste und einzige Quantisierung auf dem Weg von der Klassischen Feldtheorie zur Quantenfeldtheorie.

Weizsäcker berichtet [41, Kap. 11, Abschnitt 1.f.γ], dass Heisenberg ihm die Benutzung des Begriffs zweite Quantisierung untersagt habe weil dieser Begriff „geeignet ist, jedes Verständnis des damit gemeinten Sachverhalts unmöglich zu machen“. Im gleichen Buch erklärt Weizsäcker, warum er sich später über dieses Verbot hinweggesetzt, und der ersten Quantisierung nicht nur eine zweite nachgeschaltet, sondern auch eine Nullte vorgeschaltet hat. Wir schließen uns uneingeschränkt Heisenbergs Betrachtungsweise der Quantenfeldtheorie an. Jedes Feld definieren wir zunächst als klassisches Feld, und quantisieren es dann genau einmal. Den irreführenden Begriff „zweite Quantisierung“ werden wir nicht verwenden.

15 Das freie Klein-Gordon-Feld

15.1 Quantisierung

Das freie, mit keinem anderen Feld wechselwirkende Klein-Gordon-Feld wird durch (10.8) beschrieben. Wir betrachten zunächst die Quantisierung im Schrödinger-Bild, d.h. gemäß (14.45) die Amplituden $\phi(\boldsymbol{x}) \equiv \phi(t=0,\boldsymbol{x})$ und die zu ihnen konjugierten Impulsdichten $\pi(\boldsymbol{x}) \equiv \pi(t=0,\boldsymbol{x})$. Für diese Operatoren postulieren wir die nicht-kommutative Algebra (14.74a). Denn der Spin des Klein-Gordon-Feldes ist $s = 0$, d. h. es ist ein Boson. Die nicht-kommutative Algebra von ϕ und π wird dadurch realisiert, dass die Fourier-Koeffizienten $a_{\boldsymbol{k}}, a^*_{\boldsymbol{k}}, b_{\boldsymbol{k}}, b^*_{\boldsymbol{k}}$ zu Operatoren $a_{\boldsymbol{k}}, a^\dagger_{\boldsymbol{k}}, b_{\boldsymbol{k}}, b^\dagger_{\boldsymbol{k}}$ mit nicht-kommutativer Algebra werden, während alle anderen Faktoren in ϕ und π kommutierende Zahlen bleiben:

$$\phi(\boldsymbol{x}) \overset{(10.8)}{=} \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{1}{\sqrt{N\Omega}} \Big(a_{\boldsymbol{k}} \exp\{+i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}\} + b^\dagger_{\boldsymbol{k}} \exp\{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}\} \Big) \tag{15.1a}$$

$$\pi(\boldsymbol{x}) \overset{(10.14)}{=} \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{i\hbar^2\omega_{\boldsymbol{k}}}{\sqrt{N\Omega}} \Big(a^\dagger_{\boldsymbol{k}} \exp\{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}\} - b_{\boldsymbol{k}} \exp\{+i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}\} \Big) \tag{15.1b}$$

Die Vorzeichen der Exponenten stimmen mit denen in Gleichung (10.8) überein. Nur die Zeitkomponente ist in den Exponenten verschwunden. Wir klammern die Exponentialfunktion aus, benennen die Wellenzahl $\boldsymbol{k}$ der konjugierten Impulsdichte nach $\boldsymbol{f}$ um, und benennen ihre Raum-Zeit-Koordinaten von $\boldsymbol{x}$ nach $\boldsymbol{y}$ um:

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{1}{\sqrt{N\Omega}} \Big(a_{\boldsymbol{k}} + b^\dagger_{-\boldsymbol{k}} \Big) \exp\{+i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}\} \tag{15.2a}$$

$$\pi(\boldsymbol{y}) = \sum_{\boldsymbol{f}} \frac{i\hbar^2\omega_{\boldsymbol{f}}}{\sqrt{N\Omega}} \Big(a^\dagger_{\boldsymbol{f}} - b_{-\boldsymbol{f}} \Big) \exp\{-i\boldsymbol{f}\boldsymbol{y}\} \tag{15.2b}$$

Diese Operatoren setzen wir in (14.74a) ein:

$$[\phi(\boldsymbol{x}),\pi(\boldsymbol{y})] = \sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{f}} \frac{i\hbar^2\omega_{\boldsymbol{f}}}{N\Omega}\Big([a_{\boldsymbol{k}},a^\dagger_{\boldsymbol{f}}] - [a_{\boldsymbol{k}},b_{\text{-}\boldsymbol{f}}] + \\ + [b^\dagger_{\text{-}\boldsymbol{k}},a^\dagger_{\boldsymbol{f}}] - [b^\dagger_{\text{-}\boldsymbol{k}},b_{\text{-}\boldsymbol{f}}]\Big)\exp\{+i(\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{f}\boldsymbol{y})\} \tag{15.3}$$

Aus dem Vergleich mit der allgemeinen Quantisierungsregel

$$[\phi(\boldsymbol{x}),\pi(\boldsymbol{y})] \overset{(14.74a)}{=} i\hbar\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \overset{(7.9)}{=} \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{i\hbar}{\Omega}\exp\{+i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\}$$

folgt für die Kommutatoren die Bedingung

$$[a_{\boldsymbol{k}},a^\dagger_{\boldsymbol{f}}] - [a_{\boldsymbol{k}},b_{\text{-}\boldsymbol{f}}] + [b^\dagger_{\text{-}\boldsymbol{k}},a^\dagger_{\boldsymbol{f}}] - [b^\dagger_{\text{-}\boldsymbol{k}},b_{\text{-}\boldsymbol{f}}] = \frac{N\delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{f}}}{\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}}\ . \tag{15.4}$$

Bei der Quantisierung ändert sich die Algebra von Feldern, konjugierten Impulsen, und Fourier-Koeffizienten, aber nicht die Dimension dieser Größen. Im Anschluss an (10.8) haben wir festgestellt, dass die Fourier-Koeffizienten des Klein-Gordon-Feldes dimensionslos sind, und der Normierungsfaktor N die Dimension Energie hat. In Übereinstimmung damit definieren wir

$$N \equiv 2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}\ . \tag{15.5}$$

Der Faktor 2 ist reine Konvention. Die Adjungierte eines Kommutators ist

$$[a,b]^\dagger = (ab)^\dagger - (ba)^\dagger = b^\dagger a^\dagger - a^\dagger b^\dagger = [b^\dagger,a^\dagger]\ .$$

Wir bilden die Adjungierte von (15.4), tauschen $\boldsymbol{k}\leftrightarrow\boldsymbol{f}$, und addieren den so gewonnenen Ausdruck zu (15.4):

$$[a_{\boldsymbol{k}},a^\dagger_{\boldsymbol{f}}] + [a_{\boldsymbol{k}},a^\dagger_{\boldsymbol{f}}] - [a_{\boldsymbol{k}},b_{\text{-}\boldsymbol{f}}] - [b^\dagger_{\text{-}\boldsymbol{k}},a^\dagger_{\boldsymbol{f}}] + \\ + [b^\dagger_{\text{-}\boldsymbol{k}},a^\dagger_{\boldsymbol{f}}] + [a_{\boldsymbol{k}},b_{\text{-}\boldsymbol{f}}] - [b^\dagger_{\text{-}\boldsymbol{k}},b_{\text{-}\boldsymbol{f}}] - [b^\dagger_{\text{-}\boldsymbol{k}},b_{\text{-}\boldsymbol{f}}] = 4\delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{f}} \\ \Longrightarrow \quad [a_{\boldsymbol{k}},a^\dagger_{\boldsymbol{f}}] + [b_{\text{-}\boldsymbol{f}},b^\dagger_{\text{-}\boldsymbol{k}}] = 2\delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{f}}$$

Dies muss auch im Fall $a = b$ gelten. Also ist

$$[a_{\boldsymbol{k}}, a^\dagger_{\boldsymbol{f}}] = [a_{-\boldsymbol{f}}, a^\dagger_{-\boldsymbol{k}}] = [b_{\boldsymbol{k}}, b^\dagger_{\boldsymbol{f}}] = [b_{-\boldsymbol{f}}, b^\dagger_{-\boldsymbol{k}}] = \delta_{\boldsymbol{kf}} \ .$$

Folglich müssen *für beliebige* $\boldsymbol{f}$ und $\boldsymbol{k}$ die beiden mittleren Kommutatoren in (15.4) Null sein, auch im Fall $a = b$:

$$[a_{\boldsymbol{k}}, b_{\boldsymbol{f}}] = [b^\dagger_{\boldsymbol{k}}, a^\dagger_{\boldsymbol{f}}] = [a_{\boldsymbol{k}}, a_{\boldsymbol{f}}] = [a^\dagger_{\boldsymbol{k}}, a^\dagger_{\boldsymbol{f}}] = [b_{\boldsymbol{k}}, b_{\boldsymbol{f}}] = [b^\dagger_{\boldsymbol{k}}, b^\dagger_{\boldsymbol{f}}] = 0$$

Zusammenfassend gelten die Regeln:

$$\begin{aligned} [a_{\boldsymbol{k}}, a^\dagger_{\boldsymbol{f}}] &= [b_{\boldsymbol{k}}, b^\dagger_{\boldsymbol{f}}] = \delta_{\boldsymbol{kf}} \\ [a_{\boldsymbol{k}}, a_{\boldsymbol{f}}] = [b_{\boldsymbol{k}}, b_{\boldsymbol{f}}] &= [a^\dagger_{\boldsymbol{k}}, a^\dagger_{\boldsymbol{f}}] = \\ = [b^\dagger_{\boldsymbol{k}}, b^\dagger_{\boldsymbol{f}}] = [a_{\boldsymbol{k}}, b_{\boldsymbol{f}}] &= [a^\dagger_{\boldsymbol{k}}, b^\dagger_{\boldsymbol{f}}] = 0 \\ [a_{\boldsymbol{k}}, b^\dagger_{\boldsymbol{f}}] &= [a^\dagger_{\boldsymbol{k}}, b_{\boldsymbol{f}}] = 0 \text{ falls } b_{\boldsymbol{k}} \neq a_{\boldsymbol{k}} \\ \text{Es wird immer } a \neq b^\dagger &\text{ vorausgesetzt!} \end{aligned} \tag{15.6}$$

Man beachte die Einschränkung in der letzten Zeile! Wir lassen die Wahl $a = b$ zu, nämlich bei der Beschreibung reeller, ungeladener Klein-Gordon-Felder, jedoch niemals die Wahl $a = b^\dagger$.

Die Quantisierung hat die Fourier-Koeffizienten in Fourier-Operatoren mit nicht-kommutativer Algebra umgewandelt. Darüber hinaus hat sie zwei weitere bemerkenswerte Nebenwirkungen: Solange $\phi(x)$ eine Zustandsfunktion der Quantenmechanik war, konnten wir den Normierungsfaktor N im Rahmen von (7.2) beliebig wählen. Bei der Quantisierung wird die Normierung durch

$$\frac{1}{N}\Big([a_{\boldsymbol{k}}, a^\dagger_{\boldsymbol{f}}] + [b_{\boldsymbol{k}}, b^\dagger_{\boldsymbol{f}}]\Big) \overset{(15.5),(15.6)}{=} \frac{\delta_{\boldsymbol{kf}}}{\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}} \tag{15.7}$$

eindeutig festgelegt. Zweitens müssen – anders als die Koeffizienten einer Fourier-Entwicklung der klassischen Physik – *sämtliche* Fourier-Operatoren $a_{\boldsymbol{k}}, a^\dagger_{\boldsymbol{k}}, b_{\boldsymbol{k}}, b^\dagger_{\boldsymbol{k}}$ für *sämtliche* Wellenzahlen $\boldsymbol{k}$ wegen (15.6) verschieden von Null sein, und ihr Kommutator ist für alle $\boldsymbol{k}$ gleich:

$$\left.\begin{aligned} a_{\boldsymbol{k}}, a^\dagger_{\boldsymbol{k}}, b_{\boldsymbol{k}}, b^\dagger_{\boldsymbol{k}} &\neq 0 \\ [a_{\boldsymbol{k}}, a^\dagger_{\boldsymbol{k}}] = [b_{\boldsymbol{k}}, b^\dagger_{\boldsymbol{k}}] &= 1 \end{aligned}\right\} \text{für beliebiges } \boldsymbol{k} \tag{15.8}$$

Die Feldoperatoren (15.1) unterscheiden sich also ganz wesentlich von klassischen Fourier-Entwicklungen, und dieser Unterschied wird durch die Quantisierungsbedingung (14.74) verursacht.

15.2 Feldoperatoren im Heisenberg-Bild

Bisher haben wir nur die zeitunabhängigen Feldoperatoren $\phi(\boldsymbol{x})$ und $\phi^\dagger(\boldsymbol{x})$ im Schrödinger-Bild benutzt. Für die Untersuchung zeitabhängiger Vorgänge ist oft ein Wechsel ins Heisenberg-Bild vorteilhaft. Dabei nehmen wir an, dass der Hamiltonoperator nicht explizit zeitabhängig ist, so dass der Zeitentwicklungsoperator die einfache Form $U(t,0) = \exp\{-(i/\hbar)Ht\}$ hat.

$$\begin{aligned} \phi(x) \equiv \phi(t,\boldsymbol{x}) &\overset{(14.46a)}{=} \exp\{+\tfrac{i}{\hbar}Ht\}\,\phi(\boldsymbol{x})\,\exp\{-\tfrac{i}{\hbar}Ht\} \overset{(15.1)}{=} \\ &= \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}\Omega}} \Big(\underbrace{\exp\{+\tfrac{i}{\hbar}Ht\}a_{\boldsymbol{k}}\exp\{-\tfrac{i}{\hbar}Ht\}}_{a_{\boldsymbol{k}}(t)} \exp\{+i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}\} + \\ &\quad + \underbrace{\exp\{+\tfrac{i}{\hbar}Ht\}b^\dagger_{\boldsymbol{k}}\exp\{-\tfrac{i}{\hbar}Ht\}}_{b^\dagger_{\boldsymbol{k}}(t)} \exp\{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}\} \Big) \,. \end{aligned} \tag{15.9}$$

Um die zeitabhängigen Fourier-Operatoren $a_{\boldsymbol{k}}(t)$ und $b^\dagger_{\boldsymbol{k}}(t)$ im Heisenberg-Bild zu finden, berechnen wir zunächst

$$\begin{aligned} [H, a_{\boldsymbol{k}}] &= \sum_{\boldsymbol{f}} \hbar\omega_{\boldsymbol{f}} \Big(a^\dagger_{\boldsymbol{f}} a_{\boldsymbol{f}} a_{\boldsymbol{k}} - a_{\boldsymbol{k}} a^\dagger_{\boldsymbol{f}} a_{\boldsymbol{f}} \Big) \;= \\ &= \sum_{\boldsymbol{f}} \hbar\omega_{\boldsymbol{f}} \Big(a^\dagger_{\boldsymbol{f}} a_{\boldsymbol{f}} a_{\boldsymbol{k}} - (\delta_{\boldsymbol{f}\boldsymbol{k}} a_{\boldsymbol{f}} + a^\dagger_{\boldsymbol{f}} a_{\boldsymbol{f}} a_{\boldsymbol{k}}) \Big) = -\hbar\omega_{\boldsymbol{k}} a_{\boldsymbol{k}} \end{aligned} \tag{15.10a}$$

$$[H, a_{\boldsymbol{k}}^\dagger] = \sum_{\boldsymbol{f}} \hbar\omega_{\boldsymbol{f}} \Big(a_{\boldsymbol{f}}^\dagger a_{\boldsymbol{f}} a_{\boldsymbol{k}}^\dagger - a_{\boldsymbol{k}}^\dagger a_{\boldsymbol{f}}^\dagger a_{\boldsymbol{f}} \Big) =$$

$$= \sum_{\boldsymbol{f}} \hbar\omega_{\boldsymbol{f}} \Big((a_{\boldsymbol{f}}^\dagger \delta_{\boldsymbol{f}\boldsymbol{k}} + a_{\boldsymbol{k}}^\dagger a_{\boldsymbol{f}}^\dagger a_{\boldsymbol{f}}) - a_{\boldsymbol{k}}^\dagger a_{\boldsymbol{f}}^\dagger a_{\boldsymbol{f}} \Big) = +\hbar\omega_{\boldsymbol{k}} a_{\boldsymbol{k}}^\dagger \ , \tag{15.10b}$$

was man in der Form

$$H a_{\boldsymbol{k}} = a_{\boldsymbol{k}} (H - \hbar\omega_{\boldsymbol{k}}) \tag{15.11a}$$

$$H a_{\boldsymbol{k}}^\dagger = a_{\boldsymbol{k}}^\dagger (H + \hbar\omega_{\boldsymbol{k}}) \tag{15.11b}$$

schreiben kann. Wiederholung des Verfahrens ergibt

$$H^n a_{\boldsymbol{k}} = H^{n-1} a_{\boldsymbol{k}} (H - \hbar\omega_{\boldsymbol{k}}) = a_{\boldsymbol{k}} (H - \hbar\omega_{\boldsymbol{k}})^n \tag{15.12a}$$

$$H^n a_{\boldsymbol{k}}^\dagger = a_{\boldsymbol{k}}^\dagger (H + \hbar\omega_{\boldsymbol{k}})^n \ . \tag{15.12b}$$

Damit gilt für die Exponentialfunktionen

$$\exp\{\frac{i}{\hbar} H t\}\, a_{\boldsymbol{k}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Big(\frac{i}{\hbar}\, t \Big)^n H^n a_{\boldsymbol{k}}$$

$$= a_{\boldsymbol{k}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Big(\frac{i}{\hbar}\, t \Big)^n (H - \hbar\omega_{\boldsymbol{k}})^n =$$

$$= a_{\boldsymbol{k}} \exp\{\frac{i}{\hbar} H t\} \exp\{-i\omega_{\boldsymbol{k}} t\} \tag{15.13a}$$

$$\exp\{\frac{i}{\hbar} H t\}\, a_{\boldsymbol{k}}^\dagger = a_{\boldsymbol{k}}^\dagger \exp\{\frac{i}{\hbar} H t\} \exp\{+i\omega_{\boldsymbol{k}} t\} \ . \tag{15.13b}$$

Wir haben diese Relationen für den Fall hergeleitet, dass der Hamiltonoperator H nicht explizit zeitabhängig ist. Ohne Beweis stellen wir fest, dass auch bei explizit zeitabhängigem H die Relationen

$$a_{\boldsymbol{k}}(t) = U^{-1}(t,0)\, a_{\boldsymbol{k}}\, U(t,0) = a_{\boldsymbol{k}} \exp\{-i\omega_{\boldsymbol{k}} t\} \tag{15.14a}$$

$$a_{\boldsymbol{k}}^\dagger(t) = U^{-1}(t,0)\, a_{\boldsymbol{k}}^\dagger\, U(t,0) = a_{\boldsymbol{k}}^\dagger \exp\{+i\omega_{\boldsymbol{k}} t\} \tag{15.14b}$$

$$b_{\boldsymbol{k}}(t) = U^{-1}(t,0)\, b_{\boldsymbol{k}}\, U(t,0) = b_{\boldsymbol{k}} \exp\{-i\omega_{\boldsymbol{k}} t\} \tag{15.14c}$$

$$b_{\boldsymbol{k}}^\dagger(t) = U^{-1}(t,0)\, b_{\boldsymbol{k}}^\dagger\, U(t,0) = b_{\boldsymbol{k}}^\dagger \exp\{+i\omega_{\boldsymbol{k}} t\} \tag{15.14d}$$

gelten. Der Feldoperator im Heisenberg-Bild ist folglich

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}\Omega}} \Big(a_{\boldsymbol{k}}(t) \exp\{+i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}\} + b_{\boldsymbol{k}}^\dagger(t) \exp\{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}\} \Big) \\ &= \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}\Omega}} \Big(a_{\boldsymbol{k}} \exp\{-ikx\} + b_{\boldsymbol{k}}^\dagger \exp\{+ikx\} \Big) \,. \end{aligned} \tag{15.15a}$$

Auf gleiche Weise findet man die Feldoperatoren

$$\phi^\dagger(x) \overset{(15.1)}{=} \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}\Omega}} \Big(a_{\boldsymbol{k}}^\dagger \exp\{+ikx\} + b_{\boldsymbol{k}} \exp\{-ikx\} \Big) \tag{15.15b}$$

$$\pi(x) \overset{(15.1)}{=} \sum_{\boldsymbol{k}} i\hbar \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}}{2\Omega}} \Big(a_{\boldsymbol{k}}^\dagger \exp\{+ikx\} - b_{\boldsymbol{k}} \exp\{-ikx\} \Big) \tag{15.15c}$$

$$\pi^\dagger(x) \overset{(15.1)}{=} -\sum_{\boldsymbol{k}} i\hbar \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}}{2\Omega}} \Big(a_{\boldsymbol{k}} \exp\{-ikx\} - b_{\boldsymbol{k}}^\dagger \exp\{+ikx\} \Big) \tag{15.15d}$$

Der Vergleich mit den klassischen Feldern (10.13) und (10.14) zeigt, dass wir direkt zu den Feldoperatoren im Heisenberg-Bild gelangt wären, wenn wir einfach in den Formeln der klassischen zeitabhängigen Felder die (nicht zeitabhängigen) Fourier-Koeffizienten $a_{\boldsymbol{k}}, a_{\boldsymbol{k}}^*, b_{\boldsymbol{k}}, b_{\boldsymbol{k}}^*$ ersetzt hätten durch die (ebenfalls nicht zeitabhängigen) Fourier-Operatoren $a_{\boldsymbol{k}}, a_{\boldsymbol{k}}^\dagger, b_{\boldsymbol{k}}, b_{\boldsymbol{k}}^\dagger$.

Die zeit- und ortsabhängigen Operatoren $\phi(x) = \phi(t, \boldsymbol{x})$ usw. legen eine grundsätzliche Überlegung nahe: Die Quantenmechanik der Punktteilchen behandelt Raum und Zeit in unterschiedlicher Weise. Denn sie kennt einen Ortsoperator (der in der Ortsdarstellung der Quantenmechanik mit dem Ortsvektor identisch ist), sie kennt aber keinen Zeitoperator. Die Zeit ist in der Quantenmechanik lediglich ein Parameter.

In der Relativitätstheorie sind Zeit und Ort gleichberechtigte Komponenten eines Vierervektors. Wenn man eine mit der Relativitätstheorie kompatible Quantentheorie formulieren möchte, in der die angemessene Balance zwischen Zeit und Ort gewahrt wird, muss man deshalb entweder

auch die Zeit zu einer observablen Größe machen, die durch einen Operator repräsentiert wird, oder man muss den Ort zu einem Parameter wie der Zeit degradieren.

Wir sind den zweiten Weg gegangen: In den Feldoperatoren $\phi(x) = \phi(t, \boldsymbol{x})$ usw. ist der Ort $\boldsymbol{x}$, genau wie die Zeit t, lediglich ein Parameter, kein Operator. Dadurch dass die Theorie neben dem Parameter t auch den Parameter $\boldsymbol{x}$ enthält, ist sie zu einer Feldtheorie geworden. Es ist kein Zufall, dass die mit der Relativitätstheorie kompatible Quantentheorie als Feldtheorie konstruiert wird.

15.3 Erhaltungsgrößen

Man erhält die Komponenten des quantisierten ES-Tensors, indem man in (10.17) die klassischen Fourier-Koeffizienten durch die quantisierten Fourier-Operatoren (15.6) ersetzt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}^{\rho\sigma} \overset{(10.17)}{=} \sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{f}} \frac{c^2\hbar^2}{2\Omega\hbar\sqrt{\omega_{\boldsymbol{k}}\omega_{\boldsymbol{f}}}} \Big[& i^2(k^\rho f^\sigma + f^\rho k^\sigma)\Big(\\
& - a^\dagger_{\boldsymbol{k}} a_{\boldsymbol{f}} \exp\{+i(k-f)x\} + a^\dagger_{\boldsymbol{k}} b^\dagger_{\boldsymbol{f}} \exp\{+i(k+f)x\} + \\
& + b_{\boldsymbol{k}} a_{\boldsymbol{f}} \exp\{-i(k+f)x\} - b_{\boldsymbol{k}} b^\dagger_{\boldsymbol{f}} \exp\{-i(k-f)x\}\Big) - \\
- g^{\rho\sigma} i^2 k_\mu f^\mu \Big(& - a^\dagger_{\boldsymbol{f}} a_{\boldsymbol{k}} \exp\{+i(f-k)x\} + a^\dagger_{\boldsymbol{f}} b^\dagger_{\boldsymbol{k}} \exp\{+i(f+k)x\} + \\
& + b_{\boldsymbol{f}} a_{\boldsymbol{k}} \exp\{-i(f+k)x\} - b_{\boldsymbol{f}} b^\dagger_{\boldsymbol{k}} \exp\{-i(f-k)x\}\Big) + \\
+ g^{\rho\sigma} \frac{m^2c^2}{\hbar^2} \Big(& a^\dagger_{\boldsymbol{k}} a_{\boldsymbol{f}} \exp\{+i(k-f)x\} + a^\dagger_{\boldsymbol{k}} b^\dagger_{\boldsymbol{f}} \exp\{+i(k+f)x\} + \\
& + b_{\boldsymbol{k}} a_{\boldsymbol{f}} \exp\{-i(k+f)x\} + b_{\boldsymbol{k}} b^\dagger_{\boldsymbol{f}} \exp\{-i(k-f)x\}\Big)\Big] \qquad (15.16)
\end{aligned}$$

Durch Integration über das Normierungsvolumen Ω gelangt man zu

$$T^{\rho\sigma} \equiv \int_\Omega \mathrm{d}^3x\, \mathcal{T}^{\rho\sigma} \overset{(10.22)}{=} \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{c^2\hbar^2}{\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}} k^\rho k^\sigma \Big(a^\dagger_{\boldsymbol{k}} a_{\boldsymbol{k}} + b_{\boldsymbol{k}} b^\dagger_{\boldsymbol{k}} \Big) = \qquad (15.17a)$$

$$\overset{(15.6)}{=} \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{c^2\hbar^2}{\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}} k^\rho k^\sigma \Big(a^\dagger_{\boldsymbol{k}} a_{\boldsymbol{k}} + b^\dagger_{\boldsymbol{k}} b_{\boldsymbol{k}} + \underbrace{[b_{\boldsymbol{k}}, b^\dagger_{\boldsymbol{k}}]}_{1} \Big) \,. \tag{15.17b}$$

Jetzt müssen wir zwischen diskreten und kontinuierlichen Feldern unterscheiden. Felder werden als „diskret“ bezeichnet, wenn sie ein diskretes Substrat haben. Beispiel: Das Feld der Schallwellen (Phononen) in einem Festkörper hat als Substrat das diskrete Kristallgitter der Atome, die den Festkörper bilden. Deshalb läuft $\sum_{\boldsymbol{k}}$ bei Phonon-Feldern (und allen anderen diskreten Feldern) nur über die erste Brillouin-Zone. Wellenvektoren $\boldsymbol{k}$ aus anderen Brillouin-Zonen wären redundant, und werden deshalb bei der Summation nicht berücksichtigt. Dadurch ist (15.17) im Fall diskreter Felder stets endlich.

Dagegen divergiert (15.17) im Fall kontinuierlicher Felder. Denn kontinuierliche Felder haben kein diskretes Substrat, so dass in (15.17) bis zu unendlich großen Wellenzahlen summiert wird. Wegen $\sum_{\boldsymbol{k}} [b_{\boldsymbol{k}}, b^\dagger_{\boldsymbol{k}}] = \infty$ gibt es einen unendlich großen Beitrag zu jeder Komponente von $T^{\rho\sigma}$. Das gilt sogar im Vakuum-Zustand $|0\rangle$, in dem überhaupt kein Feldquant angeregt ist, und wegen

$$\langle 0 | a^\dagger_{\boldsymbol{k}} a_{\boldsymbol{k}} | 0 \rangle = \langle 0 | b^\dagger_{\boldsymbol{k}} b_{\boldsymbol{k}} | 0 \rangle \overset{(14.63)}{=} 0$$

zwei der drei Terme in (15.17b) nichts zu $T^{\rho\sigma}$ beitragen.

Alle elementaren Quantenfelder (z. B. das Elektron/Positron Feld, das elektromagnetische Feld, und alle andern Felder des Standard-Modells der elementaren Teilchen), und nur diese, sind kontinuierliche Quantenfelder. „Elementares Quantenfeld“ und „kontinuierliches Quantenfeld“ sind also synonyme Begriffe.

In [42] werden triftige Gründe für die Annahme aufgezählt, dass die Berechnung des ES-Tensors gemäß (10.15) nur im Fall klassischer und diskreter Felder richtig ist, nicht aber im Fall elementarer Felder. Anstelle von (10.15) postulieren wir ad-hoc, d. h. als ein Naturgesetz, dass stattdessen gilt für

klassische und diskrete Klein-Gordon-Felder:

$$\mathcal{T}^{\rho\sigma} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho \phi)}\,\partial^\sigma \phi + \partial^\sigma \phi^* \,\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho \phi^*)} - g^{\rho\sigma}\mathcal{L} \tag{15.18a}$$

elementare Klein-Gordon-Felder:

$$\mathcal{T}^{\rho\sigma} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho \phi)}\,\partial^\sigma \phi + \partial^\sigma \phi^* \,\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho \phi^*)} - g^{\rho\sigma}\mathcal{L} - Y \tag{15.18b}$$

$Y \equiv$ die Summe aller Terme in (15.18a), die nicht von den Teilchenzahlen-Operatoren $a_{\boldsymbol{k}}^\dagger a_{\boldsymbol{k}}$ oder $b_{\boldsymbol{k}}^\dagger b_{\boldsymbol{k}}$ abhängen.

(15.18a) ist identisch mit (10.15). (15.18b) dagegen wurde nicht hergeleitet sondern erraten, d. h. es ist ein Naturgesetz. Wie jedes Naturgesetz kann auch (15.18) einzig und allein dadurch gerechtfertigt werden, dass es mit allen Experimenten und Beobachtungen übereinstimmt. In [42] wird gezeigt, dass (15.18) dies Kriterium erfüllt, während (10.15) durch astronomische Beobachtungen widerlegt wird, und außerdem inkompatibel mit der Speziellen Relativitätstheorie ist.

Als Alternative zu (15.18b) postulieren einige Autoren die „Normalordnung“ der Operatoren in (15.17a), die durch Doppelpunkte markiert wird:

$$:a_{\boldsymbol{k}} a_{\boldsymbol{k}}^\dagger: \;\equiv\; a_{\boldsymbol{k}}^\dagger a_{\boldsymbol{k}} \quad \text{für Bosonen} \tag{15.19a}$$

$$:a_{\boldsymbol{k}} a_{\boldsymbol{k}}^\dagger: \;\equiv\; -a_{\boldsymbol{k}}^\dagger a_{\boldsymbol{k}} \quad \text{für Fermionen} \tag{15.19b}$$

Normalordnung bedeutet, dass im Fall elementarer Felder alle Operatorprodukte – unter Missachtung von (15.6) – so umgeordnet werden, dass alle Erzeugungsoperatoren links von den Vernichtungsoperatoren angeordnet werden. Außerdem wird jedes mal, wenn ein fermionischer Erzeugungs-Operator mit einem fermionischen Vernichtungs-Operator vertauscht wird, ein Faktor -1 eingefügt. Im Fall von Klein-Gordon-Feldern ist Normalordnung tatsächlich gleichwertig zu (15.18b). Aber im Fall elementarer Felder mit spontan gebrochener Symmetrie (das in Kapitel 29 beschriebene Higgs-Feld ist ein Beispiel für diese Art von Feldern) führt nur (15.18b) zu korrekten Resultaten. Außerdem ist Normalordnung nur ein formaler Trick, während (15.18) durch plausible physikalische Überlegungen nahegelegt wird, die

in [42] erläutert werden.

Mit (15.18) erhält man anstelle von (15.17) folgenden ES-Tensor:

$$T^{\rho\sigma} \equiv \int_{\Omega} \mathrm{d}^3x\, \mathcal{T}^{\rho\sigma} = \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{c^2\hbar^2}{\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}}\, k^\rho k^\sigma \cdot \tag{15.20a}$$

$$\cdot \begin{cases} \left(a^\dagger_{\boldsymbol{k}} a_{\boldsymbol{k}} + b^\dagger_{\boldsymbol{k}} b_{\boldsymbol{k}} + 1\right) \text{ für diskrete Felder} \\ \left(a^\dagger_{\boldsymbol{k}} a_{\boldsymbol{k}} + b^\dagger_{\boldsymbol{k}} b_{\boldsymbol{k}}\right) \text{ für elementare Felder} \end{cases} \tag{15.20b}$$

Der Vakuum-Erwartungswert von (15.20) ist

$$\begin{aligned} \langle 0|T^{\rho\sigma}|0\rangle &\overset{(15.20)}{=} \\ &= \begin{cases} \displaystyle\sum_{\boldsymbol{k}} \frac{c^2\hbar^2 k^\rho k^\sigma}{\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}} \overset{(7.18)}{=} \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{c\hbar k^\rho k^\sigma}{\sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2c^2/\hbar^2}} \text{ für diskrete Felder.} \\ 0 \text{ für elementare Felder.} \end{cases} \end{aligned} \tag{15.21}$$

m ist die Masse eines Quantums oder Anti-Quantums des Klein-Gordon-Feldes. Man beachte, dass wir in diesem Abschnitt komplexe Klein-Gordon-Felder untersuchen. In Abschnitt 15.7 werden wir für reelle Klein-Gordon-Felder andere Resultate finden.

Der Hamiltonoperator $H \equiv T^{00}$ des Klein-Gordon-Feldes ist

$$H = \sum_{\boldsymbol{k}} \hbar\omega_{\boldsymbol{k}} \cdot \begin{cases} (a^\dagger_{\boldsymbol{k}} a_{\boldsymbol{k}} + b^\dagger_{\boldsymbol{k}} b_{\boldsymbol{k}} + 1) \text{ für diskrete Felder.} \\ (a^\dagger_{\boldsymbol{k}} a_{\boldsymbol{k}} + b^\dagger_{\boldsymbol{k}} b_{\boldsymbol{k}}) \text{ für elementare Felder.} \end{cases} \tag{15.22}$$

Man vergleiche dies mit dem Hamiltonoperator (14.57) des harmonischen Oszillators der Punktteilchen-Quantenmechanik! Der Hamiltonoperator des Klein-Gordon-Feldes ist die Summe der Hamiltonoperatoren unendlich vieler harmonischer Oszillatoren. Zu jeder Wellenzahl $\boldsymbol{k}$, die mit den Randbedingungen des Normierungsvolumens kompatibel ist, existieren zwei harmonische Oszillatoren, deren Leiteroperatoren $a_{\boldsymbol{k}}$ und $a^\dagger_{\boldsymbol{k}}$ bzw. $b_{\boldsymbol{k}}$ und $b^\dagger_{\boldsymbol{k}}$ heißen. Man beachte, dass es im Fall elementarer Felder keine Nullpunktsenergie gibt.

Der Operator des physikalischen Impulses $P^j \equiv T^{0j}/c$ des Klein-Gordon-Feldes ist

$$\boxed{P^j = \sum_{\boldsymbol{k}} \hbar k^j \cdot \begin{cases} (a^\dagger_{\boldsymbol{k}} a_{\boldsymbol{k}} + b^\dagger_{\boldsymbol{k}} b_{\boldsymbol{k}} + 1) \text{ für diskrete Felder.} \\ (a^\dagger_{\boldsymbol{k}} a_{\boldsymbol{k}} + b^\dagger_{\boldsymbol{k}} b_{\boldsymbol{k}}) \text{ für elementare Felder.} \end{cases}} \tag{15.23}$$

Drehimpuls-Operator: wird in einer künftigen Ausgabe des Buches nachgetragen, falls ich dazu komme ...

Wenn in der klassischen Physik ein Testteilchen mit Ladung q mit einer Wolke von N Teilchen wechselwirkt, die jeweils die Ladung q' tragen, dann wirkt zwischen dem Testteilchen und der Wolke eine Kraft, die proportional zu qQ ist, mit $Q = Nq'$. In der Quantenfeldtheorie dagegen wechselwirkt das Testteilchen nicht mit der Wolke als ganzer, sondern mit den einzelnen Teilchen, aus denen die Wolke besteht. Der Wirkungsquerschnitt für die Streuung des Testteilchen an einem einzelnen Teilchen der Wolke ist proportional zu qq', und die Wahrscheinlichkeit so eines Streuereignisses ist proportional zu N. Dagegen taucht die totale Ladung Q der Wolke in keiner Berechnung der Quantenfeldtheorie auf. Deswegen hat die erhaltene Ladung

$$Q \overset{(A.91)}{=} -q \sum_{\boldsymbol{k}} (a^\dagger_{\boldsymbol{k}} a_{\boldsymbol{k}} - b^\dagger_{\boldsymbol{k}} b_{\boldsymbol{k}} - \underbrace{[b_{\boldsymbol{k}}, b^\dagger_{\boldsymbol{k}}]}_{1}) \tag{15.24}$$

des quantisierten Klein-Gordon-Feldes, die in Anhang A.13 berechnet wird, in der Quantenfeldtheorie keine große Bedeutung. Insbesondere braucht uns nicht der unphysikalische Kommutator-Term zu beunruhen, weil er bei keiner Rechnung irgend eine Rolle spielt. Q ist eine Erhaltungsgröße. Also können Teilchen und Antiteilchen nur erzeugt oder vernichtet werden als Paare von einem Teilchen und einem Antiteilchen. Wieso gibt es dann in unserem Universum viel mehr Teilchen als Antiteilchen? Das weiß ich nicht, das weiß überhaupt niemand. Dies ist eine der offenen MEGA-Fragen der Physik.

In Abschnitt 14.1.5 haben wir den Vakuumzustand eines harmonischen Oszillators als $|0\rangle$ bezeichnet, den Zustand mit n angeregten Quanten, der

durch n-malige Anwendung des Erzeugungsoperators auf den Vakuumzustand entsteht, als

$$|n\rangle \overset{(14.68)}{=} \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n |0\rangle \ . \tag{15.25}$$

Der Eigenwert des Teilchenzahl-Operators

$$a^\dagger a |n\rangle \overset{(14.63)}{=} n|n\rangle \tag{15.26}$$

zeigt an, wie viele Quanten im Zustand $|n\rangle$ des Oszillators angeregt sind.

Eine entsprechende Nomenklatur verwenden wir auch für das Klein-Gordon-Feld. Da wir es mit unendlich vielen Oszillatoren der Typen a und b zu tun haben, fügen wir zwei Indizes hinzu. $|0\rangle$ ist hier ebenfalls der Vakuumzustand,

$$|n_{b\boldsymbol{k}} n_{a\boldsymbol{f}} n_{a\boldsymbol{g}}\rangle = \frac{(b^\dagger_{\boldsymbol{k}})^{n_{b\boldsymbol{k}}} (a^\dagger_{\boldsymbol{f}})^{n_{a\boldsymbol{f}}} (a^\dagger_{\boldsymbol{g}})^{n_{a\boldsymbol{g}}}}{\sqrt{n_{b\boldsymbol{k}}! n_{a\boldsymbol{f}}! n_{a\boldsymbol{g}}!}} |0\rangle \tag{15.27}$$

ist ein Zustand des Klein-Gordon-Feldes, in dem $n_{b\boldsymbol{k}}$ Quanten des Typs b mit Wellenzahl $\boldsymbol{k}$, $n_{a\boldsymbol{f}}$ Quanten des Typs a mit Wellenzahl $\boldsymbol{f}$, und $n_{a\boldsymbol{g}}$ Quanten des Typs a mit Wellenzahl $\boldsymbol{g}$ angeregt sind. Wegen

$$b_{\boldsymbol{f}}|0\rangle = a_{\boldsymbol{g}}|0\rangle \overset{(14.61)}{=} 0 \tag{15.28}$$

ergibt die Anwendung der Teilchenzahl-Operatoren

$$a^\dagger_{\boldsymbol{g}} a_{\boldsymbol{g}} |n_{b\boldsymbol{k}} n_{a\boldsymbol{f}} n_{a\boldsymbol{g}}\rangle \overset{(14.63)}{=} n_{a\boldsymbol{g}} |n_{b\boldsymbol{k}} n_{a\boldsymbol{f}} n_{a\boldsymbol{g}}\rangle \tag{15.29}$$

$$b^\dagger_{\boldsymbol{k}} b_{\boldsymbol{k}} |n_{b\boldsymbol{k}} n_{a\boldsymbol{f}} n_{a\boldsymbol{g}}\rangle \overset{(14.63)}{=} n_{b\boldsymbol{k}} |n_{b\boldsymbol{k}} n_{a\boldsymbol{f}} n_{a\boldsymbol{g}}\rangle \tag{15.30}$$

$$a^\dagger_{\boldsymbol{k}} a_{\boldsymbol{k}} |n_{b\boldsymbol{k}} n_{a\boldsymbol{f}} n_{a\boldsymbol{g}}\rangle \overset{(14.63)}{=} 0 \ . \tag{15.31}$$

Um Schreibarbeit zu sparen, werden wir die folgenden Überlegungen auf elementare Klein-Gordon-Felder beschränken. Es ist leicht, die Formeln für diskrete Felder zu modifizieren. Weil Hamilton-Operator, Impuls-Operator, und Ladungs-Operator aus Teilchenzahl-Operatoren zusammengesetzt sind,

ist der Zustandsvektor $|n_{b\boldsymbol{k}} n_{a\boldsymbol{f}} n_{a\boldsymbol{g}}\rangle$ auch ein Eigenzustand dieser Operatoren:

$$H|n_{b\boldsymbol{k}} n_{a\boldsymbol{f}} n_{a\boldsymbol{g}}\rangle \overset{(15.22)}{=} \sum_{\boldsymbol{l}} \hbar\omega_{\boldsymbol{l}} \left(a_{\boldsymbol{l}}^\dagger a_{\boldsymbol{l}} + b_{\boldsymbol{l}}^\dagger b_{\boldsymbol{l}}\right) |n_{b\boldsymbol{k}} n_{a\boldsymbol{f}} n_{a\boldsymbol{g}}\rangle \; =$$
$$= \left(n_{b\boldsymbol{k}}\hbar\omega_{\boldsymbol{k}} + n_{a\boldsymbol{f}}\hbar\omega_{\boldsymbol{f}} + n_{a\boldsymbol{g}}\hbar\omega_{\boldsymbol{g}}\right) |n_{b\boldsymbol{k}} n_{a\boldsymbol{f}} n_{a\boldsymbol{g}}\rangle \tag{15.32}$$

Da wir

$$\hbar\omega_{\boldsymbol{k}} \overset{(7.18)}{=} +\sqrt{\hbar^2\boldsymbol{k}^2 + m^2c^4} \geq 0 \tag{15.33}$$

vereinbart haben, und $n_{a\boldsymbol{k}} \geq 0$ und $n_{b\boldsymbol{k}} \geq 0$ für beliebige $\boldsymbol{k}$ gilt, ist $H|s\rangle \geq 0$ für beliebige Zustandsfunktionen $|s\rangle$ niemals negativ. Das gilt auch für Felder $\phi \sim \exp\{+ikx\}$, die ohne Quantisierung aufgrund des Energieoperators $i\hbar\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ der Quantenmechanik der Punktteilchen negative Energie hätten.

Anwendung des Impulsoperators ergibt

$$\boldsymbol{P}|n_{b\boldsymbol{k}} n_{a\boldsymbol{f}} n_{a\boldsymbol{g}}\rangle \overset{(15.23)}{=} \sum_{\boldsymbol{l}} \hbar\boldsymbol{l} \left(a_{\boldsymbol{l}}^\dagger a_{\boldsymbol{l}} + b_{\boldsymbol{l}}^\dagger b_{\boldsymbol{l}}\right) |n_{b\boldsymbol{k}} n_{a\boldsymbol{f}} n_{a\boldsymbol{g}}\rangle$$
$$= \left(n_{b\boldsymbol{k}}\hbar\boldsymbol{k} + n_{a\boldsymbol{f}}\hbar\boldsymbol{f} + n_{a\boldsymbol{g}}\hbar\boldsymbol{g}\right) |n_{b\boldsymbol{k}} n_{a\boldsymbol{f}} n_{a\boldsymbol{g}}\rangle \;, \tag{15.34}$$

und Anwendung des Ladungsoperators ergibt

$$Q|n_{b\boldsymbol{k}} n_{a\boldsymbol{f}} n_{a\boldsymbol{g}}\rangle \overset{(A.91)}{=} -q \sum_{\boldsymbol{l}} \left(a_{\boldsymbol{l}}^\dagger a_{\boldsymbol{l}} - b_{\boldsymbol{l}}^\dagger b_{\boldsymbol{l}}\right) |n_{b\boldsymbol{k}} n_{a\boldsymbol{f}} n_{a\boldsymbol{g}}\rangle$$
$$= \left(n_{b\boldsymbol{k}} q - n_{a\boldsymbol{f}} q - n_{a\boldsymbol{g}} q\right) |n_{b\boldsymbol{k}} n_{a\boldsymbol{f}} n_{a\boldsymbol{g}}\rangle \;. \tag{15.35}$$

Bei gleicher Wellenzahl haben die Quanten des Typs a und des Typs b gleiche Energie und gleichen Impuls. Die Energie der Quanten *beider* Typen ist immer größer oder gleich Null. Da wir die Gültigkeit der Frequenz-Wellenzahl-Beziehung (7.17) der Speziellen Relativitätstheorie vorausgesetzt haben, hat jedes Feldquant die gleiche Ruhemasse, egal ob es ein Quant des Typs a oder des Typs b ist. Vorläufig[1] betrachten wir den Parameter m, der

[1] In Abschnitt 22 werden wir bei der Renormierung von Masse und Ladung des Feldes die Interpretation der Parameter m und q wesentlich modifizieren.

in der Klein-Gordon-Gleichung vorkommt, als die Ruhemasse eines einzelnen Quants. Die Gesamt-Ruhemasse des Klein-Gordon-Feldes ist demnach ein ganzzahliges Vielfaches von m, im Zustand $|n_{b\boldsymbol{k}} n_{a\boldsymbol{f}} n_{a\boldsymbol{g}}\rangle$ hat es die Gesamt-Ruhemasse $m \cdot (n_{b\boldsymbol{k}} + n_{a\boldsymbol{f}} + n_{a\boldsymbol{g}})$. Jedes Quant des Typs a hat die Ladung $-q$, jedes Quant des Typs b hat die Ladung $+q$. Die Gesamtladung des Klein-Gordon-Feldes ist ein ganzzahliges Vielfaches von $\pm q$, im Zustand $|n_{b\boldsymbol{k}} n_{a\boldsymbol{f}} n_{a\boldsymbol{g}}\rangle$ hat es die Gesamtladung $q \cdot (n_{b\boldsymbol{k}} - n_{a\boldsymbol{f}} - n_{a\boldsymbol{g}})$.

15.4 Quanten des Klein-Gordon-Feldes

Es ist üblich, die Feldquanten als „Teilchen“ zu bezeichnen. Die Teilchen des Typs b sind die Antiteilchen der Teilchen des Typs a. Teilchen und Antiteilchen unterscheiden sich durch das umgekehrte Vorzeichen sämtlicher Ladungen, in allen anderen Eigenschaften sind sie identisch. Insbesondere ist die Masse von Teilchen und Antiteilchen positiv. Ein Teilchen das überhaupt keine Ladung trägt (beispielsweise das Photon, das Quant des Elektromagnetischen Feldes) hat kein Antiteilchen.

Man darf nicht übersehen, dass dieser Gebrauch des Begriffs „Teilchen“ sehr deutlich vom gleichen Begriff der Alltagssprache abweicht. Feldquanten sind keine „Dinge“. Deshalb gilt für die Quanten des Klein-Gordon-Feldes die Bose-Einstein-Statistik, während für Dinge – auch wenn es sich um beliebig kleine Dinge handelt – die Maxwell-Boltzmann-Statistik gilt.

Die Feldquanten $|1_{a\boldsymbol{k}}\rangle$ oder $|1_{b\boldsymbol{k}}\rangle$ mit scharf definiertem Impuls $\hbar\boldsymbol{k}$ und scharf definierter Energie $\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}$ sind vollständig delokalisiert, d.h. in den verschiedenen Teilbereichen des Normierungsvolumens mit gleicher Wahrscheinlichkeit auffindbar. Ein am Ort $\boldsymbol{x}$ lokalisiertes Feldquant $|1_{a\boldsymbol{x}}\rangle$ vom Typ a oder $|1_{b\boldsymbol{x}}\rangle$ vom Typ b kann man konstruieren, indem man die Feldoperatoren (15.15) mit $t \equiv 0$ (d. h. die Feldoperatoren im Schrödinger-Bild) auf das Vakuum anwendet und $a_{\boldsymbol{k}} |0\rangle = b_{\boldsymbol{k}} |0\rangle = 0$ beachtet:

$$|1_{a\boldsymbol{x}}\rangle \equiv \phi^\dagger(\boldsymbol{x})\,|0\rangle \overset{(15.15)}{=} \sum_{\boldsymbol{k}} \underbrace{a^\dagger_{\boldsymbol{k}}\,|0\rangle}_{|1_{a\boldsymbol{k}}\rangle} \frac{\exp\{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}\}}{\sqrt{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}\Omega}} \tag{15.36a}$$

$$|1_{b\boldsymbol{x}}\rangle \equiv \phi(\boldsymbol{x})\,|0\rangle \overset{(15.15)}{=} \sum_{\boldsymbol{k}} \underbrace{b^\dagger_{\boldsymbol{k}}\,|0\rangle}_{|1_{b\boldsymbol{k}}\rangle} \frac{\exp\{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}\}}{\sqrt{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}\Omega}} \tag{15.36b}$$

Die Zustandsfunktionen $|n\rangle$ des Harmonischen Oszillators der Quantenmechanik in Abschnitt 14.1.5 sind auf $\langle n|n\rangle = 1$ normiert. Entsprechend wählen wir jetzt

$$\langle 0|0\rangle \equiv 1 \tag{15.37a}$$

$$\langle 1_{a\boldsymbol{f}}|1_{a\boldsymbol{k}}\rangle = \langle 1_{b\boldsymbol{f}}|1_{b\boldsymbol{k}}\rangle \equiv \delta_{\boldsymbol{f}\boldsymbol{k}} \quad , \quad \langle 1_{a\boldsymbol{f}}|1_{b\boldsymbol{k}}\rangle = 0\ , \tag{15.37b}$$

und berechnen damit

$$\begin{aligned}\langle 1_{a\boldsymbol{y}}|1_{a\boldsymbol{x}}\rangle = \langle 1_{b\boldsymbol{y}}|1_{b\boldsymbol{x}}\rangle &= \sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{f}} \frac{\exp\{+i(\boldsymbol{f}\boldsymbol{y}-\boldsymbol{k}\boldsymbol{x})\}}{\Omega 2\hbar\sqrt{\omega_{\boldsymbol{f}}\omega_{\boldsymbol{k}}}}\,\delta_{\boldsymbol{f}\boldsymbol{k}} \\ &= \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{\exp\{+i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\}}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}\Omega} \quad , \quad \langle 1_{a\boldsymbol{x}}|1_{b\boldsymbol{y}}\rangle = 0\ .\end{aligned} \tag{15.37c}$$

Dieser Ausdruck unterscheidet sich von der Deltafunktion

$$\frac{1}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{k}} \exp\{\pm i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\} \overset{(7.9)}{=} \delta^{(3)}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})$$

durch den Faktor $2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}$ im Nenner. Der Vorteil unserer Definition wird bei der vierdimensionalen Erweiterung von (15.37c), die wir im Folgenden berechnen, erkennbar werden.

Zeitabhängige Feldquanten $|1_{a\boldsymbol{x}t}\rangle$ und $|1_{b\boldsymbol{x}t}\rangle$, die am Ort $\boldsymbol{x}$ lokalisiert sind, konstruiert man durch Anwendung der zeitabhängigen Feldoperatoren (15.15) auf das Vakuum:

$$|1_{ax}\rangle = |1_{a\boldsymbol{x}t}\rangle \equiv \phi^\dagger(x)\,|0\rangle = \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{\exp\{+ikx\}}{\sqrt{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}\Omega}} \underbrace{a^\dagger_{\boldsymbol{k}}\,|0\rangle}_{|1_{a\boldsymbol{k}}\rangle} \tag{15.38a}$$

$$|1_{bx}\rangle = |1_{b\boldsymbol{x}t}\rangle \equiv \phi(x)\,|0\rangle = \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{\exp\{+ikx\}}{\sqrt{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}\Omega}} \underbrace{b^\dagger_{\boldsymbol{k}}\,|0\rangle}_{|1_{b\boldsymbol{k}}\rangle} \,. \tag{15.38b}$$

Das Teilchen wird nur im Raum, aber nicht in der Zeit lokalisiert. Es wird ja nur über $\boldsymbol{k}$ summiert, aber nicht über k^0 integriert. Die Zeit t ist in (15.38) ein laufender Parameter. Die Zustandsfunktionen $|1_{ax}\rangle$ und $|1_{bx}\rangle$ sind Eigenfunktionen des zeitabhängigen Ortsoperators $\boldsymbol{x}(t)$:

$$\boldsymbol{x}(t)|1_{byt}\rangle = \boldsymbol{y}|1_{byt}\rangle \tag{15.39}$$

Sie können durch

$$\begin{aligned} |1_{a\boldsymbol{x}}\rangle &\overset{(14.32)}{=} \exp\{-\frac{i}{\hbar}Ht\}\,|1_{a\boldsymbol{x}t}\rangle \\ &\overset{(15.38a)}{=} \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{\exp\{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}\}\,\exp\{+i\omega_{\boldsymbol{k}}t\}}{\sqrt{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}\Omega}} \underbrace{\exp\{-\frac{i}{\hbar}Ht\}\,|1_{a\boldsymbol{k}}\rangle}_{\exp\{-i\omega_{\boldsymbol{k}}t\}\,|1_{a\boldsymbol{k}}\rangle} \\ &= \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{\exp\{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}\}}{\sqrt{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}\Omega}}\,|1_{a\boldsymbol{k}}\rangle \end{aligned} \tag{15.40}$$

in die Eigenfunktionen des zeitunabhängigen Ortsoperators transformiert werden, was wieder mit (15.36a) übereinstimmt.

Das Matrixelement der Feldquanten (15.38) ist

$$\begin{aligned} \langle 1_{a\boldsymbol{y}\tau}|1_{a\boldsymbol{x}t}\rangle &= \langle 0|\,\phi(\boldsymbol{y}\tau)\phi^\dagger(\boldsymbol{x}t)\,|0\rangle \;= \\ &= \sum_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{k}} \frac{\exp\{-i(fy-kx)\}}{\Omega 2\hbar\,\sqrt{\omega_{\boldsymbol{f}}\omega_{\boldsymbol{k}}}} \underbrace{\langle 1_{a\boldsymbol{f}}|1_{a\boldsymbol{k}}\rangle}_{\delta_{\boldsymbol{f}\boldsymbol{k}}} \\ &= \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{\exp\{-ik(y-x)\}}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}\Omega} \end{aligned} \tag{15.41a}$$

$$\begin{aligned}\langle 1_{b\boldsymbol{y}\tau}|1_{b\boldsymbol{x}t}\rangle &= \langle 0|\,\phi^\dagger(\boldsymbol{y}\tau)\phi(\boldsymbol{x}t)\,|0\rangle \;= \\ &= \sum_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{k}} \frac{\exp\{-i(fy-kx)\}}{\Omega 2\hbar\sqrt{\omega_{\boldsymbol{f}}\omega_{\boldsymbol{k}}}}\,\underbrace{\langle 1_{b\boldsymbol{f}}|1_{b\boldsymbol{k}}\rangle}_{\delta_{\boldsymbol{f}\boldsymbol{k}}} \\ &= \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{\exp\{-ik(y-x)\}}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}\Omega} \qquad (15.41b)\end{aligned}$$

$$\langle 1_{b\boldsymbol{y}\tau}|1_{a\boldsymbol{x}t}\rangle = 0 \qquad (15.41c)$$

Diese Matrixelemente sind lorentzinvariant. Denn das Argument der Exponentialfunktion ist als Produkt von Lorentzvektoren lorentzinvariant, und das Produkt $\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}\Omega$ ist es ebenfalls, wie am Ende von Kapitel 7 diskutiert.

15.5 Die quantisierte Greensfunktion

In Abschnitt 12.1 haben wir die Greensfunktionen als klassische Wellen beschrieben, die sich nach dem Huygens'schen Prinzip von den Quellen $j(y)$ ausbreiten und am Raumzeitpunkt x überlagern. Ihre quantisierte Form ergibt sich aus den Matrixelementen, die im vorigen Abschnitt berechnet wurden. Man interpretiert das Matrixelement

$$\begin{aligned}\langle 0|\,\phi(x)\phi^\dagger(y)\,|0\rangle &\overset{(15.41a)}{=} \langle 1_{ax}|1_{ay}\rangle \;= \\ &= \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{\exp\{-ik(x-y)\}}{\Omega 2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}} \overset{(12.11a)}{=} G^a(x-y) \qquad (15.42a)\end{aligned}$$

als Wahrscheinlichkeitsamplitude dafür, dass ein Teilchen des Typs a (dem Antiteilchen von b) zur Zeit y^0 am Ort $\boldsymbol{y}$ erzeugt wird, sich nach $\boldsymbol{x}$ bewegt, und dort zur Zeit x^0 vernichtet wird. Das Matrixelement

$$\begin{aligned}\langle 0|\,\phi^\dagger(y)\phi(x)\,|0\rangle &\overset{(15.41b)}{=} \langle 1_{by}|1_{bx}\rangle \;= \\ &= \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{\exp\{-ik(y-x)\}}{\Omega 2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}} \overset{(12.11b)}{=} G^b(y-x) \qquad (15.42b)\end{aligned}$$

wird interpretiert als Wahrscheinlichkeitsamplitude dafür, dass ein Teilchen des Typs b (dem Antiteilchen von a) zur Zeit x^0 am Ort $\boldsymbol{x}$ erzeugt wird,

sich zum Ort $\boldsymbol{y}$ bewegt, und dort zur Zeit y^0 vernichtet wird. Der Vergleich von (15.42) mit (12.11) und (12.14) ergibt den quantisierten Propagator

$$\begin{aligned} G(x-y) &\overset{x^0\neq y^0}{=} \theta(x^0-y^0)\,G^a(x-y) + \theta(y^0-x^0)\,G^b(y-x) \\ &= \theta(x^0-y^0)\langle 0|\,\phi(x)\phi^\dagger(y)\,|0\rangle + \\ &\qquad + \theta(y^0-x^0)\langle 0|\,\phi^\dagger(y)\phi(x)\,|0\rangle \\ &\equiv \langle 0|\,T\phi(x)\phi^\dagger(y)\,|0\rangle\ . \end{aligned} \tag{15.43}$$

Für den Zeitordnungsoperator T in der letzten Zeile gilt folgende

> **Definition:** Der Zeitordnungsoperator T ordnet die Operatoren eines Produkts stets in ihrer zeitlichen Reihenfolge an, mit dem spätesten Faktor (t maximal) links und dem frühesten Faktor (t minimal) rechts. Bei jeder Vertauschung von zwei fermionischen Operatoren (jedoch nicht bei der Vertauschung bosonischer Operatoren) ist ein Faktor (-1) einzufügen. (15.44)

Beim Klein-Gordon-Feld, mit dem wir uns hier beschäftigen, handelt es sich um ein bosonisches Feld.

Die Huygens-Welle, die sich aus der Vergangenheit (y^0) in die Gegenwart (x^0) ausbreitet, wird durch die Quantisierung zu einem durch den Propagator $G^a(x-y)$ beschriebenen Teilchen, das sich aus der Vergangenheit (y^0) in die Gegenwart (x^0) bewegt. Die Huygens-Welle, die sich aus der Zukunft (y^0) in die Gegenwart (x^0) ausbreitet, wird durch die Quantisierung zu einem durch den Propagator $G^b(y-x)$ beschriebenen Antiteilchen, das sich aus der Gegenwart (x^0) in die Zukunft (y^0) bewegt. Die Ausbreitung von Wellen vorwärts und rückwärts in der Zeit im Klassischen Ansatz (12.3) ergibt mit dem Konzept der Antimaterie ein plausibles Bild. Wir werden gleich sehen dass darüber hinaus auch Wellen, die sich in der Sichtweise der Klassischen Physik außerhalb des Vorwärts- oder Rückwärts-Lichtkegels ausbreiten, in der Quantenfeldtheorie nicht nur zulässig sondern sogar notwendig sind, um Quantentheorie und Relativitätstheorie in Einklang zu bringen.

Sowohl $G(x-y)$ als auch $G^a(x-y)$ und $G^b(y-x)$ werden als Propagatoren bezeichnet, weil alle diese Funktionen die Ausbreitung von Feldern zwischen

verschiedenen Raum-Zeit-Punkten beschreiben. Die Propagatoren $G^a(x-y)$ und $G^b(y-x)$ sind Lösungen der homogenen Gleichung (12.1), der Propagator $G(x-y)$ ist eine Lösung der inhomogenen Gleichung (12.4). $G(x-y)$ ist der *Feynman-Propagator*, der bei der Beschreibung wechselwirkender Quantenfelder eine zentrale Rolle spielt.

15.6 Kausalität

Für das Thema dieses Abschnitts ist die Bezeichnung „Mikrokausalität“ weit verbreitet. Die Vorsilbe „Mikro“ ist sinnlos, es geht um nichts anderes als Kausalität. Die Relativitätstheorie postuliert, dass ein Ereignis am Raumzeitpunkt x und ein Ereignis am Raumzeitpunkt y sich nicht wechselseitig beeinflussen können, wenn der Abstand zwischen x und y raumartig ist. Der Abstand ist raumartig, wenn x nicht im Vorwärts- oder Rückwärts-Lichtkegel von y liegt, wenn also $(x-y)^2 < 0$ ist.

Die Ereignisse, deren kausaler Zusammenhang – oder vielmehr deren kausale Unabhängigkeit – uns interessiert, sind die Erzeugung oder Vernichtung von Teilchen an verschiedenen Punkten der vierdimensionalen Raumzeit. Das Klein-Gordon-Feld befinde sich im Zustand $|s\rangle$. Durch $\phi(x)|s\rangle$ wird zur Zeit x^0/c am Ort $\boldsymbol{x}$ ein Teilchen a vernichtet und sein Antiteilchen b erzeugt. Durch $\phi^\dagger(y)|s\rangle$ wird zur Zeit y^0/c am Ort $\boldsymbol{y}$ ein Teilchen a erzeugt und sein Antiteilchen b vernichtet. Wenn das Verhältnis der Zeit-Raum-Punkte x und y raumartig ist, dann können die Ereignisse bei x und y sich nicht wechselseitig beeinflussen, d. h. der Erwartungswert ihres Kommutators muss Null sein:

$$\begin{aligned}\langle s|\,[\phi(x),&\phi^\dagger(y)]\,|s\rangle = \\ &= \sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{f}} \frac{1}{2\Omega\hbar\sqrt{\omega_{\boldsymbol{k}}\,\omega_{\boldsymbol{f}}}}\Big(\langle s|\,\underbrace{[a_{\boldsymbol{k}},a^\dagger_{\boldsymbol{f}}]}_{\delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{f}}}\,|s\rangle\exp\{-i(kx-fy)\} - \\ &\qquad - \langle s|\,\underbrace{[b_{\boldsymbol{f}},b^\dagger_{\boldsymbol{k}}]}_{\delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{f}}}\,|s\rangle\exp\{-i(fy-kx)\}\Big) = \end{aligned}$$

$$= \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{1}{2\Omega\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}} \Big(\exp\{-ik(x-y)\} - \exp\{-ik(y-x)\} \Big) \langle s|s\rangle =$$

$$\overset{(15.42)}{=} \Big(G^a(x-y) - G^b(y-x) \Big) \langle s|s\rangle \tag{15.45}$$

Der Kommutator ist erstens kein Operator sondern eine Zahl, so dass er aus dem Produkt $\langle s|s\rangle$ herausgezogen werden kann. Zweitens ist er lorentzinvariant. Denn das Produkt $\Omega\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}$ ist – wie zwischen (7.21) und (7.26) diskutiert – lorentzinvariant, und das Skalarprodukt $k(x-y)$ zweier Lorentz-Vierervektoren ist es ebenfalls. Wir berechnen den Kommutator in einem gestrichenen Koordinatensystem′, in dem $x'^0 - y'^0 = 0$ gilt. Man beachte, dass es ein derartiges Koordinatensystem nur deshalb gibt, weil das Verhältnis der Raumzeitpunkte x und y raumartig ist, das heißt $(x-y)^2 < 0$ gilt. Läge y im Vorwärts- oder Rückwärts-Lichtkegel von x, könnte man durch keine eigentliche Lorentztransformation $x'^0 - y'^0 = 0$ erreichen.

$$[\phi'(x'), \phi'^{\dagger}(y')] = \sum_{\boldsymbol{k}'} \frac{1}{2\Omega'\hbar\omega_{\boldsymbol{k}'}} \cdot$$

$$\cdot \Big(\exp\{+i\boldsymbol{k}'(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}')\} - \exp\{-i\boldsymbol{k}'(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}')\} \Big) = 0 \tag{15.46}$$

Weil symmetrisch über sämtliche positiven und negativen $\boldsymbol{k}'$ summiert wird und $\omega_{\boldsymbol{k}'} = \omega_{-\boldsymbol{k}'}$ ist, darf im zweiten Summenden $\boldsymbol{k}'$ gegen $-\boldsymbol{k}'$ getauscht werden. Also ist der Kommutator tatsächlich Null, in Übereinstimmung mit der Relativitätstheorie.

Hätten wir die Quantisierung des Klein-Gordon-Feldes nicht mit dem Kommutator (14.74a) sondern mit dem Antikommutator (14.74b) durchgeführt, dann hätte sich in (15.45) nicht Null ergeben, und das Kausalitätskriterium der Relativitätstheorie wäre verletzt. Das Kausalitätskriterium der Relativitätstheorie erzwingt die Quantisierung aller Felder mit ganzzahligem Spin (einschließlich Spin Null) durch den Kommutator (14.74a), und die Quantisierung aller Felder mit halbzahligem Spin durch den Antikommutator (14.74b). Am Beispiel des Klein-Gordon-Feldes (Spin 0) haben wir hier diese Regel bestätigt, am Beispiel des Dirac-Feldes (Spin $\frac{1}{2}$) werden wir sie ebenfalls bestätigen. Den allgemeinen Beweis dieser Regel, die auch „Spin-Statistik-Theorem“ genannt wird, ersparen wir uns.

Das Ergebnis

$$\langle s|\,[\phi(x),\phi^\dagger(y)]\,|s\rangle \overset{(15.45)}{=} \Big(\underbrace{G^a(x-y)}_{\neq 0} - \underbrace{G^b(y-x)}_{\neq 0}\Big)\langle s|s\rangle \overset{\substack{(15.46)\\ (x-y)^2<0}}{=} 0 \quad (15.47)$$

legt folgende Interpretation nahe: Der Erwartungswert des Kommutators ist Null, wenn das Verhältnis der Raumzeitpunkte x und y raumartig ist. Das Nullergebnis kommt aber auf sehr merkwürdige Weise zustande. Die Wahrscheinlichkeitsamplitude $G^a(x-y)$ dafür, dass ein Teilchen des Typs a (das das Antiteilchen von b ist) sich in scheinbarem Widerspruch zur Relativitätstheorie mit Überlichtgeschwindigkeit von y nach x ausbreitet, ist verschieden von Null. Und die Wahrscheinlichkeitsamplitude $G^b(y-x)$ dafür, dass ein Teilchen des Typs b (das das Antiteilchen von a ist) sich in scheinbarem Widerspruch zur Relativitätstheorie mit Überlichtgeschwindigkeit von x nach y ausbreitet, ist ebenfalls verschieden von Null. Weil aber beide Wahrscheinlichkeitsamplituden exakt gleich sind, ist die Wahrscheinlichkeitsamplitude des Kommutators – sprich die Wahrscheinlichkeitsamplitude einer messbaren Wechselwirkung zwischen den Raumzeitpunkten x und y – Null, im Einklang mit der Relativitätstheorie.

Im Fall eines ungeladenen (reellen) Klein-Gordon-Feldes ist $b=a,\ b^\dagger=a^\dagger$, d. h. dieses Feld hat kein Anti-Feld. In diesem Fall wird die Erfüllung des Kausalitätskriteriums durch den Austausch der beiden Teilchen vom Typ a zwischen den Raum-Zeit-Punkten x und y sichergestellt.

Bei den Teilchen, die sich scheinbar unbeeindruckt von der Relativitätstheorie mit beliebiger Geschwindigkeit bewegen, handelt es sich um „virtuelle“ Teilchen. Das bedeutet, dass sie auf dem Papier des Theoretikers existieren, aber nicht mit einem Teilchendetektor nachgewiesen werden. Teilchen und Antiteilchen, die mithilfe geeigneter Detektoren beobachtet werden, bewegen sich *immer* mit einer Geschwindigkeit $\leq$ der Lichtgeschwindigkeit. Der ontologische Status virtueller Teilchen ist umstritten. Ob es „da draußen“ etwas gibt, das (15.47) entspricht, oder diese Formel lediglich ein abstraktes mathematisches Werkzeug zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit beobachteter Vorgänge ist, aber keine unmittelbare Entsprechung in der Realität[2] hat, kann man nicht durch Experimente klären. Beobachtete

[2] Es ist außerordentlich schwierig (wenn nicht unmöglich), den Begriff Realität plausibel

Teilchen verhalten sich wesentlich anders als virtuelle Teilchen.

15.7 Das reelle Klein-Gordon-Feld

Alle bisherigen Überlegungen dieses Kapitels bezogen sich auf das komplexe, geladene Klein-Gordon-Feld. Die Vereinfachung auf das reelle Feld macht keine Schwierigkeiten. Feldgleichung und Erhaltungsgrößen des klassischen (nicht quantisierten) reellen Feldes wurden in Abschnitt 10.5 zusammengestellt.

Die Feldgleichung (10.34) des klassischen reellen Feldes ist identisch mit der Feldgleichung (10.11a) des klassischen komplexen Feldes. Also gehen die Feldoperatoren des quantisierten reellen Feldes aus (15.1) bzw. (15.15) hervor, indem man $b_{\boldsymbol{k}}$ durch $a_{\boldsymbol{k}}$ und $b_{\boldsymbol{k}}^\dagger$ durch $a_{\boldsymbol{k}}^\dagger$ ersetzt:

$$\phi(x) \overset{(15.15a)}{=} \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}\Omega}} \Big(a_{\boldsymbol{k}} \exp\{-ikx\} + a_{\boldsymbol{k}}^\dagger \exp\{+ikx\} \Big) \tag{15.48a}$$

Die kanonisch konjugierte Impulsdichte (10.14) des klassischen komplexen Feldes geht dann in die kanonisch konjugierte Impulsdichte (10.35) des klassischen reellen Feldes über, wenn man in (10.14b) ϕ^* durch ϕ ersetzt. Wieder entspricht das im Fall der quantisierten Felder den Ersetzungen $b_{\boldsymbol{k}} \to a_{\boldsymbol{k}}$ und $b_{\boldsymbol{k}}^\dagger \to a_{\boldsymbol{k}}^\dagger$:

$$\pi(x) \overset{(15.15c)}{=} \sum_{\boldsymbol{k}} i\hbar \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}}{2\Omega}} \Big(a_{\boldsymbol{k}}^\dagger \exp\{+ikx\} - a_{\boldsymbol{k}} \exp\{-ikx\} \Big) \tag{15.48b}$$

Wie muss der ES-Tensor (15.20) des komplexen Klein-Gordon-Feldes modifiziert werden, damit man das entsprechende Resultat des reellen Klein-Gordon-Feldes erhält? Aus dem Vergleich des ES-Tensors (10.16a)

zu definieren, ohne zirkuläre Argumente zu verwenden. Bemerkenswerterweise ist die Definition des Begriffs Realität für die Physik völlig überflüssig. Die Physik beschreibt nicht, *was* ihre Objekte sind, sondern *wie* ihre Objekte miteinander wechselwirken und was ihr struktureller Zusammenhang ist. Sie „erklärt“ die strukturellen Zusammenhänge von Beobachtungen durch die strukturellen Zusammenhänge der physikalischen Objekte. Ob ein physikalisches Objekt „real“ ist, ist für die Physik belanglos.

des komplexen klassischen Klein-Gordon-Feldes des ES-Tensors (10.36) des reellen klassischen Klein-Gordon-Feldes ergibt sich, dass man lediglich $b_{\boldsymbol{k}}$ durch $a_{\boldsymbol{k}}$ und $b^\dagger_{\boldsymbol{k}}$ durch $a^\dagger_{\boldsymbol{k}}$ ersetzen und außerdem einen Faktor $1/2$ einsetzen muss, um den ES-Tensor des reellen Feldes zu erhalten:

$$T^{\rho\sigma} \equiv \int_\Omega \mathrm{d}^3x\, \mathcal{T}^{\rho\sigma} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{c^2\hbar^2}{\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}}\, k^\rho k^\sigma \cdot \begin{cases} \left(2a^\dagger_{\boldsymbol{k}} a_{\boldsymbol{k}} + 1\right) & \text{für diskrete Felder} \quad (15.49a) \\ 2a^\dagger_{\boldsymbol{k}} a_{\boldsymbol{k}} & \text{für elementare Felder} \quad (15.49b) \end{cases}$$

Als Vakuum-Erwartungswert erhält man:

$$\langle 0|T^{\rho\sigma}|0\rangle =$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\sum_{\boldsymbol{k}} \frac{c^2\hbar^2 k^\rho k^\sigma}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}} \overset{(7.18)}{=} \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{c\hbar k^\rho k^\sigma}{2\sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2c^2/\hbar^2}} & \text{für diskrete Felder} \\ 0 \text{ für elementare Felder} \end{cases} \quad (15.50)$$

Also unterscheidet sich der Vakuum-Erwartungswert des ES-Tensors vom entsprechenden Resultat (15.21) des geladenen Feldes durch nichts weiter als den Faktor $1/2$. Dieser Unterschied beruht darauf, dass sowohl die Nullpunkts-Schwingungen des diskreten Feldes als auch die Nullpunkts-Schwingungen des diskreten Antifeldes zu (15.21) beitragen, während das reelle Feld kein Antifeld hat. Im Fall elementarer Klein-Gordon-Felder sind die Vakuum-Erwartungswerte Null, egal ob das Feld komplex oder reell ist.

16 Das freie Dirac-Feld

16.1 Quantisierung

Das Diracfeld hat Spin $\frac{1}{2}$, deshalb muss es gemäß (14.74b) quantisiert werden. Bei der Quantisierung werden die Feldamplituden und die Fourier-Koeffizienten der allgemeinen Lösung der Diracgleichung zu Operatoren:

$$\psi(x) \overset{(8.83a)}{=} \sum_{\boldsymbol{k},r} \frac{1}{\sqrt{\Omega N}} \Big({}^{r}a_{\boldsymbol{k}}\, {}^{r}u^{\boldsymbol{k}} \exp\{-ikx\} + {}^{r}b^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}\, {}^{r}v^{\boldsymbol{k}} \exp\{+ikx\} \Big) \tag{16.1a}$$

Das gleiche gilt für die kanonisch konjugierte Impulsdichte:

$$\pi(y) \overset{(8.83b)}{=} i\hbar\psi^{\dagger}(y) = \sum_{\boldsymbol{f},s} \frac{i\hbar}{\sqrt{\Omega N}} \Big({}^{s}a^{\dagger}_{\boldsymbol{f}}\, {}^{s}u^{\dagger\boldsymbol{f}} \exp\{+ify\} + {}^{s}b_{\boldsymbol{f}}\, {}^{s}v^{\dagger\boldsymbol{f}} \exp\{-ify\} \Big) \tag{16.1b}$$

$r, s = 1, 2$ sind die Polarisations-Indizes der Felder. Diese Operatoren müssen die kanonische Quantisierungsbedingung (14.74b) erfüllen:

$$\begin{aligned}
\{\psi_a(t,\boldsymbol{x}), \pi_b(t,\boldsymbol{y})\} &\equiv \psi_a(t,\boldsymbol{x})\,\pi_b(t,\boldsymbol{y}) + \pi_b(t,\boldsymbol{y})\,\psi_a(t,\boldsymbol{x}) \;= \\
&= \sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{f},r,s} \frac{i\hbar}{\Omega N} \Big[\{ {}^{r}a_{\boldsymbol{k}}, {}^{s}a^{\dagger}_{\boldsymbol{f}} \}\, {}^{r}u^{\boldsymbol{k}}_{a}\, {}^{s}u^{\boldsymbol{f}\dagger}_{b} \exp\{-i(kx - fy)\} + \\
&\quad + \{ {}^{r}a_{\boldsymbol{k}}, {}^{s}b_{-\boldsymbol{f}} \}\, {}^{r}u^{\boldsymbol{k}}_{a}\, {}^{s}v^{-\boldsymbol{f}\dagger}_{b} \exp\{-i(k^0x_0 + f^0y_0 - \boldsymbol{kx} + \boldsymbol{fy})\} + \\
&\quad + \{ {}^{r}b^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}, {}^{s}a^{\dagger}_{-\boldsymbol{f}} \}\, {}^{r}v^{\boldsymbol{k}}_{a}\, {}^{s}u^{-\boldsymbol{f}\dagger}_{b} \exp\{+i(k^0x_0 + f^0y_0 - \boldsymbol{kx} + \boldsymbol{fy})\} + \\
&\quad + \{ {}^{r}b^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}, {}^{s}b_{\boldsymbol{f}} \}\, {}^{r}v^{\boldsymbol{k}}_{a}\, {}^{s}v^{\boldsymbol{f}\dagger}_{b} \exp\{+i(kx - fy)\} \Big] \;= \\
&\overset{(14.74b)}{=} i\hbar\delta^{(3)}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\delta_{ab} \; .
\end{aligned} \tag{16.2}$$

Die Indizes a, b bezeichnen die Spinorkomponenten der Felder, und das Zeitargument t muss bei beiden Operatoren identisch sein. Weil symmetrisch über alle Wellenzahlen $\boldsymbol{k}$ und $\boldsymbol{f}$ summiert wird, durfte die Reihenfolge der Terme im zweiten und dritten Summanden geändert werden. Wir müssen auf der linken Seite der Gleichung die Deltafunktion

$$\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \overset{(7.9)}{=} \frac{1}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{k}} \exp\{\pm i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\} \tag{16.3}$$

identifizieren. Also müssen die Antikommutatoren $\sim \delta_{\boldsymbol{kf}}$ sein. Dann sind aber der zweite und dritte Term auf der linken Seite von (16.2) zeitabhängig, während die rechte Seite zeitunabhängig ist. Folglich muss

$$\{{}^r a_{\boldsymbol{k}}\,, {}^s b_{-\boldsymbol{k}}\} = \{{}^r b^\dagger_{\boldsymbol{k}}\,, {}^s a^\dagger_{-\boldsymbol{k}}\} = 0 \tag{16.4a}$$

sein. Nun benutzten wir die Relationen

$$\sum_{r=1}^{2}\left({}^r u_a^{\boldsymbol{k}}\, {}^r u_b^{\boldsymbol{k}\dagger} + {}^r v_a^{-\boldsymbol{k}}\, {}^r v_b^{-\boldsymbol{k}\dagger}\right) \overset{(A.61)}{=} 2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}\,\delta_{ab}$$

$$\sum_{r=1}^{2}\sum_{s=1}^{2}\left({}^r u_a^{\boldsymbol{k}\dagger}\, {}^s u_b^{\boldsymbol{k}} + {}^r v_a^{\boldsymbol{k}\dagger}\, {}^s v_b^{\boldsymbol{k}} + {}^r u_a^{-\boldsymbol{k}\dagger}\, {}^s u_b^{-\boldsymbol{k}} + {}^r v_a^{-\boldsymbol{k}\dagger}\, {}^s v_b^{-\boldsymbol{k}}\right) \overset{(A.61)}{=} \text{irgendwas}\,,$$

die in Anhang A.10 bewiesen wurden. Folglich kann die Bedingung (16.2) mit

$$\{{}^r a_{\boldsymbol{k}}\,, {}^s a^\dagger_{\boldsymbol{f}}\} = \delta_{\boldsymbol{kf}}\delta_{rs} \qquad , \qquad \{{}^r b^\dagger_{\boldsymbol{k}}\,, {}^s b_{\boldsymbol{f}}\} = \delta_{\boldsymbol{kf}}\delta_{rs} \tag{16.4b}$$

und

$$N = 2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}} \tag{16.4c}$$

erfüllt werden. In Übereinstimmung mit (16.4) postulieren wir die folgenden Antikommutator-Relationen für das Diracfeld:

$$\{{}^r a_{\boldsymbol{k}}\,, {}^s a^\dagger_{\boldsymbol{f}}\} = \{{}^r b_{\boldsymbol{k}}\,, {}^s b^\dagger_{\boldsymbol{f}}\} = \delta_{\boldsymbol{kf}}\delta_{rs} \tag{16.5a}$$

$$\{{}^r a_{\boldsymbol{k}}\,, {}^s a_{\boldsymbol{f}}\} = \{{}^r b_{\boldsymbol{k}}\,, {}^s b_{\boldsymbol{f}}\} = \{{}^r a_{\boldsymbol{k}}\,, {}^s b_{\boldsymbol{f}}\} = \{{}^r a^\dagger_{\boldsymbol{k}}\,, {}^s b_{\boldsymbol{f}}\} = 0 \tag{16.5b}$$

Die nicht-kommutative Algebra (16.5a) wird durch (16.4b) erzwungen, aber (16.5b) geht weit über das hinaus, was durch (16.4a) erzwungen wird. (16.5) ist also eine Minimal-Annahme: Wir postulieren eine nicht-kommutative Algebra der Fourier-Operatoren nur, wenn sie durch die Quantisierungsbedingung (16.2) erzwungen wird. Außerdem, selbst wenn man an der vernünftigen Regel festhält dass Fourierkoeffizienten und Fourieroperatoren dimensionslos sein sollen, ist es ziemlich willkürlich der Normierung (16.4c) den numerischen Faktor 2 zuzuordnen, statt der Bedingung (16.5a) einen numerischen Faktor $1/2$.

Wie schon beim Klein-Gordon-Feld ist der Faktor $i\hbar\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ in der Kommutatorrelation (16.2) zu einem Kroneckersymbol $\delta_{\boldsymbol{kf}}$ in der Kommutatorrelation (16.5) mutiert. Ein neues Feature ist das Kroneckersymbol δ_{rs} der Polarisations-Indizes in der Kommutatorrelation (16.5), das auf das Kroneckersymbol δ_{ab} der Spinorkomponenten in der Kommutatorrelation (16.2) zurückzuführen ist.

Und wieder stellen wir die bemerkenswerte Nebenwirkung der Quantisierung fest: Die Normierung des Feldes ist nicht mehr frei wählbar. Vielmehr wird das Produkt des Normierungsfaktors und der Fourier-Operatoren (16.5) durch die Quantisierungsbedingung (16.2) eindeutig festgelegt. Insbesondere sind alle Fourier-Operatoren für beliebige Wellenzahl $\boldsymbol{k}$ und beliebige Spinvariable r verschieden von Null.

16.2 Erhaltungsgrößen

Der Energiedichte-Spannungs-Tensor (ES-Tensor) des Diracfeldes hat die Komponenten

$$\mathcal{T}^{\rho\sigma} \overset{(8.86)}{=} i\hbar c\,\overline{\psi}\gamma^{\rho}\mathrm{d}^{\sigma}\psi\ . \tag{16.6}$$

Indem man die quantisierten Felder $\psi(x) =$ (16.1a), und

$$\psi^{\dagger}(x) \overset{(16.1a)}{=} \sum_{\boldsymbol{f},s} \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_{\boldsymbol{f}}\Omega}} \Big({}^{s}a^{\dagger}_{\boldsymbol{f}}\, {}^{s}u^{\boldsymbol{f}\dagger} \exp\{+ifx\} + {}^{s}b_{\boldsymbol{f}}\, {}^{s}v^{\boldsymbol{f}\dagger} \exp\{-ifx\} \Big) \tag{16.7}$$

$$\mathrm{d}^\sigma\psi(x) \overset{(16.1a)}{=} \sum_{\boldsymbol{k},r} \frac{ik^\sigma}{\sqrt{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}\Omega}}\Big(- {}^{r}a_{\boldsymbol{k}}\, {}^{r}u^{\boldsymbol{k}} \exp\{-ikx\} + {}^{r}b^\dagger_{\boldsymbol{k}}\, {}^{r}v^{\boldsymbol{k}} \exp\{+ikx\}\Big)$$

einsetzt, findet man

$$\begin{aligned}\mathcal{T}^{\rho\sigma} = -\sum_{\boldsymbol{f},s,\boldsymbol{k},r} \frac{c\,k^\sigma}{2\Omega\sqrt{\omega_{\boldsymbol{k}}\omega_{\boldsymbol{f}}}}\Big(&- {}^{s}a^\dagger_{\boldsymbol{f}}\, {}^{r}a_{\boldsymbol{k}}\, {}^{s}u^{\boldsymbol{f}\dagger}\gamma^0\gamma^\rho\, {}^{r}u^{\boldsymbol{k}} \exp\{+i(f-k)x\} + \\ &+ {}^{s}a^\dagger_{\boldsymbol{f}}\, {}^{r}b^\dagger_{\boldsymbol{k}}\, {}^{s}u^{\boldsymbol{f}\dagger}\gamma^0\gamma^\rho\, {}^{r}v^{\boldsymbol{k}} \exp\{+i(f+k)x\} - \\ &- {}^{s}b_{\boldsymbol{f}}\, {}^{r}a_{\boldsymbol{k}}\, {}^{s}v^{\boldsymbol{f}\dagger}\gamma^0\gamma^\rho\, {}^{r}u^{\boldsymbol{k}} \exp\{-if+k)x\} + \\ &+ {}^{s}b_{\boldsymbol{f}}\, {}^{r}b^\dagger_{\boldsymbol{k}}\, {}^{s}v^{\boldsymbol{f}\dagger}\gamma^0\gamma^\rho\, {}^{r}v^{\boldsymbol{k}} \exp\{-if-k)x\}\Big)\ . \end{aligned} \tag{16.8}$$

Integration dieses Resultats im dreidimensionalen Ortsraum über das Normierungsvolumen Ω führt zu

$$T^{\rho\sigma} \equiv \int_\Omega \mathrm{d}^3x\, \mathcal{T}^{\rho\sigma} \overset{(8.94)}{=} \sum_{\boldsymbol{k},s} \frac{c^2\hbar^2k^\rho k^\sigma}{\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}}\Big({}^{s}a^\dagger_{\boldsymbol{k}}\, {}^{s}a_{\boldsymbol{k}} - {}^{s}b_{\boldsymbol{k}}\, {}^{s}b^\dagger_{\boldsymbol{k}}\Big) =$$

$$\overset{(16.5)}{=} \sum_{\boldsymbol{k},s} \frac{c^2\hbar^2k^\rho k^\sigma}{\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}}\Big({}^{s}a^\dagger_{\boldsymbol{k}}\, {}^{s}a_{\boldsymbol{k}} + {}^{s}b^\dagger_{\boldsymbol{k}}\, {}^{s}b_{\boldsymbol{k}} \underbrace{- {}^{s}b_{\boldsymbol{k}}\, {}^{s}b^\dagger_{\boldsymbol{k}} - {}^{s}b^\dagger_{\boldsymbol{k}}\, {}^{s}b_{\boldsymbol{k}}}_{-\{{}^{s}b_{\boldsymbol{k}},{}^{s}b^\dagger_{\boldsymbol{k}}\} \overset{(16.5)}{=} -1}\Big) \tag{16.9a}$$

$$= \sum_{\boldsymbol{k},s} \frac{c^2\hbar^2k^\rho k^\sigma}{\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}}\Big({}^{s}a^\dagger_{\boldsymbol{k}}\, {}^{s}a_{\boldsymbol{k}} - {}^{s}b^\dagger_{\boldsymbol{k}}\, {}^{s}b_{\boldsymbol{k}} \underbrace{- {}^{s}b_{\boldsymbol{k}}\, {}^{s}b^\dagger_{\boldsymbol{k}} + {}^{s}b^\dagger_{\boldsymbol{k}}\, {}^{s}b_{\boldsymbol{k}}}_{-[{}^{s}b_{\boldsymbol{k}},{}^{s}b^\dagger_{\boldsymbol{k}}] = ?}\ . \tag{16.9b}$$

Wie im Fall des Klein-Gordon-Feldes interpretieren wir die Fourier-Operatoren $a^\dagger_{\boldsymbol{k}}$ und $b^\dagger_{\boldsymbol{k}}$ als Erzeugungs-Operatoren, und die Fourier-Operatoren $a_{\boldsymbol{k}}$ und $b_{\boldsymbol{k}}$ als Vernichtungs-Operatoren von Feldquanten der Typen a und b. Die Teilchenzahl-Operatoren $a^\dagger_{\boldsymbol{k}}a_{\boldsymbol{k}}$ und $b^\dagger_{\boldsymbol{k}}b_{\boldsymbol{k}}$ haben die Eigenwerte $0, 1, 2, 3, \ldots$, jedoch keine negativen Eigenwerte. Die Eigenwerte sind gleich der Anzahl angeregter Feldquanten des jeweiligen Typs. Folglich ist

$$\sum_{\boldsymbol{k},r} \hbar\omega_{\boldsymbol{k}}\Big({}^{r}a^\dagger_{\boldsymbol{k}}\, {}^{r}a_{\boldsymbol{k}} + {}^{r}b^\dagger_{\boldsymbol{k}}\, {}^{r}b_{\boldsymbol{k}}\Big)|s\rangle \geq 0 \tag{16.10}$$

in jedem beliebigen Zustand $|s\rangle$ des Feldes positiv definit. Weil wir das Diracfeld mit der Antikommutator-Relation (14.74b) quantisiert haben, können wir in (16.9a) den Antikommutator (16.5) der Fourier-Operatoren identifizieren. Hätten wir stattdessen für das Diracfeld die Kommutator-Relation (14.74a) postuliert, dann hätten wir auch für die Fourier-Operatoren eine Kommutator-Relation erhalten, und dann hätte der Hamiltonoperator des Diracfeldes entsprechend (16.9b) auch negative Eigenwerte. Das Spin-Statistik-Theorem [40] besagt, dass *alle* Felder mit halbzahligem Spin durch die Antikommutator-Relation (14.74b) quantisiert werden müssen, damit die Feldenergie niemals negativ sein kann.

Wie in Gleichung (15.17) des Klein-Gordon-Feldes gibt es auch in Gleichung (16.9a) einen konstanten Summanden aufgrund des nicht-verschwindenden Kommutators. Und wieder, genau wie in Gleichung (15.20) des Klein-Gordon-Feldes postulieren wir als Naturgesetz, dass (16.9a) nur für diskrete Dirac-Felder gilt, dass aber im Fall elementarer Felder alle Terme, die nicht von den Teilchenzahl-Operatoren ${}^r a_{\boldsymbol{k}}^\dagger \, {}^r a_{\boldsymbol{k}}$ oder ${}^r b_{\boldsymbol{k}}^\dagger \, {}^r b_{\boldsymbol{k}}$ abhängen, gestrichen werden müssen:

klassische und diskrete Diracfelder:

$$\mathcal{T}^{\rho\sigma} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho \psi)} \, \partial^\sigma \psi + \partial^\sigma \overline{\psi} \, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho \overline{\psi})} - g^{\rho\sigma} \mathcal{L} \tag{16.11a}$$

elementare Diracfelder:

$$\mathcal{T}^{\rho\sigma} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho \psi)} \, \partial^\sigma \psi + \partial^\sigma \overline{\psi} \, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho \overline{\psi})} - g^{\rho\sigma} \mathcal{L} - Y \tag{16.11b}$$

$Y \equiv$ die Summe aller Terme in (16.11a), die nicht von den Teilchenzahl-Operatoren ${}^r a_{\boldsymbol{k}}^\dagger \, {}^r a_{\boldsymbol{k}}$ oder ${}^r b_{\boldsymbol{k}}^\dagger \, {}^r b_{\boldsymbol{k}}$ abhängen.

Zwar scheint es diskrete Dirac-Felder in unserem Universum nicht zu geben; wir wollen unsere Formeln aber so allgemein wie möglich halten. Damit ergibt sich folgender ES-Tensor für das Dirac-Feld:

$$T^{\rho\sigma} \equiv \int_\Omega \mathrm{d}^3x\, \mathcal{T}^{\rho\sigma} = \sum_{\boldsymbol{k},s} \frac{c^2\hbar^2 k^\rho k^\sigma}{\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}} \cdot$$

$$\cdot \begin{cases} \left({}^s a^\dagger_{\boldsymbol{k}}\, {}^s a_{\boldsymbol{k}} + {}^s b^\dagger_{\boldsymbol{k}}\, {}^s b_{\boldsymbol{k}} - 1 \right) \text{ für diskrete Felder} & \text{(16.12a)} \\ \left({}^s a^\dagger_{\boldsymbol{k}}\, {}^s a_{\boldsymbol{k}} + {}^s b^\dagger_{\boldsymbol{k}}\, {}^s b_{\boldsymbol{k}} \right) \text{ für elementare Felder} & \text{(16.12b)} \end{cases}$$

Insbesondere ist der Hamilton-Operator $H \equiv T^{00}$ gleich

$$H = \sum_{\boldsymbol{k},s} \hbar\omega_{\boldsymbol{k}} \cdot \begin{cases} ({}^s a^\dagger_{\boldsymbol{k}}\, {}^s a_{\boldsymbol{k}} + {}^s b^\dagger_{\boldsymbol{k}}\, {}^s b_{\boldsymbol{k}} - 1) \text{ für diskrete Felder} \\ ({}^s a^\dagger_{\boldsymbol{k}}\, {}^s a_{\boldsymbol{k}} + {}^s b^\dagger_{\boldsymbol{k}}\, {}^s b_{\boldsymbol{k}}) \text{ für elementare Felder,} \end{cases} \tag{16.13}$$

und der Operator $P^j \equiv T^{0j}/c$ der j-Komponente des physikalischen Impulses ist

$$P^j = \sum_{\boldsymbol{k},s} \hbar k^j \cdot \begin{cases} ({}^s a^\dagger_{\boldsymbol{k}}\, {}^s a_{\boldsymbol{k}} + {}^s b^\dagger_{\boldsymbol{k}}\, {}^s b_{\boldsymbol{k}} - 1) \text{ für diskrete Felder} \\ ({}^s a^\dagger_{\boldsymbol{k}}\, {}^s a_{\boldsymbol{k}} + {}^s b^\dagger_{\boldsymbol{k}}\, {}^s b_{\boldsymbol{k}}) \text{ für elementare Felder.} \end{cases} \tag{16.14}$$

Drehimpuls-Operator: Wird in einer späteren Version dieses Buches nachgetragen, falls ich die Zeit dazu finde ...

Für den Operator der erhaltenen Ladung des Diracfeldes

$$Q \overset{(A.92)}{=} \sum_{\boldsymbol{k},r} q\Big({}^r a^\dagger_{\boldsymbol{k}}\, {}^r a_{\boldsymbol{k}} - {}^r b^\dagger_{\boldsymbol{k}}\, {}^r b_{\boldsymbol{k}} + \underbrace{\{ {}^r b^\dagger_{\boldsymbol{k}}, {}^r b_{\boldsymbol{k}} \}}_{1} \Big) \,, \tag{16.15}$$

der in Anhang A.14 berechnet wird, gelten die gleichen Anmerkungen, die bereits in den Zeilen vor und nach (15.24) gemacht wurden.

Bei der Betrachtung der nicht-verschwindenen Kommutatoren, die in den Erhaltungsgrößen des diskreten Dirac-Feldes auftreten, fällt eine eigentümliche Asymmetrie zwischen Feld und Antifeld auf: In (16.9) und (16.15) ist es jeweils das Antifeld mit den Operatoren b, aber nicht das Feld mit den Operatoren a, das die nicht verschwindenden Kommutatoren produziert. Man könnte überlegen, ob diese Asymmetrie auf einer Asym-

metrie der Lagrangedichte $\mathcal{L} =$ (8.24) beruht, in der Ableitungen von ψ, aber keine Ableitungen von $\overline{\psi}$ vorkommen. Am Ende von Abschnitt 8.6 haben wir eine alternative Lagrangedichte $\mathcal{L}' =$ (8.99) definiert, in der die Felder ψ und $\overline{\psi}$ symmetrischer auftreten als in $\mathcal{L} =$ (8.24). Aus $\mathcal{L}'$ ergaben sich symmetrischere kanonisch konjugierte Impulsdichten (8.101), sowie die symmetrischere Energiedichte

$$\mathcal{H}' \overset{(8.104)}{=} -\frac{i\hbar c}{2}\,(\mathrm{d}_0\overline{\psi})\gamma^0\psi + \frac{i\hbar c}{2}\,\overline{\psi}\gamma^0\mathrm{d}_0\psi \tag{16.16a}$$

und die symmetrischere physikalische Impulsdichte

$$\mathcal{P}'^j \overset{(8.105)}{=} \frac{i\hbar}{2}\,\overline{\psi}\gamma^0\mathrm{d}^j\psi - (\mathrm{d}^j\overline{\psi})\frac{i\hbar}{2}\gamma^0\psi \tag{16.16b}$$

des klassischen (nicht quantisierten) Dirac-Feldes. Die Berechnung des Hamiltonoperators und des Impulsoperators auf der Grundlage von (16.16), die in Anhang A.16 durchgeführt wird, ergibt jedoch wieder exakt die gleichen Operatoren (16.12a) mit genau den gleichen nicht-verschwindenden Kommutatoren.

Die symmetrischere Lagrangedichte $\mathcal{L}' =$ (8.99) bewirkt überhaupt keine Veränderung der Erhaltungsgrößen gegenüber $\mathcal{L} =$ (8.24)! Ursache der Asymmetrie zwischen Feld und Antifeld in den Erhaltungsgrößen (16.9a) und (16.15) ist nicht eine Asymmetrie in der Lagrangedichte. Das hätten wir auch schon bei der Quantisierung des Klein-Gordon-Feldes bemerken können, dessen Lagrangedichte (10.10) und kanonisch konjugierten Impulse (10.14) in den Feldern ϕ und ϕ^* so symmetrisch sind wie überhaupt möglich. Dennoch treten auch beim Klein-Gordon-Feld die nicht-verschwindenden Kommutatoren in den Erhaltungsgrößen der diskreten Felder durchwegs bei den Antifeldern mit den Operatoren b auf, nicht bei den Feldern mit den Operatoren a. Siehe (15.17b).

Die formale Ursache der Asymmetrie ist vielmehr die folgende: Unsere Feldoperatoren haben immer die Form

$$\psi = \ldots a \ldots + \ldots b^\dagger \ldots \quad , \quad \psi^\dagger = \ldots a^\dagger \ldots + \ldots b \ldots \ .$$

Die Operatoren der Erhaltungsgrößen bestehen nie aus Produkten der Form

$\psi \dots \psi^\dagger \dots$, sondern immer aus Produkten der Form

$$\dots \psi^\dagger \dots \psi \dots = \dots a^\dagger a \dots + \underbrace{\dots a^\dagger b^\dagger + \dots ba \dots}_{0} + \dots bb^\dagger \dots \ .$$

Die gemischten Terme fallen regelmäßig weg, und das Antifeld liefert regelmäßig den Term $\dots bb^\dagger \dots$, der zum nicht verschwindenden Kommutator führt.

Schließlich berechnen wir nun noch den Vakuum-Erwartungswert einer beliebigen Komponente des ES-Tensors:

$$\begin{aligned} &\langle 0|T^{\rho\sigma}|0\rangle \overset{(16.12)}{=} \\ &= \begin{cases} \displaystyle\sum_{\boldsymbol{k}} \frac{-2c^2\hbar^2 k^\rho k^\sigma}{\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}} \overset{(7.18)}{=} \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{-2c\hbar k^\rho k^\sigma}{\sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2c^2/\hbar^2}} & \text{für diskrete Felder} \\ 0 \quad \text{für elementare Felder} \end{cases} \end{aligned} \tag{16.17}$$

Der Faktor 2 stammt aus der Summation über den Polarisationsindex, und der Faktor (-1) beruht darauf dass Fermionenfelder mit der Antikommutator-Relation (14.74b) quantisiert werden. Die Vakuum-Erwartungswerte des (hypothetischen) diskreten Dirac-Feldes unterscheiden sich durch den Faktor -2 von den Vakuum-Erwartungswerten (15.21) des komplexen (d. h. geladenen) diskreten Klein-Gordon-Feldes, und durch einen weiteren Faktor 2 (also insgesamt durch den Faktor -4) von den Vakuum-Erwartungswerten (15.50) reellen diskreten Klein-Gordon-Feldes.

Die Vakuum-Erwartungswerte der ES-Tensoren elementarer Dirac-Felder sind Null.

16.3 Quanten des Diracfeldes

Wir definieren

$$|1_{ar\boldsymbol{k}}\rangle \equiv {}^r a^\dagger_{\boldsymbol{k}}|0\rangle \qquad\qquad |1_{br\boldsymbol{k}}\rangle \equiv {}^r b^\dagger_{\boldsymbol{k}}|0\rangle \tag{16.18}$$

als Ein-Teilchen-Zustände des Diracfeldes, in denen ein Teilchen a oder ein Antiteilchen b mit Wellenzahl $\boldsymbol{k}$ im Spinzustand r angeregt ist. Es handelt

sich um Eigenzustände des Hamiltonoperators, des Impulsoperators, und des Ladungsoperators (und weiterer Operatoren). Die Normierung dieser Zustände ist wegen

$$\begin{aligned}\langle 1_{as\boldsymbol{f}}|1_{ar\boldsymbol{k}}\rangle = \langle 0|\,{}^{s}a_{\boldsymbol{f}}\,{}^{r}a^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}|0\rangle &\overset{(16.5)}{=} \underbrace{\langle 0|0\rangle}_{1}\,\delta_{rs}\,\delta_{\boldsymbol{fk}} - \underbrace{\langle 0|\,{}^{r}a^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}\,{}^{s}a_{\boldsymbol{f}}|0\rangle}_{0}\\ \langle 1_{bs\boldsymbol{f}}|1_{br\boldsymbol{k}}\rangle &\overset{(16.5)}{=} \delta_{rs}\,\delta_{\boldsymbol{fk}}\\ \langle 1_{bs\boldsymbol{f}}|1_{ar\boldsymbol{k}}\rangle &\overset{(16.5)}{=} 0\end{aligned} \tag{16.19}$$

lorentzinvariant. Um Ein-Teilchen-Funktionen zu erzeugen, die Eigenzustände des zeitabhängigen Ortsoperators sind, wendet man die Feldoperatoren

$$\begin{aligned}\psi(x) &\overset{(16.1a)}{=} \sum_{\boldsymbol{k},r}\frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}\Omega}}\Big({}^{r}a_{\boldsymbol{k}}\,{}^{r}u^{\boldsymbol{k}}\exp\{-ikx\} + {}^{r}b^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}\,{}^{r}v^{\boldsymbol{k}}\exp\{+ikx\}\Big)\\ \overline{\psi}(x) &= \sum_{\boldsymbol{k},r}\frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}\Omega}}\Big({}^{r}a^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}\,{}^{r}\bar{u}^{\boldsymbol{k}}\exp\{+ikx\} + {}^{r}b_{\boldsymbol{k}}\,{}^{r}\bar{v}^{\boldsymbol{k}}\exp\{-ikx\}\Big)\end{aligned}$$

komponentenweise auf das Vakuum an:

$$|1_{ax}\rangle_{\alpha} \equiv \overline{\psi}_{\alpha}(x)\,|0\rangle = \sum_{\boldsymbol{k},r}|1_{ar\boldsymbol{k}}\rangle\,{}^{r}\bar{u}^{\boldsymbol{k}}_{\alpha}\,\frac{\exp\{+ikx\}}{\sqrt{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}\Omega}} \tag{16.20a}$$

$$|1_{by}\rangle_{\beta} \equiv \psi_{\beta}(y)\,|0\rangle = \sum_{\boldsymbol{f},s}|1_{bs\boldsymbol{f}}\rangle\,{}^{s}v^{\boldsymbol{f}}_{\beta}\,\frac{\exp\{+ify\}}{\sqrt{2\hbar\omega_{\boldsymbol{f}}\Omega}} \tag{16.20b}$$

$\alpha,\beta = 1,2,3,4$ indizieren die vier Komponenten der Spinoren. Ein-Teilchen-Funktionen, die Eigenzustände des zeitunabhängigen Ortsoperators sind, erhält man durch Anwendung der zeitunabhängigen Operatoren im Schrödinger-Bild:

$$|1_{a\boldsymbol{x}}\rangle_\alpha \equiv \overline{\psi}_\alpha(\boldsymbol{x})\,|0\rangle = \sum_{\boldsymbol{k},r} |1_{ar\boldsymbol{k}}\rangle\, {}^r\bar{u}^{\boldsymbol{k}}_\alpha \,\frac{\exp\{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}\}}{\sqrt{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}\Omega}} \tag{16.20c}$$

$$|1_{b\boldsymbol{x}}\rangle_\alpha \equiv \psi_\alpha(\boldsymbol{x})\,|0\rangle = \sum_{\boldsymbol{k},r} |1_{br\boldsymbol{k}}\rangle\, {}^rv^{\boldsymbol{k}}_\alpha \,\frac{\exp\{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}\}}{\sqrt{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}\Omega}} \tag{16.20d}$$

Man beachte, dass die so lokalisierten Teilchen keinen wohldefinierten Spinzustand haben. Die adjungierten Zustandsfunktionen werden per Definition durch die Komponenten der adjungierten Spinoren erzeugt:

$$|1_{ax}\rangle_\alpha = \overline{\psi}_\alpha(x)\,|0\rangle \quad\Longrightarrow\quad \langle 1_{ax}|_\alpha \equiv \langle 0|\,\psi_\alpha(x) \tag{16.21a}$$

$$|1_{by}\rangle_\beta = \psi_\beta(y)\,|0\rangle \quad\Longrightarrow\quad \langle 1_{by}|_\beta \equiv \langle 0|\,\overline{\psi}_\beta(y) \tag{16.21b}$$

Die Zustandsfunktionen werden komponentenweise definiert, weil sonst $\overline{\psi}(x)\,|0\rangle$ ein Zeilenspinor, $\psi(x)\,|0\rangle$ aber ein Spaltenspinor wäre, was einen unsinnigen Unterschied zwischen Teilchen und Antiteilchen bedeuten würde. Insbesondere wäre das Normquadrat im einen Fall eine 4×4 Spinormatrix, im anderen Fall ein Spinorskalar. Wir treffen deshalb folgende

Definition: Jeder $|\text{ket}\rangle$ eines Spinorfeldes ist als Zeilenspinor zu betrachten. Jeder $\langle\text{bra}|$ eines Spinorfeldes ist als Spaltenspinor zu betrachten. (16.22)

Demnach ist jede $\langle\text{bra}|\text{ket}\rangle$ eines Spinorfeldes eine Spinor-Matrix, jedoch kein Spinor-Skalar. Nicht die kompletten $|\text{kets}\rangle$, sondern ihre einzelnen $|\text{Spinor-Komponenten}\rangle_\alpha$ sind also als die Elemente des abzählbar unendlichdimensionalen Hilbert-Raums der Zustandsfunktionen zu betrachten. Das Skalarprodukt $\langle\text{bra}|\text{ket}\rangle_{\alpha\beta}$ ist eine bilineare Abbildung aus dem Hilbert-Raum, dessen Elemente die $|\text{Spinorkomponenten}\rangle_\alpha$ sind, in den zugrunde liegenden Körper der komplexen Zahlen. Die Produkte $\langle\text{bra}|\text{ket}\rangle$ sind 4×4-dimensionale Spinormatrizen, deren 16 Elemente komplexe Zahlen sind. Wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden sind die Definition (16.21) und (16.22) zwingend erforderlich, um die Konsistenz mit der Definition (12.27) des Feynman-Propagators des klassischen Dirac-Feldes zu garantieren.

Wir berechnen nun die Quadrate der Vektoren (16.20). Die durch ihre Komponenten

$$\begin{aligned}\langle 1_{ax}|1_{ay}\rangle_{\alpha\beta} &= \langle 0|\,\psi_\alpha(x)\overline{\psi}_\beta(y)\,|0\rangle = \\ &= \sum_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{k},s,r} \underbrace{\langle 1_{as\boldsymbol{f}}|1_{ar\boldsymbol{k}}\rangle}_{\delta_{rs}\,\delta_{\boldsymbol{fk}}} {}^{s}u_\alpha^{\boldsymbol{f}}\,{}^{r}\bar{u}_\beta^{\boldsymbol{k}}\,\frac{\exp\{-i(fx-ky)\}}{\Omega 2\hbar\sqrt{\omega_{\boldsymbol{f}}\omega_{\boldsymbol{k}}}} = \\ &= \sum_{\boldsymbol{k},r} {}^{r}u_\alpha^{\boldsymbol{k}}\,{}^{r}\bar{u}_\beta^{\boldsymbol{k}}\,\frac{\exp\{-ik(x-y)\}}{\Omega 2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}} \end{aligned} \tag{16.23}$$

definierte 4×4 Spinormatrix

$$\langle 1_{ax}|1_{ay}\rangle = \langle 0|\,\psi(x)\overline{\psi}(y)\,|0\rangle = \sum_{\boldsymbol{k},r} {}^{r}u^{\boldsymbol{k}}\,{}^{r}\bar{u}^{\boldsymbol{k}}\,\frac{\exp\{-ik(x-y)\}}{\Omega 2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}} \tag{16.24}$$

und die durch ihre Komponenten

$$\begin{aligned}\langle 1_{by}|1_{bx}\rangle_{\alpha\beta} &= \langle 0|\,\overline{\psi}_\alpha(y)\psi_\beta(x)\,|0\rangle \\ &= \sum_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{k},s,r} \underbrace{\langle 1_{bs\boldsymbol{f}}|1_{br\boldsymbol{k}}\rangle}_{\delta_{rs}\,\delta_{\boldsymbol{fk}}} {}^{s}\bar{v}_\alpha^{\boldsymbol{f}}\,{}^{r}v_\beta^{\boldsymbol{k}}\,\frac{\exp\{-i(fy-kx)\}}{\Omega 2\hbar\sqrt{\omega_{\boldsymbol{f}}\omega_{\boldsymbol{k}}}} \\ &= \sum_{\boldsymbol{k},r} {}^{r}\bar{v}_\alpha^{\boldsymbol{k}}\,{}^{r}v_\beta^{\boldsymbol{k}}\,\frac{\exp\{-ik(y-x)\}}{\Omega 2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}} \end{aligned} \tag{16.25}$$

definierte 4×4 Spinormatrix

$$\langle 1_{by}|1_{bx}\rangle = \langle 0|\,\overline{\psi}(y)\psi(x)\,|0\rangle \overset{(16.22)}{=} \sum_{\boldsymbol{k},r} {}^{r}v^{\boldsymbol{k}}\,{}^{r}\bar{v}^{\boldsymbol{k}}\,\frac{\exp\{-ik(y-x)\}}{\Omega 2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}} \tag{16.26}$$

enthalten die 4×4 Spinormatrizen

$$\sum_{r=1}^{2} {}^{r}u^{\boldsymbol{k}}\,{}^{r}\bar{u}^{\boldsymbol{k}} \overset{(8.77a)}{=} c\gamma^\mu p_\mu + mc^2 \tag{16.27a}$$

$$\sum_{r=1}^{2} {}^{r}v^{\boldsymbol{k}}\,{}^{r}\bar{v}^{\boldsymbol{k}} \overset{(8.77b)}{=} -(-c\gamma^\mu p_\mu + mc^2)\ , \tag{16.27b}$$

die wir aus der Untersuchung des klassischen Diracfeldes in Abschnitt 8.5

kennen, und die bei der Quantisierung des Feldes nicht verändert werden. Einsetzen ergibt

$$\langle 1_{ax}|1_{ay}\rangle = \sum_{\boldsymbol{k}} (c\hbar\gamma^\mu k_\mu + mc^2)\, \frac{\exp\{-ik(x-y)\}}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}\Omega} \tag{16.28a}$$

$$\langle 1_{by}|1_{bx}\rangle = -\sum_{\boldsymbol{k}} (-c\hbar\gamma^\mu k_\mu + mc^2)\, \frac{\exp\{-ik(y-x)\}}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}\Omega} \tag{16.28b}$$

$$\langle 1_{ax}|1_{by}\rangle \overset{(16.19)}{=} 0\ . \tag{16.28c}$$

Diese Matrixelemente sind lorentzinvariant. Von den entsprechenden Matrixelementen (15.41) des Klein-Gordon-Feldes unterscheiden sie sich durch die Spinormatrizen $\pm(\pm c\hbar\gamma^\mu k_\mu + \mathbb{1}mc^2)$.

16.4 Die quantisierte Greensfunktion

Die 4×4 Spinormatrix

$$\langle 1_{ax}|1_{ay}\rangle = \langle 0|\,\psi(x)\overline{\psi}(y)\,|0\rangle \overset{(16.28a)}{=} \sum_{\boldsymbol{k}} (c\hbar\gamma^\mu k_\mu + mc^2)\, \frac{\exp\{-ik(x-y)\}}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}\Omega} \tag{16.29}$$

wird interpretiert als Wahrscheinlichkeitsamplitude dafür, dass ein Teilchen zur Zeit y^0 am Ort $\boldsymbol{y}$ erzeugt und zur Zeit x^0 am Ort $\boldsymbol{x}$ vernichtet wird. Die 4×4 Spinormatrix

$$\langle 1_{by}|1_{bx}\rangle = \langle 0|\,\overline{\psi}(y)\psi(x)\,|0\rangle \overset{(16.28b)}{=} -\sum_{\boldsymbol{k}} (-c\hbar\gamma^\mu k_\mu + mc^2)\, \frac{\exp\{-ik(y-x)\}}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}\Omega} \tag{16.30}$$

wird interpretiert als Wahrscheinlichkeitsamplitude dafür, dass ein Antiteilchen zur Zeit x^0 am Ort $\boldsymbol{x}$ erzeugt und zur Zeit y^0 am Ort $\boldsymbol{y}$ vernichtet wird. Wir vergleichen diese Matrizen mit dem Feynman-Propagator des klassischen Diracfeldes, den wir in Abschnitt 12.2 hergeleitet haben:

$$S(x-y) \overset{(12.27)}{=} \theta(x^0-y^0)\sum_{\boldsymbol{k}} \frac{(+\gamma^\mu c p_\mu + mc^2)\exp\{-ik(x-y)\}}{\Omega 2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}} + \\ + \theta(y^0-x^0)\sum_{\boldsymbol{k}} \frac{(-\gamma^\mu c p_\mu + mc^2)\exp\{-ik(y-x)\}}{\Omega 2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}}$$

Offenbar ist

$$\boxed{\begin{aligned} S(x-y) &= \theta(x^0-y^0)\langle 0|\,\psi(x)\overline{\psi}(y)\,|0\rangle + \\ &\quad - \theta(y^0-x^0)\langle 0|\,\overline{\psi}(y)\psi(x)\,|0\rangle \\ &= \langle 0|\,T\psi(x)\overline{\psi}(y)\,|0\rangle \end{aligned}} \tag{16.31}$$

der Feynman-Propagator des quantisierten Diracfeldes. In der letzten Zeile wird der in (15.44) definierte Zeitordnungsoperator verwendet.

16.5 Kausalität

Wie beim Klein-Gordon-Feld in Abschnitt 15.6 wollen wir uns jetzt auch beim Diracfeld davon überzeugen, dass das Kausalitätskriterium der Speziellen Relativitätstheorie nicht verletzt wird, obwohl wir in der klassischen Greensfunktion auch Wellen zugelassen haben, die sich schneller als mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten. x und y seien zwei Raumzeitpunkte mit raumartigem Abstand, d.h. es ist $(x-y)^2 < 0$. Erzeugung und Vernichtung von Teilchen an diesen beiden Raumzeitpunkten dürfen sich nicht wechselseitig beeinflussen. Formal bedeutet das, dass ihr Antikommutator Null sein muss. (Weil das Diracfeld gemäß (14.74b) mit dem Antikommutator quantisiert wurde, muss auch jetzt der Antikommutator verwendet werden.)

Das Diracfeld befinde sich im Zustand $|s\rangle$. Durch $\psi(x)|s\rangle$ wird zur Zeit x^0/c am Ort $\boldsymbol{x}$ ein Teilchen a vernichtet und sein Antiteilchen b erzeugt. Durch $\overline{\psi}(y)|s\rangle$ wird zur Zeit y^0/c am Ort $\boldsymbol{y}$ ein Teilchen a erzeugt und sein Antiteilchen b vernichtet. Der Erwartungswert ihres Antikommutators ist

$$\begin{aligned}
&\langle s|\,\{\psi(x),\overline{\psi}(y)\}\,|s\rangle \;= \\
&= \langle s|s\rangle\Big(\sum_{\boldsymbol{k}}(c\hbar\gamma^\mu k_\mu + mc^2)\,\frac{\exp\{-ik(x-y)\}}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}\Omega} - \\
&\qquad - \sum_{\boldsymbol{k}}(-c\hbar\gamma^\mu k_\mu + mc^2)\,\frac{\exp\{-ik(y-x)\}}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}\Omega}\Big)\;. \qquad (16.32)
\end{aligned}$$

Weil der Kommutator keinen Operator enthält, kann er aus dem Produkt $\langle s|s\rangle$ herausgezogen werden. Und weil er lorentzinvariant ist, können wir ihn – ohne seinen Wert zu verändern – in ein gestrichenes Koordinatensystem$'$ transformieren, in dem $x'^0 - y'^0 = 0$ gilt. Ein derartiges Koordinatensystem gibt es deshalb und nur deshalb, weil das Verhältnis der Raumzeitpunkte x und y raumartig ist.

$$\begin{aligned}
&\{\psi'(x'),\overline{\psi}'(y')\} = \\
&= \sum_{\boldsymbol{k}'}(c\hbar\gamma^0 k'_0 - c\hbar\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{k}' + mc^2)\,\frac{\exp\{+i\boldsymbol{k}'(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}')\}}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}'}\Omega'} - \\
&\qquad - \sum_{-\boldsymbol{k}'}(-c\hbar\gamma^0 k'_0 - c\hbar\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{k}' + mc^2)\,\frac{\exp\{-i\boldsymbol{k}'(\boldsymbol{y}'-\boldsymbol{x}')\}}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}'}\Omega'}
\end{aligned}$$

In der letzten Zeile wurde über $-\boldsymbol{k}'$ summiert und $\omega_{-\boldsymbol{k}'} = \omega_{\boldsymbol{k}'}$ beachtet. Wegen $ck'_0 = \omega_{\boldsymbol{k}'}$ und (7.9) ist

$$\{\psi'(x'),\overline{\psi}'(y')\} = \gamma^0\,\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}')\;. \qquad (16.33)$$

Also ist der Kommutator für $\boldsymbol{x}' \neq \boldsymbol{y}'$ tatsächlich Null, in Übereinstimmung mit der Relativitätstheorie.

Hätten wir die Quantisierung des Dirac-Feldes nicht mit dem Antikommutator (14.74b) sondern mit dem Kommutator (14.74a) durchgeführt, dann hätten wir auch jetzt den Kommutator berechnen müssen, und anstelle von (16.33) das Ergebnis

$$[\psi'(x'),\overline{\psi}'(y')] = \sum_{\boldsymbol{k}'}\frac{(-c\hbar\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{k}' + mc^2)}{\hbar\omega_{\boldsymbol{k}'}}\,\frac{\exp\{+i\boldsymbol{k}'(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}')\}}{\Omega'}$$

erhalten. Das Kausalitätskriterium der Relativitätstheorie wäre verletzt, denn dies Ergebnis ist auch für $\boldsymbol{x}' \neq \boldsymbol{y}'$ verschieden von Null. Das Kausalitätskriterium der Relativitätstheorie erzwingt die Quantisierung aller Felder mit ganzzahligem Spin (einschließlich Spin Null) durch den Kommutator (14.74a), und die Quantisierung aller Felder mit halbzahligem Spin durch den Antikommutator (14.74b). Am Beispiel des Klein-Gordon-Feldes (Spin 0) haben wir diese Regel in Abschnitt 15.6 bestätigt, und am Beispiel des Dirac-Feldes (Spin $\frac{1}{2}$) haben wir sie hier erneut bestätigt.

17 Das freie Eichfeld $A(x)$

In Abschnitt 4.5 haben wir das Eichfeld des elektrisch geladenen Diracfeldes mit dem Potentialfeld

$$A(x) = \begin{pmatrix} \phi(x)/c \\ \boldsymbol{A}(x) \end{pmatrix} \tag{17.1}$$

des Elektromagnetischen Feldes der Maxwell'schen Theorie identifiziert, und die kombinierte Lagrangedichte von Diracfeld und seinem Eichfeld angegeben. Die Lagrangedichte des freien Feldes $A(x)$ geht aus (4.120) hervor, indem das Diracfeld abgeschaltet wird:

$$\mathcal{L} \overset{(4.120)}{=} -\frac{1}{4\mu_0} F_{\sigma\tau} F^{\sigma\tau} \tag{17.2a}$$

Hierin ist

$$F_{\sigma\tau} \overset{(4.114)}{\equiv} \mathrm{d}_\sigma A_\tau - \mathrm{d}_\tau A_\sigma \tag{17.2b}$$

der elektromagnetische Feldstärketensor. Wir haben die Lagrangedichte nicht ohne Grund als Produkt von Rotationstermen konstruiert: Auf diese Weise konnte die Invarianz der Theorie unter lokalen Phasentransformationen sichergestellt werden. Zugleich ergeben sich aus dieser Form von $\mathcal{L}$ aber weitreichende Nebenwirkungen für die Quantisierung, die bereits bei der Berechnung der kanonisch konjugierten Impulsdichten auffallen:

$$\begin{aligned} \pi^0 &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{c\partial(\mathrm{d}_0 A_0)} = \\ &= -\frac{1}{4\mu_0} \frac{\partial}{c\partial(\mathrm{d}_0 A_0)} (\mathrm{d}_\sigma A_\tau - \mathrm{d}_\tau A_\sigma)(\mathrm{d}^\sigma A^\tau - \mathrm{d}^\tau A^\sigma) = 0 \end{aligned} \tag{17.3a}$$

$$\pi^j \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{c\partial(\mathrm{d}_0 A_j)} = -\frac{1}{4\mu_0}\frac{\partial}{c\partial(\mathrm{d}_0 A_j)}(\mathrm{d}_\sigma A_\tau - \mathrm{d}_\tau A_\sigma)(\mathrm{d}^\sigma A^\tau - \mathrm{d}^\tau A^\sigma)$$
$$= -\frac{1}{4\mu_0 c}\Big((\mathrm{d}^0 A^j - \mathrm{d}^j A^0) - (\mathrm{d}^j A^0 - \mathrm{d}^0 A^j)\Big)\cdot 2$$
$$= +\frac{1}{\mu_0 c}(-\mathrm{d}_0 A^j - \mathrm{d}_j A^0) \overset{(4.127a)}{=} +\frac{1}{\mu_0 c^2}E^j \tag{17.3b}$$

Die Nullkomponente von $A(x)$ ist nicht kanonisch quantisierbar, weil die zu ihr konjugierte Impulsdichte Null ist. Und das ist wiederum darauf zurückzuführen, dass $\mathcal{L}$ ein Produkt der Rotationsterme $\mathrm{d}_\sigma A_\tau - \mathrm{d}_\tau A_\sigma$ ist. Nur die drei raumartigen Komponenten von $A(x)$ können kanonisch quantisiert werden. Wir bemerken, dass laut (17.3) die kontravarianten Komponenten von $\pi(x)$ zu den kovarianten Komponenten von $A(x)$ kanonisch konjugiert sind.

In Abschnitt 17.3 werden wir bei der Untersuchung des Spins von Photonen den Beweis dafür nachliefern, dass die Quanten des Eichfeldes ganzzahligen Spin haben, das Eichfeld also gemäß (14.74a) quantisiert werden muss. Wir postulieren (nur vorläufig!) die nichtkommutative Algebra

$$[A_j(t,\boldsymbol{x}), \pi^l(t,\boldsymbol{y})] = \frac{1}{\mu_0 c^2}[A_j(t,\boldsymbol{x}), E^l(t,\boldsymbol{y})] =$$
$$= i\hbar\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}){g_j}^l \quad \text{nur vorläufig!}, \tag{17.4}$$

wobei beide Faktoren mit der gleichen Zeit t in den Kommutator einzusetzen sind. Diese Quantisierungsregel ist als „nur vorläufig“ charakterisiert, weil sie inkonsistent ist. Denn die Quellen des Elektrischen Feldes $\boldsymbol{E}$ sind die Ladungen der Quanten des Diracfeldes. Weil wir zur Berechnung des freien Feldes A das Diracfeld abgeschaltet haben, ist das Elektrische Feld $\boldsymbol{E}$ quellenfrei, seine Divergenz ist Null:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = 0$$

Demnach ist auch die Divergenz hinsichtlich der Koordinate $\boldsymbol{y}$ der linken Seite von (17.4) Null:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y^l}[A_j(t,\boldsymbol{x}),\pi^l(t,\boldsymbol{y})] = \frac{1}{\mu_0 c^2}[A_j(t,\boldsymbol{x}),\underbrace{\frac{\mathrm{d}E^l(t,\boldsymbol{y})}{\mathrm{d}y^l}}_{0}] = 0 \tag{17.5a}$$

Die Divergenz der rechten Seite von (17.4) ist dagegen nicht Null:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y^l}\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}){g_j}^l &\overset{(7.9)}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y^j}\frac{1}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{k}}\exp\{i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\} \\ &= -\frac{1}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{k}} ik^j \exp\{i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\} \neq 0\end{aligned} \tag{17.5b}$$

17.1 Kanonische Quantisierung

Aus der Tatsache, dass die Faktoren von $\mathcal{L}$ die Form von Rotationstermen haben, ergeben sich weitere Komplikationen: A ist invariant unter der Eichtransformation

$$A_\nu(x) \longrightarrow A'_\nu(x) = A_\nu(x) + \mathrm{d}_\nu f(x)\ , \tag{17.6}$$

wobei $f(x)$ eine beliebige analytische Funktion sein kann. „Analytisch“ bedeutet, dass

$$\mathrm{d}_\sigma \mathrm{d}_\tau f = \mathrm{d}_\tau \mathrm{d}_\sigma f$$

gilt. Die Eichtransformation lässt den Feldstärketensor – und damit sämtliche beobachtbaren Größen – invariant, denn es ist

$$F'_{\sigma\tau} = \mathrm{d}_\sigma A_\tau + \mathrm{d}_\sigma \mathrm{d}_\tau f - \mathrm{d}_\tau A_\sigma - \mathrm{d}_\tau \mathrm{d}_\sigma f = F_{\sigma\tau}\ .$$

Diese Eichinvarianz bewirkt, dass die Viererdivergenz

$$\mathrm{d}_\nu A'^\nu = \mathrm{d}_\nu(A^\nu + \mathrm{d}^\nu f) = \mathrm{d}_\nu A^\nu + \mathrm{d}_\nu \mathrm{d}^\nu f$$

des Feldes A frei gewählt werden kann, indem man $\mathrm{d}_\nu \mathrm{d}^\nu f$ passend definiert. Mit der Wahl

$$\mathrm{d}_\nu \mathrm{d}^\nu f \equiv -\mathrm{d}_\nu A^\nu \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{d}_\nu A'^\nu = 0 \tag{17.7}$$

erhält man die Lorentzeichung, die die Freiheitsgrade des Feldes von 4 auf 3 reduziert. Indem man zusätzlich

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}_\nu \mathrm{d}^\nu f \equiv -\mathrm{d}_\nu A^\nu \quad \text{und} \quad \mathrm{d}_0 f \equiv -A_0 \quad \Longrightarrow \\ \Longrightarrow \quad &\boxed{A'^0 = 0 \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A}' = 0} \end{aligned} \tag{17.8}$$

spezifiziert, reduziert man die Freiheitsgrade des Feldes auf zwei. Das freie Eichfeld $A(x)$ hat nur zwei linear unabhängige Komponenten, es muss aber bei einem Wechsel der Koordinaten als Vektorfeld mit vier Raum-Zeit-Dimensionen transformiert werden. Dass zwei redundante, durch Eichtransformationen willkürlich festlegbare Komponenten mitgeschleppt werden müssen, ist die eigentliche Ursache für die besonderen Schwierigkeiten, die bei der Quantisierung dieses Feldes auftreten.

Die Eichung (17.8) heißt Coulomb-Eichung oder Strahlungseichung. Sie hat den Vorteil, dass die beiden redundanten, nur scheinbar unabhängigen Komponenten des Feldes festgelegt sind. Insbesondere verschwindet die Nullkomponente, die – siehe (17.3a) – schon rein formal nicht kanonisch quantisierbar ist. Der Nachteil der Coulomb-Eichung ist, dass die manifeste Lorentzkovarianz verloren geht. Denn in (17.8) werden ja nicht alle vier Raumzeitkoordinaten gleich behandelt, sondern die Zeitkoordinate wird besonders ausgezeichnet. Wenn wir im Folgenden $A(x)$ in der Coulomb-Eichung quantisieren, dann ist zunächst nicht klar, ob unsere Ergebnisse mit der Speziellen Relativitätstheorie kompatibel sind. Deshalb werden wir das Eichfeld in Abschnitt 17.4 noch einmal mit einer anderen Methode quantisieren, um die Lorentzinvarianz unserer Ergebnisse nachzuweisen.

Zusätzlich zu den in Abschnitt K.5 definierten Einheitsvektoren definieren wir ein weiteres System $e_{\boldsymbol{k}}^{(0)}, e_{\boldsymbol{k}}^{(1)}, e_{\boldsymbol{k}}^{(2)}, e_{\boldsymbol{k}}^{(3)}$ von vier orthonormalen vierdimensionalen Einheitsvektoren in der Weise, dass die drei raumartigen Einheitsvektoren am Wellenzahlvektor $\boldsymbol{k}$ des Feldes $A(x)$ orientiert sind, die Einheitsvektoren in Zeitrichtung aber in beiden Systemen identisch sind:

$$e_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)} \cdot e_{\boldsymbol{k}}^{(\beta)} = g_{\alpha\beta} \quad , \quad e_{\boldsymbol{k}}^{(0)} = e^{(0)}$$

$$e_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} e_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)0} \\ \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)} \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(1)} \times \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(2)} = \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(3)} = \frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}$$

$$\text{mit } \alpha = 0,1,2,3 \text{ und } \beta = 0,1,2,3 \tag{17.9a}$$

Nur $e_{\boldsymbol{k}}^{(0)}$ und $e_{\boldsymbol{k}}^{(3)}$ sind durch diese Relationen eindeutig festgelegt, die verbleibende Unbestimmtheit der beiden anderen Vektoren stört vorläufig nicht. Schließlich erweitern wir die Definition noch um einen Phasenfaktor φ^α, der für jede Koordinate unterschiedlich gewählt werden kann:

$$\epsilon_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)} \equiv e_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)} \exp\{i\varphi^\alpha\} \tag{17.9b}$$

Die Feldgleichung

$$\mathrm{d}_\nu F^{\nu\rho} \overset{(4.125)}{=} \mu_0 j^\rho \quad \text{mit } \rho = 0,1,2,3 \ ,$$

die wir in Abschnitt 4.5 hergeleitet haben, nimmt für das quellenfreie ($j^\rho = 0$) Feld mit (17.2b) die Form

$$\mathrm{d}_\nu \mathrm{d}^\nu A^\rho - \mathrm{d}^\rho \underbrace{\mathrm{d}_\nu A^\nu}_{\overset{(17.7)}{=} 0} = 0 \quad \text{mit } \rho = 0,1,2,3$$

an. Wegen $A^0 \overset{(17.8)}{=} 0$ sind in der Coulomb-Eichung nur die drei Gleichungen

$$\mathrm{d}_\nu \mathrm{d}^\nu A^j = 0 \quad \text{mit } j = 1,2,3 \tag{17.10}$$

nicht-trivial. Jede der drei Gleichungen hat die Form der Klein-Gordon-Gleichung (10.2) eines Feldes mit Masse Null. Deshalb kann man eine Lösung von Gleichung (17.10) direkt vom Klein-Gordon-Feld übernehmen, indem man es unter Verwendung der Einheitsvektoren (17.9) als

$$\boldsymbol{A}(x) \overset{(10.8)}{=} \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{v=1}^{2} \frac{1}{\sqrt{N\Omega}} \Big(\boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{k}}^{(v)} c_{\boldsymbol{k}}^{(v)} \exp\{-ikx\} + \boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{k}}^{(v)*} c_{\boldsymbol{k}}^{(v)*} \exp\{+ikx\} \Big) \tag{17.11}$$

schreibt. Es werden hier die dreidimensionalen, fett gedruckten Einheitsvektoren verwendet, weil die zeitartige Komponente A^0 in der Coulombeichung Null ist. Und es wird nur über die beiden Polarisationsvektoren $\boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{k}}^{(1)}$ und $\boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{k}}^{(2)}$ summiert, weil nur sie, aber nicht $\boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{k}}^{(3)}$, die Bedingung

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} \overset{(17.8)}{=} 0 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{k}}^{(v)} \cdot \boldsymbol{k} = 0$$

der Coulomb-Eichung erfüllen. Das freie Feld $\boldsymbol{A}(x)$ hat keine longitudinale Komponente sondern ist stets transversal (elliptisch oder zirkular oder linear) polarisiert.

Um uns die immense Schreibarbeit mit unzähligen Fallunterscheidungen zu ersparen, werden wir die Quantisierung des Feldes $A(x)$ nur für die linear polarisierte Wellen

$$\boldsymbol{A}(x) = \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{v=1}^{2} \frac{1}{\sqrt{N\Omega}} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(v)} \Big(c_{\boldsymbol{k}}^{(v)} \exp\{-ikx\} + c_{\boldsymbol{k}}^{(v)*} \exp\{+ikx\} \Big) \tag{17.12}$$

durchführen. Wellen mit elliptischer Polarisation, die sich in Richtung der x^3-Achse bewegen, erhält man bekanntlich dadurch, dass man zu einer in x^1-Richtung linear polarisierten Welle mit Ausbreitungsrichtung x^3 eine in x^2-Richtung linear polarisierte Welle mit Ausbreitungsrichtung x^3 mit gleicher Amplitude und Phasendifferenz von φ addiert:

$$\boldsymbol{A}^{(\text{elliptisch})} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \Big(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(1)} A^1 + \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(2)} A^2 \exp\{i\varphi\} \Big) \tag{17.13}$$

Im Spezialfall $\varphi = \pm\pi/2$ erhält man rechts- oder linkszirkular polarisierte Wellen. Erst nach der Quantisierung werden wir die Feldoperatoren von elliptisch bzw. zirkular polarisierten Feldern nach diesem Muster aus den Feldoperatoren linear polarisierter Felder konstruieren.

Das Eichfeld $A(x)$ ist nicht geladen, also reell. Deshalb taucht hier der

Fourier-Koeffizient $c_{\boldsymbol{k}}^{(v)*}$, aber nicht ein von $c_{\boldsymbol{k}}^{(v)*}$ verschiedener Koeffizient $d_{\boldsymbol{k}}^{(v)*}$ auf. Da A die Dimension Impuls·Ladung^{-1} hat, und da die Fourier-Koeffizienten wie üblich dimensionslos sein sollen, muss der Normierungsfaktor N die Dimension Ladung^2·Impuls^{-2}·Volumen^{-1} haben. Wir definieren ihn als

$$N \equiv \frac{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}}{\mu_0 c^2 \hbar^2} \ , \tag{17.14}$$

wodurch das Feld die Form

$$A^j \overset{(K.13a)}{=} \boldsymbol{e}^{(j)} \cdot \boldsymbol{A} = \tag{17.15a}$$

$$= \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{v=1}^{2} \sqrt{\frac{\mu_0 c^2 \hbar^2}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}\Omega}} (\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(v)} \cdot \boldsymbol{e}^{(j)}) \Big(c_{\boldsymbol{k}}^{(v)} \exp\{-ikx\} + c_{\boldsymbol{k}}^{(v)*} \exp\{+ikx\} \Big)$$

mit $j = 1, 2, 3$ erhält. Die zu $A_l(y)$ kanonisch konjugierte Impulsdichte ist

$$\pi^l(y) \overset{(17.3b)}{=} \frac{1}{\mu_0 c^2} E^l(y) \overset{(4.127a)}{=} \frac{1}{\mu_0 c} (-\mathrm{d}_0 A^l - \mathrm{d}_l \underbrace{A^0}_{\overset{(17.8)}{=} 0}) = \tag{17.15b}$$

$$= \frac{-1}{\mu_0 c} \sum_{\boldsymbol{f}} \sum_{u=1}^{2} \sqrt{\frac{\mu_0 c^2 \hbar}{2\omega_{\boldsymbol{f}}\Omega}} \, i f_0 (\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{f}}^{(u)} \cdot \boldsymbol{e}^{(l)}) (-c_{\boldsymbol{f}}^{(u)} \exp\{-ify\} + c_{\boldsymbol{f}}^{(u)*} \exp\{+ify\}) \, .$$

Mit $f_0 = \omega_{\boldsymbol{f}}/c$ und $A_j = -A^j$ ist der Kommutator von A_j und π^l

$$[A_j(t,\boldsymbol{x}), \pi^l(t,\boldsymbol{y})] = \sum_{\boldsymbol{k},v,\boldsymbol{f},u} \frac{i\hbar}{2\Omega} \sqrt{\frac{\omega_{\boldsymbol{f}}}{\omega_{\boldsymbol{k}}}} (\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(v)} \cdot \boldsymbol{e}^{(j)}) (\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{f}}^{(u)} \cdot \boldsymbol{e}^{(l)}) \cdot$$

$$\cdot \Big(- [c_{\boldsymbol{k}}^{(v)}, c_{\boldsymbol{f}}^{(u)}] \exp\{-i(kx + fy)\} + [c_{\boldsymbol{k}}^{(v)}, c_{\boldsymbol{f}}^{(u)*}] \exp\{-i(kx - fy)\} -$$

$$- [c_{\boldsymbol{k}}^{(v)*}, c_{\boldsymbol{f}}^{(u)}] \exp\{+i(kx - fy)\} + [c_{\boldsymbol{k}}^{(v)*}, c_{\boldsymbol{f}}^{(u)*}] \exp\{+i(kx + fy)\} \Big) \, . \tag{17.16}$$

Das Klein-Gordon-Feld und das Diracfeld haben wir dadurch quantisiert, dass wir entsprechend (14.74) für die Feldamplitude(n) und ihre(n) kanonisch konjugierten Impuls(e) eine nicht-kommutative Algebra postuliert haben.

Daraus haben wir dann die Algebra der Fourier-Operatoren (die wir als Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren von Feldquanten interpretiert haben) berechnet. Nachdem mit (17.4) unser Versuch gescheitert ist, das Eichfeld $A(x)$ in gleicher Weise zu quantisieren, gehen wir jetzt umgekehrt vor. Wir ernennen die Fourier-Koeffizienten zu Operatoren $c_{\boldsymbol{k}}^{(v)}$ und $c_{\boldsymbol{k}}^{(v)\dagger}$, legen für sie eine nicht-kommutative Algebra fest, und berechnen dann daraus die Algebra der Operatoren $\boldsymbol{A}(x)$ und $\boldsymbol{\pi}(x)$. Durch Vergleich mit (15.6) und (16.5) ist es plausibel, folgende Algebra zu postulieren:

$$\boxed{\begin{aligned} &[c_{\boldsymbol{k}}^{(v)}, c_{\boldsymbol{f}}^{(u)\dagger}] = \delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{f}}\, g_v{}^u \\ &[c_{\boldsymbol{k}}^{(v)}, c_{\boldsymbol{f}}^{(u)}] = [c_{\boldsymbol{k}}^{(v)\dagger}, c_{\boldsymbol{f}}^{(u)\dagger}] = 0 \\ &\text{mit } u = 1,2 \text{ und } v = 1,2 \end{aligned}} \tag{17.17}$$

Wir betonen, dass diese Quantisierungsvorschrift nicht „hergeleitet“ werden kann. Genau wie die allgemeine Quantisierungsvorschrift (14.74) erraten wurde, und allein dadurch zu rechtfertigen ist, dass die aus ihr abgeleitete Theorie die Phänomene korrekt beschreibt, so wurde auch die Quantisierungsvorschrift (17.17) erraten, und kann nur durch ihren Erfolg beim Vergleich mit den Experimenten begründet werden.

Einsetzen von (17.17) in (17.16) ergibt

$$\begin{aligned}[A_j(t,\boldsymbol{x}), \pi^l(t,\boldsymbol{y})] = \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{v=1}^{2} \frac{i\hbar}{2\Omega} (\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(v)} \cdot \boldsymbol{e}^{(j)})(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(v)} \cdot \boldsymbol{e}^{(l)}) \cdot \\ \cdot \Big(\exp\{+i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\} + \exp\{-i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\} \Big) \,. \end{aligned} \tag{17.18}$$

Weil A und π mit $x^0 = y^0$ in den Kommutator eingesetzt werden müssen, ist die Zeitkoordinate aus den Exponentialfunktionen verschwunden. Außerdem kann man, weil symmetrisch über sämtliche positiven und negativen Wellenzahlen $\boldsymbol{k}$ summiert wird, die Reihenfolge der Summanden in folgender Weise umdrehen:

$$[A_j(t,\boldsymbol{x}),\pi^l(t,\boldsymbol{y})] = \frac{i\hbar}{2\Omega}\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{v=1}^{2}\exp\{+i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\}\cdot$$
$$\cdot\left((\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(v)}\cdot\boldsymbol{e}^{(j)})(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(v)}\cdot\boldsymbol{e}^{(l)}) + (\boldsymbol{e}_{-\boldsymbol{k}}^{(v)}\cdot\boldsymbol{e}^{(j)})(\boldsymbol{e}_{-\boldsymbol{k}}^{(v)}\cdot\boldsymbol{e}^{(l)})\right) =$$
$$= i\hbar\underbrace{\frac{1}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{k}}\exp\{+i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\}}_{\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\sum_{v=1}^{2}(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(v)}\cdot\boldsymbol{e}^{(j)})(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(v)}\cdot\boldsymbol{e}^{(l)})\ , \qquad (17.19)$$

denn es ist $\boldsymbol{e}_{-\boldsymbol{k}}^{(v)} = -\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(v)}$ für $v \neq 0$.

Um den letzten Faktor auszuwerten, entwickeln wir die raumartigen Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}^{(j)}$ und $\boldsymbol{e}^{(l)}$ nach den raumartigen Polarisationsvektoren:

$$\boldsymbol{e}^{(j)} \overset{\text{(K.13b)}}{=} \sum_{v=1}^{3}(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(v)}\cdot\boldsymbol{e}^{(j)})\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(v)} \qquad \boldsymbol{e}^{(l)} \overset{\text{(K.13b)}}{=} \sum_{u=1}^{3}(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(u)}\cdot\boldsymbol{e}^{(l)})\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(u)}$$

Also ist das Produkt dieser beiden Vektoren

$$\boldsymbol{e}^{(j)}\cdot\boldsymbol{e}^{(l)} \overset{\text{(K.13c)}}{=} g_j{}^l = \sum_{v=1}^{3}\sum_{u=1}^{3}(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(v)}\cdot\boldsymbol{e}^{(j)})(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(u)}\cdot\boldsymbol{e}^{(l)})\underbrace{\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(v)}\cdot\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(u)}}_{g_v{}^u}$$
$$= \sum_{v=1}^{3}(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(v)}\cdot\boldsymbol{e}^{(j)})(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(v)}\cdot\boldsymbol{e}^{(l)})\ .$$

Daraus folgt

$$\sum_{v=1}^{2}(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(v)}\cdot\boldsymbol{e}^{(j)})(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(v)}\cdot\boldsymbol{e}^{(l)}) = g_j{}^l - (\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(3)}\cdot\boldsymbol{e}^{(j)})(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(3)}\cdot\boldsymbol{e}^{(l)})$$
$$= g_j{}^l - (\frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}\cdot\boldsymbol{e}^{(j)})(\frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}\cdot\boldsymbol{e}^{(l)})$$
$$= g_j{}^l + \frac{k_j k^l}{\boldsymbol{k}^2}\ . \qquad (17.20)$$

Einsetzen in (17.19) ergibt

$$\boxed{[A_j(t,\boldsymbol{x}),\pi^l(t,\boldsymbol{y})] = i\hbar\Delta_j{}^l(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\,, \tag{17.21}$$

wobei wir die „transversale Deltafunktion“

$$\Delta_j{}^l(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \equiv \frac{1}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{k}}\Big(g_j{}^l + \frac{k_j k^l}{\boldsymbol{k}^2}\Big)\exp\{+i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\} \tag{17.22}$$

eingeführt haben, die man mit der „normalen“ Deltafunktion in der Form (7.9) vergleichen sollte. Die Divergenz der transversalen Deltafunktion ist Null:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^j\Delta_j{}^l(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) &= \frac{1}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{k}}\Big(\mathrm{d}^l + \frac{k_j k^l}{\boldsymbol{k}^2}\mathrm{d}^j\Big)\exp\{i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\} = \\ &= \frac{1}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{k}}\Big(ik^l + i\underbrace{k^j\frac{k_j}{\boldsymbol{k}^2}}_{-1}k^l\Big)\exp\{i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\} = 0\end{aligned} \tag{17.23}$$

Hier haben wir wieder die Divergenz $-\mathrm{d}^j \equiv \mathrm{d}_j \equiv \mathrm{d}/\mathrm{d}x^j$ nach der Koordinate $\boldsymbol{x}$ betrachtet. Die Divergenz nach der Koordinate $\boldsymbol{y}$ ist ebenfalls Null. Wenn man das rechtshändige Koordinatensystem x^j, x^l, x^m so dreht, dass $k^m = |\boldsymbol{k}|$ und $k^j = k^l = 0$ ist, dann geht (17.21) in (17.4) über. Bei anderer Orientierung des Koordinatensystems wird durch den Term $+k_j k^l/\boldsymbol{k}^2$ in (17.21) kompensiert, dass das Feld $\boldsymbol{A}(x)$ keine longitudinale Komponente hat. (17.21) weicht also „eigentlich“ nicht von der allgemeinen Quantisierungsvorschrift (14.74a) ab, es wird durch den Zusatzterm $+k_j k^l/\boldsymbol{k}^2$ lediglich berücksichtigt, dass aufgrund der Eichinvarianz (17.6) nur zwei der vier Komponenten des freien Feldes $A(x)$ unabhängig sind.

17.2 Erhaltungsgrößen

Die Lagrangedichte des elektromagnetischen Feldes ist

$$\mathcal{L} \overset{(17.2)}{=} -\frac{1}{4\mu_0}(\mathrm{d}_\mu A_\nu - \mathrm{d}_\nu A_\mu)(\mathrm{d}^\mu A^\nu - \mathrm{d}^\nu A^\mu)\,. \tag{17.24}$$

Das elektromagnetische Feld ist ein elementares, d. h. kontinuierliches, Feld. Anders als beim Klein-Gordon-Feld und beim Dirac-Feld nehmen wir nicht an, dass es auch ein diskretes elektromagnetisches Feld geben könnte, sondern betrachten ausschließlich das elementare Feld. Wie in (15.18) und in (16.11) postulieren wir jetzt, dass auch im ES-Tensor (Energiedichte-Stress-Tensor) des quantisierten elektromagnetischen Feldes alle Terme gestrichen werden müssen, die nicht von den Teilchenzahl-Operatoren abhängen.

klassisches elektromagnetisches Feld:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}^{\sigma\tau} &\overset{(4.32)}{=} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\sigma A_\rho)}\,\mathrm{d}^\tau A_\rho - g^{\sigma\tau}\mathcal{L}\\ &= -\frac{1}{\mu_0}\left(\mathrm{d}^\sigma A^\rho - \mathrm{d}^\rho A^\sigma\right)\mathrm{d}^\tau A_\rho \; - g^{\sigma\tau}\mathcal{L} \qquad (17.25a)\end{aligned}$$

quantisiertes elektromagnetisches Feld:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}^{\sigma\tau} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\sigma A_\rho)}\,\mathrm{d}^\tau A_\rho - g^{\sigma\tau}\mathcal{L} - Y\\ &= -\frac{1}{\mu_0}\left(\mathrm{d}^\sigma A^\rho - \mathrm{d}^\rho A^\sigma\right)\mathrm{d}^\tau A_\rho \; - g^{\sigma\tau}\mathcal{L} - Y \qquad (17.25b)\end{aligned}$$

$Y \equiv$ die Summe aller Terme in (17.25a), die nicht von den Teilchenzahl-Operatoren $c_{\boldsymbol{k}}^{(u)\dagger} c_{\boldsymbol{k}}^{(u)}$ abhängen.

Wegen $A^0 \equiv 0$ kann die Lagrangedichte in der Form

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2\mu_0}\Big((\mathrm{d}_\sigma A_j)\mathrm{d}^\sigma A^j - (\mathrm{d}_j A_l)\mathrm{d}^l A^j\Big) \qquad (17.26)$$

geschrieben werden. Durch Einsetzen der Feldoperatoren (17.15a) wird der ES-Tensor zu

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}^{\sigma\tau} = & -Y - \frac{1}{\mu_0}\sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{f}}\sum_{u,v=1}^{2}\frac{\mu_0 c^2\hbar^2}{2\hbar\Omega\sqrt{\omega_{\boldsymbol{k}}\omega_{\boldsymbol{f}}}}\, i^2\Big[\\
& -\sum_{j=1}^{3}(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(v)}\cdot\boldsymbol{e}^{(j)})(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{f}}^{(u)}\cdot\boldsymbol{e}^{(j)})\cdot \\
& \quad\cdot\Big(-k^\tau c_{\boldsymbol{k}}^{(v)}\exp\{-ikx\}+k^\tau c_{\boldsymbol{k}}^{(v)\dagger}\exp\{+ikx\}\Big)\cdot \\
& \quad\cdot\Big(-f^\sigma c_{\boldsymbol{f}}^{(u)}\exp\{-ifx\}+f^\sigma c_{\boldsymbol{f}}^{(u)\dagger}\exp\{+ifx\}\Big)+ \\
& +(1-g^\sigma{}_0)\sum_{j=1}^{3}(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(v)}\cdot\boldsymbol{e}^{(j)})(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{f}}^{(u)}\cdot\boldsymbol{e}^{(\sigma)})\cdot \\
& \quad\cdot\Big(-k^\tau c_{\boldsymbol{k}}^{(v)}\exp\{-ikx\}+k^\tau c_{\boldsymbol{k}}^{(v)\dagger}\exp\{+ikx\}\Big)\cdot \\
& \quad\cdot\Big(-f^j c_{\boldsymbol{f}}^{(u)}\exp\{-ifx\}+f^j c_{\boldsymbol{f}}^{(u)\dagger}\exp\{+ifx\}\Big)+ \\
& +\sum_{j=1}^{3}\frac{g^{\sigma\tau}}{2}(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(v)}\cdot\boldsymbol{e}^{(j)})(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{f}}^{(u)}\cdot\boldsymbol{e}^{(j)})\cdot \\
& \quad\cdot\Big(-k_\rho c_{\boldsymbol{k}}^{(v)}\exp\{-ikx\}+k_\rho c_{\boldsymbol{k}}^{(v)\dagger}\exp\{+ikx\}\Big)\cdot \\
& \quad\cdot\Big(-f^\rho c_{\boldsymbol{f}}^{(u)}\exp\{-ifx\}+f^\rho c_{\boldsymbol{f}}^{(u)\dagger}\exp\{+ifx\}\Big)+ \\
& +\sum_{j=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\frac{g^{\sigma\tau}}{2}(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{f}}^{(u)}\cdot\boldsymbol{e}^{(l)})(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(v)}\cdot\boldsymbol{e}^{(j)})\cdot \\
& \quad\cdot\Big(-f_\jmath c_{\boldsymbol{f}}^{(u)}\exp\{-ifx\}+f_\jmath c_{\boldsymbol{f}}^{(u)\dagger}\exp\{+ifx\}\Big)\cdot \\
& \quad\cdot\Big(-k^l c_{\boldsymbol{k}}^{(v)}\exp\{-ikx\}+k^l c_{\boldsymbol{k}}^{(v)\dagger}\exp\{+ikx\}\Big)\Big]\,. \qquad (17.27)
\end{aligned}
$$

Hier wurden die Summationszeichen explizit ausgeschrieben, weil wir nicht automatisch über die eingeklammerten Namen (v) der Einheitsvektoren summieren. Man beachte dass $\boldsymbol{e}^{(\sigma)}=0$ falls $\sigma=0$. Zur Erinnerung wurde ein Faktor $(1-g^\sigma{}_0)$ eingefügt.

Jetzt wird das Koordinatensystem so gedreht, dass es mit dem System, das an der Polarisation des Feldes $A(x)$ orientiert ist, zur Deckung kommt:

$$(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(u)} \cdot \boldsymbol{e}^{(j)}) \overset{(K.13c)}{=} g_u{}^j \quad \text{und} \quad \boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k^3 \end{pmatrix} \tag{17.28}$$

Damit vereinfacht sich der ES-Tensor zu

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}^{\sigma\tau} = & -Y - \frac{1}{\mu_0} \sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{f}} \sum_{u,v=1}^{2} \frac{\mu_0 c^2 \hbar^2}{2\hbar\Omega \sqrt{\omega_{\boldsymbol{k}} \omega_{\boldsymbol{f}}}} \, i^2 \Big[\\
& - f^\sigma k^\tau \Big(- c_{\boldsymbol{k}}^{(v)} \exp\{-ikx\} + c_{\boldsymbol{k}}^{(v)\dagger} \exp\{+ikx\} \Big) \cdot \\
& \cdot \Big(- c_{\boldsymbol{f}}^{(v)} \exp\{-ifx\} + c_{\boldsymbol{f}}^{(v)\dagger} \exp\{+ifx\} \Big) + \\
& + (1 - g^\sigma{}_0) g^\sigma{}_u f^v k^\tau \cdot \\
& \cdot \Big(- c_{\boldsymbol{k}}^{(v)} \exp\{-ikx\} + c_{\boldsymbol{k}}^{(v)\dagger} \exp\{+ikx\} \Big) \cdot \\
& \cdot \Big(- c_{\boldsymbol{f}}^{(u)} \exp\{-ifx\} + c_{\boldsymbol{f}}^{(u)\dagger} \exp\{+ifx\} \Big) + \\
& + \frac{g^{\sigma\tau}}{2} k_\rho f^\rho \Big(- c_{\boldsymbol{k}}^{(v)} \exp\{-ikx\} + c_{\boldsymbol{k}}^{(v)\dagger} \exp\{+ikx\} \Big) \cdot \\
& \cdot \Big(- c_{\boldsymbol{f}}^{(v)} \exp\{-ifx\} + c_{\boldsymbol{f}}^{(v)\dagger} \exp\{+ifx\} \Big) + \\
& + \frac{g^{\sigma\tau}}{2} f_v k^u \Big(- c_{\boldsymbol{f}}^{(u)} \exp\{-ifx\} + c_{\boldsymbol{f}}^{(u)\dagger} \exp\{+ifx\} \Big) \cdot \\
& \cdot \Big(- c_{\boldsymbol{k}}^{(v)} \exp\{-ikx\} + c_{\boldsymbol{k}}^{(v)\dagger} \exp\{+ikx\} \Big) \Big] \, .
\end{aligned} \tag{17.29}$$

$f_v = k^u = 0$ wegen (17.28). Also überleben nur zwei Terme:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}^{\sigma\tau} = & -Y + \frac{1}{\Omega} \sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{f}} \sum_{v=1}^{2} \frac{c^2 \hbar^2}{2\hbar \sqrt{\omega_{\boldsymbol{k}} \omega_{\boldsymbol{f}}}} \Big(- f^\sigma k^\tau + \frac{g^{\sigma\tau}}{2} k_\rho f^\rho \Big) \cdot \\
& \cdot \Big(+ c_{\boldsymbol{k}}^{(v)} c_{\boldsymbol{f}}^{(v)} \exp\{-i(k+f)x\} - c_{\boldsymbol{k}}^{(v)} c_{\boldsymbol{f}}^{(v)\dagger} \exp\{-i(k-f)x\} - \\
& - c_{\boldsymbol{k}}^{(v)\dagger} c_{\boldsymbol{f}}^{(v)} \exp\{+i(k-f)x\} + c_{\boldsymbol{k}}^{(v)\dagger} c_{\boldsymbol{f}}^{(v)\dagger} \exp\{+i(k+f)x\} \Big)
\end{aligned}$$

Durch Integration über das gesamte Normalisierungsvolumen Ω erhält man den Operator

$$T^{\sigma\tau} \equiv \int_\Omega \mathrm{d}^3x\, \mathcal{T}^{\sigma\tau} \ . \tag{17.30}$$

Um in diesem Integral das Kroneckersymbol entsprechend (16.3) zu erhalten, invertieren wir in zwei Termen die Vorzeichen von $\boldsymbol{f}$. Das ist möglich, weil die Summe über sämtliche positiven und negativen $\boldsymbol{f}$ läuft. Mit $\omega_{-\boldsymbol{k}} = \omega_{\boldsymbol{k}}$ findet man

$$\begin{aligned} T^{\sigma\tau} = -Y\Omega + \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{v=1}^{2} \frac{c^2\hbar^2}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}} \Big(- k^\sigma k^\tau + \frac{g^{\sigma\tau}}{2}\, k_\rho k^\rho \Big) \cdot \\ \cdot \Big(+ c_{\boldsymbol{k}}^{(v)} c_{-\boldsymbol{k}}^{(v)} \exp\{-i2k^0x_0\} - c_{\boldsymbol{k}}^{(v)} c_{\boldsymbol{k}}^{(v)\dagger} - \\ - c_{\boldsymbol{k}}^{(v)\dagger} c_{\boldsymbol{k}}^{(v)} + c_{\boldsymbol{k}}^{(v)\dagger} c_{-\boldsymbol{k}}^{(v)\dagger} \exp\{+i2k^0x_0\} \Big) \ . \end{aligned} \tag{17.31}$$

Die Frequenz $2k^0c$ der Zitterbewegung[1] kann im Fall des masselosen elektromagnetischen Feldes beliebig niedrig sein. Also kann man diese Terme nicht wie im Fall des Diracfeldes und des Klein-Gordon-Feldes wegen ihrer hohen Frequenz einfach vernachlässigen. Man kann sie jedoch aus folgendem Grund ignorieren: Der Operator $c_{\boldsymbol{k}}^{(v)\dagger} c_{-\boldsymbol{k}}^{(v)\dagger}$ erzeugt ein Photon mit Wellenzahl $\boldsymbol{k}$ und Polarisation v, und er erzeugt ein Photon mit Wellenzahl $-\boldsymbol{k}$ und Polarisation v. Diese beiden Photonen kompensieren einander genau, d. h. der Term mit diesem Operator hat Netto keinen Effekt und kann gestrichen werden. Aus dem gleichen Grund hat auch der Term mit dem Operator $c_{\boldsymbol{k}}^{(v)} c_{-\boldsymbol{k}}^{(v)}$ keinen Nettoeffekt, und kann ebenfalls gestrichen werden. Außerdem ist $k_\rho k^\rho = 0$, weil das elektromagnetische Feld masselos ist. Auf diese Weise vereinfacht sich der Operator weiter zu

$$T^{\sigma\tau} = -Y\Omega + \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{v=1}^{2} \frac{c^2\hbar^2}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}}\, k^\sigma k^\tau \left(c_{\boldsymbol{k}}^{(v)\dagger} c_{\boldsymbol{k}}^{(v)} + c_{\boldsymbol{k}}^{(v)} c_{\boldsymbol{k}}^{(v)\dagger} \right) ,$$

[1] siehe die Diskussion bei (8.93)

und damit erhalten wir:

$$\boxed{T^{\sigma\tau} \equiv \int\limits_{\Omega} \mathrm{d}^3x\, \mathcal{T}^{\sigma\tau} = \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{v=1}^{2} \frac{c^2\hbar^2}{\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}}\, k^\sigma k^\tau\, c_{\boldsymbol{k}}^{(v)\dagger} c_{\boldsymbol{k}}^{(v)}} \tag{17.32}$$

Mit $ck^0 = \omega_{\boldsymbol{k}}$ erhält man insbesondere den Hamiltonoperator

$$\boxed{H \equiv T^{00} = \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{v=1}^{2} \hbar\omega_{\boldsymbol{k}} c_{\boldsymbol{k}}^{(v)\dagger} c_{\boldsymbol{k}}^{(v)}} \tag{17.33}$$

und den Impulsoperator

$$\boxed{P^j \equiv \frac{1}{c}\, T^{0j} = \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{v=1}^{2} \hbar k^j c_{\boldsymbol{k}}^{(v)\dagger} c_{\boldsymbol{k}}^{(v)}}\ . \tag{17.34}$$

In Abschnitt 5.7 haben wir für beliebige, in der vierdimensionalen Raumzeit definierte Vektorfelder die drei raumartigen erhaltenen Drehimpulse

$$M^{jl} \overset{(5.104)}{=} \underbrace{\int\limits_{\Omega} \mathrm{d}^3x \Big(x^j \mathcal{P}^l - x^l \mathcal{P}^j\Big)}_{\text{Bahndrehimpuls}} + \underbrace{\int\limits_{\Omega} \mathrm{d}^3x\, \mathcal{S}^{0jl}}_{\text{Spin}} \qquad \text{mit } jl = 23, 31, 12 \tag{17.35}$$

hergeleitet. Solange wir uns – wie wir das bisher getan haben – auf ebene Wellen beschränken, die über den gesamten Raum delokalisiert sind, werden die Bahndrehimpulse Null sein. Denn bei der Integration $\int_\Omega \mathrm{d}^3x$ über den gesamten Ortsraum werden sich die Beiträge von $+x^j$ und $-x^j$ zum Integral kompensieren. Dagegen gibt es auch mit ebenen Wellen einen von Null verschiedenen Spin

$$\mathcal{S}^{0jl} \overset{(5.99)}{=} \frac{1}{c} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_0 A_j)} A^l - \frac{1}{c} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_0 A_l)} A^j \overset{(17.3b)}{=} \pi^j A^l - \pi^l A^j\ .$$

Wir berechnen ihn, indem wir die Feldoperatoren (17.15) einsetzen:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}^{0jl} \overset{(17.3b)}{=} & -\frac{i\hbar}{2\Omega}\sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{f}}\sum_{u,v=1}^{2}\sqrt{\frac{\omega_{\boldsymbol{f}}}{\omega_{\boldsymbol{k}}}}\cdot \\ & \cdot\Big((\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{f}}^{(u)}\cdot\boldsymbol{e}^{(j)})(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(v)}\cdot\boldsymbol{e}^{(l)})-(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{f}}^{(u)}\cdot\boldsymbol{e}^{(l)})(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(v)}\cdot\boldsymbol{e}^{(j)})\Big)\cdot \\ & \cdot\Big(-c_{\boldsymbol{f}}^{(u)}\exp\{-ifx\}+c_{\boldsymbol{f}}^{(u)\dagger}\exp\{+ifx\}\Big)\cdot \\ & \cdot\Big(c_{\boldsymbol{k}}^{(v)}\exp\{-ikx\}+c_{\boldsymbol{k}}^{(v)\dagger}\exp\{+ikx\}\Big)\end{aligned} \tag{17.36}$$

Wir multiplizieren die beiden letzten Zeilen aus, und vertauschen in zwei der vier Summanden $\boldsymbol{f}$ mit $-\boldsymbol{f}$. Das ist zulässig, weil symmetrisch über sämtliche positiven und negativen $\boldsymbol{f}$ summiert wird:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}^{0jl} = & -\frac{i\hbar}{2\Omega}\sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{f}}\sum_{u,v=1}^{2}\Bigg(\\ & \sqrt{\frac{\omega_{\boldsymbol{f}}}{\omega_{\boldsymbol{k}}}}\Big((\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{f}}^{(u)}\cdot\boldsymbol{e}^{(j)})(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(v)}\cdot\boldsymbol{e}^{(l)})-(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{f}}^{(u)}\cdot\boldsymbol{e}^{(l)})(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(v)}\cdot\boldsymbol{e}^{(j)})\Big)\cdot \\ & \cdot\Big(-c_{\boldsymbol{f}}^{(u)}c_{\boldsymbol{k}}^{(v)\dagger}\exp\{-i(f^0-k^0)x^0\}\exp\{+i(\boldsymbol{f}-\boldsymbol{k})\boldsymbol{x}\}+ \\ & \quad +c_{\boldsymbol{f}}^{(u)\dagger}c_{\boldsymbol{k}}^{(v)}\exp\{+i(f^0-k^0)x^0\}\exp\{-i(\boldsymbol{f}-\boldsymbol{k})\boldsymbol{x}\}\Big)- \\ & -\sqrt{\frac{\omega_{-\boldsymbol{f}}}{\omega_{\boldsymbol{k}}}}\Big((\boldsymbol{e}_{-\boldsymbol{f}}^{(u)}\cdot\boldsymbol{e}^{(j)})(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(v)}\cdot\boldsymbol{e}^{(l)})-(\boldsymbol{e}_{-\boldsymbol{f}}^{(u)}\cdot\boldsymbol{e}^{(v)})(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(v)}\cdot\boldsymbol{e}^{(j)})\Big)\cdot \\ & \cdot\Big(-c_{-\boldsymbol{f}}^{(u)}c_{\boldsymbol{k}}^{(v)}\exp\{-i(f^0+k^0)x^0\}\exp\{+i(-\boldsymbol{f}+\boldsymbol{k})\boldsymbol{x}\}+ \\ & \quad +c_{-\boldsymbol{f}}^{(u)\dagger}c_{\boldsymbol{k}}^{(v)\dagger}\exp\{+i(f^0+k^0)x^0\}\exp\{-i(-\boldsymbol{f}+\boldsymbol{k})\boldsymbol{x}\}\Big)\Bigg)\end{aligned}$$

Wenn man jetzt über das gesamte Normierungsvolumen integriert, tritt wegen

$$\delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{f}} \overset{(7.12)}{=} \frac{1}{\Omega}\int_{\Omega}\mathrm{d}^3x\,\exp\{-i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{f})\boldsymbol{x}\} \tag{17.37}$$

das Kronecker-Symbol auf, und unter Beachtung von $\boldsymbol{e}_{-\boldsymbol{k}}^{(u)} = -\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(u)}$ erhält man den Spinoperator

$$\begin{aligned} S^{jl} \equiv \int\limits_{\Omega} \mathrm{d}^3x\, \mathcal{S}^{0jl} = -\frac{i\hbar}{2} \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{u,v=1}^{2} \\ \Big((\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(u)} \cdot \boldsymbol{e}^{(j)})(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(v)} \cdot \boldsymbol{e}^{(l)}) - (\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(u)} \cdot \boldsymbol{e}^{(l)})(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(v)} \cdot \boldsymbol{e}^{(j)}) \Big) \\ \Big(- c_{\boldsymbol{k}}^{(u)} c_{\boldsymbol{k}}^{(v)\dagger} + c_{\boldsymbol{k}}^{(u)\dagger} c_{\boldsymbol{k}}^{(v)} + c_{-\boldsymbol{k}}^{(u)} c_{\boldsymbol{k}}^{(v)} \exp\{-i(2k^0)x^0\} \\ - c_{-\boldsymbol{k}}^{(u)\dagger} c_{\boldsymbol{k}}^{(v)\dagger} \exp\{+i(2k^0)x^0\} \Big) \,. \end{aligned} \tag{17.38}$$

In der zweiten Zeile erkennt man, dass die Summe über die Indizes u und v schiefsymmetrisch ist. Das hat zur Folge, dass die beiden Summanden, die Exponentialfunktionen enthalten, verschwinden. Denn weil symmetrisch über sämtliche positiven und negativen $\boldsymbol{k}$ summiert wird, und weil k^0 gemäß Vereinbarung (7.18) für $\boldsymbol{k}$ und $-\boldsymbol{k}$ identisch ist, und weil die Fourier-Operatoren bei unterschiedlichem Index (1) oder (2) laut (17.17) kommutieren, ist

$$\begin{aligned} \sum_{\boldsymbol{k}} \Big(c_{-\boldsymbol{k}}^{(1)} c_{\boldsymbol{k}}^{(2)} - c_{-\boldsymbol{k}}^{(2)} c_{\boldsymbol{k}}^{(1)} \Big) \exp\{-i(2k^0)x^0\} \; = \\ = \sum_{\boldsymbol{k}} \Big(c_{-\boldsymbol{k}}^{(1)} c_{\boldsymbol{k}}^{(2)} - c_{-\boldsymbol{k}}^{(1)} c_{\boldsymbol{k}}^{(2)} \Big) \exp\{-i(2k^0)x^0\} = 0 \,. \end{aligned} \tag{17.39}$$

Also vereinfacht der Operator sich zu

$$\begin{aligned} S^{jl} = \frac{i\hbar}{2} \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{u,v=1}^{2} \Big((\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(u)} \cdot \boldsymbol{e}^{(j)})(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(v)} \cdot \boldsymbol{e}^{(l)}) - (\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(u)} \cdot \boldsymbol{e}^{(l)})(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(v)} \cdot \boldsymbol{e}^{(j)}) \Big) \cdot \\ \cdot \Big(c_{\boldsymbol{k}}^{(u)} c_{\boldsymbol{k}}^{(v)\dagger} - c_{\boldsymbol{k}}^{(u)\dagger} c_{\boldsymbol{k}}^{(v)} \Big) \,. \end{aligned} \tag{17.40}$$

Die Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}^{(j)}$ sind an den Achsen des Labor-Koordinatensystems orientiert. Die Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(u)}$ sind per Definition

$$\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(1)} \times \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(2)} = \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(3)} \overset{(17.9)}{=} \frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|} \tag{17.41}$$

am Wellenzahlvektor des Feldes orientiert. Die weitere Auswertung von (17.40) ist einfacher und übersichtlicher, wenn wir das Laborsystem mit den Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}^{(j)}$ so drehen, dass es mit dem System der Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(u)}$ zur Deckung kommt. Dann gilt

$$\boldsymbol{e}^{(j)} \equiv \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(j)} \quad \text{für } j = 1, 2, 3\ . \tag{17.42}$$

Im gedrehten Koordinatensystem breitet sich das Feld in Richtung der x^3-Achse aus. Dann sind – weil u und v nur die Werte 1 und 2 annehmen – alle Spinoperatoren mit $j = 3$ oder $l = 3$ Null, und nur $S^{12} = -S^{21}$ ist von Null verschieden.

$$S^{12} = -S^{21} = i\hbar \sum_{\boldsymbol{k}} \left(c_{\boldsymbol{k}}^{(1)} c_{\boldsymbol{k}}^{(2)\dagger} - c_{\boldsymbol{k}}^{(1)\dagger} c_{\boldsymbol{k}}^{(2)} \right) \tag{17.43}$$

Dieser Spin-Operator hat – anders als die zuvor untersuchten Energie- und Impuls-Operatoren – nicht die Form eines Teilchenzahl-Operators $c_{\boldsymbol{k}}^{(u)+} c_{\boldsymbol{k}}^{(u)}$. Deshalb ist seine Bedeutung nicht offensichtlich. Die Schwierigkeit tritt deshalb auf, weil wir uns bei der Quantisierung des Feldes – wie bei (17.13) betont – auf linear polarisierte Wellen beschränkt haben. Wellen mit zirkularer Polarisation, die sich in Richtung der x^3-Achse bewegen, erhält man dadurch, dass man zu einer in x^1-Richtung linear polarisierten Welle mit Ausbreitungsrichtung x^3 eine in x^2-Richtung linear polarisierte Welle mit Ausbreitungsrichtung x^3 mit gleicher Amplitude und Phasendifferenz von $\pm\pi/2$ addiert:

$$A^{(L/R)} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \left(A^{(1)} + A^{(2)} \exp\{\pm i\pi/2\} \right) = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \left(A^{(1)} \pm i A^{(2)} \right)$$

Die Erzeugungsoperatoren von rechts- und linkszirkular polarisierten Photonen sind demnach

$$c_{\boldsymbol{k}}^{(R)\dagger} \equiv \sqrt{\tfrac{1}{2}} \left(c_{\boldsymbol{k}}^{(1)\dagger} + i c_{\boldsymbol{k}}^{(2)\dagger} \right) \tag{17.44a}$$

$$c_{\boldsymbol{k}}^{(L)\dagger} \equiv \sqrt{\tfrac{1}{2}}\left(c_{\boldsymbol{k}}^{(1)\dagger} - i c_{\boldsymbol{k}}^{(2)\dagger}\right) . \tag{17.44b}$$

Die inversen Formeln lauten

$$c_{\boldsymbol{k}}^{(1)\dagger} = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\left(c_{\boldsymbol{k}}^{(R)\dagger} + c_{\boldsymbol{k}}^{(L)\dagger}\right) \tag{17.45a}$$

$$c_{\boldsymbol{k}}^{(2)\dagger} = -i\sqrt{\tfrac{1}{2}}\left(c_{\boldsymbol{k}}^{(R)\dagger} - c_{\boldsymbol{k}}^{(L)\dagger}\right) . \tag{17.45b}$$

Mit diesen Operatoren erhält (17.43) die Form

$$\begin{aligned} S^{12} = -S^{21} = +\hbar \sum_{\boldsymbol{k}} \tfrac{1}{2}\Big(& \\ & + c_{\boldsymbol{k}}^{(R)} c_{\boldsymbol{k}}^{(R)\dagger} - c_{\boldsymbol{k}}^{(R)} c_{\boldsymbol{k}}^{(L)\dagger} + c_{\boldsymbol{k}}^{(L)} c_{\boldsymbol{k}}^{(R)\dagger} - c_{\boldsymbol{k}}^{(L)} c_{\boldsymbol{k}}^{(L)\dagger} \\ & + c_{\boldsymbol{k}}^{(R)\dagger} c_{\boldsymbol{k}}^{(R)} - c_{\boldsymbol{k}}^{(R)\dagger} c_{\boldsymbol{k}}^{(L)} + c_{\boldsymbol{k}}^{(L)\dagger} c_{\boldsymbol{k}}^{(R)} - c_{\boldsymbol{k}}^{(L)\dagger} c_{\boldsymbol{k}}^{(L)}\Big) . \end{aligned} \tag{17.46}$$

Durch Einsetzen der Definitionen (17.44) berechnet man mithilfe der Relationen (17.17) die Kommutatoren

$$[c_{\boldsymbol{k}}^{(R)}, c_{\boldsymbol{k}}^{(R)\dagger}] = \tfrac{1}{2}\Big([c_{\boldsymbol{k}}^{(1)}, c_{\boldsymbol{k}}^{(1)\dagger}] + [c_{\boldsymbol{k}}^{(2)}, c_{\boldsymbol{k}}^{(2)\dagger}]\Big) = 1 \tag{17.47a}$$

$$[c_{\boldsymbol{k}}^{(L)}, c_{\boldsymbol{k}}^{(L)\dagger}] = \tfrac{1}{2}\Big([c_{\boldsymbol{k}}^{(1)}, c_{\boldsymbol{k}}^{(1)\dagger}] + [c_{\boldsymbol{k}}^{(2)}, c_{\boldsymbol{k}}^{(2)\dagger}]\Big) = 1 \tag{17.47b}$$

$$[c_{\boldsymbol{k}}^{(R)}, c_{\boldsymbol{k}}^{(L)\dagger}] = \tfrac{1}{2}\Big([c_{\boldsymbol{k}}^{(1)}, c_{\boldsymbol{k}}^{(1)\dagger}] - [c_{\boldsymbol{k}}^{(2)}, c_{\boldsymbol{k}}^{(2)\dagger}]\Big) = 0 \tag{17.47c}$$

$$[c_{\boldsymbol{k}}^{(L)}, c_{\boldsymbol{k}}^{(R)\dagger}] = \tfrac{1}{2}\Big([c_{\boldsymbol{k}}^{(1)}, c_{\boldsymbol{k}}^{(1)\dagger}] - [c_{\boldsymbol{k}}^{(2)}, c_{\boldsymbol{k}}^{(2)\dagger}]\Big) = 0 . \tag{17.47d}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} S^{12} &= -S^{21} = \\ &= +\hbar \sum_{\boldsymbol{k}} \tfrac{1}{2}\Big(2c_{\boldsymbol{k}}^{(R)\dagger} c_{\boldsymbol{k}}^{(R)} + \underbrace{[c_{\boldsymbol{k}}^{(R)}, c_{\boldsymbol{k}}^{(R)\dagger}] - [c_{\boldsymbol{k}}^{(L)}, c_{\boldsymbol{k}}^{(L)\dagger}]}_{0} - 2c_{\boldsymbol{k}}^{(L)\dagger} c_{\boldsymbol{k}}^{(L)}\Big) , \end{aligned}$$

und man findet als Operator für den erhaltenen Spin eines Feldes, das sich in Richtung der positiven x^3 Achse bewegt:

$$\boxed{S^{12} = +\hbar \sum_{\boldsymbol{k}} \left(c_{\boldsymbol{k}}^{(R)\dagger} c_{\boldsymbol{k}}^{(R)} - c_{\boldsymbol{k}}^{(L)\dagger} c_{\boldsymbol{k}}^{(L)} \right)} \tag{17.48}$$

17.3 Photonen

Im Interesse einer einfachen und übersichtlichen Notation verwenden wir weiterhin gemäß (17.42) ein Koordinatensystem, dessen x^3-Achse in die Richtung gedreht ist, in die sich das Feld ausbreitet. Die Erzeugungsoperatoren $c_{\boldsymbol{f}}^{(1)\dagger}$ und $c_{\boldsymbol{f}}^{(2)\dagger}$ erzeugen, wenn sie auf den Vakuumzustand $|0\rangle$ wirken, Photonen, die sich parallel zu x^3-Achse bewegen, die parallel zur x^1- bzw. x^2-Achse linear polarisiert sind, und die die Wellenzahl $\boldsymbol{f}$ haben:

$$c_{\boldsymbol{f}}^{(1)\dagger}|0\rangle = |1_{\boldsymbol{f}1}\rangle \qquad\qquad c_{\boldsymbol{f}}^{(2)\dagger}|0\rangle = |1_{\boldsymbol{f}2}\rangle \tag{17.49}$$

Die große 1 in der Zustandsfunktion bedeutet wie gewohnt, dass sich 1 Feldquant in diesem Zustand befindet. Die Normierung dieser Zustandsfunktionen ist lorentzinvariant:

$$\langle 1_{\boldsymbol{k}u}|1_{\boldsymbol{f}v}\rangle = \langle 0|\, c_{\boldsymbol{k}}^{(u)} c_{\boldsymbol{f}}^{(v)\dagger}\, |0\rangle = \underbrace{\langle 0|0\rangle}_{1} [c_{\boldsymbol{k}}^{(u)}, c_{\boldsymbol{f}}^{(v)\dagger}] + \underbrace{\langle 0|\, c_{\boldsymbol{f}}^{(v)\dagger} c_{\boldsymbol{k}}^{(u)}\, |0\rangle}_{0} \overset{(17.17)}{=} \delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{f}}\, g_v{}^u \tag{17.50}$$

Zirkular polarisierte Photonen erhält man durch

$$c_{\boldsymbol{f}}^{(R)\dagger}|0\rangle = |1_{\boldsymbol{f}R}\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\left(c_{\boldsymbol{f}}^{(1)\dagger} + i c_{\boldsymbol{f}}^{(2)\dagger}\right)|0\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\left(|1_{\boldsymbol{f}1}\rangle + i|1_{\boldsymbol{f}2}\rangle\right) \tag{17.51a}$$

$$c_{\boldsymbol{f}}^{(L)\dagger}|0\rangle = |1_{\boldsymbol{f}L}\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\left(c_{\boldsymbol{f}}^{(1)\dagger} - i c_{\boldsymbol{f}}^{(2)\dagger}\right)|0\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\left(|1_{\boldsymbol{f}1}\rangle - i|1_{\boldsymbol{f}2}\rangle\right) . \tag{17.51b}$$

Die umgekehrten Relationen sind

$$|1_{\boldsymbol{f}1}\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\left(|1_{\boldsymbol{f}R}\rangle + |1_{\boldsymbol{f}L}\rangle\right) \tag{17.52a}$$

$$|1_{\boldsymbol{f}2}\rangle = -i\sqrt{\tfrac{1}{2}}\left(|1_{\boldsymbol{f}R}\rangle - |1_{\boldsymbol{f}L}\rangle\right) . \tag{17.52b}$$

Die zirkular polarisierten Photonen sind Eigenzustände des Spinoperators S^{12} und haben die Eigenwerte $\pm\hbar$:

$$S^{12}\,|1_{fR}\rangle = +\hbar\,|1_{fR}\rangle \qquad , \qquad S^{12}\,|1_{fL}\rangle = -\hbar\,|1_{fL}\rangle \tag{17.53}$$

Es ist bemerkenswert, dass der Spin eines Photons nicht vom Wert der Wellenzahl abhängt. Seine Spinkomponente in Ausbreitungsrichtung ist immer $+\hbar$ oder $-\hbar$, seine Spinkomponente in einer dazu senkrechten Richtung ist immer Null. Physikalisch richtiger sollte man sagen: Wenn der Spin eines Photons gemessen wird, dann ist er immer $\pm\hbar$ parallel zur Bewegungsrichtung des Photons. Es wäre nicht korrekt zu sagen, dass jedes Photon diesen Spin „hat“. Wenn ein Photon unter dem Brewster-Winkel an einer planen Glasoberfläche reflektiert wurde, dann hat es eine wohldefinierte transversale Polarisation, beispielsweise in Raumrichtung x^2. Die Zustandsfunktion dieses Photons ist $|1_{f2}\rangle$. Der Erwartungswert seines Spins ist

$$\begin{aligned}\langle 1_{f2}|S^{12}|1_{f2}\rangle &\overset{(17.52b)}{=} \tfrac{1}{2}\Big(\langle 1_{fR}|S^{12}|1_{fR}\rangle - \langle 1_{fR}|S^{12}|1_{fL}\rangle - \\ &\qquad - \langle 1_{fL}|S^{12}|1_{fR}\rangle + \langle 1_{fL}|S^{12}|1_{fL}\rangle\Big) = \\ &= \tfrac{1}{2}\hbar\Big(+ \underbrace{\langle 1_{fR}|1_{fR}\rangle}_{1} + \underbrace{\langle 1_{fR}|1_{fL}\rangle}_{0} - \underbrace{\langle 1_{fL}|1_{fR}\rangle}_{0} - \underbrace{\langle 1_{fL}|1_{fL}\rangle}_{1}\Big) = 0\ . \end{aligned} \tag{17.54}$$

Das bedeutet nicht, dass ein Photon im Zustand $|1_{f2}\rangle$ den Spin Null hat, sondern dass man, wenn man den Spin einer großen Menge von Photonen misst, die alle im Zustands $|1_{f2}\rangle$ präpariert wurden, gleich häufig das Messergebnis $+\hbar$ und das Messergebnis $-\hbar$ erhält. Das Messergebnis Null kommt bei Spinmessungen an beliebig präparierten Photonen niemals vor.

Es gibt keinen Ein-Photonen-Eigenzustand des Spinoperators S^{12} mit Eigenwert $\hbar = 0$. Wenn ein massives Teilchen den Spin J hat, dann kann die Projektion des Spins auf eine beliebige Achse einer der Werte $J, J-\hbar, J-2\hbar, \ldots, -J$ sein. Beim Photon fehlt der Wert Null, weil seine Ruhemasse Null ist. Die Masselosigkeit des Photons hat die unanschauliche relativistische Folge, dass es sich immer mit Lichtgeschwindigkeit auf den Beobachter zu bewegt, oder sich mit Lichtgeschwindigkeit vom Beobachter entfernt. Der Beobachter kann sich nicht in ein Bezugssystem transformieren, in dem er das Photon „von der Seite betrachten“ und dann die Spinprojektion Null messen könnte. Obwohl die Projektion des Spins auf die Bewegungsrichtung

des Photons nur zwei Werte annehmen kann, ist der Wert des Spins $1\hbar$. Das Photon ist ein Boson, deshalb haben wir das Eichfeld $A(x)$ gemäß (14.74a) quantisiert.

Wir definieren den Operator

$$L^{12}|1_{\boldsymbol{k}1}\rangle = +1|1_{\boldsymbol{k}1}\rangle \qquad L^{12}|1_{\boldsymbol{k}2}\rangle = -1|1_{\boldsymbol{k}2}\rangle \ . \tag{17.55}$$

Er beschreibt die Messung der linearen Polarisation von Photonen. Der Erwartungswert der linearen Polarisation eines Photons , das in einem zirkular polarisierten Zustand präpariert wurde, ist

$$\begin{aligned}\langle 1_{\boldsymbol{k}R}|L^{12}|1_{\boldsymbol{k}R}\rangle &\overset{(17.51a)}{=} \tfrac{1}{2}\Big(\langle 1_{\boldsymbol{k}1}|L^{12}|1_{\boldsymbol{k}1}\rangle + i\langle 1_{\boldsymbol{k}1}|L^{12}|1_{\boldsymbol{k}2}\rangle - \\ &\qquad - i\langle 1_{\boldsymbol{k}2}|L^{12}|1_{\boldsymbol{k}1}\rangle + \langle 1_{\boldsymbol{k}2}|L^{12}|1_{\boldsymbol{k}2}\rangle\Big) = \\ &= \tfrac{1}{2}\Big(+ \underbrace{\langle 1_{\boldsymbol{k}1}|1_{\boldsymbol{k}1}\rangle}_{1} - i\underbrace{\langle 1_{\boldsymbol{k}1}|1_{\boldsymbol{k}2}\rangle}_{0} - i\underbrace{\langle 1_{\boldsymbol{k}2}|1_{\boldsymbol{k}1}\rangle}_{0} - \underbrace{\langle 1_{\boldsymbol{k}2}|1_{\boldsymbol{k}2}\rangle}_{1}\Big) = 0 \ .\end{aligned} \tag{17.56}$$

Zirkular polarisierte Photonen werden entweder reflektiert oder transmittiert, wenn sie unter dem Brewster-Winkel auf eine plane Glasoberfläche treffen. Bei Reflektion sind sie nach der Messung linear polarisiert, beispielsweise in Richtung x^2, und die Messung hat den Eigenwert -1 des Operators L^{12} ergeben. Bei Transmission sind sie nach der Messung in Richtung x^1 transversal polarisiert, und die Messung hat den Eigenwert $+1$ des Operators L^{12} ergeben. Der Erwartungswert Null in (17.56) bedeutet, dass beides gleich häufig vorkommt.

Die linear polarisierten Photonen sind Eigenzustände des Energieoperators und des Impulsoperators:

$$H|1_{\boldsymbol{f}1}\rangle \overset{(17.33)}{=} \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{v=1}^{2} \hbar\omega_{\boldsymbol{k}} c_{\boldsymbol{k}}^{(v)\dagger} c_{\boldsymbol{k}}^{(v)} |1_{\boldsymbol{f}1}\rangle = \hbar\omega_{\boldsymbol{f}}|1_{\boldsymbol{f}1}\rangle \tag{17.57a}$$

$$P^l|1_{\boldsymbol{f}1}\rangle \overset{(17.34)}{=} \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{v=1}^{2} \hbar k^l c_{\boldsymbol{k}}^{(v)\dagger} c_{\boldsymbol{k}}^{(v)} |1_{\boldsymbol{f}1}\rangle = \hbar f^l|1_{\boldsymbol{f}1}\rangle \tag{17.57b}$$

Zirkular polarisierte Photonen sind ebenfalls Eigenzustände des Energieope-

rators und des Impulsoperators:

$$H\,|1_{\boldsymbol{f}R}\rangle = H\,\tfrac{1}{2}\Big(|1_{\boldsymbol{f}1}\rangle + i|1_{\boldsymbol{f}2}\rangle\Big) = \hbar\omega_{\boldsymbol{f}}\,\tfrac{1}{2}\Big(|1_{\boldsymbol{f}1}\rangle + i|1_{\boldsymbol{f}2}\rangle\Big) = \hbar\omega_{\boldsymbol{f}}\,|1_{\boldsymbol{f}R}\rangle \tag{17.58a}$$

$$P^l\,|1_{\boldsymbol{f}R}\rangle = P^l\,\tfrac{1}{2}\Big(|1_{\boldsymbol{f}1}\rangle + i|1_{\boldsymbol{f}2}\rangle\Big) = \hbar f^l\,\tfrac{1}{2}\Big(|1_{\boldsymbol{f}1}\rangle + i|1_{\boldsymbol{f}2}\rangle\Big) = \hbar f^l\,|1_{\boldsymbol{f}R}\rangle \tag{17.58b}$$

Durch Wahl eines anderen Phasenwinkels als $\pm\pi/2$ in (17.44) kann man elliptisch polarisierte Photonen erzeugen, die weder Eigenzustände des Spinoperators S^{12} noch Eigenzustände des linearen Polarisationsoperators L^{12} sind. Auch diese elliptisch polarisierten Photonen sind Eigenzustände des Energieoperators H und der Impulsoperatoren P^j.

Alle bisher betrachteten Photonen sind vollständig delokalisiert, also an jeder Stelle des Normierungsvolumens Ω mit gleicher Wahrscheinlichkeit auffindbar. In Abschnitt 17.5 werden wir uns mit der Beschreibung lokalisierter Photonen beschäftigen.

17.4 Kovariante Quantisierung

Es ist keineswegs offensichtlich, dass die Ergebnisse der vorangegangenen Abschnitte mit der Speziellen Relativitätstheorie kompatibel sind. Insbesondere könnte die Tatsache, dass in der Coulomb-Eichung (17.8) die Nullkomponente $A^0(x) \equiv 0$ identisch Null ist, das Gegenteil vermuten lassen. Deshalb werden wir jetzt eine trickreiche Methode der Quantisierung untersuchen, die Gupta[2] und Bleuler[3] im Jahr 1950 unabhängig voneinander fanden. Der Trick der Methode besteht darin, nicht unmittelbar das Eichfeld $A(x)$ zu quantisieren, sondern zunächst ein Feld $\widetilde{A}(x) \not\equiv A(x)$ zu betrachten, das durch folgende Lagrangedichte definiert wird:

[2] Suraj N. Gupta (∗1924)
[3] Konrad Bleuler (1912 - 1992)

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{L}} &\equiv -\frac{1}{4\mu_0}\Big(\widetilde{F}_{\sigma\tau}\widetilde{F}^{\sigma\tau} + 2(\mathrm{d}_\sigma\widetilde{A}^\sigma)\mathrm{d}_\tau\widetilde{A}^\tau\Big) \\ \widetilde{F}_{\sigma\tau} &\equiv \mathrm{d}_\sigma\widetilde{A}_\tau - \mathrm{d}_\tau\widetilde{A}_\sigma\ .\end{aligned} \tag{17.59}$$

Aufgrund des zweiten Summandens, durch den sich $\widetilde{\mathcal{L}}$ von $\mathcal{L} = (17.2)$ unterscheidet, ist das Feld $\widetilde{A}(x)$ nicht eichinvariant. Insbesondere ist seine Nullkomponente $\widetilde{A}^0(x) \not\equiv 0$ von Null verschieden und kanonisch quantisierbar.

Wir werden im Folgenden die Quantisierung von $\widetilde{A}(x)$ manifest lorentzinvariant durchführen. Dabei wird sich herausstellen, dass die transversalen Komponenten der Feldoperatoren des quantisierten Feldes $\widetilde{A}(x)$ mit den entsprechenden Komponenten der Feldoperatoren des quantisierten Eichfeldes $A(x)$ identisch sind. Dagegen sind die zeitartige und longitudinale Komponente der Feldoperatoren von $A(x)$ Null, die entsprechenden Komponenten der Operatoren des quantisierten Feldes $\widetilde{A}(x)$ sind jedoch im Allgemeinen von Null verschieden.

Die „unphysikalischen“ Komponenten der Operatoren $\widetilde{A}$, durch die sie sich von den Operatoren A unterscheiden, werden anschließend *nicht* gestrichen. Denn das würde zur kanonischen Quantisierung zurückführen. Stattdessen werden durch eine geeignete Bedingung die „unphysikalischen“ Anteile der Zustandsfunktionen $|z\rangle$ der Operatoren $\widetilde{A}$ gestrichen. Mit den verbleibenden „physikalischen“ Anteilen der Zustandsfunktionen ergeben die Operatoren $\widetilde{A}$, und die aus ihnen abgeleiteten Operatoren der Erhaltungsgrößen, die gleichen Ergebnisse wie die kanonisch hergeleiteten Operatoren des Eichfeldes A.

Um dies Programm systematisch durchzuführen, leiten wir aus der Lagrangedichte mithilfe von

$$\begin{aligned}\frac{\partial\widetilde{\mathcal{L}}}{\partial(\mathrm{d}_\sigma\widetilde{A}_\tau)} &= -\frac{1}{4\mu_0}\Big((\mathrm{d}^\sigma\widetilde{A}^\tau - \mathrm{d}^\tau\widetilde{A}^\sigma) - (\mathrm{d}^\tau\widetilde{A}^\sigma - \mathrm{d}^\sigma\widetilde{A}^\tau) + 2g^{\sigma\tau}\mathrm{d}_\nu\widetilde{A}^\nu\Big)\cdot 2 = \\ &= \frac{1}{\mu_0}(-\mathrm{d}^\sigma\widetilde{A}^\tau + \mathrm{d}^\tau\widetilde{A}^\sigma - g^{\sigma\tau}\mathrm{d}_\nu\widetilde{A}^\nu) \\ \frac{\partial\widetilde{\mathcal{L}}}{\partial\widetilde{A}_\tau} &= 0\end{aligned}$$

die Feldgleichung

$$\mathrm{d}_\sigma \frac{\partial \widetilde{\mathcal{L}}}{\partial(\mathrm{d}_\sigma \widetilde{A}_\tau)} - \frac{\partial \widetilde{\mathcal{L}}}{\partial \widetilde{A}_\tau} \overset{(3.37a)}{=} 0$$

$$\frac{1}{\mu_0}(-\mathrm{d}_\sigma \mathrm{d}^\sigma \widetilde{A}^\tau \underbrace{+\mathrm{d}^\tau \mathrm{d}_\sigma \widetilde{A}^\sigma - \mathrm{d}^\tau \mathrm{d}_\nu \widetilde{A}^\nu}_{0}) - 0 = \mathrm{d}_\sigma \mathrm{d}^\sigma \widetilde{A}^\tau = 0 \qquad (17.60)$$

ab. Nur das Feld $A(x)$, aber nicht das Feld $\widetilde{A}(x)$, ist invariant unter der Eichtransformation (17.6). Aber dank des zusätzlichen zweiten Summandens in der Lagrangedichte (17.59) gilt für $\widetilde{A}(x)$ ohne eine Eichtransformation die gleiche Feldgleichung wie für $A(x)$ mit der Coulomb-Eichung (17.8). Demnach kann man auch für $\widetilde{A}(x)$ den Lösungsansatz

$$\widetilde{A} \overset{(17.12)}{=} \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{\alpha=0}^{3} \sqrt{\frac{\mu_0 c^2 \hbar}{2\omega_{\boldsymbol{k}} \Omega}} e_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)} \left(c_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)} \exp\{-ikx\} + c_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)*} \exp\{+ikx\} \right) \qquad (17.61)$$

verwenden. Allerdings hat $\widetilde{A}(x)$ im allgemeinen vier von Null verschiedene Komponenten. Deshalb müssen jetzt die mager gedruckten Einheitsvektoren mit vier Komponenten verwendet werden, und es muss über alle vier Raum-Zeit-Richtungen summiert werden. Denn die Gleichungen

$$A^0 \overset{(17.8)}{=} 0 \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} \overset{(17.8)}{=} 0$$

gelten für $\widetilde{A}(x)$ nicht. Auch die longitudinale und die zeitartige Komponente von $\widetilde{A}$ können von Null verschieden sein.

Die zu $\widetilde{A}(x)$ kanonisch konjugierte Impulsdichte $\widetilde{\pi}(x)$ hat die Komponenten

$$\widetilde{\pi}^\tau \overset{(17.3)}{=} \frac{\partial \widetilde{\mathcal{L}}}{c\partial(\mathrm{d}_0 \widetilde{A}_\tau)} \overset{(17.60)}{=} \frac{1}{c\mu_0}(-\mathrm{d}^0 \widetilde{A}^\tau + \mathrm{d}^\tau \widetilde{A}^0 - g^{0\tau} \mathrm{d}_\nu \widetilde{A}^\nu) \; . \qquad (17.62)$$

Einsetzen von (17.61) mit $$\widetilde{A}^\lambda \overset{(K.10b)}{=} \sum_{\kappa=0}^{3} g^{\lambda\kappa} e^{(\kappa)} \cdot \widetilde{A} \qquad (17.63)$$

ergibt

$$\begin{aligned}\widetilde{\pi}^{\tau}(y) = \sum_{\boldsymbol{f}} \sum_{\beta=0}^{3} \sum_{\kappa=0}^{3} (e^{(\kappa)} \cdot e_{\boldsymbol{f}}^{(\beta)}) \sqrt{\frac{\hbar}{\mu_0 2\omega_{\boldsymbol{f}} \Omega}} \cdot \\ \cdot i\Big(- f^0 g^{\tau\kappa} + f^{\tau} g^{0\kappa} - g^{0\tau} f^{\kappa} \Big) \cdot \\ \cdot \Big(- c_{\boldsymbol{f}}^{(\beta)} \exp\{-ify\} + c_{\boldsymbol{f}}^{(\beta)*} \exp\{+ify\} \Big) \ . \end{aligned} \tag{17.64}$$

Quantisiert wird das Feld dadurch, dass wir für

$$\widetilde{A}_{\mu} \overset{\text{(K.10c)}}{=} e^{(\mu)} \cdot \widetilde{A} \tag{17.65}$$

und $\widetilde{\pi}^{\tau}$ in Einklang mit der allgemeinen Regel (14.74a) folgende nichtkommutative Algebra festlegen:

$$\boxed{\begin{aligned} [\widetilde{A}_{\mu}(t,\boldsymbol{x}), \widetilde{\pi}^{\tau}(t,\boldsymbol{y})] &= i\hbar \delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) g_{\mu}{}^{\tau} && \text{(17.66a)} \\ [\widetilde{A}_{\mu}(t,\boldsymbol{x}), \widetilde{A}^{\tau}(t,\boldsymbol{y})] &= [\widetilde{\pi}_{\mu}(t,\boldsymbol{x}), \widetilde{\pi}^{\tau}(t,\boldsymbol{y})] = 0 && \text{(17.66b)} \end{aligned}}$$

In Anhang A.15 wird nachgewiesen, dass aus (17.66) folgende Kommutator-Relationen der Fourier-Operatoren folgen:

$$\boxed{\begin{aligned} [c_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)}, c_{\boldsymbol{f}}^{(\beta)\dagger}] &= -g_{\alpha\beta}\, \delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{f}} && \text{(17.67a)} \\ [c_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)}, c_{\boldsymbol{f}}^{(\beta)}] &= [c_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)\dagger}, c_{\boldsymbol{f}}^{(\beta)\dagger}] = 0 && \text{(17.67b)} \end{aligned}}$$

In den transversalen Komponenten ($\alpha = 1$ und $\alpha = 2$) stimmen diese Kommutator-Relationen mit (17.17) überein. Ungewöhnlich ist das negative Vorzeichen des zeitartigen Kommutators

$$[c_{\boldsymbol{k}}^{(0)}, c_{\boldsymbol{f}}^{(0)\dagger}] = -g_{00}\, \delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{f}} = -\delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{f}} \ .$$

Darauf kommen wir gleich zurück. Zuvor geben wir noch die Operatoren für Energie und Impuls des quantisierten Feldes $\widetilde{A}(x)$ an. Der Energiedichte-Operator ist

$$\widetilde{\mathcal{H}} \overset{(4.35)}{=} \frac{\partial\widetilde{\mathcal{L}}}{\partial(\mathrm{d}_0\widetilde{A})}\,\mathrm{d}^0\widetilde{A} - \widetilde{\mathcal{L}} = \widetilde{\pi}^\sigma(x)\,\dot{\widetilde{A}}_\sigma(x) - \widetilde{\mathcal{L}}\ . \tag{17.68}$$

In Anhang A.17 wird gezeigt, dass daraus der Hamiltonoperator

$$\widetilde{H} \equiv \int\limits_\Omega \mathrm{d}^3x\,\widetilde{\mathcal{H}} = -\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{\alpha=0}^{3}\sum_{\beta=0}^{3} g^{\alpha\beta}\,\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}\,c_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)\dagger}c_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)} \tag{17.69}$$

folgt. Die Impulsdichte des Feldes $\widetilde{A}(x)$ ist

$$\widetilde{\mathcal{P}}^j \overset{(4.35)}{=} \frac{1}{c}\frac{\partial\widetilde{\mathcal{L}}}{\partial(\mathrm{d}_0\widetilde{A})}\,\mathrm{d}^j\widetilde{A} = \widetilde{\pi}^\tau(x)\,\mathrm{d}^j\widetilde{A}_\tau(x)\ . \tag{17.70}$$

In Anhang A.18 wird gezeigt, dass daraus der Impulsoperator

$$\widetilde{P}^j \equiv \int\limits_\Omega \mathrm{d}^3x\,\widetilde{\mathcal{P}}^j = -\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{\alpha=0}^{3}\sum_{\beta=0}^{3} g^{\alpha\beta}\hbar k^j\,c_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)\dagger}c_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)} \tag{17.71}$$

folgt.

Würde man in diesen Operatoren $\sum_{\alpha=0}^{3}$ ersetzen durch $\sum_{\alpha=1}^{2}$, dann wäre $\widetilde{H}$ mit $H = (17.33)$ identisch, und $\widetilde{P}^j$ wäre mit $P^j = (17.34)$ identisch. Dennoch ist das Feld $\widetilde{A}(x)$ ohne wesentliche Änderungen nicht dazu geeignet, das Photonenfeld zu beschreiben. Denn es war die wesentliche Voraussetzung der Quantisierung dieses Feldes, dass seine zeitartigen und longitudinalen Komponenten von Null verschieden sein können. Also hat dieses Feld negative Energie, wenn mehr Quanten mit zeitartiger als mit raumartiger Polarisation angeregt sind. Das ist physikalisch unsinnig.

Ein zweites, mehr formales Problem resultiert aus dem negativen Vorzeichen des zeitartigen Kommutators (17.67). Den Vakuumzustand des quantisierten Feldes bezeichnen wir als $|0\rangle$. Der Vakuumzustand ist charakterisiert durch

$$c_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)}|0\rangle = 0\ .$$

Durch Anwendung des Erzeugungsoperators

$$c_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)\dagger}|0\rangle = |1_{(\alpha)\boldsymbol{k}}\rangle \tag{17.72}$$

auf den Vakuumzustand entsteht ein Zustand, in dem ein Quant mit Polarisation α und Wellenzahl $\boldsymbol{k}$ angeregt ist. Dieser Zustand hat die Norm

$$\langle 1_{(\beta)\boldsymbol{f}}|1_{(\alpha)\boldsymbol{k}}\rangle = \langle 0|c_{\boldsymbol{f}}^{(\beta)}c_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)\dagger}|0\rangle - \langle 0|c_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)\dagger}\underbrace{c_{\boldsymbol{f}}^{(\beta)}|0\rangle}_{0} =$$

$$= \langle 0|\,[c_{\boldsymbol{f}}^{(\beta)}, c_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)\dagger}]\,|0\rangle \overset{(17.67)}{=} -g^{\beta\alpha}\delta_{\boldsymbol{f}\boldsymbol{k}}\underbrace{\langle 0|0\rangle}_{1}\ . \tag{17.73}$$

Wenn das Quant zeitartig polarisiert ist, dann ist die Norm negativ. Eine vernünftige Interpretation von Quantenfeldern, deren Zustandsfunktionen teils positive und teils negative Norm haben, ist ziemlich schwierig.

Ursache aller Probleme ist der Zusatzterm

$$2(\mathrm{d}_\sigma \widetilde{A}^\sigma)\mathrm{d}_\tau \widetilde{A}^\tau\ ,$$

durch den sich die Lagrangedichte (17.59) des Feldes $\widetilde{A}$ von der Lagrangedichte (17.2) des Eichfeldes A unterscheidet. Man kann die Probleme nicht dadurch lösen, dass man dem Feld $\widetilde{A}$ die Zusatzbedingung $\mathrm{d}_\sigma \widetilde{A}^\sigma(x) \equiv 0$ aufzwingt. Denn dann wäre $\widetilde{A}(x) \equiv A(x)$, und die gerade eben durchgeführte Quantisierung (17.66) wäre hinfällig. Es war die Idee von Gupta und Bleuler, nicht den Operatoren sondern den Zustandsfunktionen eine einschränkende Zusatzbedingung aufzuerlegen. Die Zusatzbedingung lautet:

> Eine Zustandsfunktion $|z\rangle$ ist genau dann zulässig, wenn sie die die Bedingung
>
> $$\langle z|\,\mathrm{d}_\sigma \widetilde{A}^\sigma\,|z\rangle = 0$$
>
> erfüllt. Unzulässige Zustandsfunktionen sind aus der Theorie zu streichen.

(17.74)

Es ist wichtig festzustellen, dass dies eine kovariant formulierte Bedingung ist. Sie ändert sich nicht bei einer beliebigen Drehung des Koordinatensystems der vierdimensionalen Raum-Zeit. Es ist und bleibt die entscheidende

Leitlinie dieses Quantisierungsverfahrens, jederzeit strikt an der manifesten Lorentzinvarianz festzuhalten. Um die Bedeutung und die Folgen der Bedingung (17.74) zu untersuchen, betrachten wir

$$\mathrm{d}_\sigma \widetilde{A}^\sigma(x) \overset{(17.11)}{=} \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{v=0}^{3} \frac{1}{\sqrt{N\Omega}} \cdot \\ \cdot \Big(-ik\epsilon_{\boldsymbol{k}}^{(v)} c_{\boldsymbol{k}}^{(v)} \exp\{-ikx\} + ik\epsilon_{\boldsymbol{k}}^{(v)*} c_{\boldsymbol{k}}^{(v)\dagger} \exp\{+ikx\} \Big) \, .$$

Der zweite Summand ist der adjungierte des ersten. Die Bedingung (17.74) ist deshalb erfüllt, sobald sie für den zweiten Summanden erfüllt ist:

$$\sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{v=0}^{3} k\epsilon_{\boldsymbol{k}}^{(v)*} \langle z| \, c_{\boldsymbol{k}}^{(v)\dagger} \, |z\rangle \, \exp\{+ikx\} = 0$$

$$\Longrightarrow \qquad \sum_{v=0}^{3} k e_{\boldsymbol{k}}^{(v)} \langle z| \, c_{\boldsymbol{k}}^{(v)\dagger} \, |z\rangle = 0 \, .$$

Hier wurden alle überflüssigen Faktoren gestrichen. k hat im Laborsystem die Koordinaten $k = (k^0, k^1, k^2, k^3)$. Die Bedingung wird transparenter wenn man dies Koordinatensystem so dreht, dass es mit dem von den Einheitsvektoren $e_{\boldsymbol{k}}^{(v)}$ aufgespannten System, das am Wellenvektor $\boldsymbol{k}$ orientiert ist, zur Deckung kommt. Dann hat k wegen $k^2 = (k^0)^2 - \boldsymbol{k}^2 = 0$ die Komponenten $k = (|\boldsymbol{k}|, 0, 0, |\boldsymbol{k}|)$, und die Bedingung (17.74) reduziert sich mit (K.10a) auf

$$\sum_{v=0}^{3} g_{vu} k^u \langle z| \, c_{\boldsymbol{k}}^{(v)\dagger} \, |z\rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad \langle z| \, c_{\boldsymbol{k}}^{(0)\dagger} - c_{\boldsymbol{k}}^{(3)\dagger} \, |z\rangle = 0 \, . \tag{17.75}$$

Ein Zustand des Feldes, in dem eine beliebige Anzahl von Photonen mit Wellenzahl $\boldsymbol{k}$ angeregt ist, genügt deshalb genau dann dem Kriterium (17.74), wenn er die Form

$$|z\rangle = \Big(n_1 c_{\boldsymbol{k}}^{(1)\dagger} + n_2 c_{\boldsymbol{k}}^{(2)\dagger} + n_{03} (c_{\boldsymbol{k}}^{(0)\dagger} - c_{\boldsymbol{k}}^{(3)\dagger}) \Big) \, |0\rangle \tag{17.76}$$

mit beliebigen Zahlen $n_1, n_2, n_{03} \in \mathbb{N}$

hat. $|z\rangle$ ist eine Eigenfunktion des Hamiltonoperators. Das Feld hat in diesem Zustand die Energie

$$\begin{aligned}\widetilde{H}\,|z\rangle &\overset{(17.69)}{=} -\sum_{\boldsymbol{f}}\sum_{\alpha=0}^{3}\sum_{\beta=0}^{3} g^{\alpha\beta}\,\hbar\omega_{\boldsymbol{f}}\,c_{\boldsymbol{f}}^{(\alpha)\dagger}c_{\boldsymbol{f}}^{(\alpha)}\cdot\\ &\qquad\cdot\left(n_1 c_{\boldsymbol{k}}^{(1)\dagger}+n_2 c_{\boldsymbol{k}}^{(2)\dagger}+n_{03}(c_{\boldsymbol{k}}^{(0)\dagger}-c_{\boldsymbol{k}}^{(3)\dagger})\right)|0\rangle =\\ &= \hbar\omega_{\boldsymbol{k}}(-n_{03}+n_1+n_2+n_{03}) = \hbar\omega_{\boldsymbol{k}}(n_1+n_2)\;. \end{aligned}\tag{17.77}$$

Die unphysikalischen Beiträge zur Energie (und zu anderen Messgrößen), die auf zeitartig und longitudinal polarisierte Photonen zurückgehen, kompensieren sich, wenn der Zustand des Feldes dem Kriterium (17.74) entspricht. Auch das Problem von Zustandsfunktionen mit negativer Norm wird gelöst. Dazu berechnen wir das Skalarprodukt zweier zulässiger Zustandsfunktionen:

$$\begin{aligned}\langle z'|z\rangle &= \langle 0|\left(n_1' c_{\boldsymbol{k}'}^{(1)}+n_2' c_{\boldsymbol{k}'}^{(2)}+n_{03}'(c_{\boldsymbol{k}'}^{(0)}-c_{\boldsymbol{k}'}^{(3)\dagger})\right)\cdot\\ &\qquad\cdot\left(n_1 c_{\boldsymbol{k}}^{(1)\dagger}+n_2 c_{\boldsymbol{k}}^{(2)\dagger}+n_{03}(c_{\boldsymbol{k}}^{(0)\dagger}-c_{\boldsymbol{k}}^{(3)\dagger})\right)|0\rangle =\\ &= n_1' n_1\langle 0|\,[c_{\boldsymbol{k}'}^{(1)},c_{\boldsymbol{k}}^{(1)\dagger}]\,|0\rangle + n_2' n_2\langle 0|\,[c_{\boldsymbol{k}'}^{(2)},c_{\boldsymbol{k}}^{(2)\dagger}]\,|0\rangle +\\ &\quad + n_{03}' n_{03}(\,\langle 0|\,[c_{\boldsymbol{k}'}^{(0)},c_{\boldsymbol{k}}^{(0)\dagger}]\,|0\rangle + \langle 0|\,[c_{\boldsymbol{k}'}^{(3)},c_{\boldsymbol{k}}^{(3)\dagger}]\,|0\rangle) =\\ &= n_1' n_1\delta_{\boldsymbol{k}'\boldsymbol{k}} + n_2' n_2\delta_{\boldsymbol{k}'\boldsymbol{k}} + n_{03}' n_{03}(\,-\delta_{\boldsymbol{k}'\boldsymbol{k}}+\delta_{\boldsymbol{k}'\boldsymbol{k}}) \end{aligned}\tag{17.78}$$

Hier wurden nach dem Muster von (17.73) die Kommutatoren eingefügt. Alle Kommutatoren, die Null sind, wurden sofort gestrichen. Der „unphysikalische“ Anteil $n_{03}(c_{\boldsymbol{k}}^{(0)\dagger}-c_{\boldsymbol{k}}^{(3)\dagger})\,|0\rangle$ zulässiger Zustandsfunktionen ist orthogonal zu sämtlichen zulässigen Zustandsfunktionen, und auch orthogonal zu sich selbst. Die Zustandsfunktionen

$$\left(n_1 c_{\boldsymbol{k}}^{(1)\dagger}+n_2 c_{\boldsymbol{k}}^{(2)\dagger}\right)|0\rangle \quad\text{und}\quad \left(n_1 c_{\boldsymbol{k}}^{(1)\dagger}+n_2 c_{\boldsymbol{k}}^{(2)\dagger}+n_{03}(c_{\boldsymbol{k}}^{(0)\dagger}-c_{\boldsymbol{k}}^{(3)\dagger})\right)|0\rangle$$

lassen sich auf keine Weise physikalisch voneinander unterscheiden, weil sie identische Messgrößen und identische Skalarprodukte liefern. Man kann deshalb die Zustandsfunktionen mit gleichem Transversalteil und unter-

schiedlichen dazu orthogonalen Anteilen als Äquivalenzklasse betrachten, und einen beliebigen von ihnen (zum Beispiel den mit $n_{03} = 0$) zum Repräsentanten dieser Klasse ernennen.

Weil mit der Bedingung (17.74) $\widetilde{A}(x)$ und $A(x)$ nicht mehr unterschieden werden können ist es üblich, auf die unterschiedliche Schreibweise der Felder zu verzichten. Auch wir werden künftig das Feld $\widetilde{A}(x)$ als $A(x)$ bezeichnen. Dass das Feld gemäß (17.66) kovariant quantisiert wurde erkennt man dann nur noch daran, dass in den Formeln die Polarisationsindizes 0 und 3 auftauchen.

17.5 Der Photonen-Propagator

In Abschnitt 17.3 wurden delokalisierte Photonen beschrieben, die an jeder Stelle des Normierungsvolumens Ω mit gleicher Wahrscheinlichkeit nachweisbar sind. Die Behandlung lokalisierter Photonen haben wir auf diesen Abschnitt verschoben, weil wir sie mithilfe des kovariant quantisierten Feldes (siehe letzter Abschnitt) durchführen wollen.

Lokalisierte Photonen kann man erzeugen, indem man den Feldoperator mit den Komponenten

$$A^\nu(x) \overset{(17.11)}{=} \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{\alpha=0}^{3} \sqrt{\frac{\mu_0 c^2 \hbar^2}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}\Omega}} \cdot \\ \cdot \left(\epsilon_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)\nu} c_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)} \exp\{-ikx\} + \epsilon_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)\nu *} c_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)\dagger} \exp\{+ikx\} \right) \tag{17.79}$$

komponentenweise auf das Vakuum anwendet. Wegen $c_{\boldsymbol{k}}^{(v)} |0\rangle = 0$ erhält man

$$|1_x\rangle^\nu \equiv A^\nu(x)\,|0\rangle = \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{\alpha=0}^{3} \sqrt{\frac{\mu_0 c^2 \hbar^2}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}\Omega}}\, \epsilon_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)\nu *} \underbrace{c_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)\dagger}|0\rangle}_{|1_{\boldsymbol{k}\alpha}\rangle} \exp\{+ikx\}\ . \tag{17.80}$$

Die Polarisationsvektoren, die in (17.9) definiert wurden, enthalten einen komplexen Phasenfaktor. Deshalb haben die Photonen eine beliebige, aber wohldefinierte Polarisation, auch wenn diese in der einfachen Schreibweise

$|1_x\rangle$ nicht dokumentiert ist. $|1_x\rangle$ ist ein Vektor mit vier Raum-Zeit-Komponenten, da alle Komponenten des Operators $A(x)$ von Null verschieden sein können. Man kann $|1_x\rangle^\nu$ als Komponente eines Zeilenvektors interpretieren, dessen Normquadrat eine Matrix ist, oder als Komponente eines Spaltenvektors, dessen Normquadrat ein Skalar ist. Konsequenterweise – vergleiche Definition (16.22) beim Diracfeld – entscheidet man sich für die erste Möglichkeit durch die folgende

Definition: Jeder $|\text{ket}\rangle$ eines Vektorfeldes ist als Zeilenvektor zu betrachten. Jeder $\langle\text{bra}|$ eines Vektorfeldes ist als Spaltenvektor zu betrachten. (17.81)

$|1_x\rangle^\nu$ ist die ν-Komponente der Zustandsfunktion eines Photons, das zur Zeit x^0/c bei $\boldsymbol{x}$ (nicht punktgenau) lokalisiert ist. Wir berechnen das Matrixelement

$$\begin{aligned}\langle 1_y|1_x\rangle_{\mu\nu} &= \langle 0|\, A_\mu(y) A_\nu(x)\,|0\rangle \;= \\ &= \sum_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{k}} \sum_{\alpha,\beta=0}^{3} \frac{\mu_0 c^2\hbar^2}{\Omega 2\hbar\,\sqrt{\omega_{\boldsymbol{f}}\omega_{\boldsymbol{k}}}}\, \epsilon^{(\beta)}_{\boldsymbol{f}\,\mu}\, \epsilon^{(\alpha)*}_{\boldsymbol{k}\,\nu}\, \underbrace{\langle 1_{\boldsymbol{f}\beta}|1_{\boldsymbol{k}\alpha}\rangle}_{\overset{(17.73)}{=} -g_{\alpha\beta}\,\delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{f}}}\, \exp\{-i(fy-kx)\} = \\ &= -\sum_{\boldsymbol{k}} \frac{\mu_0 c^2\hbar^2}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}\,\Omega} \sum_{\alpha,\beta=0}^{3} g_{\alpha\beta}\, \epsilon^{(\beta)}_{\boldsymbol{k}\,\mu} \epsilon^{(\alpha)*}_{\boldsymbol{k}\,\nu}\, \exp\{-ik(y-x)\}\;.\end{aligned}$$

Jetzt gehen wir durch $\mu,\nu \to \sigma,\tau$ in ein Koordinatensystem, das genau wie das Koordinatensystem α,β am Feld A orientiert ist. In diesem System ist

$$\epsilon^{(\beta)}_{\boldsymbol{k}\,\sigma} \epsilon^{(\alpha)*}_{\boldsymbol{k}\,\tau} \overset{(17.9)}{=} g_{\sigma\tau}\, g^{\beta}{}_{\sigma}\, g^{\alpha}{}_{\tau} \tag{17.82a}$$

$$\sum_{\alpha,\beta=0}^{3} g_{\alpha\beta}\, \epsilon^{(\beta)}_{\boldsymbol{k}\,\sigma} \epsilon^{(\alpha)*}_{\boldsymbol{k}\,\tau} = g_{\sigma\tau}\;. \tag{17.82b}$$

Nun wird durch $\sigma,\tau \to \mu,\nu$ das Koordinatensystem wieder zurückgedreht, und wir erhalten

$$\langle 1_y|1_x\rangle_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}\,\mu_0 c^2\hbar^2 \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{\exp\{-ik(y-x)\}}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}\,\Omega}\ . \tag{17.83}$$

Nur die Diagonalelemente der Matrix $\langle 1_y|1_x\rangle$ sind von Null verschieden. Auch im Fall $x^0 = y^0$ enthält (17.83) nicht die Deltafunktion

$$\delta^{(3)}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) \overset{(7.9)}{=} \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{\exp\{+i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\}}{\Omega}\ .$$

Der zusätzliche Faktor $\omega_{\boldsymbol{k}}$ im Nenner verhindert die punktgenaue Lokalisierung eines Photons (was ohnehin physikalisch unrealistisch wäre), und er bewirkt zugleich auch – wie am Ende von Kapitel 7 diskutiert – die Lorentzinvarianz des Matrixelements (17.83).

Das Photon ist nur im Raum, aber nicht in der Zeit lokalisiert. Denn es wird ja nur über $\boldsymbol{k}$ summiert, aber nicht über k^0 integriert. Die Zeit t ist hier ein laufender Parameter. Die Zustandsfunktion $|1_{t\boldsymbol{x}}\rangle$ des lokalisierten Photons ist eine Eigenfunktion des zeitabhängigen Ortsoperators $\boldsymbol{x}(t)$:

$$\boldsymbol{x}(t)|1_{t\boldsymbol{y}}\rangle = \boldsymbol{y}|1_{t\boldsymbol{y}}\rangle \tag{17.84}$$

Das Photon $|1_{t\boldsymbol{y}}\rangle$ hat einen wohlbestimmten Ort und eine wohlbestimmte Polarisation; seine Energie und sein Impuls sind unbestimmt.

Im Fall $y^0 > x^0$ werden die Matrizen der lokalisierten Photonen mit den Elementen

$$\langle 1_y|1_x\rangle_{\mu\nu} = \langle 0|\,A_\mu(y)A_\nu(x)\,|0\rangle = (17.83)$$

interpretiert als Wahrscheinlichkeitsamplitude dafür, dass zur Zeit x^0/c am Ort $\boldsymbol{x}$ ein Photon erzeugt wird, sich zum Ort $\boldsymbol{y}$ bewegt, und dort zur Zeit y^0/c vernichtet wird. Aus dem Vergleich des klassischen Propagators (12.34) mit (17.83) erkennt man, dass der quantisierte Propagator offenbar

$$D_{\mu\nu}(y-x) = \langle 0|\,T\,A_\mu(y)A_\nu(x)\,|0\rangle = \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{-g_{\mu\nu}\,\mu_0 c^2\hbar^2}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}\,\Omega}\cdot$$
$$\cdot\Big(\theta(y^0-x^0)\,\exp\{-ik(y-x)\} + \theta(x^0-y^0)\,\exp\{-ik(x-y)\}\Big) \tag{17.85}$$

ist. T ist der in (15.44) definierte Zeitordnungsoperator. Durch Vergleich mit (12.33) findet man den Propagator im Wellenzahl-Raum:

$$\boxed{\widetilde{D}_{\mu\nu}(k) = \frac{-ig_{\mu\nu}\,\mu_0\hbar c}{k^2 + i\epsilon'}} \tag{17.86}$$

Anmerkung: Die Zusatzbedingung (17.74) bewirkt dass sich keine beobachtbare Größe ändert, wenn man den Propagator durch

$$\widetilde{D}^L_{\mu\nu}(k) = \frac{-i\,\mu_0\hbar c}{k^2 + i\epsilon'}\Big(g_{\mu\nu} - L\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\Big)$$

mit konstantem $L \in \mathbb{R}$ definiert. Geschickte Wahl von L kann manche Berechnungen vereinfachen, weshalb man Definitionen des Propagators mit $L \neq 0$ in der Literatur häufig begegnet. Wir werden in diesem Buch aber ausschließlich (17.86) verwenden.

18 Pfadintegrale

In Abschnitt 14.1.1 haben wir den Übergang von der Klassischen Mechanik der Punktteilchen zur Quantenmechanik dadurch bewirkt, dass die Poisson-Klammern ersetzt wurden durch die mit $i/\hbar$ multiplizierten Kommutatoren:

$$\{A,B\}_{\text{PK}} \equiv \Big(\frac{\partial A}{\partial p}\frac{\partial B}{\partial q} - \frac{\partial B}{\partial p}\frac{\partial A}{\partial q}\Big) \quad \longrightarrow$$
$$\xrightarrow{(14.6)} \quad \frac{i}{\hbar}[A\,,B] \equiv \frac{i}{\hbar}(AB - BA) \tag{18.1}$$

In den folgenden Kapiteln haben wir dies Verfahren der „kanonischen Quantisierung“ dann auf verschiedene klassische Felder verallgemeinert.

Dirac [43] wies darauf hin dass es vorteilhaft sein könnte, die Quantentheorie auf die Lagrangefunktion aufzubauen, statt auf die Hamiltonfunktion, die im Zentrum des kanonischen Formalismus steht. Die Lagrangefunktion erschien ihm aus mehreren Gründen fundamentaler zu sein schien als die Hamiltonfunktion. Vor allem kann man die Lagrangefunktion relativistisch invariant formulieren, während die Hamiltonfunktion als kanonisch konjugierte Größe der Zeit von vornherein nicht relativistisch invariant ist.

Dirac schlug vor, die quantenmechanische Wahrscheinlichkeitsamplitude $\langle t_N, \boldsymbol{x}_N | t_0, \boldsymbol{x}_0\rangle$ dafür, ein Teilchen zur Zeit t_N an der Stelle $\boldsymbol{x}_N$ beobachten zu können, wenn es zur Zeit t_0 an der Stelle $\boldsymbol{x}_0$ beobachtet wurde, folgendermaßen zu berechnen:

$$\langle t_N, \boldsymbol{x}_N | t_0, \boldsymbol{x}_0\rangle = \exp\Big\{\frac{i}{\hbar}S\Big\} = \exp\Big\{\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t_N} \mathrm{d}t\, L(t)\Big\} \tag{18.2}$$

In diesem Ansatz ist S die Wirkung und L die Lagrangefunktion des klassischen Teilchens. Anders als bei der kanonischen Quantisierung wird also

keine nicht-kommutative Algebra eingeführt. Das Matrixelement wird mithilfe der klassischen, kommutativen Funktionen S bzw. L berechnet. Trotz der kommutativen Algebra handelt es sich bei Diracs Vorschlag (18.2) nicht um klassische Physik, sondern um waschechte Quantentheorie. Denn was hier berechnet wird ist keine klassische Wahrscheinlichkeit, sondern eine Wahrscheinlichkeits*amplitude*. Dergleichen gibt es nur in der Quantentheorie, darauf gehen wir im folgenden Abschnitt genauer ein.

Feynman [44] griff Dirac's Idee auf, und arbeitete sie aus zur Methode der Pfadintegrale. Im folgenden Abschnitt werden wir das Konzept der Pfadintegrale am Beispiel von nichtrelativistischen Punktteilchen herleiten, und dabei auch Dirac's Vorschlag (18.2) begründen. In den anschließenden Abschnitten werden wir dann die Pfadintegrale von relativistisch invarianten Skalaren Feldern diskutieren.

18.1 Punktteilchen

Die Wahrscheinlichkeitsamplitude, die in Diracs Quantisierungsvorschlag (18.2) steht, haben wir bereits in Abschnitt 14.1.3 als Matrixelement des Zeitentwicklungsoperators $U(t_N, t_0)$ beschrieben:

$$U(t_N, \boldsymbol{x}_N, t_0, \boldsymbol{x}_0) \overset{(14.37)}{=} \langle t_N, \boldsymbol{x}_N | t_0, \boldsymbol{x}_0 \rangle = \langle \boldsymbol{x}_N | \, U(t_N, t_0) \, | \boldsymbol{x}_0 \rangle \tag{18.3}$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$W(t_N, \boldsymbol{x}_N, t_0, \boldsymbol{x}_0) \equiv \Big| U(t_N, \boldsymbol{x}_N, t_0, \boldsymbol{x}_0) \Big|^2 \tag{18.4}$$

ist das Betragsquadrat der Wahrscheinlichkeitsamplitude. Und die Wahrscheinlichkeit dafür, das Teilchen zur Zeit t_N im Volumen V zu finden, wenn es zur Zeit t_0 an der Stelle $\boldsymbol{x}_0$ beobachtet wurde, ist

$$\int\limits_V \mathrm{d}^3 x_N \, W(t_N, \boldsymbol{x}_N, t_0, \boldsymbol{x}_0) \; . \tag{18.5}$$

Die Wahrscheinlichkeit ist dimensionslos, die Wahrscheinlichkeitsdichte hat die Dimension Volumen^{-1}, die Wahrscheinlichkeitsamplitude hat die

Dimension Volumen$^{-1/2}$.

Wir betrachten einen Zeitpunkt t_j, der zwischen t_0 und t_N liegt. Die Wahrscheinlichkeitsamplitude dafür, dass das Teilchen zur Zeit t_j am Ort $\boldsymbol{x}_j$ beobachtet werden kann, wenn es zur Zeit t_0 an der Stelle $\boldsymbol{x}_0$ beobachtet wurde, ist $U(t_j, \boldsymbol{x}_j, t_0, \boldsymbol{x}_0)$. Die Wahrscheinlichkeitsamplitude dafür, dass das Teilchen zur Zeit t_N am Ort $\boldsymbol{x}_N$ beobachtet werden kann, wenn es zur Zeit t_j an der Stelle $\boldsymbol{x}_j$ beobachtet wurde, ist $U(t_N, \boldsymbol{x}_N, t_j, \boldsymbol{x}_j)$. Wenn man darauf verzichtet, den Ort des Teilchens zur Zeit t_j zu beobachten, dann ist die Wahrscheinlichkeitsdichte dafür, dass es zur Zeit t_N am Ort $\boldsymbol{x}_N$ auftaucht, laut Klassischer Physik:

$$\begin{aligned} W_{\text{klassisch}}(t_N, \boldsymbol{x}_N, t_0, \boldsymbol{x}_0) \;&= \\ &= \int \mathrm{d}^3 x_j \, W(t_N, \boldsymbol{x}_N, t_j, \boldsymbol{x}_j) \cdot W(t_j, \boldsymbol{x}_j, t_0, \boldsymbol{x}_0) \;= \\ &= \int \mathrm{d}^3 x_j \Big| U(t_N, \boldsymbol{x}_N, t_j, \boldsymbol{x}_j) \Big|^2 \cdot \Big| U(t_j, \boldsymbol{x}_j, t_0, \boldsymbol{x}_0) \Big|^2 \end{aligned} \tag{18.6a}$$

Integriert wird hier über sämtliche Orte $\boldsymbol{x}_j$, an denen man das Teilchen möglicherweise finden könnte, wenn man zur Zeit t_j seinen Ort detektieren würde (was man aber nicht tut). Die Quantenmechanik postuliert für diesen Fall dagegen die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\begin{aligned} W(t_N, \boldsymbol{x}_N, t_0, \boldsymbol{x}_0) \;&= \\ &= \Big| \int \mathrm{d}^3 x_j \, U(t_N, \boldsymbol{x}_N, t_j, \boldsymbol{x}_j) \cdot U(t_j, \boldsymbol{x}_j, t_0, \boldsymbol{x}_0) \Big|^2 \\ &\neq \int \mathrm{d}^3 x_j \Big| U(t_N, \boldsymbol{x}_N, t_j, \boldsymbol{x}_j) \Big|^2 \cdot \Big| U(t_j, \boldsymbol{x}_j, t_0, \boldsymbol{x}_0) \Big|^2 \end{aligned} \tag{18.6b}$$

In der quantenmechanischen Wahrscheinlichkeitsdichte (18.6b) gibt es Interferenzen zwischen den Wegen des Teilchens über die verschiedenen möglichen Zwischenpunkte $\boldsymbol{x}_j$. In der klassischen Wahrscheinlichkeitsdichte (18.6a) gibt es keine Interferenzen, denn der Integrand ist für sämtliche $\boldsymbol{x}_j$ positiv. (18.6b) stimmt mit der Beobachtung überein. (18.6a) ist nur dann in guter Näherung korrekt, wenn das Planck'sche Wirkungsquantum vernachlässigbar klein gegen die Wirkung S des Teilchens ist ($\hbar/S \ll 1$). Die Interferenz der Wahrscheinlichkeitsamplituden betrachtete Feynman als

das zentrale Charakteristikum der Quantentheorie. Die Klassische Physik kennt den Begriff der Wahrscheinlichkeit (bzw. Wahrscheinlichkeitsdichte), aber die Vorstellung von interferenzfähigen Wahrscheinlichkeitsamplituden ist ihr vollkommen fremd. Deshalb fand es Feynman sehr befriedigend, dass Diracs Quantisierungsvorschlag (18.2) ohne irgendeinen Umweg diesen Zentralbegriff der Quantentheorie ansteuert.

18.1.1 Der allgemeinste Fall

Im Folgenden wollen wir Diracs Quantisierungsvorschlag (18.2) begründen und zugleich präzisieren. Wir betrachten ein Punktteilchen, das zur Zeit t_0 an der Stelle $\boldsymbol{x}_0$ beobachtet wurde. Die Wahrscheinlichkeitsamplitude dafür, dass es zur Zeit t_N an der Stelle $\boldsymbol{x}_N$ beobachtet werden kann, ist

$$U(t_N,\boldsymbol{x}_N,t_0,\boldsymbol{x}_0) \overset{(14.37)}{=} \langle t_N,\boldsymbol{x}_N|t_0,\boldsymbol{x}_0\rangle = \langle \boldsymbol{x}_N|\,U(t_N,t_0)\,|\boldsymbol{x}_0\rangle \;= \\ = \langle \boldsymbol{x}_N|\,\exp\{-\frac{i}{\hbar}(t_N-t_0)H\}\,|\boldsymbol{x}_0\rangle\;. \tag{18.7}$$

Hier haben wir den einfachen Zeitentwicklungsoperator

$$U(t,t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)H} \tag{18.8}$$

angenommen, der nur zutrifft wenn der Hamiltonoperator nicht explizit zeitabhängig ist. Bei dieser Annahme werden wir im gesamten Kapitel bleiben. Außerdem nehmen wir an, dass der Hamiltonoperator $H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})$ des Punktteilchens eine beliebige, nicht weiter spezifizierte Funktion des Ortsoperators $\boldsymbol{x}$ und des Impulsoperators $\hbar\boldsymbol{k} \equiv \boldsymbol{p}$ ist. Wir bemerken, dass im Fall von Punktteilchen die konjugierten Impulse und die physikalischen Impulse identisch sind.

Die Zustandsfunktionen $|t,\boldsymbol{x}\rangle$ des Teilchens sind Eigenfunktionen des zeitabhängigen Ortsoperators, die Zustandsfunktionen $|\boldsymbol{x}\rangle$ sind Eigenfunktionen des zeitunabhängigen Ortsoperators, siehe (14.35). Außerdem werden wir zeitunabhängige Zustandsfunktionen $|\boldsymbol{k}\rangle$ des Teilchens verwenden, die Eigenfunktionen des zeitunabhängigen Impulsoperators $\hbar\boldsymbol{k}$ sind.

Wir teilen die Zeit zwischen t_0 und t_N in N Teile

$$\tau \equiv \frac{t_N - t_0}{N} \ . \tag{18.9}$$

Es erspart uns viel Schreibarbeit, wenn wir für alle N Teile gleich lang wählen, wichtig ist das aber an keiner Stelle der folgenden Berechnungen. Den Zeitentwicklungsoperator schreiben wir in der Form

$$\exp\{-\frac{i}{\hbar}(t_N - t_0)H\} = \underbrace{\exp\{-\frac{i}{\hbar}H\tau\} \ \ldots \ \exp\{-\frac{i}{\hbar}H\tau\}}_{N\times} \ , \tag{18.10}$$

und schieben zwischen die N Faktoren $N-1$ mal den Projektor

$$1 = \int\limits_{\Omega} \mathrm{d}^3 x_j |\boldsymbol{x}_j\rangle\langle\boldsymbol{x}_j| \tag{18.11}$$

ein, wobei j von 1 zwischen den Faktoren ganz rechts in Einserschritten bis $N-1$ zwischen den Faktoren ganz links hochläuft:

$$\begin{aligned} &U(t_N, \boldsymbol{x}_N, t_0, \boldsymbol{x}_0) = \\ &= \int\limits_{\Omega} \mathrm{d}^3 x_{N-1} \ldots \int\limits_{\Omega} \mathrm{d}^3 x_j \ldots \int\limits_{\Omega} \mathrm{d}^3 x_1 \ \prod_{j=0}^{N-1} \langle \boldsymbol{x}_{j+1}| \exp\{-\frac{i}{\hbar}H\tau\}|\boldsymbol{x}_j\rangle \end{aligned} \tag{18.12}$$

Man beachte, dass es N Matrixelemente, aber nur $N-1$ Integrale gibt. $\boldsymbol{x}_N$ und $\boldsymbol{x}_0$ kommen zwar in den Matrixelementen vor, über sie wird aber nicht integriert. Der Hamiltonoperator im Exponenten ist als abkürzende Schreibweise für die Reihe

$$\exp\{-\frac{i}{\hbar}H\tau\} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\Big(-\frac{i}{\hbar}H\tau\Big)^n = 1 - \frac{i}{\hbar}H\tau \pm \ldots \tag{18.13}$$

zu verstehen. Wir berechnen zunächst das lineare Matrixelement

$$\langle \boldsymbol{x}_{j+1}|H|\boldsymbol{x}_j\rangle \ . \tag{18.14}$$

Der Hamiltonoperator H ist im allgemeinsten Fall ein Polynom der Operatoren $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{k}$, das wir in trickreicher Weise umordnen. Wir zeigen die Art

der Umordnung an zwei Beispielen:

$$\boldsymbol{xk} \quad \longrightarrow \quad \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{xk} + \underbrace{\boldsymbol{xk} - \boldsymbol{kx}}_{\text{Kommutator}} + \boldsymbol{kx}) = \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{xk} + \boldsymbol{kx}) + f(K) \tag{18.15a}$$

$$\boldsymbol{x}^2\boldsymbol{k} \quad \longrightarrow \quad \tfrac{1}{4}(\boldsymbol{x}^2\boldsymbol{k} + 2\boldsymbol{xkx} + \boldsymbol{kx}^2) + g(K) \tag{18.15b}$$

$f(K)$ und $g(K)$ sind Funktionen des Kommutators der Operatoren $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{k}$. Das Produkt $\boldsymbol{kx}$ würde in gleicher Weise wie (18.15a) angeordnet, die Produkte $\boldsymbol{xkx}$ und $\boldsymbol{kx}^2$ würden in gleicher Weise wie (18.15b) angeordnet. Grundsätzlich wird das Polynom von Orts- und Impulsoperatoren, aus denen H besteht, so umgeordnet, dass die einzelnen Summanden in der Mitte verschiedene Potenzen des Impulsoperators, und links und rechts davon symmetrische Polynome des Ortsoperators mit den Koeffizienten einer Binomialentwicklung enthalten, plus zusätzliche Summanden, die aus Funktionen ihres Kommutators bestehen. Um diese etwas komplexe Regel zu illustrieren, betrachten wir ein Beispiel:

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{x}_{j+1}|\boldsymbol{x}^2\boldsymbol{k}|\boldsymbol{x}_j\rangle &= \langle \boldsymbol{x}_{j+1}|\tfrac{1}{4}(\boldsymbol{x}^2\boldsymbol{k} + 2\boldsymbol{xkx} + \boldsymbol{kx}^2)|\boldsymbol{x}_j\rangle + g(K)\langle \boldsymbol{x}_{j+1}|\boldsymbol{x}_j\rangle = \\ &= \tfrac{1}{4}(\boldsymbol{x}_{j+1}^2 + 2\boldsymbol{x}_{j+1}\boldsymbol{x}_j + \boldsymbol{x}_j^2)\langle \boldsymbol{x}_{j+1}|\boldsymbol{k}|\boldsymbol{x}_j\rangle + g(K)\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}_{j+1} - \boldsymbol{x}_j)\end{aligned} \tag{18.16}$$

Das Matrixelement des Impulsoperators ist

$$\langle \boldsymbol{x}_{j+1}|\boldsymbol{k}|\boldsymbol{x}_j\rangle = \sum_{\boldsymbol{k}_j}\langle \boldsymbol{x}_{j+1}|\boldsymbol{k}|\boldsymbol{k}_j\rangle\langle \boldsymbol{k}_j|\boldsymbol{x}_j\rangle = \sum_{\boldsymbol{k}_j}\boldsymbol{k}_j\langle \boldsymbol{x}_{j+1}|\boldsymbol{k}_j\rangle\langle \boldsymbol{k}_j|\boldsymbol{x}_j\rangle \ .$$

Summiert wird hier über sämtliche Wellenzahlen $\boldsymbol{k}_j$, die mit der Normierung auf das endliche Volumen Ω (siehe Abschnitt 7) verträglich sind. Mit

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{x}_j\rangle &\overset{(15.36a)}{=} \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{\exp\{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}_j\}}{\sqrt{\Omega}}\,|\boldsymbol{k}\rangle \quad \Longrightarrow \\ \Longrightarrow \langle \boldsymbol{k}_j|\boldsymbol{x}_j\rangle &= \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{\exp\{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}_j\}}{\sqrt{\Omega}}\,\underbrace{\langle \boldsymbol{k}_j|\boldsymbol{k}\rangle}_{\delta_{\boldsymbol{k}_j\boldsymbol{k}}} = \frac{\exp\{-i\boldsymbol{k}_j\boldsymbol{x}_j\}}{\sqrt{\Omega}}\end{aligned} \tag{18.17}$$

und mit der Deltafunktion

$$\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}_{j+1}-\boldsymbol{x}_j) \overset{(7.9)}{=} \frac{1}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{k}_j}\exp\{+i\boldsymbol{k}_j(\boldsymbol{x}_{j+1}-\boldsymbol{x}_j)\} \tag{18.18}$$

erhält man

$$\begin{aligned}&\langle \boldsymbol{x}_{j+1}|\boldsymbol{x}^2\boldsymbol{k}|\boldsymbol{x}_j\rangle \overset{(18.16)}{=} \\ &= \frac{1}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{k}_j}\left(\left(\frac{\boldsymbol{x}_{j+1}+\boldsymbol{x}_j}{2}\right)^2\boldsymbol{k}_j + g(K)\right)\exp\{+i\boldsymbol{k}_j(\boldsymbol{x}_{j+1}-\boldsymbol{x}_j)\}\ .\end{aligned} \tag{18.19}$$

Entsprechend findet man für beliebige Hamiltonoperatoren als lineares Matrixelement

$$\begin{aligned}&\langle \boldsymbol{x}_{j+1}|H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k})|\boldsymbol{x}_j\rangle \overset{(18.16)}{=} \\ &= \frac{1}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{k}_j}E\Big(\frac{\boldsymbol{x}_{j+1}+\boldsymbol{x}_j}{2},\boldsymbol{k}_j\Big)\exp\{+i\boldsymbol{k}_j(\boldsymbol{x}_{j+1}-\boldsymbol{x}_j)\}\ ,\end{aligned} \tag{18.20}$$

und als Matrixelement des exponenzierten Hamiltonoperators

$$\begin{aligned}&\langle \boldsymbol{x}_{j+1}|\exp\{-\frac{i}{\hbar}H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k})\,\tau\}|\boldsymbol{x}_j\rangle\ = \\ &= \frac{1}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{k}_j}\exp\Big\{-\frac{i}{\hbar}E\Big(\frac{\boldsymbol{x}_{j+1}+\boldsymbol{x}_j}{2},\boldsymbol{k}_j\Big)\tau\Big\}\exp\{+i\boldsymbol{k}_j(\boldsymbol{x}_{j+1}-\boldsymbol{x}_j)\} \\ &= \frac{1}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{k}_j}\exp\Big\{\tau\,\frac{i}{\hbar}\Big(\hbar\boldsymbol{k}_j\frac{\boldsymbol{x}_{j+1}-\boldsymbol{x}_j}{\tau} - E\Big(\frac{\boldsymbol{x}_{j+1}+\boldsymbol{x}_j}{2},\boldsymbol{k}_j\Big)\Big)\Big\}\ .\end{aligned} \tag{18.21}$$

Die Funktion E hat genau die gleiche Polynom-Struktur wie der Hamiltonoperator. Wo in H eine Potenz des Ortsoperators $\boldsymbol{x}$ auftaucht, steht in E die gleiche Potenz der Zahl $(\boldsymbol{x}_{j+1}+\boldsymbol{x}_j)/2$. Wo in H eine Potenz des Wellenzahloperators $\boldsymbol{k}$ auftaucht, steht in E die gleiche Potenz des Eigenwerts $\boldsymbol{k}_j$. Zusätzlich kann E noch einen konstanten Summanden $g(K)$ enthalten, der auf die Kommutatoren zurückzuführen ist, die bei der Umordnung (18.15) auftreten.

Dies Matrixelement wird in das Produkt (18.12) eingesetzt:

$$
\begin{aligned}
U(t_N,\boldsymbol{x}_N,t_0,\boldsymbol{x}_0) &\overset{(18.12)}{=} \\
&= \int\limits_\Omega \mathrm{d}^3x_{N-1}\,\frac{1}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{k}_{N-1}} \dots \int\limits_\Omega \mathrm{d}^3x_1\,\frac{1}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{k}_1}\frac{1}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{k}_0} \\
&\quad \prod_{j=0}^{N-1} \exp\Big\{\tau\,\frac{i}{\hbar}\Big(\hbar\boldsymbol{k}_j\frac{\boldsymbol{x}_{j+1}-\boldsymbol{x}_j}{\tau} - E\Big(\frac{\boldsymbol{x}_{j+1}+\boldsymbol{x}_j}{2},\boldsymbol{k}_j\Big)\Big)\Big\} \\
&= \int\limits_\Omega \mathrm{d}^3x_{N-1}\,\frac{1}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{k}_{N-1}} \dots \int\limits_\Omega \mathrm{d}^3x_1\,\frac{1}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{k}_1}\frac{1}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{k}_0} \\
&\quad \exp\Big\{\underbrace{\frac{i}{\hbar}\sum_{j=0}^{N-1}\tau\Big(\hbar\boldsymbol{k}_j\frac{\boldsymbol{x}_{j+1}-\boldsymbol{x}_j}{\tau} - E\Big(\frac{\boldsymbol{x}_{j+1}+\boldsymbol{x}_j}{2},\boldsymbol{k}_j\Big)\Big)}_{\int_{t_0}^{t_N}\mathrm{d}t\left(\boldsymbol{p}(t_j)\dot{\boldsymbol{x}}(t_j) - E\left(\frac{\boldsymbol{x}(t_{j+1})+\boldsymbol{x}(t_j)}{2},\boldsymbol{k}(t_j)\right)\right)}\Big\}
\end{aligned}
\tag{18.22}
$$

Weil diese Gleichung nur Zahlen, aber keine Operatoren enthält, durfte das Produkt der Exponentialfunktionen in die Exponentialfunktion einer Summe umgewandelt werden.

Bei sehr großem N, und dementsprechend laut (18.9) sehr kleinem τ, wird aus der Summe im Exponenten in guter Näherung das Integral über die Lagrangefunktion

$$
L \overset{(3.20)}{=} \boldsymbol{p}\dot{\boldsymbol{x}} - E \tag{18.23}
$$

des Teilchens. Dies Integral, das als Wirkung S des Teilchens bezeichnet wird, kennen wir bereits aus Kapitel 3:

$$
S \overset{(3.2)}{=} \int\limits_{t_0}^{t_N} \mathrm{d}t\, L\Big(\boldsymbol{x}(t),\dot{\boldsymbol{x}}(t),t\Big) \tag{18.24}
$$

Dort war es unser Ausgangspunkt bei der Herleitung der Bewegungsgleichung klassischer Punktteilchen mithilfe des Hamilton'schen Prinzips der kleinsten Wirkung.

Das Produkt der $N-1$ Integrale, die in (18.22) zu den Zeiten $t_1, \dots, t_{N-1}$ über das gesamte Normierungsvolumen Ω durchgeführt werden, wird in seiner Gesamtheit *Pfadintegral* genannt. Für das Produkt der N Summen,

die zu den Zeiten $t_0, \ldots, t_{N-1}$ über sämtliche möglichen Wellenzahlen berechnet werden, ist kein besonderer Name üblich, wohl aber – genau wie für das Pfadintegral – eine besondere Schreibweise:

$$
\begin{aligned}
U(t_N, \boldsymbol{x}_N, t_0, \boldsymbol{x}_0) &\overset{(18.22)}{=} \\
&= \int_\Omega \mathrm{d}^3 x_{N-1} \, \frac{1}{\Omega} \sum_{\boldsymbol{k}_{N-1}} \cdots \int_\Omega \mathrm{d}^3 x_1 \, \frac{1}{\Omega} \sum_{\boldsymbol{k}_1} \frac{1}{\Omega} \sum_{\boldsymbol{k}_0} \\
&\quad \exp\Big\{ \frac{i}{\hbar} \underbrace{\sum_{j=0}^{N-1} \tau \Big(\hbar \boldsymbol{k}_j \frac{\boldsymbol{x}_{j+1} - \boldsymbol{x}_j}{\tau} - E\Big(\frac{\boldsymbol{x}_{j+1} + \boldsymbol{x}_j}{2}, \boldsymbol{k}_j \Big) \Big)}_{\int_{t_0}^{t_N} \mathrm{d}t \, L(t)} \Big\} \qquad (18.25a) \\
&\equiv \int_{[\boldsymbol{x}_0 \to \boldsymbol{x}_N]} \mathcal{D}\boldsymbol{x}(t) \int \frac{\mathcal{D}\boldsymbol{k}(t)}{(2\pi)^{3N}} \, \exp\Big\{ \frac{i}{\hbar} S[\boldsymbol{x}(t)] \Big\} \qquad (18.25b)
\end{aligned}
$$

Das Argument der Wirkung wird in eckige Klammern gesetzt um darauf hinzuweisen, dass mit $[\boldsymbol{x}(t)]$ nicht ein Punkt im Raum, sondern der komplette Weg des Teilchens von $\boldsymbol{x}_0$ über die $N-1$ Zwischenpunkte $\boldsymbol{x}_j$ nach $\boldsymbol{x}_N$ gemeint ist. Man sieht ja in (18.24) deutlich, dass die Wirkung nicht von einem Punkt, sondern vom gesamten Weg abhängt. Außerdem wurde in (18.25b) zwecks einheitlicher Schreibweise durch

$$
\int \frac{\mathcal{D}\boldsymbol{k}(t)}{(2\pi)^{3N}} \equiv \prod_{j=0}^{N-1} \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}_j}{(2\pi)^3} \approx \prod_{j=0}^{N-1} \frac{1}{\Omega} \sum_{\boldsymbol{k}_j} \qquad (18.26)
$$

zur Normierung auf unendliches Volumen übergegangen.

Abbildung 18.1 ist der unbeholfene Versuch, das Pfadintegral in einer Grafik zu veranschaulichen. Im Interesse der Übersichtlichkeit wurde hier $N = 3$ angenommen, während N in der Praxis eine „sehr große“ Zahl sein wird. Zur Zeit t_0 befindet sich das Teilchen am Ort $\boldsymbol{x}_0$, zur Zeit t_3 befindet es sich am Ort $\boldsymbol{x}_3$. In den Zeitpunkten t_1 und t_2 befindet es sich *irgendwo* im Normierungsvolumen, denn in (18.25a) wird ja mit $\int_\Omega \mathrm{d}^3 x(t_1)$ und mit $\int_\Omega \mathrm{d}^3 x(t_2)$ über das gesamte Normierungsvolumen Ω integriert. Statt des

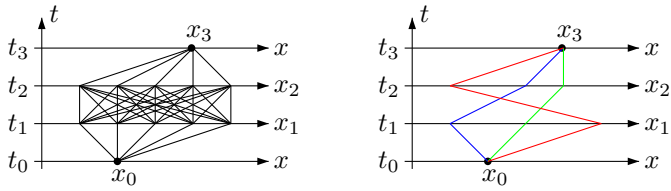


Abb. 18.1 : Einige Pfade von x_0 nach x_3

Kontinuums der mehr als abzählbar unendlich vielen Orte, an denen sich das Teilchen zu den Zeiten t_1 und t_2 befinden kann, wurden in der linken Skizze einfachheitshalber nur je 5 mögliche Orte eingezeichnet. Jede Linie, die von $\boldsymbol{x}_0$ über beliebige Zwischenpunkte $\boldsymbol{x}_1$ und $\boldsymbol{x}_2$ nach $\boldsymbol{x}_3$ führt, wird als „Pfad“ bezeichnet. In der linken Skizze sind 25 verschiedene Pfade zwischen $\boldsymbol{x}_0$ und $\boldsymbol{x}_3$ eingezeichnet, in der rechten Skizze sind deutlichkeitshalber drei von ihnen durch Farben besonders hervorgehoben gezeichnet. Das Pfadintegral ist ein Integral nicht nur über die eingezeichneten 25 Pfade, sondern über das gesamte Kontinuum sämtlicher Pfade, auf denen das Teilchen von $\boldsymbol{x}_0$ nach $\boldsymbol{x}_3$ gelangen kann.

Das Pfadintegral darf nicht mit einem Wegintegral verwechselt werden, deshalb wird sein Differential nicht mit d sondern mit $\mathcal{D}$ gekennzeichnet:

$$\int\limits_{[\boldsymbol{x}_0 \to \boldsymbol{x}_N]} \mathcal{D}\boldsymbol{x}(t) \neq \int\limits_{\boldsymbol{x}_0}^{\boldsymbol{x}_N} \mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{18.27}$$

Beim Pfadintegral wird nicht über ein Kontinuum von Punkten integriert, die in ihrer Gesamtheit einen Weg von $\boldsymbol{x}_0$ nach $\boldsymbol{x}_N$ bilden, sondern über ein Kontinuum kompletter Pfade, von denen jeder einzelne – wie beispielsweise die drei farbig gekennzeichneten Pfade in der rechten Abbildung 18.1 – vom Punkt $\boldsymbol{x}_0$ zum Punkt $\boldsymbol{x}_N$ führt. Das wird durch $[\boldsymbol{x}_0 \to \boldsymbol{x}_N]$ unter dem Integralzeichen spezifiziert. Man kann sich zwar anschaulich eine vage Vorstellung davon machen, was mit einer Integration über Pfade gemeint wird. Es gibt aber keine mathematisch solide Definition des Integrationsmaßes $\mathcal{D}\boldsymbol{x}(t)$ und keine mathematisch ausgearbeitete Theorie, wie damit

umzugehen wäre.

Das gilt genauso für das Produkt

$$\int \frac{\mathcal{D}\boldsymbol{k}(t)}{(2\pi)^{3N}} \equiv \frac{1}{\Omega} \sum_{\boldsymbol{k}_{N-1}} \cdots \frac{1}{\Omega} \sum_{\boldsymbol{k}_0} .$$

der Summen über $\boldsymbol{k}$. Jede einzelne Summe läuft über sämtliche (abzählbar unendlich vielen) Wellenzahlen, die mit der Normierung auf das endliche Volumen Ω verträglich sind. Aber niemand kann ein Kontinuum von Summen berechnen, d.h. der durch $\int \mathcal{D}\boldsymbol{k}$ angedeutete Grenzübergang $N \to \infty$ ist mathematisch nicht definiert und undurchführbar.

(18.25b) ist nichts weiter als eine symbolische Schreibweise für (18.25a). Wann immer man ein konkretes Pfadintegral tatsächlich berechnen möchte, greift man auf (18.25a) zurück. Weil es keine analytische Methode gibt, um eine kontinuierliche Menge von Integralen oder Summen zu berechnen, wird die Anzahl N der Stützstellen zwar möglichst groß, aber endlich gewählt.

Wenn man (18.25) mit Dirac's einfachem Ansatz (18.2) vergleicht erkennt man, dass Feynman's wesentliche Erweiterung darin bestand, nicht nur einen einzigen Pfad zwischen den Punkten zu betrachten, an denen sich das Teilchen zur Zeit t_0 und t_N befindet, sondern über sämtliche Pfade zu summieren, die das Teilchen möglicherweise nehmen kann.

Wenn zuweilen gesagt wird, dass „die Extreme sich berühren", dann ist das Pfadintegral dafür ein schönes Beispiel. Heisenberg wurde bei der Entdeckung der Quantenmechanik unter anderem von dem Gedanken geleitet, dass die klassische Vorstellung der „Bahn" für ein quantenmechanisches Teilchen sinnlos ist, und aus dem Formalismus vollständig entfernt werden muss. Feynman ordnet dem Teilchen dagegen unendlich viele – mit dem Faktor $\exp\{iS[\boldsymbol{x}(t)]/\hbar\}$ gewichtete – Bahnen zu, und gelangt damit zum gleichen Ergebnis! Klarerweise sind unendlich viele Bahnen mit der klassischen Vorstellung *einer* Bahn genauso unvereinbar wie Heisenberg's Bahnfreier Formalismus.

Warnung: Es ist in der Literatur üblich, die Begriffe Pfad und Weg unterschiedslos zu benutzen, also von Pfadintegralen über einen Pfad oder einen Weg, und von Wegintegralen über einen Weg oder einen Pfad zu sprechen. Auch wir werden diese laxe Sprechweise verwenden. Es bleibt der

Aufmerksamkeit des Lesers überlassen im Einzelfall zu erkennen, ob ein Pfadintegral oder ein Wegintegral gemeint ist.

18.1.2 Berechnung der Summen über $\boldsymbol{k}$

Bisher haben wir zugelassen, dass der Hamiltonoperator $H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k})$ ein beliebiges Polynom des Ortsoperators $\boldsymbol{x}$ und des Impulsoperators $\hbar\boldsymbol{k}$ sein kann. Im Spezialfall

$$H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k}) \equiv \frac{\hbar^2\boldsymbol{k}^2}{2m} + V(\boldsymbol{x}) \tag{18.28}$$

erhält man folgende Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$U(t_N,\boldsymbol{x}_N,t_0,\boldsymbol{x}_0) \overset{(18.22)}{=} \int\limits_\Omega \mathrm{d}^3x_{N-1}\,\frac{1}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{k}_{N-1}} \ldots \int\limits_\Omega \mathrm{d}^3x_1\,\frac{1}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{k}_1}\frac{1}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{k}_0}\cdot$$
$$\exp\Big\{\frac{i}{\hbar}\sum_{j=0}^{N-1}\tau\Big(\hbar\boldsymbol{k}_j\frac{\boldsymbol{x}_{j+1}-\boldsymbol{x}_j}{\tau} - \frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{k}_j^2\Big)\Big\}\exp\Big\{-\frac{i}{\hbar}\sum_{j=0}^{N-1}\tau V\Big(\frac{\boldsymbol{x}_{j+1}+\boldsymbol{x}_j}{2}\Big)\Big\} \tag{18.29}$$

Die runde Klammer in der zweiten Exponentialfunktion ist das Argument von V. Weil $\boldsymbol{k}_j$ und $\boldsymbol{x}_j$ nicht Operatoren sondern Eigenwerte sind, durfte die Exponentialfunktion in zwei Teile zerlegt werden. Die Summen über $\boldsymbol{k}_j$ können unter Beachtung von (7.5) analytisch berechnet werden mithilfe der Formel für das Gauß'sche Integral mit rein imaginärem Argument der Exponentialfunktion. Diese Formel wird in Anhang A.23 angegeben. Damit erhält man die Wahrscheinlichkeitsamplitude

$$U(t_N,\boldsymbol{x}_N,t_0,\boldsymbol{x}_0) = \int\limits_\Omega \mathrm{d}^3x_{N-1}\ldots\int\limits_\Omega \mathrm{d}^3x_1\,\frac{1}{(2\pi)^{3N}}\Big(\frac{\pi 2m}{i\tau\hbar}\Big)^{\frac{3N}{2}}\cdot$$
$$\cdot\exp\Big\{\sum_{j=0}^{N-1}\frac{-(\boldsymbol{x}_{j+1}-\boldsymbol{x}_j)^2 2m}{4i\tau\hbar}\Big\}\exp\Big\{-\frac{i}{\hbar}\sum_{j=0}^{N-1}\tau V\Big(\frac{\boldsymbol{x}_{j+1}+\boldsymbol{x}_j}{2}\Big)\Big\}\,. \tag{18.30}$$

Mit der Definition der Funktion

$$C(N) \equiv \frac{1}{(2\pi)^{3N}} \left(\frac{\pi 2m}{i\tau\hbar}\right)^{\frac{3N}{2}} , \tag{18.31}$$

die durch die Exponenten und durch $\tau = (18.9)$ gleich mehrfach von N abhängt, erhält die Wahrscheinlichkeitsamplitude schließlich die Form

$$U(t_N, \boldsymbol{x}_N, t_0, \boldsymbol{x}_0) = C(N) \int_\Omega \mathrm{d}^3 x_{N-1} \ldots \int_\Omega \mathrm{d}^3 x_1 \cdot$$
$$\cdot \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \sum_{j=0}^{N-1} \tau \left(\frac{m}{2}\left(\frac{\boldsymbol{x}_{j+1} - \boldsymbol{x}_j}{\tau}\right)^2 - V\left(\frac{\boldsymbol{x}_{j+1} + \boldsymbol{x}_j}{2}\right)\right)\right\} . \tag{18.32}$$

Die quadrierte runde Klammer ist ein Faktor, die nicht quadrierte runde Klammer hinter V ist das Argument von V. Wieder kann man

$$\sum_{j=0}^{N-1} \tau \left(\frac{m}{2}\left(\frac{\boldsymbol{x}_{j+1} - \boldsymbol{x}_j}{\tau}\right)^2 - V\left(\frac{\boldsymbol{x}_{j+1} + \boldsymbol{x}_j}{2}\right)\right) \approx$$
$$\approx \sum_{j=0}^{N-1} \tau \Big(E_{\mathrm{kin}}(t_j) - E_{\mathrm{pot}}(t_j)\Big) \approx \int_{t_0}^{t_N} \mathrm{d}t\, L\Big(\boldsymbol{x}(t), \dot{\boldsymbol{x}}(t)\Big) = S[\boldsymbol{x}(t)] \tag{18.33}$$

identifizieren, und die symbolische Schreibweise für das Pfadintegral verwenden:

$$U(t_N, \boldsymbol{x}_N, t_0, \boldsymbol{x}_0) = C(N) \int_\Omega \mathrm{d}^3 x_{N-1} \ldots \int_\Omega \mathrm{d}^3 x_1$$
$$\exp\Bigg\{\underbrace{\frac{i}{\hbar} \sum_{j=0}^{N-1} \tau \left(\frac{m}{2}\left(\frac{\boldsymbol{x}_{j+1} - \boldsymbol{x}_j}{\tau}\right)^2 - V\left(\frac{\boldsymbol{x}_{j+1} + \boldsymbol{x}_j}{2}\right)\right)}_{\int_{t_0}^{t_N} \mathrm{d}t\, L\left(\boldsymbol{x}(t), \dot{\boldsymbol{x}}(t)\right)}\Bigg\} \tag{18.34a}$$
$$\equiv C(N) \int_{[\boldsymbol{x}_0 \to \boldsymbol{x}_N]} \mathcal{D}\boldsymbol{x}(t) \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S[\boldsymbol{x}(t)]\right\} \tag{18.34b}$$

Diese Formel unterscheidet sich von (18.25) nur dadurch, dass das Produkt der Summen über $\boldsymbol{k}$ jetzt durch den Faktor $C(N) =$ (18.31) ersetzt ist. Im Fall $N \to \infty$ würde dieser Faktor divergieren. Dies ist ein weiterer Grund, sich auf eine endliche Anzahl N von Integralen zu beschränken. Gleichung (18.34b), die ein Kontinuum von Integralen suggeriert, ist nichts weiter als eine symbolische Schreibweise für Gleichung (18.34a), die eine endliche Anzahl von $N-1$ diskreten Integralen enthält.

Wir werden im Folgenden nur noch (18.34) verwenden, aber nicht mehr (18.25). Im Fall des einfachen Hamiltonoperators (18.28) konnten wir den Faktor $C(N)$ analytisch berechnen. Wir nehmen an, dass mit beliebigen anderen Hamiltonoperatoren zumindest eine numerische Berechnung von $C(N)$ immer möglich sein wird, und dass $C(N)$ – bei endlichem N – immer eine endliche, von Null verschiedene Zahl sein wird. In der Praxis werden wir uns die Arbeit der Berechnung von $C(N)$ sparen. Denn ein endlicher, von Null verschiedener Faktor $C(N)$ kann durch Normierung problemlos aus den Berechnungen von Matrixelementen eliminiert werden.

18.1.3 Ein Minimal-Modell

Die Pfade werden mit zunehmendem N, also zunehmender Zahl der Zwischenzeiten t_j, die zwischen t_0 und t_N eingeschoben werden, nicht glatter. Im Gegenteil: Die Pfade werden zu immer extremeren Fieberkurven, weil $\boldsymbol{x}$ im Zeitraum $t_{j+1} - t_j$ beliebig weite Sprünge durch das Normierungsvolumen machen kann. Die Pfade sind keine differenzierbaren Kurven, sondern sogenannte Markov-Ketten.

Wenn das (virtuelle, sprich unbeobachtete) Teilchen zwischen den Zeitpunkten t_j und t_{j+1} sehr große Sprünge macht, dann kann die kinetische Energie, und demzufolge die Wirkung S, gigantische Werte annehmen. Man könnte überlegen, ob durch zusätzliche Bedingungen der Fall $(\boldsymbol{x}_{j+1} - \boldsymbol{x}_j)/(t_{j+1} - t_j) > c$ verhindert werden muss. Das ist aber unnötig. Denn bemerkenswerterweise sind es gerade nicht die Pfade mit gigantischer Wirkung, sondern die Pfade mit besonders kleiner Wirkung, die die größten Beiträge zu $U(t_N, \boldsymbol{x}_N, t_0, \boldsymbol{x}_0)$ liefern. Das machen wir uns klar, indem wir ein einfaches Modell explizit berechnen.

Für die numerische Berechnung ist es nützlich, eine Konstante M mit der

Dimension einer Masse einzuführen, und den dimensionslosen Ortsvektor

$$\boldsymbol{X}_j \equiv \sqrt{\frac{M}{2\hbar\tau}}\,\boldsymbol{x}_j \tag{18.35}$$

zu definieren. Damit erhält man

$$U(t_N,\boldsymbol{x}_N,t_0,\boldsymbol{x}_0) \overset{(18.34a)}{=} \underbrace{C\cdot\left(\frac{2\hbar\tau}{M}\right)^{\frac{N-1}{2}}}_{\widetilde{C}} \int\limits_\Omega \mathrm{d}^3\boldsymbol{X}_{N-1}\,\ldots\int\limits_\Omega \mathrm{d}^3\boldsymbol{X}_1$$
$$\exp\Big\{i\sum_{j=0}^{N-1}\left(\frac{m}{M}(\boldsymbol{X}_{j+1}-\boldsymbol{X}_j)^2-\frac{\tau}{\hbar}V\right)\Big\}\,. \tag{18.36}$$

Die Potentielle Energie definieren wir unabhängig vom Ort als

$$V(\boldsymbol{x}) \equiv 15\,\frac{\hbar}{\tau}\,. \tag{18.37}$$

(V ist und bleibt zeitunabhängig, denn τ ist eine Konstante, kein laufender Zeitparameter.) Als Minimalmodell betrachten wir ein Teilchen, das zur Zeit t_0 am Ort $\boldsymbol{x}_0$ und zur Zeit t_2 am Ort $\boldsymbol{x}_2$ beobachtet wird. Dazwischen legen wir nur einen einzigen Zeitpunkt t_1, zu dem sich das Teilchen irgendwo im Normierungsvolumen Ω befinden kann. Außerdem beschränken wir das Modell zur weiteren Vereinfachung und Konzentration auf das Wesentliche auf nur eine Raumdimension. Wir wählen

$$X_0 \equiv 4 \qquad\qquad X_2 \equiv 6\,. \tag{18.38}$$

Einsetzen in (18.36) ergibt

$$U(t_2,x_2,t_0,x_0) = \widetilde{C}\int\limits_{\Omega^{1/3}}\mathrm{d}X_1$$
$$\exp\Big\{i\Big(\frac{m}{M}(4-X_1)^2+\frac{m}{M}(6-X_1)^2-30\Big)\Big\}\,. \tag{18.39}$$

Wir lassen den PC dies Modell für zwei Teilchen mit unterschiedlichen

Massen berechnen, nämlich

$$m \equiv 0.8\,M \quad \longrightarrow \text{ siehe Abbildung 18.2} \tag{18.40a}$$
$$m \equiv 2.4\,M \quad \longrightarrow \text{ siehe Abbildung 18.3 .} \tag{18.40b}$$

Vorschlag: Öffnen Sie das Buch zusätzlich in einem zweiten Fenster des Readers, damit Sie diesen Text und die Abbildungen 18.2 und 18.3 gleichzeitig sehen können. Realteil und Imaginärteil von

$$\exp\Big\{\frac{i}{\hbar}S[x_1]\Big\} = \exp\Big\{i\Big(\frac{m}{M}(4-X_1)^2 + \frac{m}{M}(6-X_1)^2 - 30\Big)\Big\}$$

für Wege über verschiedene Zwischenpunkte X_1 sind in den Abbildungen 18.2 und 18.3 jeweils im unteren Teil dargestellt. Die Wirkung S hat ein Minimum bei einem Weg über $X_1 = 5$. Bei Pfaden über andere Punkte X_1 steigt die Wirkung quadratisch an, was sich in immer dichter aufeinander folgenden Oszillationen von $\exp\{iS[x_1]/\hbar\}$ bemerkbar macht.

$U(t_2, x_2, t_0, x_0)/\widetilde{C}$ ist die nicht normierte Wahrscheinlichkeitsamplitude dafür, dass sich das Teilchen überhaupt – egal über welchen Zwischenpunkt x_1 – von x_0 nach x_2 bewegt. Wenn wir uns für die relative Wahrscheinlichkeit dafür interessieren, dass das Teilchen nicht irgendeinen beliebigen Weg nimmt, sondern einen Weg, bei dem es in der Nähe eines ganz bestimmten Punktes x_1 vorbeikommt, dann dürfen wir in (18.39) nicht das Integral über das gesamte Normierungsvolumen nehmen, sondern nur das Integral über eine kleine Umgebung dieses besonders interessanten Punktes x_1. Das wurde im jeweils oberen Graph der beiden Abbildungen 18.2 und 18.3 gemacht, siehe Formel in den Graphen. Diese grün eingetragenen Kurven geben die relative (nicht normierte) Wahrscheinlichkeit dafür an, dass das Teilchen seinen Weg von x_0 nach x_2 gerade über diesen bestimmten Punkt x_1 nimmt.

Es lohnt sich, die beiden Abbildungen genau zu vergleichen. Der einzige Unterschied zwischen ihnen besteht darin, dass das Teilchen von Abbildung 18.3 eine 3× so große Masse hat wie das Teilchen von Abbildung 18.2. Dieser Unterschied führt dazu, dass der Weg des leichteren Teilchens mit erheblicher Wahrscheinlichkeit ziemlich weit vom Weg mit minimaler Wirkung (also dem Weg, der über den Punkt $X_1 = 5$ verläuft) entfernt sein kann, während das schwerere Teilchen mit hoher Wahrscheinlichkeit

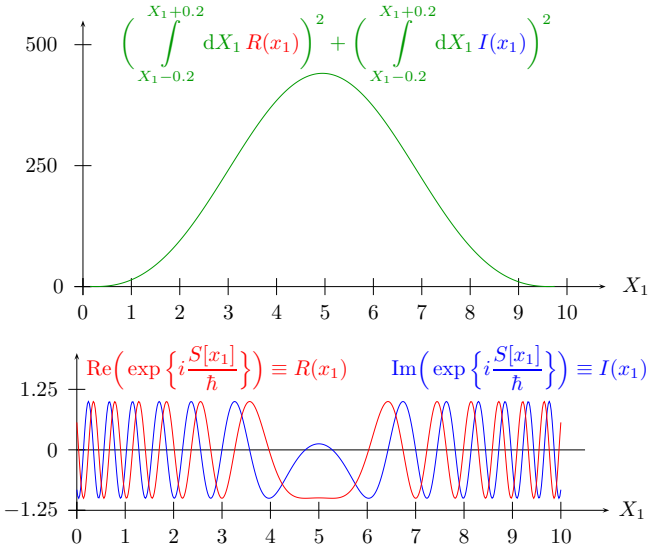


Abb. 18.2: Modell mit $m = 0.8\,M$

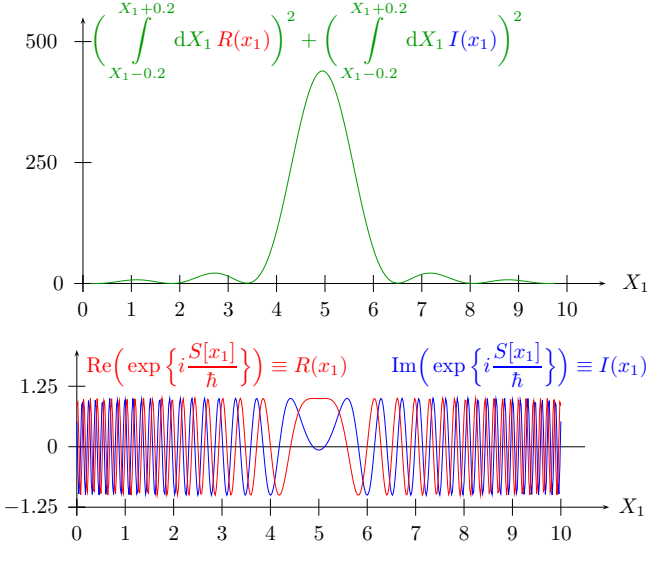


Abb. 18.3: Modell mit $m = 2.4\,M$

einen Weg dicht an $X_1 = 5$ nehmen wird. Je kleiner das Verhältnis $\hbar/S$ ist, desto schmaler wird die grüne Kurve der Abbildungen 18.2 und 18.3, desto weniger wird sich also das Teilchen vom Weg mit der minimalen Wirkung entfernen. Im klassischen Grenzfall, der charakterisiert ist durch die Vernachlässigbarkeit des Planck'schen Wirkungsquantums gegenüber der Wirkung S des untersuchten Systems ($\hbar/S \ll 1$), wird die grüne Kurve zu einer spitzen Nadel mit vernachlässigbarer Breite, d.h. das Teilchens wird mit Sicherheit den Weg mit minimaler Wirkung nehmen. Genau dies besagt das Hamilton'sche Prinzip der Klassischen Physik, aus dem wir in Kapitel 3 die Klassischen Bewegungsgleichungen abgeleitet haben. Das Hamilton'sche Prinzip der kleinsten Wirkung, das im Rahmen der Klassischen Physik als nicht herleitbares Naturgesetz akzeptiert werden musste, erhält auf diese Weise durch die Quantenmechanik eine plausible Begründung.

18.1.4 Matrixelemente des Ortsoperators

Bisher haben wir Matrixelemente des Zeitentwicklungsoperators berechnet. Wenn wir im nächsten Abschnitt die Methode der Pfadintegrale auf Felder erweitern, dann werden wir uns auch für Matrixelemente der Feldoperatoren interessieren. Weil die Feldoperatoren (d.h. die quantisierten Amplituden der klassischen Felder) das feldtheoretische Gegenstück zu den Ortsoperatoren der Punktmechanik sind, lohnt es sich vorab zu klären, wie man mithilfe von Pfadintegralen Matrixelemente von Ortsoperatoren der Punktmechanik berechnen kann.

Dazu fügen wir in die rechte Seite von (18.34a) die klassische Funktion $\boldsymbol{x}_a \equiv \boldsymbol{x}(t_a)$ mit $t_0 < t_a < t_N$ ein:

$$C(N) \int_\Omega \mathrm{d}^3 x_{N-1} \ldots \int_\Omega \mathrm{d}^3 x_a \ldots \int_\Omega \mathrm{d}^3 x_1 \, \boldsymbol{x}(t_a) \exp\Big\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t_N} \mathrm{d}t \, L\Big(\boldsymbol{x}(t), \dot{\boldsymbol{x}}(t)\Big) \Big\} \tag{18.41}$$

Es war bei der Herleitung von (18.34) zwar einfach und praktisch, den Zeitraum von t_0 bis t_N in der Weise in N Intervalle zu teilen, dass alle Intervalle gleich lang waren. Notwendig war das aber an keiner Stelle. Man

kann deshalb eines der $N-1$ Integrale in (18.41) über die Koordinate $\boldsymbol{x}_a \equiv \boldsymbol{x}(t_a)$ laufen lassen, egal wo der Zeitpunkt t_a im Kontinuum $t_0 < t_a < t_N$ liegt.

Jetzt machen wir uns zunutze, dass es im Pfadintegral nur $N-1$ Raumintegrale über die Zwischenpunkte der Pfade gibt, aber keine Integrale über die Randpunkte $\boldsymbol{x}_0$ und $\boldsymbol{x}_N$. Wenn man das Pfadintegral bei $\boldsymbol{x}_a$ auftrennt, dann wird $\boldsymbol{x}_a$ zum Randpunkt zweier Pfadintegrale, und das Integral über $\boldsymbol{x}_a$ gehört zu keinem von beiden:

$$\begin{aligned}(18.41) = \int\limits_{\Omega} \mathrm{d}^3 x_a \left(C(N-a) \int\limits_{[\boldsymbol{x}_a \to \boldsymbol{x}_N]} \mathcal{D}\boldsymbol{x}(t) \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} S[\boldsymbol{x}(t)] \right\} \right) \cdot \\ \cdot\, \boldsymbol{x}(t_a) \left(C(a) \int\limits_{[\boldsymbol{x}_0 \to \boldsymbol{x}_a]} \mathcal{D}\boldsymbol{x}(t) \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} S[\boldsymbol{x}(t)] \right\} \right) \end{aligned} \tag{18.42}$$

Weil das Pfadintegral nur kommutierende klassische Funktionen enthält, jedoch keine Operatoren, durften Faktoren vertauscht werden. Nun nutzen wir die Identität der beiden Pfadintegrale mit den Matrixelementen des Zeitentwicklungsoperators, und setzen außerdem in der zweiten Zeile der folgenden Gleichung den Ortsoperator der Quantenmechanik ein, den wir deutlichkeitshalber mit einem Hut kennzeichnen:

$$\begin{aligned}(18.42) &= \int\limits_{\Omega} \mathrm{d}^3 x_a \, \langle t_N, \boldsymbol{x}_N | t_a, \boldsymbol{x}_a \rangle \, \boldsymbol{x}(t_a) \, \langle t_a, \boldsymbol{x}_a | t_0, \boldsymbol{x}_0 \rangle \\ &= \int\limits_{\Omega} \mathrm{d}^3 x_a \, \langle t_N, \boldsymbol{x}_N | \, \hat{\boldsymbol{x}}(t_a) \, | t_a, \boldsymbol{x}_a \rangle \langle t_a, \boldsymbol{x}_a | t_0, \boldsymbol{x}_0 \rangle \\ &= \langle t_N, \boldsymbol{x}_N | \, \hat{\boldsymbol{x}}(t_a) \, | t_0, \boldsymbol{x}_0 \rangle \ . \end{aligned} \tag{18.43}$$

In der letzten Zeile wurde die Vollständigkeitsrelation

$$1 = \int\limits_{\Omega} \mathrm{d}^3 x_a \, | t_a, \boldsymbol{x}_a \rangle \langle t_a, \boldsymbol{x}_a | \tag{18.44}$$

der Basisvektoren genutzt. Unter der Bedingung $t_0 < t_a < t_N$ gilt also insgesamt

$$\langle t_N, \boldsymbol{x}_N |\, \hat{\boldsymbol{x}}(t_a)\, | t_0, \boldsymbol{x}_0 \rangle \;= \\ = C(N) \int\limits_{[\boldsymbol{x}_0 \to \boldsymbol{x}_N]} \mathcal{D}\boldsymbol{x}(t)\, \boldsymbol{x}(t_a)\, \exp\Big\{ \frac{i}{\hbar} S[\boldsymbol{x}(t)] \Big\} \,. \tag{18.45}$$

In der Praxis interessiert man sich für das normierte Matrixelement

$$\boxed{\frac{\langle t_N, \boldsymbol{x}_N |\, \hat{\boldsymbol{x}}(t_a)\, | t_0, \boldsymbol{x}_0 \rangle}{\langle t_N, \boldsymbol{x}_N | t_0, \boldsymbol{x}_0 \rangle} = \frac{\int\limits_{[\boldsymbol{x}_0 \to \boldsymbol{x}_N]} \mathcal{D}\boldsymbol{x}(t)\, \boldsymbol{x}(t_a)\, \exp\Big\{ \frac{i}{\hbar} S[\boldsymbol{x}(t)] \Big\}}{\int\limits_{[\boldsymbol{x}_0 \to \boldsymbol{x}_N]} \mathcal{D}\boldsymbol{x}(t)\, \exp\Big\{ \frac{i}{\hbar} S[\boldsymbol{x}(t)] \Big\}}} \tag{18.46}$$

in dem der Faktor $C(N)$ gekürzt wurde. Auf der linken Seite dieser Gleichung steht das normierte Matrixelement des Ortsoperators $\hat{\boldsymbol{x}}(t_a)$, berechnet im Formalismus der kanonisch quantisierten Punktmechanik. Auf der rechten Seite wird die gleiche Größe durch ein normiertes Pfadintegral berechnet. Alle Faktoren auf der rechten Seite sind klassische Funktionen mit kommutativer Algebra, auch die Ortsfunktion $\boldsymbol{x}(t_a)$. Das Matrixelement des Ortsoperators $\hat{\boldsymbol{x}}(t_a)$ ist identisch mit dem Pfadintegral über die klassische Ortsfunktion $\boldsymbol{x}(t_a)$, gewichtet mit dem Faktor $\exp\{iS/\hbar\}$.

Wenn man eine zweite Ortsfunktion $\boldsymbol{x}(t_b)$ mit $t_0 < t_b < t_N$ und $t_b \neq t_a$ ins Pfadintegral einsetzt, dann erhält man automatisch immer das Matrixelement der zeitgeordneten Ortsoperatoren:

$$\frac{\langle t_N, \boldsymbol{x}_N |\, T\hat{\boldsymbol{x}}(t_a)\hat{\boldsymbol{x}}(t_b)\, | t_0, \boldsymbol{x}_0 \rangle}{\langle t_N, \boldsymbol{x}_N | t_0, \boldsymbol{x}_0 \rangle} \;= \\ = \frac{\int\limits_{[\boldsymbol{x}_0 \to \boldsymbol{x}_N]} \mathcal{D}\boldsymbol{x}(t)\, \boldsymbol{x}(t_a)\boldsymbol{x}(t_b)\, \exp\Big\{ \frac{i}{\hbar} S[\boldsymbol{x}(t)] \Big\}}{\int\limits_{[\boldsymbol{x}_0 \to \boldsymbol{x}_N]} \mathcal{D}\boldsymbol{x}(t)\, \exp\Big\{ \frac{i}{\hbar} S[\boldsymbol{x}(t)] \Big\}} \tag{18.47a}$$

$$= \frac{\int\limits_{[\boldsymbol{x}_0 \to \boldsymbol{x}_N]} \mathcal{D}\boldsymbol{x}(t)\, \boldsymbol{x}(t_b)\boldsymbol{x}(t_a)\, \exp\Big\{ \frac{i}{\hbar} S[\boldsymbol{x}(t)] \Big\}}{\int\limits_{[\boldsymbol{x}_0 \to \boldsymbol{x}_N]} \mathcal{D}\boldsymbol{x}(t)\, \exp\Big\{ \frac{i}{\hbar} S[\boldsymbol{x}(t)] \Big\}} \tag{18.47b}$$

Unter dem Pfadintegral ist die Reihenfolge der Ortsfunktionen egal, da sie ja

klassische, kommutierende Funktionen sind. Aber die (18.42) entsprechende Aufspaltung des Pfadintegrals

$$
\begin{aligned}
&(18.42) \Longrightarrow \\
&\int\limits_{\Omega} \mathrm{d}^3x_a \int\limits_{\Omega} \mathrm{d}^3x_b \left(C(N-a) \int\limits_{[\boldsymbol{x}_a \to \boldsymbol{x}_N]} \mathcal{D}\boldsymbol{x}(t) \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} S[\boldsymbol{x}(t)] \right\} \right) \\
&\qquad \boldsymbol{x}(t_a) \left(C(a-b) \int\limits_{[\boldsymbol{x}_b \to \boldsymbol{x}_a]} \mathcal{D}\boldsymbol{x}(t) \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} S[\boldsymbol{x}(t)] \right\} \right) \\
&\qquad \boldsymbol{x}(t_b) \left(C(b) \int\limits_{[\boldsymbol{x}_0 \to \boldsymbol{x}_b]} \mathcal{D}\boldsymbol{x}(t) \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} S[\boldsymbol{x}(t)] \right\} \right) \qquad (18.48)
\end{aligned}
$$

in die drei Teile $[\boldsymbol{x}_0 \to \boldsymbol{x}_b]$, $[\boldsymbol{x}_b \to \boldsymbol{x}_a]$, und $[\boldsymbol{x}_a \to \boldsymbol{x}_N]$ ist nur dann korrekt, wenn $t_0 < t_b < t_a < t_N$ ist. Im Fall $t_b > t_a$ müssen in (18.48) t_a und t_b getauscht werden. Deshalb erhält man auf der linken Seite von (18.47) zwangsläufig immer das zeitgeordnete Produkt der Ortsoperatoren. Das gleiche gilt auch, wenn man Produkte von mehr als zwei Ortsoperatoren berechnet.

18.2 Das erzeugende Funktional $W[J]$

Funktionen $f(x) = y$ bilden Zahlen x auf Zahlen y ab. Funktionale $g[f(x)] = y$ bilden Funktionen $f(x)$ auf Zahlen y ab. Die Definition des Funktionalintegrals

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{[\boldsymbol{x}(t_0) \to \boldsymbol{x}(t_N)]} \mathcal{D}\boldsymbol{x}(t)\, f[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{k}(t)] \overset{(18.25)}{\equiv} \prod_{j=1}^{N-1} \int\limits_{\Omega} \mathrm{d}^3x(t_j)\, f[\boldsymbol{x}(t_j), \boldsymbol{k}(t_j)] \\
&\int\limits_{[\boldsymbol{k}(t_0) \to \boldsymbol{k}(t_N)]} \frac{\mathcal{D}\boldsymbol{k}(t)}{(2\pi)^{3N}}\, f[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{k}(t)] \overset{(18.25)}{\equiv} \prod_{j=1}^{N-1} \frac{1}{\Omega} \sum_{\boldsymbol{k}(t_j)} f[\boldsymbol{x}(t_j), \boldsymbol{k}(t_j)] \\
&\qquad \text{mit } t_N > t_{N-1} > \ldots > t_1 > t_0 \qquad (18.49)
\end{aligned}
$$

haben wir in diesem Kapitel bereits mehrfach verwendet. Im Folgenden benötigen wir auch die Funktionalableitung. Die Ableitung einer Funktion $f(x)$ nach der Variablen x wird als $\mathrm{d}f(x)/\mathrm{d}x$ geschrieben. Bei der Erweiterung der Ableitung zur Funktionalableitung

$$\frac{\delta F[f(y)]}{\delta f(x)}$$

wird anstelle des Zeichens d das Zeichen δ verwendet. In Analogie zu

$$\frac{\mathrm{d}\,x_i}{\mathrm{d}\,x_j} = \delta_{ij}$$

ist es naheliegend,

$$\frac{\delta f(y)}{\delta g(x)} \equiv \delta_{fg}\delta^{(4)}(x-y) \tag{18.50}$$

zu *definieren*. Außerdem wird per Definition festgelegt, dass bei der Funktionalableitung die Kettenregel in genau der gleichen Weise anzuwenden ist wie bei der Ableitung von Funktionen. Damit gilt beispielsweise:

$$\frac{\delta}{\delta f(x)} \int \mathrm{d}^4y\, f(y)\phi(y) = \phi(x)$$
$$\frac{\delta}{\delta f(x)} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int \mathrm{d}^4y\, f(y)\phi(y)\right\} = \frac{i}{\hbar}\,\phi(x)\,\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int \mathrm{d}^4y\, f(y)\phi(y)\right\}$$

Mit einer Hilfsfunktion $J(t)$, die nicht genauer spezifiziert wird, definiert man das erzeugende Funktional $W[J(t)]$, das auch als Vakuum-Vakuum-Amplitude[1] bezeichnet wird, folgendermaßen:

$$W[J(t)] \equiv C(N) \int_\Omega \mathrm{d}^3x_{N-1} \ldots \int_\Omega \mathrm{d}^3x_1\, \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t_N} \mathrm{d}t \left(L + \boldsymbol{x}(t)J(t)\right)\right\} \tag{18.51}$$

[1] Die Begründung für diesen Namen kann man in [7, Abschnitt 11.5] nachlesen.

Im Unterschied zu (18.34a) hat $W[J(t)]$ im Exponenten den Quellterm $\boldsymbol{x}(t)J(t)$. Also ist

$$\frac{\delta W[J(t)]}{\delta J(t_a)}\bigg|_{J=0} = C(N) \int_\Omega \mathrm{d}^3x_{N-1} \ldots \int_\Omega \mathrm{d}^3x_1 \, \frac{i}{\hbar}\, \boldsymbol{x}(t_a) \exp\Big\{\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t_N} \mathrm{d}t\, L\Big\}$$
$$= \frac{i}{\hbar} \cdot (18.41) \;, \tag{18.52}$$

und es gilt wegen (18.46) allgemein

$$\langle t_N, \boldsymbol{x}_N |\, T\, \underbrace{\hat{\boldsymbol{x}}(t_a) \ldots \hat{\boldsymbol{x}}(t_z)}_{m \text{ Operatoren}} |t_0, \boldsymbol{x}_0\rangle = \Big(\frac{\hbar}{i}\Big)^m \frac{\delta^m W[J(t)]}{\delta J(t_a) \ldots \delta J(t_z)}\bigg|_{J=0}$$
$$\text{mit } t_N > t_j > t_0 \text{ für } j = a \ldots z \;. \tag{18.53}$$

18.3 Klein-Gordon-Feld

Um die Methode der Pfadintegrale von der Punktmechanik auf das skalare Klein-Gordon-Feld zu verallgemeinern, gehen wir aus von der Übergangsamplitude

$$\langle \boldsymbol{x}(t_N) \,|\, \boldsymbol{x}(t_0) \,\rangle \overset{(18.34)}{=} C(N) \int_{[\boldsymbol{x}(t_0) \to \boldsymbol{x}(t_N)]} \mathcal{D}\boldsymbol{x}(t)\, \exp\Big\{\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t_N} \mathrm{d}t\, L\Big(\boldsymbol{x}(t), \dot{\boldsymbol{x}}(t)\Big)\Big\}$$
$$\text{mit} \int_{[\boldsymbol{x}(t_0) \to \boldsymbol{x}(t_N)]} \mathcal{D}\boldsymbol{x}(t) \overset{(18.34)}{\equiv} \prod_{j=1}^{N-1} \int_\Omega \mathrm{d}\boldsymbol{x}(t_j) \;. \tag{18.54}$$

Wenn man die Ortsfunktion $\boldsymbol{x}(t)$ des Teilchens durch die Feldamplitude $\psi(t, \boldsymbol{x})$ ersetzt erhält man

$$\langle\psi(t_N,\boldsymbol{x})|\psi(t_0,\boldsymbol{x})\rangle \;=$$

$$= C(N)\int\limits_{[\psi(t_0,\boldsymbol{x})\to\psi(t_N,\boldsymbol{x})]}\mathcal{D}\psi(t,\boldsymbol{x})\,\exp\Big\{\frac{i}{\hbar}\int\limits_{t_0}^{t_N}\mathrm{d}t\int\limits_{\Omega}\mathrm{d}^3x\,\mathcal{L}\Big(\psi(t,\boldsymbol{x}),\mathrm{d}_\mu\psi(t,\boldsymbol{x})\Big)\Big\}\;. \quad (18.55a)$$

Hier wurde anstelle der Lagrangefunktion des Teilchens das Volumenintegral über die Lagrangedichte des Feldes eingesetzt. Beim Pfadintegral bedeuten die Grenzen $[\psi(t_0,\boldsymbol{x})\to\psi(t_N,\boldsymbol{x})]$, dass zu integrieren ist von der Feldkonfiguration an sämtlichen Stellen $\boldsymbol{x}$ im Normierungsvolumen Ω zur Zeit t_0 bis zu der Feldkonfiguration an sämtlichen Stellen $\boldsymbol{x}$ im Normierungsvolumen Ω zur Zeit t_N. Um dies Integral tatsächlich ausführen zu können, benötigen wir eine Definition des Pfadintegrals durch ein Produkt „normaler“ Integrale. Die Definition in (18.54) beruht darauf, dass das Argument der Funktion $\boldsymbol{x}(t)$ diskretisiert wurde. Damit die entsprechende Definition für das Pfadintegral (18.55a) formuliert werden kann, müssen *beide* Argumente der Funktion $\psi(t,\boldsymbol{x})$ diskretisiert werden.

Dazu zerlegen wir das Normierungsvolumen Ω in R gleich große Teilvolumen mit Mittelpunktskoordinaten $\boldsymbol{x}_r$, und definieren

$$\int\limits_{[\psi(t_0,\boldsymbol{x})\to\psi(t_N,\boldsymbol{x})]}\mathcal{D}\psi(t,\boldsymbol{x}) \equiv \prod_{r=1}^{R}\prod_{j=1}^{N-1}\int\limits_{\{\psi(t_j,\boldsymbol{x}_r)\}}\mathrm{d}\psi(t_j,\boldsymbol{x}_r) \quad (18.55b)$$

Das Integral $\int\mathcal{D}\psi$ ist nichts anderes als eine symbolische Schreibweise für das Produkt dieser $R\cdot(N-1)$ Integrale. R und N sind möglichst groß zu wählen. Sie müssen aber klarerweise endlich sein. Denn mit unendlichem R und/oder unendlichem N kann man das Pfadintegral zwar hinschreiben, aber nicht berechnen.

Mit den Grenzen $\{\psi(t_j,\boldsymbol{x}_r)\}$ ist gemeint, dass über sämtliche Werte zu integrieren ist, die ψ zur Zeit t_j an der Stelle $\boldsymbol{x}_r$ annehmen kann, also sämtliche komplexen Zahlen mit endlichem Betrag. Die Randwerte $\psi(t_0,\boldsymbol{x}_r)$ und $\psi(t_N,\boldsymbol{x}_r)$ sind für alle R Volumenzellen vorgegeben. Wir wissen aus der Untersuchung der Verhältnisse beim Punktteilchen, dass das Feld sich im Zeitraum zwischen t_0 und t_N bevorzugt so entwickeln wird, dass das Wirkungsintegral klein ist. Bei der „Integration über sämtliche komplexen

Zahlen“ $\psi(t_j, \boldsymbol{x}_r)$ werden deshalb letztlich nur solche Werte nennenswert beitragen, die sich nur wenig vom Wert $\psi(t_{j-1}, \boldsymbol{x}_r)$ des vorangegangenen Integrationsschritts unterscheiden, und die zwischen $\psi(t_0, \boldsymbol{x}_r)$ und $\psi(t_N, \boldsymbol{x}_r)$ liegen.

Den Faktor $C(N)$ werden wir nicht berechnen. Stattdessen machen wir die plausible Annahme, dass er von Null verschieden und endlich ist, so dass wir ihn durch geeignete Normierung der Zustandsfunktionen $|\psi(t, \boldsymbol{x})\rangle$ kürzen können.

Der nützliche Formalismus mit dem erzeugenden Funktional $W[J]$ lässt sich nun ohne weitere Probleme von den Punktteilchen auf das Klein-Gordon-Feld übertragen:

$$W[J(x)] \overset{(18.51)}{\equiv} C(N) \int\limits_{[\psi(t_0,\boldsymbol{x}) \to \psi(t_N,\boldsymbol{x})]} \mathcal{D}\psi(x)\, \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \int\limits_{t_0}^{t_N} \mathrm{d}t \int\limits_{\Omega} \mathrm{d}^3x \left(\mathcal{L} + \psi(x) J(x)\right)\right\} \tag{18.56}$$

Damit können die Matrixelemente beliebiger Produkte von Feldoperatoren konstruiert werden:

$$\begin{aligned} \langle \psi(t_N, \boldsymbol{x})|\, T \underbrace{\psi(x_a) \dots \psi(x_z)}_{m \text{ Operatoren}} |\psi(t_0, \boldsymbol{x})\rangle \;&= \\ &\overset{(18.53)}{=} \left(\frac{\hbar}{i}\right)^m \frac{\delta^m W[J(x)]}{\delta J(x_a) \dots \delta J(x_z)}\bigg|_{J=0} \\ \text{mit } t_N > t_j > t_0 \text{ für } j = a \dots z & \end{aligned} \tag{18.57}$$

Bei den $\psi(x_a) \dots \psi(x_z)$ im Matrixelement auf der linken Seite der Gleichung handelt es sich um Operatoren. Dagegen sind die $\psi(x)$ auf der rechten Seite der Gleichung bzw. in (18.56) die nicht quantisierten, klassischen Feldamplituden.

In Abschnitt 15.5 haben wir den quantisierten Propagator

$$G(x - y) \overset{(15.43)}{=} \langle 0|\, T\psi(x)\psi^\dagger(y)\, |0\rangle$$

des Klein-Gordon-Feldes berechnet. Auch bei der Berechnung der Streuam-

plituden wechselwirkender Felder werden wir Matrixelemente im Vakuum-Zustand $|0\rangle$ benötigen. Es würde uns viel mehr nützen, wenn wir mithilfe von Pfadintegralen anstelle der Erwartungswerte $\langle\psi(t_N,\boldsymbol{x})|\ldots|\psi(t_0,\boldsymbol{x})\rangle$ die Erwartungswerte $\langle 0|\ldots|0\rangle$ berechnen könnten.

Tatsächlich sind die beiden Erwartungswerte praktisch identisch, wenn der Zeitpunkt t_0 nur weit genug in der Vergangenheit, und der Zeitpunkt t_N nur weit genug in der Zukunft liegt. Um uns davon zu überzeugen, benötigen wir die Eigenvektoren $|n\rangle$ des Hamilton-Operators H, welche die Gleichung

$$\begin{aligned} &H|n\rangle = E_n|n\rangle \implies \\ &\implies \exp\Big\{-\frac{i}{\hbar}Ht\Big\}|n\rangle = \exp\Big\{-\frac{i}{\hbar}E_n t\Big\}|n\rangle \end{aligned} \tag{18.58}$$

erfüllen. Außerdem nehmen wir an, dass der Hamilton-Operator nicht explizit von der Zeit abhängt, so dass

$$\begin{aligned} |\psi(t_N,\boldsymbol{x})\rangle &\overset{(14.31)}{=} U(t_N,t_0)\,|\psi(t_0,\boldsymbol{x})\rangle \\ &\overset{(14.28a)}{=} \exp\Big\{-\frac{i}{\hbar}(t_N-t_0)H\Big\}\,|\psi(t_0,\boldsymbol{x})\rangle \end{aligned}$$

gilt. Der Zeitentwicklungsoperator U wurde in Abschnitt 14.1.3 besprochen. Die Vektoren $|n\rangle$ und $|m\rangle$ von (18.58) erfüllen die Vollständigkeitsrelation

$$\sum_n |n\rangle\langle n| = 1 \quad , \quad \sum_m |m\rangle\langle m| = 1\ .$$

Diese beiden Faktoren 1 werden ins Matrixelement eingeschoben:

$$\begin{aligned} &\langle\psi(t_N,\boldsymbol{x})|\ldots|\psi(t_0,\boldsymbol{x})\rangle \ = \\ &= \sum_n\sum_m \langle\psi(t_N,\boldsymbol{x})|n\rangle\langle n|\ldots|m\rangle\langle m|\psi(t_0,\boldsymbol{x})\rangle \\ &= \sum_n\sum_m \exp\Big\{\frac{i}{\hbar}E_n t_N\Big\}\exp\Big\{\frac{i}{\hbar}E_m t_0)\Big\}\langle n|\ldots|m\rangle\cdot \\ &\quad\cdot \underbrace{\langle\psi(t=0,\boldsymbol{x})|n\rangle\langle m|\psi(t=0,\boldsymbol{x})\rangle}_{K} \end{aligned} \tag{18.59}$$

Im letzten Ausdruck wurde zweimal der Zeitentwicklungsoperator eingesetzt. Am Faktor K interessiert uns nur, dass er nicht von der Zeit abhängt. Wir werden ihn gleich kürzen. Das Matrixelement $\langle 0|\ldots|0\rangle$ ist in der vorletzten Zeile von (18.59) enthalten, allerdings nur in einem von abzählbar unendlich vielen Summanden. Die anderen Summanden sind aber allesamt vernachlässigbar, wenn t_0 hinreichend weit in der Vergangenheit, und t_N hinreichend weit in der Zukunft liegt. Der entscheidende Trick um dies zu erkennen besteht darin, die Zeiten ein sehr kleines Stück in die komplexe Ebene zu verschieben. Wir betrachten die Grenzwerte

$$t_0 \to +\infty \cdot \exp\{i(\pi+\varphi)\} \quad , \quad t_N \to +\infty \cdot \exp\{i\varphi\}$$
$$\text{mit } 0 < \varphi \ll 1 \in \mathbb{R} \; . \tag{18.60}$$

φ ist ein sehr kleiner Winkel, mit dem die Zeitpunkte $\pm\infty$ ein kleines Stück gegen den Uhrzeigersinn in die komplexe Ebene verschoben werden. Der imaginäre Anteil in den Zeitfaktoren bewirkt, dass die Exponentialfunktionen gegen Null gehen, und zwar um so schneller, je größer E_n und E_m sind. Deshalb wird das Ergebnis bei hinreichend großen Zeiten vom Summanden mit $n = m = 0$ dominiert, und alle anderen Summanden sind vernachlässigbar klein. Deshalb gilt für die normierten Erwartungswerte:

$$\lim_{t_N\to+\infty}\lim_{t_0\to-\infty} \frac{\langle\psi(t_N,\boldsymbol{x})|\, T\overbrace{\psi(x_a)\ldots\psi(x_z)}^{m \text{ Operatoren}}\, |\psi(t_0,\boldsymbol{x})\rangle}{\langle\psi(t_N,\boldsymbol{x})\,|\,\psi(t_0,\boldsymbol{x})\rangle} =$$
$$= \frac{\langle 0|\, T\psi(x_a)\ldots\psi(x_z)\,|0\rangle}{\langle 0|0\rangle} =$$
$$= \lim_{t_N\to+\infty}\lim_{t_0\to-\infty} \frac{\left(\frac{\hbar}{i}\right)^m \frac{\delta^m W[J(x)]}{\delta J(x_a)\ldots\delta J(x_z)}\Big|_{J=0}}{C(N)\displaystyle\int_{[\psi(t_0,\boldsymbol{x})\to\psi(t_N,\boldsymbol{x})]} \mathcal{D}\psi(x)\, \exp\Big\{\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t_N}\mathrm{d}t\int_\Omega \mathrm{d}^3x\,\mathcal{L}\Big\}}$$
$$\text{mit } W[J(x)] = (18.56) \text{ und } t_N > t_j > t_0 \text{ für } j = a\ldots z \tag{18.61}$$

Teil 3: Wechselwirkende Quantenfelder

19 ψ^s-Wechselwirkung skalarer Felder

Aus der Lagrangedichte

$$\mathcal{L} \overset{(10.10)}{=} \frac{\hbar^2 c^2}{2} (\mathrm{d}_\mu \phi) \mathrm{d}^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 c^4 \phi^2$$

eines freien (d.h. nicht wechselwirkenden) ungeladenen Klein-Gordon-Feldes folgt die Feldgleichung

$$\hbar^2 c^2 \mathrm{d}_\mu \mathrm{d}^\mu \phi + m^2 c^4 \phi \overset{(3.37)}{=} 0 \,. \tag{19.1}$$

Mit der Lagrangedichte

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathcal{L} \equiv \frac{\hbar^2 c^2}{2} (\mathrm{d}_\mu \psi) \mathrm{d}^\mu \psi - \frac{1}{2} m^2 c^4 \psi\psi - \lambda \hbar^3 c^3 \psi^s \\ \text{mit } \lambda \in \mathbb{R} > 0 \text{ und } s = 3 \text{ oder } s = 4 \end{array}} \tag{19.2}$$

kann man ein ungeladenes skalares Feld beschreiben, das mit sich selbst wechselwirkt. Weil die Dimension des Feldoperators laut (10.12) $[\psi] = (\text{Energie} \cdot \text{Volumen})^{-1/2}$ ist, hat die Kopplungskonstante λ die Dimension

$$[\lambda] = \left[\frac{\mathcal{L}}{\hbar^3 c^3 \psi^s}\right] = (\text{Energie} \cdot \text{Volumen})^{(s-4)/2} \,. \tag{19.3}$$

Für $s = 4$ ist sie dimensionslos, für $s = 3$ hat sie die Dimension (Energie $\cdot$ Volumen)$^{-1/2}$. Die Gleichung des Feldes mit ψ^s-Wechselwirkung ist

$$\hbar^2 c^2 \mathrm{d}_\mu \mathrm{d}^\mu \psi + m^2 c^4 \psi + s\lambda \hbar^3 c^3 \psi^{s-1} \overset{(3.37)}{=} 0 \,. \tag{19.4}$$

Eine geschlossene Lösung dieser Gleichung ist im Allgemeinen nicht möglich. Stattdessen versucht man mithilfe störungstheoretischer Methoden, sich schrittweise der Lösung anzunähern.

Die konjugierte Impulsdichte

$$\pi(x) \overset{(3.57)}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}(x)} = c\hbar^2 \mathrm{d}^0 \psi(x) \tag{19.5}$$

ist für das freie Feld und für das Feld mit ψ^s-Wechselwirkung identisch. Aus (19.2) folgt die Hamiltondichte

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &\overset{(4.35)}{=} \pi\psi - \mathcal{L} = \\ &= \underbrace{c\hbar^2 \mathrm{d}^0\psi - \frac{\hbar^2 c^2}{2} (\mathrm{d}_\mu \psi)\mathrm{d}^\mu \psi + \frac{1}{2} m^2 c^4 \psi\psi}_{\mathcal{H}_{(0)}} + \underbrace{\lambda \hbar^3 c^3 \psi^s}_{\mathcal{H}_{(I)}} \end{aligned} \tag{19.6}$$

$\mathcal{H}_{(0)}$ ist die Hamiltondichte des freien Feldes ohne Wechselwirkung. $\mathcal{H}_{(I)}$ (der Index I bedeutet Interaction) ist der Teil der Hamiltondichte, der durch die Wechselwirkung hinzukommt. Es ist

$$H = \int_\Omega \mathrm{d}^3 x\, \mathcal{H} \quad , \quad H_{(0)} = \int_\Omega \mathrm{d}^3 x\, \mathcal{H}_{(0)} \quad , \quad H_{(I)} = \int_\Omega \mathrm{d}^3 x\, \mathcal{H}_{(I)} \; .$$

Die ψ^s-Theorie ist das wohl einfachste Beispiel einer Quantenfeldtheorie mit Wechselwirkung. Wir stellen sie an den Anfang des dritten Teils dieses Buches, weil sie hervorragend dazu geeignet ist, die Berechnungsmethoden der Quantenfeldtheorien mit Wechselwirkungen kennen zu lernen. Eine praktische Anwendung hat die ψ^4-Theorie bei der Beschreibung von Higgs-Feldern[1] gefunden.

19.1 Störungsrechnung

Bei der Berechnung wechselwirkender Felder werden Matrixelemente von zeitgeordneten Operatorprodukten der Art

$$\langle 0 | \, T\psi(x_1) \dots \psi(x_n) \, | 0 \rangle \tag{19.7}$$

[1] benannt nach Peter Higgs (∗ 1929), einem von etwa einem halben Dutzend Forschern, die 1964 gleichzeitig und unabhängig voneinander diese Felder erfanden.

auftauchen. Mit $|0\rangle$ ist ab sofort immer der Vakuum-Zustand des Feldes mit Wechselwirkung gemeint. Wir werden sehen, dass dies Vakuum – anders als das Vakuum des freien Feldes – nicht einfach leer ist, sondern eine unendliche Vielzahl von „Vakuumblasen“ enthält. (Puristen verwenden deshalb für die beiden Vakua unterschiedliche Schreibweisen.) T ist der in (15.44) definierte Zeitordnungsoperator.

Die Feldoperatoren ψ im Matrixelement (19.7) sind Lösungen der Feldgleichung (19.4). Meist kennt man sie zwar nicht für beliebige Zeiten, aber oft kann man sie für einzelne Zeitpunkte relativ leicht berechnen oder erraten. Sobald man den Feldoperator für einen Zeitpunkt t_0 kennt, kann man ihn für jeden beliebigen Zeitpunkt t mithilfe des Zeitentwicklungsoperators, der in Abschnitt 14.1.3 eingeführt wurde, berechnen:

$$\psi(t,\boldsymbol{x}) = U^{-1}(t,t_0)\psi(t_0,\boldsymbol{x})U(t,t_0) \tag{19.8}$$

$\psi(t_0,\boldsymbol{x})$ ist ein zeitunabhängiger Operator im Schrödinger-Bild. Er kann nach den Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $a_{\boldsymbol{k}}^\dagger$ und $a_{\boldsymbol{k}}$ des freien Feldes entwickelt werden:

$$\psi(t_0,\boldsymbol{x}) \overset{(15.15a)}{=} \sum_{\boldsymbol{k}} \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}\Omega}}\Big(a_{\boldsymbol{k}}\exp\{+i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}\} + a_{\boldsymbol{k}}^\dagger\exp\{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}\}\Big) \tag{19.9}$$

Es wird sich als sehr nützlich erweisen, dass die Operatoren $a_{\boldsymbol{k}}^\dagger$ und $a_{\boldsymbol{k}}$ explizit im Ausdruck für $\psi(t,\boldsymbol{x})$ sichtbar sind. Allerdings ist $U(t,t_0)$ für das Feld mit Selbstwechselwirkung unbekannt, so dass wir an dieser Stelle nicht unmittelbar weiter kommen. Ein erster Versuch der Näherung könnte darin bestehen, dass man den unbekannten Operator $U(t,t_0)$ durch den bekannten Operator $U_{(0)}(t,t_0)$ des freien Feldes ersetzt. Mit dieser Näherung gelangt man zum Feldoperator im Wechselwirkungs-Bild:

$$\psi_{(I)}(t,\boldsymbol{x}) \equiv U_{(0)}^{-1}(t,t_0)\psi(t_0,\boldsymbol{x})U_{(0)}(t,t_0) \tag{19.10}$$

$$\overset{(15.15a)}{=} \sum_{\boldsymbol{k}} \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}\Omega}}\Big(a_{\boldsymbol{k}}\exp\{-ikx\} + a_{\boldsymbol{k}}^\dagger\exp\{+ikx\}\Big) \tag{19.11}$$

Dies ist eine allzu grobe Näherung. Deshalb kehren wir zum exakten Aus-

druck (19.8) zurück, und untersuche die Zeitentwicklung des Feldoperators genauer. Dabei schieben wir zweimal den Faktor 1 ein:

$$\begin{aligned}
\psi(t,\boldsymbol{x}) &= U^{-1}(t,t_0)\psi(t_0,\boldsymbol{x})U(t,t_0) \\
&= U^{-1}(t,t_0)\underbrace{U_{(0)}(t,t_0)U_{(0)}^{-1}(t,t_0)}_{1}\psi(t_0,\boldsymbol{x})\cdot \\
&\quad\cdot\underbrace{U_{(0)}(t,t_0)U_{(0)}^{-1}(t,t_0)}_{1}U(t,t_0) \\
&= \underbrace{U^{-1}(t,t_0)U_{(0)}(t,t_0)}_{U_{(I)}^{-1}(t,t_0)}\underbrace{U_{(0)}^{-1}(t,t_0)\psi(t_0,\boldsymbol{x})U_{(0)}(t,t_0)}_{\psi_{(I)}(t,\boldsymbol{x})}\cdot \\
&\quad\cdot\underbrace{U_{(0)}^{-1}(t,t_0)U(t,t_0)}_{U_{(I)}(t,t_0)}
\end{aligned} \tag{19.12}$$

Hier wurde der Zeitentwicklungsoperator

$$U_{(I)}(t,t_0) \equiv U_{(0)}^{-1}(t,t_0)\,U(t,t_0) \tag{19.13}$$

im Wechselwirkungsbild definiert. Wir bilden die Zeitableitung

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}U_{(I)}(t,t_0)}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}U_{(0)}^{-1}(t,t_0)}{\mathrm{d}t}U(t,t_0) + U_{(0)}^{-1}(t,t_0)\frac{\mathrm{d}U(t,t_0)}{\mathrm{d}t} \\
&\overset{(14.43)}{=} U_{(0)}^{-1}(t,t_0)\frac{i}{\hbar}\underbrace{(H_{(0)}-H)}_{-H_{(I)}}U(t,t_0) \\
\frac{\mathrm{d}U_{(I)}(t,t_0)}{\mathrm{d}t} &= \frac{-i}{\hbar}\underbrace{U_{(0)}^{-1}(t,t_0)\,H_{(I)}\,U_{(0)}(t,t_0)}_{H_{(I)}(t)}\underbrace{U_{(0)}^{-1}(t,t_0)U(t,t_0)}_{U_{(I)}(t,t_0)}
\end{aligned} \tag{19.14}$$

Der Zeitentwicklungsoperator $U_{(I)}(t,t_0)$ im Wechselwirkungsbild erfüllt eine Schrödingergleichung der Form (14.27) mit dem zeitabhängigen Hamiltonoperator $H_{(I)}(t)$.

Wir nehmen $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ an, und benutzen den Zeitentwicklungsoperator $U_{(I)}(t,t_0)$ im Wechselwirkungsbild, um das Matrixelement (19.7)

umzuformen:

$$\begin{aligned}
&\langle 0|\,\psi(x_n)\dots\psi(x_1)\,|0\rangle \overset{(19.12)}{=} \\
&= \langle 0|\,U_{(I)}^{-1}(t_n,t_0)\psi_{(I)}(x_n)\underbrace{U_{(I)}(t_n,t_0)\,U_{(I)}^{-1}(t_{n-1},t_0)}_{U_{(I)}(t_n,t_{n-1})}\psi_{(I)}(x_{n-1})\dots \\
&\quad\dots\psi_{(I)}(x_2)\underbrace{U_{(I)}(t_2,t_0)U_{(I)}^{-1}(t_1,t_0)}_{U_{(I)}(t_2,t_1)}\,\psi_{(I)}(x_1)U_{(I)}(t_1,t_0)\,|0\rangle
\end{aligned}$$

Die durch Unterklammerung markierten Umformungen folgen aus (14.29). Auch die beiden äußeren Zeitentwicklungsoperatoren, die nicht unterklammert sind, werden mithilfe zweier neuer Zeitparameter $t_e < t_1$ und $t_a > t_n$ umgeformt. Der Zeitpunkt t_0 ist frei wählbar. Wir wählen ihn als $t_0 = t_e$:

$$\begin{aligned}
&U_{(I)}(t_1,t_0) = U_{(I)}(t_1,t_e)\,U_{(I)}(t_e,t_0) \overset{t_0=t_e}{=} U_{(I)}(t_1,t_e) \\
&U_{(I)}^{-1}(t_n,t_0) = \Big(U_{(I)}(t_n,t_a)\,U_{(I)}(t_a,t_0)\Big)^{-1} \overset{t_0=t_e}{=} \\
&\quad = U_{(I)}^{-1}(t_a,t_e)\,U_{(I)}^{-1}(t_n,t_a) \overset{(14.29d)}{=} U_{(I)}^{-1}(t_a,t_e)\,U_{(I)}(t_a,t_n) \\
&\Longrightarrow \quad \langle 0|\,\psi(x_n)\dots\psi(x_1)\,|0\rangle \;= \\
&\quad = \langle 0|\,U_{(I)}^{-1}(t_a,t_e)\,U_{(I)}(t_a,t_n)\psi_{(I)}(x_n)U_{(I)}(t_n,t_{n-1})\psi_{(I)}(x_{n-1})\dots \\
&\qquad \dots\psi_{(I)}(x_2)\,U_{(I)}(t_2,t_1)\,\psi_{(I)}(x_1)U_{(I)}(t_1,t_e)\,|0\rangle
\end{aligned} \tag{19.15}$$

Der Zeitentwicklungsoperator im Produkt ganz links wirkt auf den Vakuumzustand $\langle 0|$. Was ist der Effekt? Sicherlich bleibt der Vakuum-Zustand ein Vakuum-Zustand, aber seine Phase könnte sich ändern:

$$\langle 0|\,U_{(I)}^{-1}(t_a,t_e) = \Big(U_{(I)}(t_a,t_e)\,|0\rangle\Big)^\dagger = \Big(|0\rangle\,e^{i\varphi}\Big)^\dagger = e^{-i\varphi}\,\langle 0| \qquad \text{mit } \varphi\in\mathbb{R}$$

Indem man den Phasenfaktor als

$$e^{-i\varphi} = \Big(\langle 0|0\rangle e^{i\varphi}\Big)^{-1} = \Big(\langle 0|\,U_{(I)}(t_a,t_e)\,|0\rangle\Big)^{-1}$$

schreibt, kann das Matrixelement in der Form

$$\begin{aligned}&\Big(\langle 0|\, U_{(I)}(t_a,t_e)\,|0\rangle\Big)^{-1}\cdot\\&\quad\cdot\langle 0|\, U_{(I)}(t_a,t_n)\psi_{(I)}(x_n)U_{(I)}(t_n,t_{n-1})\psi_{(I)}(x_{n-1})\dots\\&\quad\dots\psi_{(I)}(x_2)\,U_{(I)}(t_2,t_1)\,\psi_{(I)}(x_1)U(t_1,t_e)\,|0\rangle\end{aligned}\tag{19.16}$$

geschrieben werden. Die Operatoren in dieser Funktion sind zeitgeordnet. Man darf ihre Reihenfolge ändern, wenn man zum Ausgleich den Zeitordnungsoperator wieder einfügt:

$$\begin{aligned}&\Big(\langle 0|\, U_{(I)}(t_a,t_e)\,|0\rangle\Big)^{-1}\cdot\\&\quad\cdot\langle 0|\, T\psi_{(I)}(x_n)\psi_{(I)}(x_{n-1})\dots\psi_{(I)}(x_2)\psi_{(I)}(x_1)\cdot\\&\quad\cdot\underbrace{U_{(I)}(t_a,t_n)\,U_{(I)}(t_n,t_{n-1})\dots U_{(I)}(t_2,t_1)\,U_{(I)}(t_1,t_e)}_{U_{(I)}(t_a,t_e)}\,|0\rangle\;=\\&=\frac{\langle 0|\, T\psi_{(I)}(x_n)\psi_{(I)}(x_{n-1})\dots\psi_{(I)}(x_2)\psi_{(I)}(x_1)\,U_{(I)}(t_a,t_e)\,|0\rangle}{\langle 0|\, U_{(I)}(t_a,t_e)\,|0\rangle}\end{aligned}\tag{19.17}$$

In (19.14) haben wir uns davon überzeugt, dass der Zeitentwicklungsoperator $U_{(I)}(t_a,t_n)$ eine Schrödingergleichung mit dem zeitabhängigen Hamiltonoperator $H_{(I)}(t)$ erfüllt. Die Lösung dieser Gleichung wurde bereits in Abschnitt 14.1.3 angegeben:

$$\begin{aligned}U_{(I)}(t_a,t_e)&\overset{(14.28b)}{=}T\,\exp\Big\{-\frac{i}{\hbar}\int_{t_e}^{t_a}\mathrm{d}\tau\,H_{(I)}(\tau)\Big\}\\&=T\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\Big(-\frac{i}{\hbar}\int_{t_e}^{t_a}\mathrm{d}\tau\,H_{(I)}(\tau)\Big)^n\end{aligned}\tag{19.18}$$

Die Operatoren $H_{(I)}(\tau)$ und $\psi_{(I)}(t_k,\boldsymbol{x}_k)$ werden durch den Zeitordnungsoperator im Zähler von (19.17) durchmischt. Deshalb können die Terme $U_{(I)}(t_a,t_e)\,|0\rangle$ im Zähler und Nenner von (19.17) nicht gekürzt werden. Insgesamt haben wir folgende Umformung des Matrixelements erreicht:

$$\langle 0|\, T\psi(x_n)\dots\psi(x_1)\,|0\rangle = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\cdot$$
$$\cdot\ \frac{\langle 0|\, T\psi_{(I)}(x_n)\dots\psi_{(I)}(x_1)\Big(-\frac{i}{\hbar}\int_{t_e}^{t_a}\mathrm{d}\tau\, H_{(I)}(\tau)\Big)^j\,|0\rangle}{\langle 0|\, T\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\Big(-\frac{i}{\hbar}\int_{t_e}^{t_a}\mathrm{d}\tau\, H_{(I)}(\tau)\Big)^m\,|0\rangle} \tag{19.19}$$

Dieser Ausdruck ist exakt, wir haben bisher keinerlei Näherungen gemacht. Die Umformung erleichtert die Berechnung des Matrixelements in doppelter Weise. Erstens werden jetzt die Feldoperatoren $\psi_{(I)}(x)$ im Wechselwirkungsbild verwendet, die man wesentlich leichter findet als die Operatoren $\psi(x)$. Zweitens enthält das umgeformte Matrixelement den zeitabhängigen Hamiltonoperator im Wechselwirkungsbild

$$H_{(I)}(t) \overset{(19.14)}{=} U_{(0)}^{-1}(t,t_0)\, H_{(I)}\, U_{(0)}(t,t_0) \tag{19.20}$$
$$\text{mit } H_{(I)} \overset{(19.6)}{=} H - H_{(0)}$$

in Form einer unendlichen Reihe. Man kann den Zähler Schritt für Schritt in immer höherer Ordnung von j berechnen, und muss nicht das gesamte Problem auf einmal bewältigen. In günstigen Fällen (nämlich wenn die Kopplungskonstante λ in (19.6) klein gegen 1 ist) reichen schon ein bis zwei Schritte für eine gute Approximation aus. Man könnte vermuten, dass diese schrittweise Berechnung daran scheitert, dass man doch den Nenner von (19.19) komplett berechnet haben muss, bevor man irgend einen Nutzen aus dieser Formel ziehen kann. Wir werden aber sehen, dass das nicht der Fall ist, sondern dass der Nenner auf verblüffend einfache Weise aus den Rechnungen gekürzt werden kann.

Wir haben also gute Gründe, in den folgenden Berechnungen die Operatoren im Wechselwirkungsbild zu verwenden. Es wäre lästig, dabei stets den Index $_{(I)}$ mitschleppen zu müssen. Deshalb verabreden wir für die Zukunft die Umbenennungen

$$\begin{aligned} \psi(x) &\longrightarrow \psi_{(W)}(x) & \qquad \psi_{(I)}(x) &\longrightarrow \psi(x) \\ U(t,t_0) &\longrightarrow U_{(W)}(t,t_0) & \qquad U_{(I)}(t,t_0) &\longrightarrow U(t,t_0) \\ H &\longrightarrow H_{(W)} & \qquad H_{(I)} &\longrightarrow H \quad , \end{aligned} \tag{19.21}$$

wobei man den Index $_{(W)}$ als „wechselwirkendes Gesamtsystem" lesen kann.

19.2 Wick's Theorem

Wenn man ein Matrixelement der Art $\langle 0|\, T\psi(x_n)\ldots\psi(x_1)\,|0\rangle$ zu berechnen hat, wobei es sich bei den $\psi(x_j)$ gemäß (19.21) um Feldoperatoren im Wechselwirkungsbild handelt, dann erweist es sich als überaus hilfreich, dass man Operatoren im Wechselwirkungsbild nach den Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren entwickeln kann:

$$\psi(x) \overset{(19.11)}{=} \sum_{\boldsymbol{k}} \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}\Omega}}\Big(a_{\boldsymbol{k}} \exp\{-ikx\} + a^\dagger_{\boldsymbol{k}} \exp\{+ikx\}\Big) \tag{19.22}$$

Denn wegen $a_{\boldsymbol{k}}|0\rangle = 0$ und $\langle 0|a^\dagger_{\boldsymbol{k}} = 0$ ist der Vakuum-Erwartungswert eines Operatorprodukts auf jeden Fall Null, wenn ganz rechts ein Vernichtungsoperator und/oder ganz links ein Erzeugungsoperator steht. Im Folgenden wird ein sehr nützliches Verfahren beschrieben, mit dem derartige Produkte systematisch analysiert und wesentlich vereinfacht werden können.

19.2.1 Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren

Der Feldoperator des ungeladenen Klein-Gordon-Feldes im Wechselwirkungsbild wird folgendermaßen zerlegt:

$$\psi(x) = \psi^{\mathsf{V}}(x) + \psi^{\mathsf{E}}(x) \quad , \quad \psi^{\mathsf{E}}(x) = \Big(\psi^{\mathsf{V}}(x)\Big)^\dagger \tag{19.23a}$$

$$\psi^{\mathsf{V}}(x) \overset{(15.15)}{=} \sum_{\boldsymbol{k}} \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}\Omega}}\, a_{\boldsymbol{k}} \exp\{-ikx\} \tag{19.23b}$$

Damit die folgenden Formeln lesbar bleiben, führen wir die vereinfachte Schreibweise

$$\psi_x^{\mathsf{V}} \equiv \psi^{\mathsf{V}}(x) \qquad \psi_x^{\mathsf{E}} \equiv \psi^{\mathsf{E}}(x) \tag{19.23c}$$

ein. Als Beispiel betrachten wir ein Produkt von sechs Operatoren:

$$\langle 0|\, T\psi_u^{\mathsf{V}}\, \psi_v^{\mathsf{E}}\, \psi_w^{\mathsf{V}}\, \psi_x^{\mathsf{E}}\, \psi_y^{\mathsf{V}}\, \psi_z^{\mathsf{E}}\, |0\rangle \quad \text{mit } u^0 > v^0 > w^0 > x^0 > y^0 > z^0$$

Stände ganz rechts ψ_z^{V} oder ganz links ψ_u^{E}, dann wäre der Erwartungswert offensichtlich Null. Weil das nicht der Fall ist, formen wir das Operatorprodukt um:

$$\begin{aligned} &\psi_u^{\mathsf{V}}\, \psi_v^{\mathsf{E}}\, \psi_w^{\mathsf{V}}\, \psi_x^{\mathsf{E}}\, \psi_y^{\mathsf{V}}\, \psi_z^{\mathsf{E}} = \\ &\quad = \psi_u^{\mathsf{V}}\, \psi_v^{\mathsf{E}}\, \psi_w^{\mathsf{V}}\, \psi_x^{\mathsf{E}}\, [\psi_y^{\mathsf{V}}, \psi_z^{\mathsf{E}}] + \psi_u^{\mathsf{V}}\, \psi_v^{\mathsf{E}}\, \psi_w^{\mathsf{V}}\, \psi_x^{\mathsf{E}}\, \psi_z^{\mathsf{E}}\, \psi_y^{\mathsf{V}} \end{aligned} \tag{19.24}$$

Der Vakuum-Erwartungswert des zweiten Summanden ist Null, weil ganz rechts ein Vernichtungsoperator steht. In diesem Summanden sind die Operatoren nicht mehr zeitgeordnet. Das ist kein Fehler. Der Zeitordnungsoperator verlangt nur, dass die Operatoren beim Beginn der Rechnung in der richtigen Reihenfolge angeordnet werden müssen, so wie das in der ersten Zeile der letzten Gleichung geschehen ist.

Weil der Kommutator eine Zahl ist, gilt

$$\langle 0|\, \psi_u^{\mathsf{V}}\, \psi_v^{\mathsf{E}}\, \psi_w^{\mathsf{V}}\, \psi_x^{\mathsf{E}}\, [\psi_y^{\mathsf{V}}, \psi_z^{\mathsf{E}}]\, |0\rangle = \langle 0|\, \psi_u^{\mathsf{V}}\, \psi_v^{\mathsf{E}}\, \psi_w^{\mathsf{V}}\, \psi_x^{\mathsf{E}}\, |0\rangle\, [\psi_y^{\mathsf{V}}, \psi_z^{\mathsf{E}}]\ .$$

Wenn rechts im Matrixelement ψ_x^{V} statt ψ_x^{E} stände, dann wäre der Erwartungswert offensichtlich Null. Weil das nicht der Fall ist, formen wir das Operatorprodukt nochmals in der gleichen Weise um:

$$\langle 0|\, \psi_u^{\mathsf{V}}\, \psi_v^{\mathsf{E}}\, \psi_w^{\mathsf{V}}\, \psi_x^{\mathsf{E}}\, |0\rangle = \langle 0|\, \psi_u^{\mathsf{V}}\, \psi_v^{\mathsf{E}}\, |0\rangle [\psi_w^{\mathsf{V}}, \psi_x^{\mathsf{E}}] + \langle 0|\, \psi_u^{\mathsf{V}}\, \psi_v^{\mathsf{E}}\, \psi_x^{\mathsf{E}}\, \psi_w^{\mathsf{V}}\, |0\rangle$$

Wieder ist der rechte Summand Null, weil rechts im Operatorprodukt ein Vernichtungsoperator steht. Das verbliebene Matrixelement wird nochmals in gewohnter Weise umgeformt, so dass man insgesamt das Ergebnis

$$\langle 0|\, T\psi_u^{\mathsf{V}}\, \psi_v^{\mathsf{E}}\, \psi_w^{\mathsf{V}}\, \psi_x^{\mathsf{E}}\, \psi_y^{\mathsf{V}}\, \psi_z^{\mathsf{E}}\, |0\rangle = [\psi_u^{\mathsf{V}}, \psi_v^{\mathsf{E}}]\, [\psi_w^{\mathsf{V}}, \psi_x^{\mathsf{E}}]\, [\psi_y^{\mathsf{V}}, \psi_z^{\mathsf{E}}] \tag{19.25}$$

erhält.

Der Vakuum-Erwartungswert einer ungeraden Anzahl n von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren ist auf jeden Fall Null. Denn er ist das Produkt von $(n-1)/2$ Kommutatoren mit einem Faktor $\langle 0|\,\psi\,|0\rangle = 0$, der auf jeden Fall Null ist, egal ob es sich bei ψ um einen Erzeugungs- oder Vernichtungsoperator handelt.

Der Vakuum-Erwartungswert ist ebenfalls auf jeden Fall Null, wenn die Anzahl der Operatoren zwar gerade, die Anzahl der Erzeugungsoperatoren aber nicht gleich der Anzahl der Vernichtungsoperatoren ist. Denn dann bleiben mehrere Operatoren einer Sorte übrig, und der Erwartungswert hat die Form

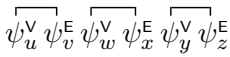
$$\begin{aligned} &\langle 0|\,\psi^{\mathsf{V}}\ldots\psi^{\mathsf{V}}\,|0\rangle \cdot \text{Kommutatoren} = 0 \\ \text{oder}\quad &\langle 0|\,\psi^{\mathsf{E}}\ldots\psi^{\mathsf{E}}\,|0\rangle \cdot \text{Kommutatoren} = 0\;. \end{aligned} \tag{19.26}$$

Der Erwartungswert eines Produkts von sechs Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren kann also nur von Null verschieden sein, wenn es drei Erzeugungs- und drei Vernichtungsoperatoren enthält. Dabei ist die Reihenfolge der Operatoren wichtig. Mit der Methode, mit der (19.25) hergeleitet wurde, findet man auch

$$\begin{aligned} \langle 0|\,T\psi_u^{\mathsf{V}}\,\psi_v^{\mathsf{V}}\,\psi_w^{\mathsf{E}}\,\psi_x^{\mathsf{V}}\,\psi_y^{\mathsf{E}}\,\psi_z^{\mathsf{E}}\,|0\rangle &= [\psi_u^{\mathsf{V}}\,,\psi_w^{\mathsf{E}}\,]\,[\psi_v^{\mathsf{V}}\,,\psi_y^{\mathsf{E}}\,]\,[\psi_x^{\mathsf{V}}\,,\psi_z^{\mathsf{E}}\,] + \\ &+ [\psi_u^{\mathsf{V}}\,,\psi_y^{\mathsf{E}}\,]\,[\psi_v^{\mathsf{V}}\,,\psi_w^{\mathsf{E}}\,]\,[\psi_x^{\mathsf{V}}\,,\psi_z^{\mathsf{E}}\,] + [\psi_u^{\mathsf{V}}\,,\psi_w^{\mathsf{E}}\,]\,[\psi_v^{\mathsf{V}}\,,\psi_z^{\mathsf{E}}\,]\,[\psi_x^{\mathsf{V}}\,,\psi_y^{\mathsf{E}}\,] + \\ &+ [\psi_u^{\mathsf{V}}\,,\psi_z^{\mathsf{E}}\,]\,[\psi_v^{\mathsf{V}}\,,\psi_w^{\mathsf{E}}\,]\,[\psi_x^{\mathsf{V}}\,,\psi_y^{\mathsf{E}}\,]\;. \end{aligned} \tag{19.27}$$

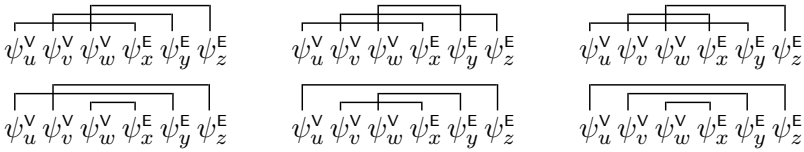
In diesem Fall gibt es vier Summanden. Es handelt sich um sämtliche verschiedenen Möglichkeiten, die Operatoren zu nichtverschwindenden Kommutatoren zu kontrahieren, in denen der Erzeugungsoperator früher ist als der Vernichtungsoperator. Wenn alle drei Erzeugungsoperatoren früher sind als die drei Vernichtungsoperatoren, dann ergibt die Berechnung des Vakuum-Erwartungswerts sogar sechs Summanden, weil sechs verschiedene nicht verschwindende Kontraktionen möglich sind.

Im Folgenden werden Kontraktionen durch waagerechte eckige Klammern angedeutet. Das zeitgeordnete Operatorprodukt $\psi_u^{\mathsf{V}}\,\psi_v^{\mathsf{E}}\,\psi_w^{\mathsf{V}}\,\psi_x^{\mathsf{E}}\,\psi_y^{\mathsf{V}}\,\psi_z^{\mathsf{E}}$ hat eine nicht verschwindende Kontraktion, die mit (19.25) verglichen werden sollte:



Das zeitgeordnete Operatorprodukt $\psi_u^{\mathsf{V}}\,\psi_v^{\mathsf{V}}\,\psi_w^{\mathsf{E}}\,\psi_x^{\mathsf{V}}\,\psi_y^{\mathsf{E}}\,\psi_z^{\mathsf{E}}$ hat vier nicht verschwindende Kontraktionen, die mit (19.27) verglichen werden sollten:

Das zeitgeordnete Operatorprodukt $\psi_u^{\mathsf{V}}\,\psi_v^{\mathsf{V}}\,\psi_w^{\mathsf{V}}\,\psi_x^{\mathsf{E}}\,\psi_y^{\mathsf{E}}\,\psi_z^{\mathsf{E}}$ hat sechs nicht verschwindende Kontraktionen:



Das zeitgeordnete Operatorprodukt $\psi_u^{\mathsf{V}}\,\psi_v^{\mathsf{E}}\,\psi_w^{\mathsf{E}}\,\psi_x^{\mathsf{V}}\,\psi_y^{\mathsf{V}}\,\psi_z^{\mathsf{E}}$ hat keine nicht verschwindende Kontraktion, deshalb ist sein Vakuum-Erwartungswert Null.

Satz: Der Vakuum-Erwartungswert eines zeitgeordneten Produkts von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren ist gleich der Summe der Kommutator-Produkte, die aus sämtlichen nicht verschwindende Kontraktionen des Operatorprodukts gebildet werden können. (19.28)

19.2.2 Feldoperatoren

Üblicherweise haben wir es nicht mit den einzelnen Operatoren ψ_x^{V} und ψ_x^{E} zu tun, sondern mit dem kompletten Feldoperator $\psi_x \equiv \psi_x^{\mathsf{V}} + \psi_x^{\mathsf{E}}$. Die Ausweitung unserer Ergebnisse auf die kompletten Operatoren macht die Formeln lediglich länglicher, bringt aber keine neuartigen Probleme mit sich.

Das zeitgeordnete Produkt zweier Feldoperatoren (19.23) des ungeladenen Klein-Gordon-Feldes ist

$$\begin{aligned} T\psi_x\psi_y = \theta(x^0-y^0)\,(\psi_x^{\mathsf{V}}\,\psi_y^{\mathsf{V}} + \psi_x^{\mathsf{V}}\,\psi_y^{\mathsf{E}} + \psi_x^{\mathsf{E}}\,\psi_y^{\mathsf{V}} + \psi_x^{\mathsf{E}}\,\psi_y^{\mathsf{E}}) + \\ + \theta(y^0-x^0)\,(\psi_y^{\mathsf{V}}\,\psi_x^{\mathsf{V}} + \psi_y^{\mathsf{V}}\,\psi_x^{\mathsf{E}} + \psi_y^{\mathsf{E}}\,\psi_x^{\mathsf{V}} + \psi_y^{\mathsf{E}}\,\psi_x^{\mathsf{E}})\ . \end{aligned} \tag{19.29}$$

Im Vakuum-Erwartungswert überlebt jeweils nur der eine Summand, in dem rechts ein Erzeugungsoperator und links ein Vernichtungsoperator steht:

$$\langle 0|\, T\psi_x\psi_y\,|0\rangle = \theta(x^0-y^0)\langle 0|\,\psi_x^{\mathsf{V}}\,\psi_y^{\mathsf{E}}\,|0\rangle + \theta(y^0-x^0)\langle 0|\,\psi_y^{\mathsf{V}}\,\psi_x^{\mathsf{E}}\,|0\rangle \quad (19.30a)$$

Wendet man stattdessen Satz (19.28) an, erhält man

$$\langle 0|\, T\psi_x\psi_y\,|0\rangle = \theta(x^0-y^0)\,[\,\psi_x^{\mathsf{V}}\,,\psi_y^{\mathsf{E}}\,] + \theta(y^0-x^0)\,[\,\psi_y^{\mathsf{V}}\,,\psi_x^{\mathsf{E}}\,]\;. \quad (19.30b)$$

Hier besteht kein Widerspruch, denn es ist

$$\langle 0|\,\psi_x^{\mathsf{V}}\,\psi_y^{\mathsf{E}}\,|0\rangle - \underbrace{\langle 0|\,\psi_y^{\mathsf{E}}\,\psi_x^{\mathsf{V}}\,|0\rangle}_{0} = \langle 0|\,[\,\psi_x^{\mathsf{V}}\,,\psi_y^{\mathsf{E}}\,]\,|0\rangle = \underbrace{\langle 0|0\rangle}_{1}\,[\,\psi_x^{\mathsf{V}}\,,\psi_y^{\mathsf{E}}\,]\;. \quad (19.31)$$

Beim Vakuum-Erwartungswert (19.30) handelt es sich um den Feynman-Propagator des ungeladenen Klein-Gordon-Feldes, den wir in Abschnitt 15.5 definiert haben. Jetzt erweitern wir die Betrachtung auf ein geladenes Klein-Gordon-Feld, und zerlegen es in Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren:

$$\begin{aligned}
\psi_x &= \psi_x^{\mathsf{Va}} + \psi_x^{\mathsf{Eb}} \qquad , \qquad \psi_x^\dagger = \psi_x^{\mathsf{Ea}} + \psi_x^{\mathsf{Vb}} \\
\psi_x^{\mathsf{Va}} &\overset{(15.15)}{=} \sum_{\boldsymbol{k}} \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}\Omega}}\; a_{\boldsymbol{k}}\, \exp\{-ikx\} \\
\psi_x^{\mathsf{Eb}} &\overset{(15.15)}{=} \sum_{\boldsymbol{f}} \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{f}}\Omega}}\; b_{\boldsymbol{f}}^\dagger\, \exp\{+ifx\} \\
\psi_x^{\mathsf{Ea}} &= \left(\psi_x^{\mathsf{Va}}\right)^\dagger \qquad , \qquad \psi_x^{\mathsf{Vb}} = \left(\psi_x^{\mathsf{Eb}}\right)^\dagger
\end{aligned} \quad (19.32)$$

Im Vakuum-Erwartungswert des Operatorprodukts

$$\begin{aligned}
T\psi_x\psi_y^\dagger = \theta(x^0-y^0)\,(&\psi_x^{\mathsf{Va}}\psi_y^{\mathsf{Ea}} + \psi_x^{\mathsf{Va}}\psi_y^{\mathsf{Vb}} + \psi_x^{\mathsf{Eb}}\psi_y^{\mathsf{Ea}} + \psi_x^{\mathsf{Eb}}\psi_y^{\mathsf{Vb}}) + \\
+\,\theta(y^0-x^0)\,(&\psi_y^{\mathsf{Va}}\psi_x^{\mathsf{Ea}} + \psi_y^{\mathsf{Va}}\psi_x^{\mathsf{Vb}} + \psi_y^{\mathsf{Eb}}\psi_x^{\mathsf{Ea}} + \psi_y^{\mathsf{Eb}}\psi_x^{\mathsf{Vb}})
\end{aligned}$$

überleben nur diejenigen Summanden, in denen rechts ein Erzeugungs- und links ein Vernichtungsoperator steht:

$$\langle 0|\, T\psi_x\psi_y^\dagger|0\rangle = \theta(x^0-y^0)\,\langle 0|\,\psi_x^{\mathsf{Va}}\psi_y^{\mathsf{Ea}}\,|0\rangle + \theta(y^0-x^0)\,\langle 0|\,\psi_y^{\mathsf{Va}}\psi_x^{\mathsf{Ea}}\,|0\rangle \tag{19.33a}$$

Im Vakuum-Erwartungswert des Operatorprodukts

$$\begin{aligned} T\psi_x^\dagger\psi_y = {}& \theta(x^0-y^0)\,(\psi_x^{\mathsf{Ea}}\psi_y^{\mathsf{Va}} + \psi_x^{\mathsf{Ea}}\psi_y^{\mathsf{Eb}} + \psi_x^{\mathsf{Vb}}\psi_y^{\mathsf{Va}} + \psi_x^{\mathsf{Vb}}\psi_y^{\mathsf{Eb}}) + \\ & + \theta(y^0-x^0)\,(\psi_y^{\mathsf{Ea}}\psi_x^{\mathsf{Va}} + \psi_y^{\mathsf{Ea}}\psi_x^{\mathsf{Eb}} + \psi_y^{\mathsf{Vb}}\psi_x^{\mathsf{Va}} + \psi_y^{\mathsf{Vb}}\psi_x^{\mathsf{Eb}}) \end{aligned}$$

überleben ebenfalls nur zwei Summanden:

$$\langle 0|\, T\psi_x^\dagger\psi_y|0\rangle = \theta(x^0-y^0)\,\langle 0|\,\psi_x^{\mathsf{Vb}}\psi_y^{\mathsf{Eb}}\,|0\rangle + \theta(y^0-x^0)\,\langle 0|\,\psi_y^{\mathsf{Vb}}\psi_x^{\mathsf{Eb}}\,|0\rangle \tag{19.33b}$$

Dies Ergebnis ist identisch mit dem Vakuum-Erwartungswert des Feynman-Propagators des geladenen Klein-Gordon-Feldes:

$$\begin{aligned} \langle 0|\, G(x-y)\,|0\rangle = G(x-y) \;&= \\ &\overset{(15.43)}{=} \theta(x^0-y^0)\langle 0|\psi_x\psi_y^\dagger|0\rangle + \theta(y^0-x^0)\langle 0|\psi_y^\dagger\psi_x|0\rangle \\ &\overset{(19.33)}{=} \theta(x^0-y^0)\,\langle 0|\,\psi_x^{\mathsf{Va}}\psi_y^{\mathsf{Ea}}\,|0\rangle + \theta(y^0-x^0)\langle 0|\,\psi_y^{\mathsf{Vb}}\psi_x^{\mathsf{Eb}}\,|0\rangle \\ &\overset{(12.14)}{=} \theta(x^0-y^0)G^a(x-y) + \theta(y^0-x^0)G^b(y-x) \end{aligned} \tag{19.34}$$

Es sei

$$\langle 0|\, T\psi_w\psi_x\psi_y\psi_z|0\rangle \quad \text{mit } w^0 > x^0 > y^0 > z^0 \tag{19.35}$$

der Vakuum-Erwartungswert eines zeitgeordneten Produkts von Feldoperatoren eines ungeladenen Klein-Gordon-Feldes. Mit der Nomenklatur (19.23) lautet das Matrixelement:

$$\begin{aligned} \langle 0| + {}& \psi_w^{\mathsf{V}}\,\psi_x^{\mathsf{V}}\,\psi_y^{\mathsf{V}}\,\psi_z^{\mathsf{V}} + \psi_w^{\mathsf{V}}\,\psi_x^{\mathsf{E}}\,\psi_y^{\mathsf{V}}\,\psi_z^{\mathsf{V}} + \psi_w^{\mathsf{E}}\,\psi_x^{\mathsf{V}}\,\psi_y^{\mathsf{V}}\,\psi_z^{\mathsf{V}} + \psi_w^{\mathsf{E}}\,\psi_x^{\mathsf{E}}\,\psi_y^{\mathsf{V}}\,\psi_z^{\mathsf{V}} + \\ & + \psi_w^{\mathsf{V}}\,\psi_x^{\mathsf{V}}\,\psi_y^{\mathsf{E}}\,\psi_z^{\mathsf{V}} + \psi_w^{\mathsf{V}}\,\psi_x^{\mathsf{E}}\,\psi_y^{\mathsf{E}}\,\psi_z^{\mathsf{V}} + \psi_w^{\mathsf{E}}\,\psi_x^{\mathsf{V}}\,\psi_y^{\mathsf{E}}\,\psi_z^{\mathsf{V}} + \psi_w^{\mathsf{E}}\,\psi_x^{\mathsf{E}}\,\psi_y^{\mathsf{E}}\,\psi_z^{\mathsf{V}} + \\ & + \psi_w^{\mathsf{V}}\,\psi_x^{\mathsf{V}}\,\psi_y^{\mathsf{V}}\,\psi_z^{\mathsf{E}} + \psi_w^{\mathsf{V}}\,\psi_x^{\mathsf{E}}\,\psi_y^{\mathsf{V}}\,\psi_z^{\mathsf{E}} + \psi_w^{\mathsf{E}}\,\psi_x^{\mathsf{V}}\,\psi_y^{\mathsf{V}}\,\psi_z^{\mathsf{E}} + \psi_w^{\mathsf{E}}\,\psi_x^{\mathsf{E}}\,\psi_y^{\mathsf{V}}\,\psi_z^{\mathsf{E}} + \\ & + \psi_w^{\mathsf{V}}\,\psi_x^{\mathsf{V}}\,\psi_y^{\mathsf{E}}\,\psi_z^{\mathsf{E}} + \psi_w^{\mathsf{V}}\,\psi_x^{\mathsf{E}}\,\psi_y^{\mathsf{E}}\,\psi_z^{\mathsf{E}} + \psi_w^{\mathsf{E}}\,\psi_x^{\mathsf{V}}\,\psi_y^{\mathsf{E}}\,\psi_z^{\mathsf{E}} + \psi_w^{\mathsf{E}}\,\psi_x^{\mathsf{E}}\,\psi_y^{\mathsf{E}}\,\psi_z^{\mathsf{E}}\,|0\rangle \end{aligned} \tag{19.36}$$

Der 10. Summand hat eine nicht verschwindende Kontraktion, der 13. Summand hat zwei nicht verschwindende Kontraktionen. Alle anderen Summanden haben keine nicht verschwindende Kontraktion. Also ist nach Satz (19.28)

$$\begin{aligned}
&\langle 0|\, T\psi_w\psi_x\psi_y\psi_z|0\rangle \;= \\
&\quad = [\,\psi_w^{\mathsf{V}}\,,\psi_x^{\mathsf{E}}]\,[\,\psi_y^{\mathsf{V}}\,,\psi_z^{\mathsf{E}}] + [\,\psi_w^{\mathsf{V}}\,,\psi_y^{\mathsf{E}}]\,[\,\psi_x^{\mathsf{V}}\,,\psi_z^{\mathsf{E}}] + [\,\psi_w^{\mathsf{V}}\,,\psi_z^{\mathsf{E}}]\,[\,\psi_x^{\mathsf{V}}\,,\psi_y^{\mathsf{E}}] \\
&\quad \overset{(19.31)}{=} \langle 0|\,\psi_w^{\mathsf{V}}\,\psi_x^{\mathsf{E}}|0\rangle\langle 0|\,\psi_y^{\mathsf{V}}\,\psi_z^{\mathsf{E}}|0\rangle + \langle 0|\,\psi_w^{\mathsf{V}}\,\psi_y^{\mathsf{E}}|0\rangle\langle 0|\,\psi_x^{\mathsf{V}}\,\psi_z^{\mathsf{E}}|0\rangle + \\
&\qquad + \langle 0|\,\psi_w^{\mathsf{V}}\,\psi_z^{\mathsf{E}}|0\rangle\langle 0|\,\psi_x^{\mathsf{V}}\,\psi_y^{\mathsf{E}}|0\rangle \\
&\quad \overset{(19.34)}{=} G^a(w-x)\cdot G^a(y-z) + G^a(w-y)\cdot G^a(x-z) + \\
&\qquad + G^a(w-z)\cdot G^a(x-y)\;. \qquad (19.37)
\end{aligned}$$

Mit $w^0 > x^0 > y^0 > z^0$ haben wir in (19.35) eine bestimmte Zeitordnung vorgegeben. Ohne diese Vorgabe hätten wir mithilfe von Fallunterscheidungen die $4! = 24$ verschiedenen Möglichkeiten der Zeitordnung von w^0, x^0, y^0, z^0 berücksichtigen müssen. Dabei hätten wir z.B. statt des ersten Summanden in (19.37) die vier Möglichkeiten

$$\begin{aligned}
&G^a(w-x)\cdot G^a(y-z) \quad \longrightarrow \\
&\quad \longrightarrow \quad \Big(\theta(w^0-x^0)\,G^a(w-x) + \theta(x^0-w^0)\,G^a(x-w)\Big)\cdot \\
&\qquad \cdot\Big(\theta(y^0-z^0)\,G^a(y-z) + \theta(z^0-y^0)\,G^a(z-y)\Big) \qquad (19.38)
\end{aligned}$$

gefunden. Diese Produkte von Stufenfunktionen und Propagatoren G^a sind gerade die Feynman-Propagatoren

$$G(x-y) \overset{(12.14)}{=} \theta(x^0-y^0)\,G^a(x-y) + \theta(y^0-x^0)\,G^a(y-x)$$

des ungeladenen Klein-Gordon-Feldes. Also gilt für beliebige Zeitordnung

$$\begin{aligned}
\langle 0|\, T\psi_w\psi_x\psi_y\psi_z|0\rangle \;&=\; G(w-x)\cdot G(y-z) \;+\; G(w-y)\cdot G(x-z) + \\
&\quad + G(w-z)\cdot G(x-y)\;. \qquad (19.39)
\end{aligned}$$

Beim Vakuum-Erwartungswert $\langle 0|\, T\psi_x\psi_y\psi_z|0\rangle$ erhält man eine (19.36) entsprechende Formel, in der jeder Summand drei Erzeugungs- oder Vernichtungsoperatoren enthält, so dass es überhaupt keine nicht verschwindende Kontraktion gibt. Das gleiche gilt bei einer beliebigen ungeraden Anzahl von Feldoperatoren. Der Vakuum-Erwartungswert eines Produkts von n Feldoperatoren des ungeladenen Klein-Gordon-Feldes kann nur dann von Null verschieden sein, wenn n eine gerade Zahl ist.

Die Ergebnisse dieses Abschnitts machen den folgenden Satz plausibel, dessen strengen Beweis wir uns ersparen:

Satz: Der Vakuum-Erwartungswert eines zeitgeordneten Produkts von n Feldoperatoren des ungeladenen Klein-Gordon-Feldes im Wechselwirkungsbild ist

- Null, wenn n ungerade ist.
- bei geradem n gleich der Summe der
$$(n-1)\cdot(n-3)\cdot(n-5)\cdot\ldots\cdot 1$$
unterschiedlichen Produkte von $(n/2)$ Feynman-Propagatoren, zu denen die n Operatoren kombiniert werden können.

(19.40a)

Wenn es sich um ein geladenes Klein-Gordon-Feld handelt, dann enthält im Wechselwirkungsbild der Feldoperator ψ die Fourier-Operatoren a und $b^\dagger$. Der adjungierte Feldoperator $\psi^\dagger$ enthält die Fourier-Operatoren $a^\dagger$ und b. Die Erweiterung des Satzes auf geladene Felder ist wegen $[a, b^\dagger] = [a, b] = [a^\dagger, b^\dagger] = [a^\dagger, b] = 0$ nicht schwierig:

Satz: Der Vakuum-Erwartungswert eines zeitgeordneten Produkts von n Feldoperatoren $\psi(x)$ und m Feldoperatoren $\psi^\dagger(x)$ des geladenen Klein-Gordon-Feldes im Wechselwirkungsbild ist

- Null, wenn $n \neq m$ ist.
- im Fall $n = m$ gleich der Summe der
$$(2n-1)\cdot(2n-3)\cdot(2n-5)\cdot\ldots\cdot 1$$
unterschiedlichen Produkte der n Feynman-Propagatoren, zu denen die $n + m = 2n$ Operatoren kombiniert werden können.

(19.40b)

Das Verfahren der Vereinfachung von Matrixelementen durch Kontraktion und Normalordnung der Operatoren, das in diesem Abschnitt beschrieben wurde, ist unter dem Namen „Wick's Theorem" bekannt. Erfunden wurde es von Houriet und Kind [45] im Jahr 1949. Als Wick[2] im folgenden Jahr das Verfahren aufgriff und auf fermionische Felder erweiterte, wies er in seinem Artikel [46] deutlich auf die Erfinder des Verfahrens hin, und zitierte ihre Arbeit korrekt. Houriet und Kind hatten sogar schon die Kontraktionsklammern verwendet die auch in diesem Buch benutzt werden, während Wick sich damit behelfen musste, zu kontrahierende Operatoren mit Pünktchen zu markieren (vermutlich weil die Druckerei von Physical Review mit Klammern überfordert gewesen wäre). Heute kennt jeder Feldtheoretiker das Wick-Theorem mit den Wick-Klammern, während sich nur noch wenigen Spezialisten an die Namen Houriet und Kind erinnern. Warum? Ganz einfach: Houriet und Kind schrieben ihre Veröffentlichung in französischer Sprache, während Wick auf englisch publizierte.

19.3 S-Matrix und LSZ-Formel

In Abschnitt 15.1 haben wir Zustandsfunktionen des Klein-Gordon-Feldes mit scharf definierter Wellenzahl in der Form $|n_{b\boldsymbol{k}} m_{a\boldsymbol{f}} l_{ag}\rangle$ definiert. Beispielsweise gilt die Eigenwertgleichung des Impulsoperators

$$\boldsymbol{P}|3_{b\boldsymbol{k}}5_{a\boldsymbol{f}}\rangle \overset{(15.34)}{=} (3\hbar\boldsymbol{k} + 5\hbar\boldsymbol{f})\,|3_{b\boldsymbol{k}}5_{a\boldsymbol{f}}\rangle \tag{19.41}$$

für einen Zustand, in dem 3 Antiteilchen mit Wellenzahl $\boldsymbol{k}$ und 5 Teilchen mit Wellenzahl $\boldsymbol{f}$ angeregt sind. Weil wir uns im Folgenden wieder auf die ψ^s-Wechselwirkung eines ungeladenen Klein-Gordon-Feldes konzentrieren, können wir die Flut der Indizes durch folgende Definition etwas eindämmen:

$$|\boldsymbol{f}_1\boldsymbol{f}_2\boldsymbol{f}_2\boldsymbol{f}_2\boldsymbol{f}_3\ldots\rangle \equiv |1_{\boldsymbol{f}_1}3_{\boldsymbol{f}_2}1_{\boldsymbol{f}_3}\ldots\rangle \equiv |1_{a\boldsymbol{f}_1}3_{a\boldsymbol{f}_2}1_{a\boldsymbol{f}_3}\ldots\rangle$$

Darüber hinaus werden wir zuweilen

$$a^\dagger_{\boldsymbol{k}}|0\rangle = |\boldsymbol{k}\rangle \;\equiv\; a^\dagger_{\boldsymbol{k}_1}\ldots a^\dagger_{\boldsymbol{k}_n}|0\rangle = |\boldsymbol{k}_1\ldots\boldsymbol{k}_n\rangle$$

[2] Gian Carlo Wick (1909 - 1992)

als Kurzschreibweise für einen Zustand von n Teilchen mit (unterschiedlichen oder gleichen) Wellenzahlen $\boldsymbol{k}_j$ verwenden.

Die Matrixelemente des Impulsoperators $\boldsymbol{P}$ sind

$$\langle \boldsymbol{k}|\boldsymbol{P}|\boldsymbol{f}\rangle = \underbrace{\langle \boldsymbol{k}|\, U(t,0)}_{\langle t\boldsymbol{f}|}\, \underbrace{U^{-1}(t,0)\,\boldsymbol{P}\,U(t,0)}_{\boldsymbol{P}(t)}\, \underbrace{U^{-1}(t,0)\,|\boldsymbol{f}\rangle}_{|t\boldsymbol{f}\rangle} \overset{(15.37b)}{=} \hbar\boldsymbol{f}\,\delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{f}}\ . \tag{19.42}$$

Wir interpretieren die Eigenfunktion $|t\boldsymbol{f}\rangle$ des zeitabhängigen Impulsoperators $\boldsymbol{P}(t)$ im Heisenberg-Bild als Zustandsfunktion eines Teilchens, das zur Zeit t den Impuls $\boldsymbol{f}$ hat.

Man definiert die Streumatrix, auch kurz als S-Matrix bezeichnet, durch[3]

$$S_{\boldsymbol{f}\boldsymbol{k}} \equiv \langle t_a\boldsymbol{f}|t_e\boldsymbol{k}\rangle = \langle \boldsymbol{f}|\, U(t_a,0)U^{-1}(t_e,0)\,|\boldsymbol{k}\rangle = \langle \boldsymbol{f}|\, U(t_a,t_e)\,|\boldsymbol{k}\rangle = \langle \boldsymbol{f}|\, S\,|\boldsymbol{k}\rangle\ . \tag{19.43a}$$

Hierbei ist

$$\langle \boldsymbol{f}|\, S\,|\boldsymbol{k}\rangle \equiv \langle \boldsymbol{f}_1\boldsymbol{f}_2\ldots\boldsymbol{f}_n|\, S\,|\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2\ldots\boldsymbol{k}_m\rangle \tag{19.43b}$$

die abkürzende Schreibweise für ein Streuereignis mit m einlaufenden und n auslaufenden Teilchen. Die Indizes e und a bedeuten ein und aus. Die Zeiten t_e und t_a sind folgendermaßen zu verstehen: Zur Zeit $t \le t_e$ bewegen sich die einlaufenden Teilchen mit Impulsen $\boldsymbol{k}_i$ auf einen endlichen Raumbereich zu, in dem sie dann während einer endlichen Zeit $t_e < t < t_a$ miteinander wechselwirken. Schließlich entfernen sich zur Zeit $t \ge t_a$ die auslaufenden Teilchen mit Impulsen $\boldsymbol{f}_j$ vom Wechselwirkungsbereich. Folglich ist

[3] Viele Autoren ziehen es vor, anstelle der S-Matrix die T-Matrix zu diskutieren. Die beiden Matrizen hängen folgendermaßen zusammen:

$$\langle \boldsymbol{f}|\, S\,|\boldsymbol{k}\rangle = \langle \boldsymbol{f}|\, 1 - iT\,|\boldsymbol{k}\rangle = \langle \boldsymbol{f}|\boldsymbol{k}\rangle - \langle \boldsymbol{f}|\, iT\,|\boldsymbol{k}\rangle$$

Die beiden Matrizen unterscheiden sich also im Wesentlichen durch den trivialen Term $\langle \boldsymbol{f}|\boldsymbol{k}\rangle$, der dann von Null verschieden ist wenn Teilchen den Wechselwirkungsbereich ohne Streuung durchlaufen. Achtung: Dieser Operator T darf nicht mit dem Zeitordnungs-Operator verwechselt werden.

$$S \equiv U(t_a, t_e) \text{ , falls Wechselwirkungen nur im Zeitintervall } t_e < t < t_a \text{ möglich sind.} \tag{19.43c}$$

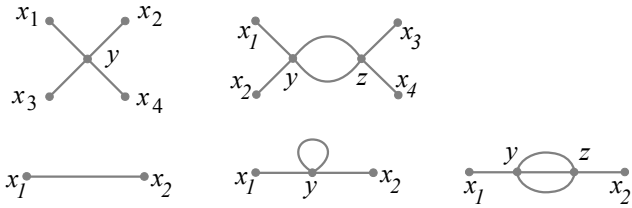
Die Impulse können nicht scharf definiert sein, denn sonst wären die einlaufenden und auslaufenden Teilchen über das gesamte Normierungsvolumen delokalisiert, und würden zu jeder Zeit miteinander wechselwirken. Wir nehmen vielmehr an, dass die Teilchen eigentlich durch Wellenpakete beschrieben werden müssten, deren Impulse „ziemlich eng" um $\hbar\boldsymbol{k}$ bzw. $\hbar\boldsymbol{f}$ zentriert sind, und deren Orte entsprechend der Heisenberg'schen Unbestimmtheitsrelation über „ziemlich große" Bereiche $\Delta\boldsymbol{x} \approx 1/\Delta\boldsymbol{k}$ bzw. $\Delta\boldsymbol{y} \approx 1/\Delta\boldsymbol{f}$ delokalisiert sind. Die Teilchen werden also durch „fast" ebene Wellen mit „fast" scharf definierten Impulsen beschrieben, aber eben nur fast. Die Wellenpakete haben endliche Ausdehnung, und ihre Amplituden im Wechselwirkungsbereich sind nur im Zeitraum von t_e bis t_a merklich von Null verschieden. Ihre Amplituden am Rand des Normierungsvolumens Ω sind Null, solange sie im Wechselwirkungsbereich von Null verschieden sind, d. h. Ω ist viel größer als der Wechselwirkungsbereich. Um Schreibarbeit zu sparen, behalten wir diese Definition zwar im Kopf, beschreiben die Teilchen in den Formeln aber vereinfacht als ebene Wellen mit scharf definierten Impulsen.

Laut (19.10) besteht die Verknüpfung zwischen den Feldoperatoren $\psi_{(W)}$ und ψ darin[4], dass in (mindestens) einem beliebig wählbaren Zeitpunkt $\psi_{(W)}(t_0, \boldsymbol{x}) = \psi(t_0, \boldsymbol{x})$ gilt. Um mit den Berechnungen weiterzukommen, müssen wir für diesen Zeitpunkt den Feldoperator $\psi_{(W)}(t_0, \boldsymbol{x})$ finden, entweder durch Lösen der Feldgleichung (19.4) oder durch Raten. Auf den ersten Blick scheint diese Aufgabe sehr einfach zu sein (und das ist natürlich auch der Grund, warum wir – wie fast alle Lehrbücher der QFT – Streuereignisse als unser Standardbeispiel wählen): Zu Zeiten $t \le t_e$, und zu Zeiten $t \ge t_a$, ist der Wechselwirkungsterm in (19.4) Null, und wir erwarten dass $\psi_{(W)}(t, \boldsymbol{x})$ zur Zeit $t \le t_e$ bzw. $t \ge t_a$, zu der die Teilchen noch nicht bzw. nicht mehr wechselwirken, gleich dem wohlbekannten Operator des freien Feldes ist.

Bei der genaueren Untersuchung taucht jedoch ein ernsthaftes Problem auf. Wir werden in den folgenden Abschnitten Matrixelemente durch Feyn-

[4] Wir erinnern an die Umbenennung (19.21) der Indizes!

man-Graphen beschreiben, und dabei zum Beispiel den folgenden Graphen begegnen:



(19.44)

Den ersten Graphen kann man anschaulich so lesen, dass zwei Teilchen von den Raumzeitpunkten x_1 und x_2 kommend nach y laufen und dort wechselwirken. Dann laufen zwei Teilchen nach x_3 und x_4 aus. Beim zweiten Graphen gibt es eine zusätzliche Wechselwirkung am Raumzeitpunkt z. In beiden Fällen kann man davon ausgehen, dass zu den Zeiten $t_e \ll y^0, z^0$ und $t_a \gg y^0, z^0$ keine Wechselwirkung zwischen den Teilchen stattfindet. Bei den beiden letzten Graphen ist das anders. Sie beschreiben den unanschaulichen Vorgang, dass ein Teilchen auf seinem Weg von x_1 nach x_2 „an sich selbst gestreut“ wird. Der Vergleich mit den Experimenten zeigt, dass derartige Selbstwechselwirkungen eine wichtige Rolle spielen und keinesfalls einfach aus der Theorie gestrichen werden dürfen.

Weil die Selbstwechselwirkung der Teilchen nicht auf einen Zeitraum $t_e < t < t_a$ eingeschränkt werden kann sondern zu jeder Zeit möglich ist, scheint es zunächst überhaupt keinen Zeitpunkt zu geben, in dem man den Feldoperator $\psi_{(W)}(x)$ leicht erraten kann. Um die Lösung dieses Problems zu erklären, müssen wir etwas vorgreifen. In Abschnitt 20.3 werden wir die Selbstwechselwirkungs-Graphen berechnen und feststellen, dass sie divergieren. Die Behandlung dieser Divergenzen ist das Thema von Kapitel 22. Wir werden sehen dass die Selbstwechselwirkungs-Graphen sich in die harmlose Propagator-Linie des dritten Graphen von (19.44) verwandeln, wenn erstens der Masseparameter m des Feldes und zweitens die Amplitude ψ des Feldoperators in einer geeigneten Weise, die als Renormierung bezeichnet wird, neu definiert werden.

Die Selbstwechselwirkung verschwindet dabei nicht aus der Theorie, sondern sie wird durch die Renormierung der beiden Parameter so in den

Formalismus eingebaut, dass sie quasi automatisch stets berücksichtigt wird und nicht mehr in Selbstwechselwirkungs-Graphen explizit dokumentiert und berechnet werden muss. Also ist $\psi_{(W)}(t,\boldsymbol{x})$ in den Zeitbereichen $t \le t_e$ und $t \ge t_a$ formal identisch mit den bekannten Lösungen der freien Klein-Gordon-Gleichung (19.1), sobald man nur die renormierte Masse m und den renormierten Feldoperator $\psi(x)$ einsetzt.

Wir werden außerdem in Abschnitt 20.3 feststellen, dass auch der zweite Graph in (19.44) divergiert. Diese Divergenz werden wir in Kapitel 22 dadurch beheben, dass auch die Kopplungskonstante λ renormiert wird. Im Vorgriff darauf werden wir ab sofort in sämtlichen Rechnungen, falls nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird, die renormierten Faktoren m, $\psi(x)$, und λ verwenden.

Wir wollen jetzt $S_{\boldsymbol{fk}}$ als Funktion der Feldoperatoren $\psi_{(W)}(x)$ darstellen. In Anhang A.26 wird auf einem ziemlich länglichen, und trotzdem nicht mathematisch strengen Weg folgendes Resultat hergeleitet:

$$
\begin{aligned}
S_{\boldsymbol{f}_1\dots\boldsymbol{f}_n\boldsymbol{k}_1\dots\boldsymbol{k}_m} &= \langle \boldsymbol{f}_1\dots\boldsymbol{f}_n|\, S\,|\boldsymbol{k}_1\dots\boldsymbol{k}_m\rangle \overset{(A.202)}{=} \\
&= \prod_{j=1}^{n} \frac{\widetilde{G}^{-1}(f_j)}{\sqrt{2\hbar\omega_{\boldsymbol{f}_j}\Omega}} \int_{t_e}^{t_a}\int_{\Omega} \mathrm{d}^4 y_j\, \exp\{+if_jy_j\}\cdot \\
&\quad\cdot \prod_{l=1}^{m} \frac{\widetilde{G}^{-1}(k_l)}{\sqrt{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}_l}\Omega}} \int_{t_e}^{t_a}\int_{\Omega} \mathrm{d}^4 x_l\, \exp\{-ik_lx_l\}\cdot \\
&\quad\cdot \langle 0|\, T\psi_{(W)}(y_1)\dots\psi_{(W)}(y_n)\,\psi_{(W)}(x_1)\dots\psi_{(W)}(x_m)\,|0\rangle
\end{aligned}
\tag{19.45}
$$

Man beachte, dass die Integrale über x und y sich auch auf das Matrixelement in der letzten Zeile erstrecken.

$$
\widetilde{G}^{-1}(k) \overset{(12.7)}{=} -i\hbar c\Big(k^2 - m^2\frac{c^2}{\hbar^2} + i\epsilon'\Big) \tag{19.46}
$$

ist das inverse der Fourier-transformierten Greensfunktion. Wir überprüfen die Dimensionen: Jedes ein- oder auslaufende Teilchen trägt zu (19.45) die Dimension

$$\left[\frac{\widetilde{G}^{-1}}{\sqrt{\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}\Omega}}\cdot \mathrm{d}^4x\,\psi_{(W)}(x)\right] = \tag{19.47}$$
$$= \frac{\text{Energie}}{\text{Länge}\,\sqrt{\text{Energie}\cdot\text{Volumen}}}\cdot\frac{\text{Länge}^4}{\sqrt{\text{Energie}\cdot\text{Volumen}}} = 1$$

bei. Also ist die Wahrscheinlichkeitsamplitude dimensionslos, wie es sein muss.

Es wird sich in den folgenden Abschnitten als nützlich erweisen und viele Formeln vereinfachen, wenn man die Zeitpunkte t_e und t_a formal ins Unendliche schiebt:

$$t_e \to -\infty\,,\; t_a \to +\infty \quad\Longrightarrow\quad \int_{t_e}^{t_a}\mathrm{d}t \approx \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t \tag{19.48}$$

Auch diese Festlegung ist natürlich nicht wörtlich zu verstehen. Denn wir haben ja gerade angenommen dass die Amplituden der Wellenpakete am Rand des Normierungsvolumens Null sind, solange Wechselwirkungen zwischen den Teilchen vorkommen können. Für $t \to \pm\infty$ würde das nicht einmal bei unendlich großem Normierungsvolumen der Fall sein. Gemeint ist vielmehr, dass t_e und t_a zwar endlich sind und bleiben, aber so groß gegenüber allen anderen in den Formeln auftretenden Zeitpunkten gewählt werden, dass (19.48) eine gute Näherung darstellt.

Indem man außerdem (19.19) in (19.45) einsetzt, gelangt man zur LSZ-Reduktionsformel[5]. Sie verknüpft die S-Matrix mit dem Vakuum-Erwartungswert der Feldamplituden im Wechselwirkungsbild:

[5] benannt nach ihren Entdeckern Harry Lehmann (1924 – 1998), Kurt Symanzik (1923 – 1983), und Wolfhart Zimmermann (1928 – 2016)

$$
\begin{aligned}
S_{\boldsymbol{f}_1\dots\boldsymbol{f}_n\boldsymbol{k}_1\dots\boldsymbol{k}_m} &= \langle \boldsymbol{f}_1 \dots \boldsymbol{f}_n |\, S \,| \boldsymbol{k}_1 \dots \boldsymbol{k}_m \rangle \;= \\
&= \prod_{j=1}^{n} \frac{\widetilde{G}^{-1}(f_j)}{\sqrt{2\hbar\omega_{\boldsymbol{f}_j}\Omega}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{\Omega} \mathrm{d}^4 y_j \, \exp\{+i f_j y_j\} \cdot \\
&\quad \cdot \prod_{l=1}^{m} \frac{\widetilde{G}^{-1}(k_l)}{\sqrt{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}_l}\Omega}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{\Omega} \mathrm{d}^4 x_l \, \exp\{-i k_l x_l\} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \cdot \\
&\quad \cdot \frac{\langle 0|\, T\psi(y_1)\dots\psi(y_n)\,\psi(x_1)\dots\psi(x_m)\Big(-\frac{i}{\hbar}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\tau\, H(\tau)\Big)^j |0\rangle}{\langle 0|\, T\sum\limits_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}\Big(-\frac{i}{\hbar}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\tau\, H(\tau)\Big)^r |0\rangle}
\end{aligned}
\tag{19.49}
$$

Achtung: Die Integrale über x_l und y_j erstrecken sich auch über das Matrixelement im Zähler der letzten Zeile. Auf der Masseschale ist $\widetilde{G}^{-1}(k) = (19.46)$ Null. Wieso kann es unter diesen Umständen überhaupt von Null verschiedene S-Matrix-Elemente geben? Wir werden feststellen, dass bei der Berechnung der Matrixelemente $\langle 0|\, T\psi(y_1)\dots|0\rangle$ fouriertransformierte Propagatoren der Form (12.7) auftauchen.[6] Genau dann, wenn die Polstellen dieser Propagatoren die Nullfaktoren der LSZ-Reduktionsformel kompensieren, gibt es einen von Null verschiedenen Beitrag zur S-Matrix. Die delikate Balance von Polstellen und Nullfaktoren ist der Grund, warum die mathematisch strenge Herleitung der LSZ-Formel so schwierig ist, und das technische Niveau dieses Lehrbuchs deutlich übersteigt.

Obwohl die LSZ-Formel (19.49) ziemlich kompliziert und einschüchternd wirkt, wird sie sich im Folgenden als leicht zu handhaben und extrem nützlich erweisen.

[6] Tatsächlich haben wir bereits Produkte von Feynman-Propagatoren in den Matrixelementen von Feldoperator im Wechselwirkungsbild entdeckt, siehe z. B. (19.39).

20 Feynman-Graphen der ψ^s-Theorie

Feynman hat eine graphische Darstellung für Matrixelemente der Quantenfeldtheorie eingeführt, die sich als überaus nützlich erwiesen hat. Das Verfahren wird im ersten Abschnitt dieses Kapitels anhand einfacher Baumgraphen dargestellt. Im darauf folgenden Abschnitt beschäftigen wir uns mit Graphen, die Schleifen enthalten. Wir werden sehen, dass bei der Berechnung solcher Graphen Divergenzen auftreten. In Kapitel 22 werden wir klären, wie die Divergenzen durch Renormierung beseitigt werden können.

20.1 Baum-Graphen

Wir betrachten ein Streuereignis, bei dem zwei Teilchen mit Wellenzahl $\boldsymbol{k}_1$ und $\boldsymbol{k}_2$ einlaufen, und zwei Teilchen mit Wellenzahl $\boldsymbol{k}_3$ und $\boldsymbol{k}_4$ auslaufen. Wir wollen die Ordnungen $S^{(0)}, S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots$ der Streuamplitude

$$\sum_{n=0}^{\infty} S^{(n)} \equiv S_{\boldsymbol{k}_4\boldsymbol{k}_3\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{k}_1} = \langle \boldsymbol{k}_3\boldsymbol{k}_4 | \, S \, | \boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2 \rangle \tag{20.1}$$

Schritt für Schritt berechnen. Dazu wird der Wechselwirkungsterm

$$-\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\tau \, H(\tau) \overset{(19.6)}{=} (-i\lambda\hbar^2 c^2) \int_{-\infty}^{+\infty} c\mathrm{d}\tau \int_{\Omega} \mathrm{d}^3 y \, \psi^s(\tau, \boldsymbol{y}) \tag{20.2}$$

$$\text{mit } s = 3 \text{ oder } s = 4$$

in die LSZ-Reduktionsformel eingesetzt:

$$S^{(n)} \overset{(19.49)}{=} \frac{1}{M} \prod_{j=1}^{4} \frac{\widetilde{G}^{-1}(k_j)}{N_j} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\Omega} \mathrm{d}^4 x_j \cdot$$
$$\cdot \exp\{-i(k_1 x_1 + k_2 x_2 - k_3 x_3 - k_4 x_4\} \frac{(-i\lambda\hbar^2 c^2)^n}{n!} \cdot$$
$$\cdot \langle 0|\, T\psi(x_1)\, \psi(x_2)\, \psi(x_3)\, \psi(x_4) \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\Omega} \mathrm{d}^4 y\, \psi^s(y) \Big)^n |0\rangle \tag{20.3}$$

Dabei ist

$$M \equiv \langle 0|\, T \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \Big((-i\lambda\hbar^2 c^2) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\Omega} \mathrm{d}^4 w\, \psi^s(w) \Big)^r |0\rangle \tag{20.4}$$

der Nenner der LSZ-Formel (19.49), und

$$N_j \equiv \sqrt{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}_j}\Omega} \tag{20.5}$$

ist eine Kurzschreibweise für den Normierungsfaktor. Wenn der Zahlenwert der Kopplungskonstanten so klein ist, dass

$$\frac{|\lambda\hbar^2 c^2|^{(n+1)}}{(n+1)!} \ll \frac{|\lambda\hbar^2 c^2|^n}{n!}$$

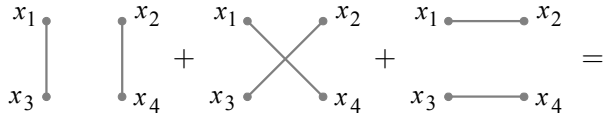
gilt, wird die Reihenentwicklung der S-Matrix schnell konvergieren.

Nullte Ordnung: $n = 0$. Es ist von vornherein klar, dass $S^{(0)} = 0$ ist. Denn bei $n = 0$ sind alle Faktoren in (20.3), die irgendetwas mit einer Wechselwirkung zu tun haben, gleich Eins. Also werden die Teilchen durch den Wechselwirkungsbereich laufen, ohne irgend etwas voneinander zu spüren. Wir werden die Berechnung von $S^{(0)}$ trotzdem durchführen, weil sie einen lehrreichen Einstieg in die Anwendung der LSZ-Formel bietet. $M =$ (20.4) ist von Null verschieden. Das Matrixelement in der letzten Zeile von (20.3) (mit dem Wechselwirkungsterm gleich Eins) kennen wir bereits:

$$\langle 0|\, T\psi(x_1)\,\psi(x_2)\,\psi(x_3)\,\psi(x_4)\,|0\rangle \overset{(19.39)}{=} G(x_1-x_2)\cdot G(x_3-x_4) + \\ + G(x_1-x_3)\cdot G(x_2-x_4) + G(x_1-x_4)\cdot G(x_2-x_3) \tag{20.6}$$

Für jeden der vier Raum-Zeit-Punkte x_1, x_2, x_3, x_4, an dem die vier Feldoperatoren definiert sind, zeichnen wir einen Punkt. Für jeden Propagator, der die Punkte verbindet, zeichnen wir eine Linie. Damit kann der Zähler der Streumatrix in nullter Ordnung folgendermaßen symbolisiert werden:

$$\widetilde{S}^{(0)} \equiv M\cdot S^{(0)} \overset{(20.3)}{=} \prod_{j=1}^{4} \frac{\widetilde{G}^{-1}(k_j)}{N_j} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\Omega} \mathrm{d}^4x_j \cdot \\ \cdot \exp\{-i(k_1x_1 + k_2x_2 - k_3x_3 - k_4x_4)\}\cdot \\ \cdot\ \langle 0|\, T\psi(x_1)\psi(x_2)\psi(x_3)\psi(x_4)\,|0\rangle \mathrel{\widehat{=}}$$

$\mathrel{\widehat{=}}$ 

$$= 2\cdot \underbrace{\quad}_{\widetilde{S}_a^{(0)}} + \underbrace{\quad}_{\widetilde{S}_b^{(0)}} \tag{20.7}$$

Weil zwei der drei Summanden offensichtlich das numerisch gleiche Ergebnis liefern ist es üblich, nur einen von ihnen zu zeichnen und mit dem Symmetriefaktor (in diesem Fall 2) zu multiplizieren. Die Graphen wurden mit einem „entspricht“ -Zeichen angefügt, nicht mit einem Gleichheitszeichen. Denn die selben Graphen werden auch dann verwendet, wenn das Matrixelement $\langle 0|\, T\ldots\,|0\rangle$ in einer anderen Gleichung als der LSZ-Formel (20.7) auftauchen. Auch wenn eine Gleichung das Betragsquadrat dieses Matrixelements enthält, wird es durch die gleichen, unveränderten Graphen repräsentiert.

Der letzte Graph repräsentiert das Propagatorproduct $G(x_1-x_2)\cdot G(x_3-x_4)$, das in (20.6) als eine von drei möglichen Kontraktionen des Matrixelements auftaucht. Dieser Graph passt nicht zur anschaulichen Interpretation

der Graphen, mit zwei einlaufenden Teilchen $\psi(x_1)$ und $\psi(x_2)$, und zwei auslaufenden Teilchen $\psi(x_3)$ und $\psi(x_4)$. Trotzdem ist dies eine vollwertige Kontraktion des Matrixelements. Folglich darf dieser Graph nicht gestrichen werden, es sei denn wir können beweisen dass er Null ergibt.

Außerdem wurde das Zeichen

$$\widetilde{S}^{(n)} \equiv M \cdot S^{(n)} \tag{20.8}$$

für den Zähler der LSZ-Formel (20.3) definiert. Mit dem Nenner M werden wir uns in (20.20)ff beschäftigen. Zunächst berechnen wir

$$\widetilde{S}_a^{(0)} = 2 \prod_{j=1}^{4} \frac{\widetilde{G}^{-1}(k_j)}{N_j} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\Omega} \mathrm{d}^4 x_j \, G(x_3 - x_1)\, G(x_4 - x_2) \cdot \\ \cdot \exp\{-i(k_1 x_1 + k_2 x_2 - k_3 x_3 - k_4 x_4)\} \; . \tag{20.9}$$

Offensichtlich kann $\widetilde{S}_a^{(0)} \equiv \widetilde{S}_{a31}^{(0)} \cdot \widetilde{S}_{a42}^{(0)}$ zerlegt werden in den Faktor

$$\frac{\widetilde{S}_{a31}^{(0)}}{\sqrt{2}} = \prod_{j=3,1} \frac{\widetilde{G}^{-1}(k_j)}{N_j} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\Omega} \mathrm{d}^4 x_j \, G(x_3 - x_1)\, e^{-i(k_1 x_1 - k_3 x_3)} \; ,$$

und einen Faktor $\widetilde{S}_{a42}^{(0)}$, der sich von $\widetilde{S}_{a31}^{(0)}$ nur dadurch unterscheidet, dass die Indizes 3 durch 4 und 1 durch 2 ersetzt sind. Mit der Fourier-Transformation

$$G(x_3 - x_1) \overset{(7.15)}{=} \frac{1}{\Omega} \sum_{\boldsymbol{f}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}f^0}{2\pi} \, \widetilde{G}(f) \exp\{-if(x_3 - x_1)\} \tag{20.10}$$

erhält man

$$\widetilde{S}_{a31}^{(0)} = \frac{\sqrt{2}}{\Omega} \sum_{\boldsymbol{f}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}f^0}{2\pi} \prod_{j=3,1} \frac{\widetilde{G}^{-1}(k_j)}{N_j} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\Omega} \mathrm{d}^4 x_j \cdot \\ \cdot \exp\{-i(f - k_3)x_3 - i(k_1 - f)x_1)\} \, \widetilde{G}(f) \; . \tag{20.11}$$

Durch Einsetzen von

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\Omega} \mathrm{d}^4 x_1 \, \exp\{-i(k_1 - f)x_1)\} \overset{(7.16b)}{=} 2\pi\Omega \, \delta(f^0 - k_1^0) \, \delta_{\boldsymbol{f}\boldsymbol{k}_1} \tag{20.12}$$

ist die Summe über $\boldsymbol{f}$ und das Integral über f^0 leicht ausführbar mit dem Ergebnis

$$\widetilde{S}_{a31}^{(0)} = \frac{\sqrt{2}}{\Omega 2\pi} \cdot 2\pi\Omega \prod_{j=3,1} \frac{\widetilde{G}^{-1}(k_j)}{N_j} \cdot \widetilde{G}(k_1) \cdot \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\Omega} \mathrm{d}^4 x_3 \, \exp\{-i(k_1 - k_3)x_3\} \, . \tag{20.13}$$

Das Integral über x_3 ergibt die Deltafunktion und das Kronecker-Symbol (20.12), welche die Erhaltung von Energie und Impuls des Teilchens sicherstellt, das bei x_1 einläuft und bei x_3 ausläuft. Die Fouriertransformierte Greensfunktion wird gekürzt:

$$\begin{aligned} \widetilde{S}_{a31}^{(0)} &= \sqrt{2} \, \frac{\widetilde{G}^{-1}(k_3)}{N_1 N_3} \, 2\pi\Omega \, \delta(k_3^0 - k_1^0) \, \delta_{\boldsymbol{k}_3\boldsymbol{k}_1} \\ \widetilde{S}_{a}^{(0)} &= 2 \, \frac{\widetilde{G}^{-1}(k_3) \, \widetilde{G}^{-1}(k_4)}{N_1 N_2 N_3 N_4} \, 2\pi\Omega \, \delta(k_3^0 - k_1^0) \, \delta_{\boldsymbol{k}_3\boldsymbol{k}_1} \cdot \\ &\quad \cdot \, 2\pi\Omega \, \delta(k_4^0 - k_2^0) \, \delta_{\boldsymbol{k}_4\boldsymbol{k}_2} = 0 \end{aligned} \tag{20.14}$$

Weil die Graphen (20.7) nur jeweils zwei Propagatoren enthalten, konnten nur zwei der vier Nullfaktoren $\widetilde{G}^{-1}$ gekürzt werden. Deshalb ist $\widetilde{S}_a^{(0)} = 0$. Es wären vier Propagatoren erforderlich, um die vier Null-Faktoren $\widetilde{G}^{-1}$ im Zähler zu kompensieren. Aus dem gleichen Grund ist offensichtlich auch $\widetilde{S}_b^{(0)} = 0$, so dass insgesamt $\widetilde{S}^{(0)} = 0$ ist. Überraschend ist dies Ergebnis nicht. In nullter Ordnung ist der Wechselwirkungsfaktor in (20.3) gleich $\sim \left(\lambda\psi^s(y)\right)^0$. Also spürt das eine Teilchen nichts vom anderen, und folglich gibt es auch keine Streuung zwischen den Teilchen.

Es gibt einen weiteren, allgemein gültigen Grund, warum Diagramme wie das in (20.7) abgebildete $\widetilde{S}_b^{(0)}$ immer Null ergeben: Wenn man sie berechnet,

dann findet man ein Resultat mit der Randbedingung $\delta(k_1^0 - k_2^0)\,\delta_{\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2}$. Folglich muss $\boldsymbol{k}_2 = \boldsymbol{k}_1$ sein. Es kann aber kein Streuereignis geben, wenn die zwei einlaufenden Teilchen den Relativ-Impuls Null haben. Also können wir in Zukunft beruhigt alle Diagramme streichen, in denen die Feldoperatoren $\psi(x_1)$ und $\psi(x_2)$ der beiden einlaufenden Teilchen zum Propagator $G(x_2 - x_1)$ kontrahiert sind.

Berechnung von $\widetilde{S}^{(1)}$: Bei der nullten Ordnung haben wir bereits gesehen, dass mindestens vier Propagatoren zur Kompensation der Nullfaktoren im Zähler der LSZ-Formel erforderlich sind. Um vier Propagatoren zu bilden, braucht man acht Feldoperatoren. Die beiden einlaufenden und die beiden auslaufenden Teilchen liefern zusammen vier Feldoperatoren. Die fehlenden vier müssen vom Wechselwirkungsterm kommen. Es wäre Zeitverschwendung, in erster Ordnung die Wechselwirkung (20.2) mit $s = 3$ zu betrachten, weil sie nur drei Operatoren liefert. Wir untersuchen deshalb die Streuung in erster Ordnung der ψ^4-Theorie, d. h. wir setzen

$$\mathcal{O}(\lambda^1) \quad \Longrightarrow \quad T\frac{1}{1!}\Big((-i\lambda\hbar^2c^2)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{\Omega}\mathrm{d}^4y\,\psi^4(y)\Big)^1 \tag{20.15}$$

als Wechselwirkungsterm in die LSZ-Formel ein:

$$\begin{aligned}
24\cdot\ & \begin{array}{ccc} x_1 & & x_2 \\ & y & \\ x_3 & & x_4 \end{array} \ \widehat{=}\ \widetilde{S}^{(1)} = M\cdot S^{(1)} \overset{(20.3)}{=} \prod_{j=1}^{4}\frac{\widetilde{G}^{-1}(k_j)}{N_j}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{\Omega}\mathrm{d}^4x_j\cdot \\
&\cdot\exp\{-i(k_1x_1+k_2x_2-k_3x_3-k_4x_4)\}\,(-i\lambda\hbar^2c^2)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{\Omega}\mathrm{d}^4y \\
&\cdot\,\langle 0|\,T\psi(x_1)\,\psi(x_2)\,\psi(x_3)\,\psi(x_4)\,\psi(y)\,\psi(y)\,\psi(y)\,\psi(y)\,|0\rangle = \\
= \widetilde{S}^{(1)} = \prod_{j=1}^{4}&\frac{\widetilde{G}^{-1}(k_j)}{N_j}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{\Omega}\mathrm{d}^4x_j\,(-i\lambda\hbar^2c^2)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{\Omega}\mathrm{d}^4y \\
&\cdot\exp\{-i(k_1x_1+k_2x_2-k_3x_3-k_4x_4)\} \\
&\cdot\,4!\,\Big(G(x_1-y)\,G(x_2-y)\,G(x_3-y)\,G(x_4-y)\Big)
\end{aligned} \tag{20.16}$$

Der Vakuum-Erwartungswert des zeitgeordneten Operatorprodukts ist nach Satz (19.40a) gleich der Summe der 105 Produkte von je 4 Feynman-Propagatoren, die aus den acht Feldoperatoren gebildet werden können. Wenn zwei der Operatoren $\psi(y)$ zum Propagator $G(y-y)=1$ kombiniert werden, dann ergeben sie keinen Beitrag zur Kompensation der vier Nullfaktoren $\widetilde{G}^{-1}(k_j)$. Nur wenn jeder der Operatoren $\psi(x_1)\dots\psi(x_4)$ mit je einem der Operatoren $\psi(y)$ zu einem Propagator kombiniert wird, kann es einen von Null verschiedenen Beitrag zur S-Matrix geben. Nur solche Summanden wurden in (20.16) eingetragen, alle 81 anderen Summanden wurden von vornherein gestrichen. Es gibt 4 Möglichkeiten, den Operator $\psi(x_1)$ mit einem der Operatoren $\psi(y)$ zu kombinieren, 3 Möglichkeiten um $\psi(x_2)$ mit einem der verbleibenden Operatoren $\psi(y)$ zu kombinieren, usw., also insgesamt 4! mögliche Kombinationen. Deshalb besteht $\widetilde{S}^{(1)}$ aus 4! Summanden. Weil jeder dieser Summanden offenbar gleich groß ist, wird nur ein Graph berechnet und mit dem Symmetriefaktor $4!=24$ multipliziert.

Anmerkung: Der Symmetriefaktor $4!=24$ wird uns in der ψ^4-Theorie sehr häufig begegnen, ebenso der Symmetriefaktor $3!=9$ in der ψ^3-Theorie. Um Schreibarbeit zu sparen, definieren deshalb viele Autoren die Kopplungskonstante $\lambda/s!$, die wir als λ definiert haben. Der didaktische Vorteil, dass die Symmetriefaktoren jederzeit explizit sichtbar und erkennbar sind, rechtfertigt jedoch nach Ansicht des Autors die geringfügige zusätzliche Schreibarbeit.

Im Feynman-Diagramm (20.16) laufen im Raum-Zeit-Punkt y mehrere Propagator-Linien zusammen. Ein derartiger innerer Punkt wird als Vertex (lateinisch Drehpunkt, Plural: Vertizes) bezeichnet. Für die äußeren Punkte, die nur die Endpunkte von jeweils einem Propagator sind, ist diese Bezeichnung nicht üblich. Einsetzen der Fourier-Transformation (20.10) und der Definition

$$y_j \equiv x_j - y \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{aligned} \mathrm{d}^4 x_j &= \mathrm{d}^4 y_j \\ x_j &= y_j + y \end{aligned} \tag{20.17}$$

ergibt

$$\begin{aligned}\widetilde{S}^{(1)} &= 24\cdot(-i\lambda\hbar^2c^2)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{\Omega}\mathrm{d}^4y\,\exp\{-i(k_1+k_2-k_3-k_4)y\}\\ &\quad\cdot\prod_{j=1}^{2}\frac{\widetilde{G}^{-1}(k_j)}{N_j\,\Omega}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{\Omega}\mathrm{d}^4y_j\sum_{\boldsymbol{f}_j}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}f_j^0}{2\pi}\,\widetilde{G}(f_j)\exp\{-i(f_j+k_j)y_j\}\\ &\quad\cdot\prod_{l=3}^{4}\frac{\widetilde{G}^{-1}(k_l)}{N_l\,\Omega}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{\Omega}\mathrm{d}^4y_l\sum_{\boldsymbol{f}_l}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}f_l^0}{2\pi}\,\widetilde{G}(f_l)\exp\{-i(f_l-k_l)y_l\}\\ &= 24\cdot(-i\lambda\hbar^2c^2)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{\Omega}\mathrm{d}^4y\,\exp\{-i(k_1+k_2-k_3-k_4)y\}\\ &\quad\cdot\prod_{j=1}^{4}\frac{\widetilde{G}^{-1}(k_j)}{N_j}\,\widetilde{G}(-k_1)\,\widetilde{G}(-k_2)\,\widetilde{G}(k_3)\,\widetilde{G}(k_4)\;, \end{aligned}\tag{20.18}$$

wobei (20.12) benutzt wurde. Wegen $\widetilde{G}(k)\overset{(12.7)}{=}\widetilde{G}(-k)$ können die vier Nullfaktoren gekürzt werden. Außerdem ergibt das Integral über y wieder eine Deltafunktion und ein Kronecker-Symbol, welche die Erhaltung von Energie und Impuls garantieren:

$$\begin{aligned}\widetilde{S}^{(1)} &= 24\cdot(-i\lambda\hbar^2c^2)\prod_{j=1}^{4}\sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}_j}\Omega}}\cdot\\ &\quad\cdot\;2\pi\Omega\,\delta(k_1^0+k_2^0-k_3^0-k_4^0)\,\delta_{(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2),(\boldsymbol{k}_3+\boldsymbol{k}_4)}\;. \end{aligned}\tag{20.19}$$

Nun müssen wir den Nenner

$$M\overset{(20.4)}{=}\langle 0|\,T\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}\Big(-i\lambda\hbar^2c^2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{\Omega}\mathrm{d}^4y\,\psi^4(y)\Big)^r|0\rangle\tag{20.20}$$

der LSZ-Reduktionsformel untersuchen. Der Summand nullter Ordnung ist

$$M^{(0)}=\langle 0|0\rangle=1\;.\tag{20.21}$$

Der Summand erster Ordnung

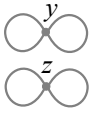
$$M^{(1)} = -i\lambda\hbar^2c^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\Omega} \mathrm{d}^4y \, \langle 0| \, \psi^4(y) \, |0\rangle \mathrel{\widehat{=}} 3 \cdot$$

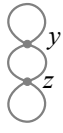
(20.22)

kann durch einen Feynman-Graphen repräsentiert werden, in dem zwei Propagatoren am gleichen Vertex y beginnen und enden. Es gibt drei verschiedene Möglichkeiten, die vier Feldoperatoren $\psi(y)$ paarweise zu diesem Graph zu kombinieren, deshalb taucht der Symmetriefaktor 3 auf.

Das Matrixelement zweiter Ordnung

$$M^{(2)} = \frac{(-i\lambda\hbar^2c^2)^2}{2!} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\Omega} \mathrm{d}^4y \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\Omega} \mathrm{d}^4z \, \langle 0| \, T \, \psi^4(y) \, \psi^4(z) \, |0\rangle \mathrel{\widehat{=}}$$

$$\mathrel{\widehat{=}} 9 \cdot$$ 

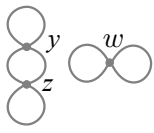
$$+ \; 72 \cdot$$ 

$$+ \; 24 \cdot$$

(20.23)

wird durch die Summe dreier Graphen repräsentiert. Insgesamt gibt es entsprechend Satz (19.40a) $7\cdot5\cdot3 = 105$ Möglichkeiten, die 8 Feldoperatoren ψ zu 4 Propagatoren zu kombinieren. Der obere Teil des ersten Graphen kann – genau wie (20.22) – auf 3 unterschiedliche Weisen realisiert werden, der untere Teil ebenso. Also gibt es insgesamt 9 verschiedene Möglichkeiten, die $4+4$ Feldoperatoren zum ersten Graphen zu kombinieren. Um beim zweiten Summanden aus vier $\psi(y)$ und vier $\psi(z)$ die mittlere Schleife zu bilden, gibt es $4\cdot4\cdot3\cdot3/2! = 72$ verschiedene Möglichkeiten. Für die Erzeugung der oberen und der unteren Schleife bleibt danach nur noch 1 Möglichkeit. Um beim dritten Graphen aus den vier $\psi(y)$ und vier $\psi(z)$ die vier Propagatoren $G(y-z)$ zu bilden, gibt es $4\cdot4\cdot3\cdot3\cdot2\cdot2/4! = 24$ verschiedene Möglichkeiten. Man beachte, dass eine Vertauschung der Vertizes $y \leftrightarrow z$ nur eine Drehung der Graphen um 180 Grad bedeuten aber nicht ihre Topologie verändern würde, und deshalb keine neue Variante darstellt. Für die Topologie eines Graphen ist allein entscheidend, welcher der acht Operatoren $\psi(y)$ bzw. $\psi(z)$ mit welchem der sieben anderen Operatoren $\psi(y)$ bzw. $\psi(z)$ zum Propagator kombiniert ist, aber nicht, ob eine Vakuum-Blase oben oder unten gemalt wird.

Das Matrixelement ditter Ordnung ist

$$M^{(3)} = \frac{(-i\lambda\hbar^2c^2)^3}{3!} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\Omega} \mathrm{d}^4y \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\Omega} \mathrm{d}^4z \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\Omega} \mathrm{d}^4w$$
$$\cdot \langle 0|\, T\, \psi^4(y)\, \psi^4(z)\, \psi^4(w)\, |0\rangle \mathrel{\widehat{=}}$$
$$\mathrel{\widehat{=}} \underbrace{3 \cdot 72 \cdot 3}_{648} \cdot$$ 

$$+ \ldots \ . \qquad (20.24)$$

Wir betrachten nur einen der zahlreichen Graphen dieses Matrixelements. Der Symmetriefaktor der linken Struktur ist 72, siehe (20.23). Der Symmetriefaktor der rechten Struktur ist 3, siehe (20.22). Einen zusätzlichen Faktor 3 gibt es, weil es einen topologischen Unterschied macht, ob sich der Vertex y, z, oder w in der rechten Struktur befindet. Also ist der Symmetriefaktor insgesamt $72 \cdot 3 \cdot 3 = 648$.

Wir werden weder die bisher angegebenen Ordnungen $M^{(n)}$ explizit berechnen, noch die unendlich vielen Beiträge $M^{(n)}$ höherer Ordnung. Denn es gibt eine elegante Möglichkeit, M gegen eine identische Summe im Zähler der LSZ-Formel zu kürzen. Was wir letztlich berechnen wollen ist die Streuamplitude

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} S^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\widetilde{S}^{(n)}}{M} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{S}^{(n)}}{\sum_{j=0}^{\infty} M^{(j)}} \ . \qquad (20.25)$$

Dazu kompilieren wir jetzt Ordnung für Ordnung eine systematische Liste der Graphen und Symmetriefaktoren von $M^{(n)}$ und $\widetilde{S}^{(n)}$.

$$M^{(0)} \mathrel{\widehat{=}} m^{(0)} \cdot \ 1 \qquad (20.26a)$$

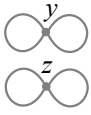
Natürlich kennen wir von (20.21) den Symmetriefaktor $m^{(0)} = 1$. Und 1 ist eigentlich kein Feynman-Graph, sondern lediglich der numerische Wert des Matrixelements $\langle 0|0\rangle$. Aber wir wollen eine systematische Beschreibung zusammenstellen, bei der nicht alle Symmetriefaktoren explizit berechnet zu werden brauchen, und bei der jeder Eintrag einen oder mehrere Graphen

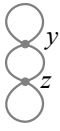
(oder wenigstens die 1 als Ersatz für einen Graphen) enthält. In erster Ordnung finden wir

$$M^{(1)} \mathrel{\widehat{=}} m^{(1)} \cdot$$

$$. \tag{20.26b}$$

Die Terme zweiter Ordnung sind

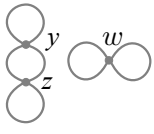
$$M^{(2)} \mathrel{\widehat{=}} m_a^{(2)} \cdot$$ 

$$+ m_b^{(2)} \cdot$$ 

$$+ m_c^{(2)} \cdot$$

$$. \tag{20.26c}$$

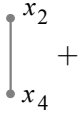
In dritter Ordnung findet man

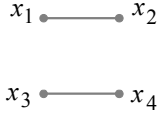
$$M^{(3)} \mathrel{\widehat{=}} 3 \cdot m^{(1)} m_a^{(2)} \cdot$$ 

$$+ \ldots \tag{20.26d}$$

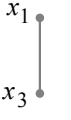
und viele weitere Graphen Wir werden nicht die Terme höherer Ordnung $M^{(n)}$ auflisten. Stattdessen kompilieren wir die ersten Terme von $\widetilde{S}^{(n)}$:

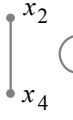
$$\widetilde{S}^{(0)} \mathrel{\widehat{=}} s_a^{(0)} m^{(0)} \cdot$$



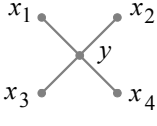
$$+ s_b^{(0)} m^{(0)} \cdot$$ 

$$\tag{20.27a}$$

$$\widetilde{S}^{(1)} \mathrel{\widehat{=}} s^{(0)} m^{(1)} \cdot$$ 



$$+$$

$$+ s^{(1)} m^{(0)} \cdot$$ 

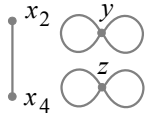
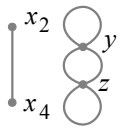
$$\tag{20.27b}$$

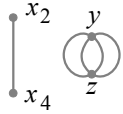
In (20.16) hatten wir das erste Diagramm von $\widetilde{S}^{(1)}$ gestrichen, weil wir von vornherein wussten dass die vier Null-Faktoren der LSZ-Formel nicht durch die Propagatoren

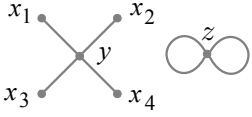
$$s^{(0)}m^{(1)} \cdot G(x_2 - x_1)\, G(x_4 - x_3)\, \underbrace{G(y-y)\, G(y-y)}_{1}$$

dieses Graphen kompensiert werden können, so dass dieser Graph nicht zur Streuamplitude beitragen würde. Aber für die Vollständigkeit unserer systematischen Auflistung der Graphen ist dieser Term erforderlich. Es gibt außer den beiden Diagrammen (20.27b) keine weiteren[1] Möglichkeiten, die vier Feldoperatoren $\psi(x_j)$ (die zu den vier ein- und auslaufenden Teilchen gehören) und die vier Feldoperatoren $\psi(y)$ (die zum Vertex der ψ^4-Theorie gehören) zu Propagatoren zu kontrahieren.

Die Graphen zweiter Ordnung sind

$\widetilde{S}^{(2)} \mathrel{\widehat{=}} s^{(0)} \Big(m_a^{(2)} \cdot$  $+ m_b^{(2)} \cdot$ 

$+ m_c^{(2)} \cdot$  $\Big)$

$+ 2 \cdot s^{(1)}m^{(1)} \cdot$ 

$+ s_a^{(2)}m^{(0)} \cdot \ldots + s_b^{(2)}m^{(0)} \cdot \ldots + \ldots$ (20.27c)

Man beachte den zusätzlichen Symmetriefaktor 2 in der vorletzten Zeile, der durch den Austausch der Vertizes y und z zustande kommt! Wir werden diesen wichtigen Faktor gleich diskutieren.

Wir kennen die Graphen mit den Symmetriefaktoren $s_j^{(2)}$ noch nicht, und auch nicht die Terme $\widetilde{S}^{(n)}$ mit $n > 2$. Aber unsere Auflistung reicht aus, um eine Regelmäßigkeit zu erkennen. Für eine geeignete Beschreibung dieser

[1] Wir erinnern daran, dass wir renormierte Masse-Parameter m und renormierte Feldoperatoren ψ verwenden. Deshalb sind Graphen wie der vierte in (19.44) unterdrückt. Siehe die Diskussion im Anschluss an (19.44).

Regelmäßigkeit brauchen wir die

Definition: Ein Graph heißt *verbunden*, wenn jede seiner Strukturen direkt oder indirekt mit mindestens einem ein- oder auslaufenden Teilchen verbunden ist. Andernfalls heißt der Graph *unverbunden*. (20.28)

Beispielsweise sind die Graphen (20.27a) und der zweite Graph in (20.27b) verbunden, während der erste Graph in (20.27b) unverbunden ist (da die Struktur ○○ nicht mit irgend einem ein- oder auslaufenden Teilchen verbunden ist). Alle in (20.27c) explizit gezeichneten Graphen sind unverbunden. Wir nutzen (20.28), um

$$\overline{S}^{(n)} \equiv \widetilde{S}^{(n)} - (\text{unverbundene Graphen}) \tag{20.29}$$

als die Untermenge der verbundenen Graphen von $\widetilde{S}^{(n)}$ zu definieren.

Jetzt müssen wir den zusätzlichen Symmetriefaktor 2 in der vorletzten Zeile von (20.27c) diskutieren. Die allgemeine Regel ist: Wenn ein (verbundener oder unverbundener) Graph der Ordnung j und ein (verbundener oder unverbundener) Graph der Ordnung $(n-j)$ zu einem unverbundenen Graph der Ordnung n kombiniert werden, dann gibt es – durch Permutation der Vertizes – einen zusätzlichen Symmetriefaktor

$$\binom{n}{j} = \binom{n}{n-j} = \frac{n!}{j!\,(n-j)!}\ . \tag{20.30}$$

In (20.24) sind wir bereits auf ein anderes Beispiel dafür gestoßen, mit dem zusätzlichen Symmetriefaktor $\binom{3}{2} = 3$. Die zusätzlichen Symmetriefaktoren sind sehr wirchtig, weil wir im Folgenden die Streuamplitude der Ordnung n in der Form

$$\widetilde{S}^{(n)} = \overline{S}^{(0)} M^{(n)} + \overline{S}^{(1)} M^{(n-1)} + \ldots + \overline{S}^{(n)} M^{(0)}$$

konstruieren wollen. Jetzt erinnern wir uns daran, dass in der LSZ-Formel (20.3) von $\widetilde{S}^{(n)}$ ein Faktor $1/n!$ enthalten ist. Der zusätzliche Symmetriefaktor (20.30) bewirkt, dass der Faktor $1/n!$ gekürzt und durch das Produkt der

entsprechenden Faktoren $1/j!$ von $\overline{S}^{(j)}$ und $1/(n-j)!$ von $M^{(n-j)}$ ersetzt wird.

Also kann man dank der zusätzlichen Symmetriefaktoren (20.30) tatsächlich (20.27) in folgender Form darstellen:

$$\begin{aligned}
\widetilde{S}^{(0)} &= \overline{S}^{(0)} M^{(0)} \\
\widetilde{S}^{(1)} &= \overline{S}^{(0)} M^{(1)} + \overline{S}^{(1)} M^{(0)} \\
\widetilde{S}^{(2)} &= \overline{S}^{(0)} M^{(2)} + \overline{S}^{(1)} M^{(1)} + \overline{S}^{(2)} M^{(0)} \\
&\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
\widetilde{S}^{(n)} &= \overline{S}^{(0)} M^{(n)} + \overline{S}^{(1)} M^{(n-1)} + \overline{S}^{(2)} M^{(n-2)} + \dots \\
&\qquad \dots + \overline{S}^{(n-1)} M^{(1)} + \overline{S}^{(n)} M^{(0)} \\
\widetilde{S}^{(n+1)} &= \overline{S}^{(0)} M^{(n+1)} + \overline{S}^{(1)} M^{(n)} + \overline{S}^{(2)} M^{(n-1)} + \dots \\
&\qquad \dots + \overline{S}^{(n-1)} M^{(2)} + \overline{S}^{(n)} M^{(1)} + \overline{S}^{(n+1)} M^{(0)} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Dieses unendliche Gleichungssystem wird *spaltenweise* addiert:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{S}^{(n)} &= \overline{S}^{(0)} \sum_{j=0}^{\infty} M^{(j)} + \overline{S}^{(1)} \sum_{j=0}^{\infty} M^{(j)} + \overline{S}^{(2)} \sum_{j=0}^{\infty} M^{(j)} + \dots \\
&= M \sum_{n=0}^{\infty} \overline{S}^{(n)} \qquad (20.31)
\end{aligned}$$

Insgesamt ist die S-Matrix also gleich

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} S^{(n)} \overset{(20.8)}{=} \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{S}^{(n)} \overset{(20.31)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \overline{S}^{(n)} \,. \qquad (20.32)$$

Man braucht weder den Nenner M noch die unverbundenen Diagramme des Zählers $\widetilde{S}$ der LSZ-Formel zu berechnen, weil sie gegeneinander gekürzt werden können! Von nun an werden wir nur die verbundenen Diagramme $\overline{S}^{(n)} = (20.29)$ berechnen. Denn das genügt, um die Streuamplitude S zu finden.

Man beachte, dass nur die unendlichen Summen (20.32) gleich sind,

während sich die einzelnen Summanden $\overline{S}^{(j)} \neq \widetilde{S}^{(j)}/M$ unterscheiden. Wenn man die Streuamplitude nach den Termen $\overline{S}^{(j)}$ statt nach den Termen $\widetilde{S}^{(j)}/M$ entwickelt, dann verändert man den Algorithmus der Näherung. Die Störungsrechnung führt unverändert zum Grenzwert S, aber man nähert sich diesem Grenzwert mit einer veränderten Schrittweite.

Auch weiterhin wollen wir alle Aspekte der Störungsrechnung an möglichst einfachen Beispielen untersuchen. Deshalb berechnen wir als Nächstes nicht den Term $\overline{S}^{(2)}$ der Streumatrix mit ψ^4-Wechselwirkung, sondern untersuchen die Streumatrix mit ψ^3-Wechselwirkung. In nullter Ordnung erhält man das gleiche Ergebnis (nämlich Null) wie mit ψ^4-Wechselwirkung, weil der Wechselwirkungsterm in beiden Fällen

$$\frac{1}{n!}\Big(- i\lambda\hbar^2c^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{\Omega} \mathrm{d}^4y\, \psi^s(y)\Big)^n \overset{(20.2)}{=} 1 \quad \text{für } n = 0 \tag{20.33}$$

ist.

$\overline{S}^{(1)}$ enthält bei ψ^3-Wechselwirkung die vier Operatoren $\psi(x_j)$ und drei Wechselwirkungsoperatoren $\psi(y)$, also insgesamt 7 Operatoren. Deshalb ist $\overline{S}^{(1)}$ zufolge Satz (19.40a) gleich Null.

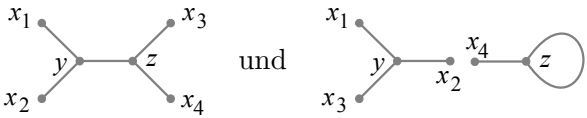
Der führende von Null verschiedene Term in der Reihenentwicklung der S-Matrix ist in der ψ^3-Theorie

$$\begin{aligned}\overline{S}^{(2)} = \prod_{j=1}^{4} \frac{\widetilde{G}^{-1}(k_j)}{N_j} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{\Omega} \mathrm{d}^4x_j\, \frac{(-i\lambda\hbar^2c^2)^2}{2!}\,\cdot \\ \cdot \exp\{-i(k_1x_1 + k_2x_2 - k_3x_3 - k_4x_4)\} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{\Omega} \mathrm{d}^4y \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{\Omega} \mathrm{d}^4z\cdot \\ \cdot \langle 0|\, T\psi(x_1)\psi(x_2)\psi(x_3)\psi(x_4)\, \psi^3(y)\, \psi^3(z)\, |0\rangle_c\ .\end{aligned} \tag{20.34}$$

Der Index c (für „connected“) am Matrixelement erinnert daran, das jetzt alle unverbundenen Graphen sofort zu streichen sind, weil wir nicht $\widetilde{S}^{(2)}$ sondern $\overline{S}^{(2)}$ berechnen. Um die vier Nullfaktoren $\widetilde{G}^{-1}(k_j)$ zu kompensieren, brauchen wir vier fouriertransformierte Greensfunktionen $\widetilde{G}(k_j)$, die wieder-

um mithilfe der vier Exponentialfunktionen $\exp\{\pm i(k_j x_j)\}$ gebildet werden müssen. Ein von Null verschiedenes Ergebnis kann es nur geben, wenn jeder Operator $\psi(x_j)$ mit einem der sechs Wechselwirkungsoperatoren $\psi(y), \psi(z)$, jedoch nicht mit einem anderen $\psi(x_j)$, zum Propagator kombiniert wird. Anders gesagt: Ein Graph kann nur dann einen Beitrag zur Amplitude leisten, wenn jeder externe Punkt mit einem Vertex, jedoch nicht mit einem anderen externen Punkt, direkt verbunden ist.

Deshalb sind von vornherein nur zwei Arten von Graphen zu berücksichtigen, nämlich



. (20.35)

Man macht sich aber schnell klar, dass der zweite Graph zu einem Null-Ergebnis führt. Denn wenn man in dem Summanden von $\overline{S}^{(2)}$, der dem zweiten Graph entspricht, die (20.17) entsprechenden Substitutionen $y_j \equiv x_j - y$ und $z_4 \equiv x_4 - z$ durchführt und dann über die y_j und z_4 integriert, enthält das Ergebnis – entsprechend (20.18) – die Faktoren

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\Omega} \mathrm{d}^4 y\, \exp\{-i(k_1+k_2-k_3)y\} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\Omega} \mathrm{d}^4 z\, \exp\{ik_4 z\} =$$

$$\overset{(20.12)}{=} (2\pi\Omega)^2\, \delta(k_1^0+k_2^0-k_3^0)\, \delta_{(\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2),\boldsymbol{k}_3}\, \delta(k_4^0)\, \delta_{\boldsymbol{k}_4,0}\ . \qquad (20.36)$$

Nur wenn das durch den Operator $\psi(x_4)$ beschriebene auslaufende Teilchen die Energie Null und den Impuls Null hat, kann der rechte Graph in (20.35) einen von Null verschieden Beitrag zur Streuamplitude leisten. Das ist niemals der Fall, denn erstens hat – wegen $m \neq 0$ – kein Klein-Gordon-Teilchen die Energie Null, und zweitens kann ein Teilchen mit Impuls Null nicht aus dem Streubereich auslaufen. Aufgrund der Erhaltung von Energie und Impuls kann man von vornherein jeden Graphen streichen, in dem nicht jedes ein- oder auslaufende Teilchen direkt oder indirekt mit mindestens einem anderen ein- oder auslaufenden Teilchen verbunden ist.

Es bleiben nur zwei Graphen der Art links in (20.35) zu berechnen,

nämlich

$$\overline{S}^{(2)} \mathrel{\widehat{=}} \underbrace{72 \cdot}_{\overline{S}^{(2)}_{eg}} \underbrace{\begin{array}{ccc} x_1 & & x_3 \\ & y - z & \\ x_2 & & x_4 \end{array}}_{\overline{S}^{(2)}_{eg}} \underbrace{+144 \cdot}_{\overline{S}^{(2)}_{ev}} \underbrace{\begin{array}{ccc} x_1 & & x_2 \\ & y - z & \\ x_3 & & x_4 \end{array}}_{\overline{S}^{(2)}_{ev}} . \tag{20.37}$$

Der Index eg bedeutet: Die beiden einlaufenden Teilchen koppeln am gleichen Vertex. Der Index ev bedeutet: Die beiden einlaufenden Teilchen koppeln an verschiedenen Vertizes. Wir überlegen den Symmetriefaktor für $\overline{S}^{(2)}_{eg}$: Bei drei Operatoren $\psi(y)$ und drei Operatoren $\psi(z)$ gibt es $3 \cdot 3$ Möglichkeiten zur Bildung des Propagators $G(z-y)$. Anschließend gibt es noch 2 Möglichkeiten, die Propagatoren $G(y - x_1)$ und $G(y - x_2)$ zu bilden, und 2 Möglichkeiten, die Propagatoren $G(x_3 - z)$ und $G(x_4 - z)$ zu bilden. Die Vertauschung der Vertizes y und z ergibt einen weiteren Faktor 2. Also ist der Symmetriefaktor $9 \cdot 2^2 \cdot 2 = 72$. Bei $\overline{S}^{(2)}_{ev}$ gibt es einen zusätzlichen Faktor 2 bei Vertauschung von x_3 und x_4. Wir werden sehen, dass die beiden Graphen unterschiedliche Ergebnisse liefern, und deshalb nicht zu einem Graphen zusammengefasst werden können. Zunächst berechnen wir

$$\begin{aligned} \overline{S}^{(2)}_{eg} \overset{(20.34)}{=} 72 \cdot \prod_{j=1}^{4} \frac{\widetilde{G}^{-1}(k_j)}{N_j} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\Omega} \mathrm{d}^4 x_j \, \frac{(-i\lambda\hbar^2c^2)^2}{2!} \cdot \\ \cdot \exp\{-i(k_1x_1 + k_2x_2 - k_3x_3 - k_4x_4)\} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\Omega} \mathrm{d}^4 y \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\Omega} \mathrm{d}^4 z \cdot \\ \cdot \; G(y - x_1)\, G(y - x_2)\, G(z - y)\, G(x_3 - z)\, G(x_4 - z) \; . \end{aligned} \tag{20.38}$$

Hier wurde entsprechend Satz (19.40a) das Matrixelement in der letzten Zeile von (20.34) durch das Produkt der Propagatoren ersetzt. Die allgemeine Regel lautet: Für jede Linie eines Graphen wird der entsprechende Propagator G als Faktor in die Streuamplitude eingetragen.

Außerdem enthält (20.38) den Faktor $(-i\lambda\hbar^2c^2)^2/2!$. Die allgemeine Regel lautet: Es gibt einen Faktor $(-i\lambda\hbar^2c^2)^n/n!$ für einen Graph mit n Vertizes.

Die Regeln für die Konstruktion von Matrixelementen aus Feynman-Graphen, die wir hier nach und nach kennenlernen, sammeln wir in Kasten 20.1 auf Seite 430. Denn wir wollen künftig die Reihenfolge unseres Vorgehens umkehren. Bisher haben wir Streuamplituden algebraisch berechnet, und dann die Ergebnisse durch Feynman-Graphen veranschaulicht. Ihren vollen Nutzen entfalten die Graphen aber erst, wenn man sie als mnemotechnische Hilfe verwendet um aus dem Stand heraus alle Möglichkeiten der Wechselwirkung in jeder Ordnung der Störungstheorie in Form von Graphen aufzulisten, und dann im zweiten Schritt aus den Graphen die algebraischen Formeln abzuleiten.

Indem man die Fourier-Transformation (20.10) und die Definitionen

$$y_j \equiv x_j - y \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{d}^4x_j = \mathrm{d}^4y_j \quad , \quad x_j = y_j + y \tag{20.39a}$$

$$z_l \equiv x_l - z \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{d}^4x_l = \mathrm{d}^4z_l \quad , \quad x_l = z_l + z \tag{20.39b}$$

einsetzt, erhält man

$$\begin{aligned}
\overline{S}^{(2)}_{eg} \overset{(20.38)}{=} 72 \cdot \frac{(-i\lambda\hbar^2c^2)^2}{2!} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{\Omega} \mathrm{d}^4y \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{\Omega} \mathrm{d}^4z \cdot \\
\cdot \prod_{j=1,2} \frac{\widetilde{G}^{-1}(k_j)}{N_j} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{\Omega} \mathrm{d}^4y_j \, \exp\{-ik_jy\} \cdot \\
\cdot \prod_{l=3,4} \frac{\widetilde{G}^{-1}(k_l)}{N_l} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{\Omega} \mathrm{d}^4z_l \, \exp\{+ik_lz\} \cdot \\
\cdot \frac{1}{\Omega 2\pi} \sum_{f_1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}f_1^0 \, \widetilde{G}(f_1) \exp\{-i(f_1+k_1)y_1\} \cdot \\
\cdot \frac{1}{\Omega 2\pi} \sum_{f_2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}f_2^0 \, \widetilde{G}(f_2) \exp\{-i(f_2+k_2)y_2\} \cdot \\
\text{Formel geht weiter!} \\
\cdot \frac{1}{\Omega 2\pi} \sum_{f} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}f^0 \, \widetilde{G}(f) \exp\{-if(z-y)\} \cdot
\end{aligned}$$

$$\cdot \frac{1}{\Omega 2\pi} \sum_{\boldsymbol{f}_3} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}f_3^0 \, \widetilde{G}(f_3) \exp\{-i(f_3 - k_3)z_3\} \cdot$$
$$\cdot \frac{1}{\Omega 2\pi} \sum_{\boldsymbol{f}_4} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}f_4^0 \, \widetilde{G}(f_4) \exp\{-i(f_4 - k_4)z_4\} \ ,$$

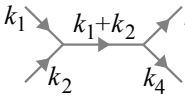
und mit der Deltafunktion (20.12) folgt

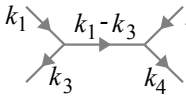
$$\begin{aligned}
\overline{S}_{eg}^{(2)} = 72 \cdot \prod_{j=1}^{4} \frac{\widetilde{G}^{-1}(k_j)}{N_j} \, \widetilde{G}(-k_1) \, \widetilde{G}(-k_2) \, \widetilde{G}(k_3) \, \widetilde{G}(k_4) \\
\cdot \frac{1}{\Omega 2\pi} \sum_{\boldsymbol{f}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}f^0 \, \widetilde{G}(f) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\Omega} \mathrm{d}^4 y \, \exp\{-i(k_1 + k_2 - f)y)\} \\
\cdot \frac{(-i\lambda\hbar^2 c^2)^2}{2!} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\Omega} \mathrm{d}^4 z \, \exp\{+i(k_3 + k_4 - f)z\} \ . \qquad (20.40)
\end{aligned}$$

Wegen $\widetilde{G}(k_j) \overset{(12.7)}{=} \widetilde{G}(-k_j)$ kann man die vier Nullfaktoren kürzen. Das Integral über y ergibt eine Deltafunktion, welche die Energie- und Impulserhaltung am Vertex y garantiert, und dementsprechend f festlegt. Das Integral über z ergibt eine weitere Deltafunktion, welche die Energie- und Impulserhaltung am Vertex z garantiert:

$$\begin{aligned}
\overline{S}_{eg}^{(2)} = 72 \cdot \left(\prod_{j=1}^{4} \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}_j} \Omega N}} \right) \frac{(-i\lambda\hbar^2 c^2)^2}{2!} \, \widetilde{G}(k_1 + k_2) \cdot \\
\cdot \, 2\pi\Omega \, \delta(k_1^0 + k_2^0 - k_3^0 - k_4^0) \, \delta_{(\boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2),(\boldsymbol{k}_3 + \boldsymbol{k}_4)} \qquad (20.41)
\end{aligned}$$

Das Teilchen, das zwischen den Vertizes propagiert, nimmt am Vertex Energie und Impuls der äußeren Linien auf. Das lässt sich durch Feynman-Diagramme im Wellenzahl-Raum (den wir wegen $\hbar c k^0 =$ Energie und $\hbar \boldsymbol{k} =$ Impuls oft auch als Energie-Impulsraum bezeichnen werden) veranschaulichen:

$$\overline{S}^{(2)} \mathrel{\widehat{=}} 72 \cdot$$ 

$$+\, 144 \cdot$$ 

(20.42)

Offenbar braucht man nur k_2 und $-k_3$ zu vertauschen, um

$$\overline{S}^{(2)}_{ev} = 144 \cdot \left(\prod_{j=1}^{4} \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}_j}\Omega N}} \right) \frac{(-i\lambda\hbar^2c^2)^2}{2!}\, \widetilde{G}(k_1 - k_3) \cdot$$
$$\cdot\, 2\pi\Omega\, \delta(k_1^0 + k_2^0 - k_3^0 - k_4^0)\, \delta_{(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2),(\boldsymbol{k}_3+\boldsymbol{k}_4)} \tag{20.43}$$

zu erhalten. Hier wurde

$$\delta(k_1^0 - k_3^0 + k_2^0 - k_4^0)\, \delta_{(\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_3),(-\boldsymbol{k}_2+\boldsymbol{k}_4)} = \\ = \delta(k_1^0 + k_2^0 - k_3^0 - k_4^0)\, \delta_{(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2),(\boldsymbol{k}_3+\boldsymbol{k}_4)}$$

benutzt. Man beachte dass $\overline{S}^{(2)}_{ev} \neq 2\overline{S}^{(2)}_{eg}$ ist wegen $\widetilde{G}(k_1-k_3) \overset{(12.7)}{\neq} \widetilde{G}(k_1+k_2)$.

Künftig wollen wir umgekehrt vorgehen, und aus Feynman-Diagrammen im Energie-Impuls-Raum die algebraische Form der Streuamplitude ableiten. Die Regeln können im Energie-Impuls-Raum wesentlich einfacher formuliert werden als im Zeit-Orts-Raum, und sind in Kasten 20.2 auf Seite 431 aufgelistet. Denn offenbar werden immer die Null-Faktoren der LSZ-Formel gegen die Fouriertransformierten Greensfunktionen der ein- und auslaufenden Teilchen gekürzt (vorausgesetzt dass jedes externe Teilchen mit einem Vertex verbunden ist), so dass man sich die Arbeit sparen kann, beide aufzuschreiben. Und immer stellt eine Deltafunktion die Erhaltung von Energie und Impuls der ein- und auslaufenden Teilchen sicher. Also braucht man etliche Integrale nicht bei jedem Graphen von neuem zu berechnen, sondern kann sofort die Ergebnisse aufschreiben.

Was unter „nicht amputierbaren“ Graphen zu verstehen ist (Regel A in Kasten 20.1), werden wir später um Gleichung (20.82) herum erklären.

Die Wellenzahlen innerer Linien müssen immer so gewählt werden, dass an jedem Vertex Energie und Impuls erhalten werden. Es wird sich herausstellen, dass diese Bedingung nicht ausreicht, um in Diagrammen mit Schleifen die Wellenzahlen innerer Linien eindeutig festzulegen. Regel H berücksichtigt

Kasten 20.1: **Feynman-Regeln im Zeit-Orts-Raum** für die Berechnung der Komponente $\overline{S}^{(n)}$ der Streuamplitude des ungeladenen Klein-Gordon-Feldes mit ψ^s-Wechselwirkung

A $\overline{S}^{(n)}$ ist gleich der Summe sämtlicher verbundener, nicht amputierbarer Graphen mit n Vertizes.

B Der Symmetriefaktor ist die Anzahl der Möglichkeiten, die Operatoren ψ, aus denen der Graph aufgebaut ist, paarweise zu den Propagatoren des Graphen zusammenzufassen. Nur einer der gleichwertigen Graphen wird als Summand in die Streuamplitude eingetragen, und mit dem Symmetriefaktor multipliziert.

C An jedem Vertex laufen s Linien zusammen. (Zwei Enden eines Loops werden hier als 2 Linien gezählt.)

D Für die n Vertizes gibt es einen Faktor

$$\frac{1}{n!}\Big(-i\lambda\hbar^2c^2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{\Omega}\mathrm{d}^4y\Big)^n\,,$$

wobei die Integrale sich über den gesamten Summanden erstrecken, nicht nur über diesen Faktor.

E Für jede Linie wird der entsprechende Propagator $G(y-x)$ als Faktor in den Summanden eingetragen.

F Für jedes ein- oder auslaufende Teilchen mit Wellenzahl k_j gibt es einen Faktor

$$\underbrace{\sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}_j}\Omega}}}_{1/N_j}\;\underbrace{\frac{\hbar c}{i}\Big(k_j^2-\frac{m^2c^2}{\hbar^2}+i\epsilon'\Big)}_{\widetilde{G}^{-1}(k_j)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{\Omega}\mathrm{d}^4x\,\exp\{\mp ik_jx\}\,,$$

wobei die Integrale sich über den gesamten Summanden erstrecken, nicht nur über diesen Faktor. Für einlaufende Teilchen steht im Exponenten das Minuszeichen, für auslaufende Teilchen das Pluszeichen.

diese Möglichkeit.

Graphen werden als Baumgraphen bezeichnet, wenn es erstens zwischen zwei beliebigen Vertizes genau eine Verbindung gibt (die über dazwischen liegende Vertizes verlaufen kann), aber niemals mehrere parallele Verbindungen, und wenn es zweitens keine Linie gibt, die am gleichen Vertex

Kasten 20.2: **Feynman-Regeln im Energie-Impuls-Raum** für die Berechnung der Komponente $\overline{S}^{(n)}$ der Streuamplitude des ungeladenen Klein-Gordon-Feldes mit ψ^s-Wechselwirkung

A - C wie Kasten 20.1 auf der vorherigen Seite

D Für die n Vertizes gibt es einen Faktor

$$\frac{1}{n!}(-i\lambda\hbar^2c^2)^n \quad .$$

E Für jede äußere Linie mit Wellenzahl k_j wird ein Faktor

$$\frac{1}{N_j} = \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}_j}\Omega}}$$

in den Summanden eingetragen.

F Für die ein- und auslaufenden Linien mit Vierer-Wellenzahlen k_{ein} und k_{aus} wird ein Faktor

$$2\pi\Omega\,\delta\Big(\sum_{\text{ein}} k^0_{\text{ein}} - \sum_{\text{aus}} k^0_{\text{aus}}\Big)\,\delta_{\sum_{\text{ein}}\boldsymbol{k}_{\text{ein}}\,,\,\sum_{\text{aus}}\boldsymbol{k}_{\text{aus}}}$$

in den Summanden eingetragen.

G Für jede innere Linie mit Wellenzahl k gibt es einen Faktor

$$\widetilde{G}(k) = \frac{i}{\hbar c\Big(k^2 - \dfrac{m^2c^2}{\hbar^2} + i\epsilon'\Big)} \quad .$$

H Über die Wellenzahl k einer inneren Linie wird mit

$$\frac{1}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{k}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}k^0}{2\pi}$$

summiert und integriert, falls k nicht durch Energie- und Impulserhaltung festgelegt ist.

beginnt und endet. Diagramme, die eines oder beide dieser Kriterien nicht erfüllen, werden Schleifen-Diagramme genannt. Mit ihnen befassen wir uns in Abschnitt 20.3.

20.2 Die Massen virtueller Teilchen

Energie und Impuls der virtuellen Teilchen, die durch die inneren Linien der beiden Diagramme

(20.44)

der ψ^3-Theorie repräsentiert werden, sind durch die Deltafunktionen eindeutig bestimmt. Das virtuelle Teilchen im ersten Graphen hat das invariante Wellenzahlquadrat

$$(k_1^0 + k_2^0)^2 - (\boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2)^2 = 2m^2c^2/\hbar^2 + 2k_1^0 k_2^0 - 2\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2 \ .$$

Das Wellenzahlquadrat heißt invariant, weil es in jedem Inertialsystem gleich ist. Wir untersuchen es im Schwerpunktsystem $\boldsymbol{k}_2 = -\boldsymbol{k}_1$ der beiden einlaufenden Teilchen:

$$\begin{aligned} 2m^2c^2/\hbar^2 + 2k_1^0 k_2^0 + 2\boldsymbol{k}_1^2 &= 2m^2c^2/\hbar^2 + 2\sqrt{(\boldsymbol{k}_1^2 + m^2c^2/\hbar^2)^2} + 2\boldsymbol{k}_1^2 \\ &= 4m^2c^2/\hbar^2 + 4\boldsymbol{k}_1^2 > 4m^2c^2/\hbar^2 \ . \end{aligned} \tag{20.45}$$

Das invariante Wellenzahlquadrat des virtuellen Teilchens ist im linken Diagramm (20.44) mindestens vier mal so groß wie das invariante Wellenzahlquadrat eines beobachteten Teilchens. Abhängig von der Größe des Impulses der einlaufenden Teilchen kann es noch wesentlich größer sein.

Das zweite Diagramm untersuchen wir im Schwerpunktsystem $\boldsymbol{k}_3 = -\boldsymbol{k}_1$ des einlaufenden Teilchens k_1 und des auslaufenden Teilchens k_3. Das virtuelle Teilchen hat das invariante Wellenzahlquadrat

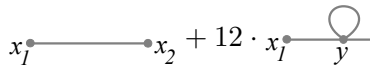
$$2m^2c^2/\hbar^2 - 2k_1^0k_3^0 - 2\boldsymbol{k}_1^2 = 2m^2c^2/\hbar^2 - 2\sqrt{(\boldsymbol{k}_1^2 + m^2c^2/\hbar^2)^2} - 2\boldsymbol{k}_1^2$$
$$= -4\boldsymbol{k}_1^2 < 0\ . \tag{20.46}$$

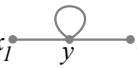
Das invariante Wellenzahlquadrat des virtuellen Teilchens ist im rechten Diagramm (20.44) stets kleiner als Null. Abhängig von der Größe des Impulses der Teilchen k_1 und k_3 kann es beliebig negativ sein. Die Masse des virtuellen Teilchens ist in diesem Diagramm also imaginär.

Es ist keine Besonderheit der ψ^3-Theorie, sondern eine allgemeine Eigenschaft aller Quantenfeldtheorien, dass virtuelle Teilchen nicht „auf der Masseschale“ liegen, d.h. dass sie eine andere Masse als beobachtete Teilchen haben, möglicherweise sogar eine imaginäre Masse.

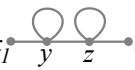
20.3 Graphen mit Schleifen

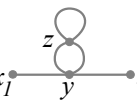
Wir untersuchen in der ψ^4-Theorie, wie der Propagator eines Teilchens zwischen den Raum-Zeit-Punkten x_1 und x_2 in den verschiedenen Ordnungen der Störungsrechnung modifiziert wird:

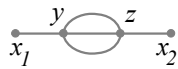
$G^{(W)}(x_2 - x_1) \mathrel{\widehat{=}}$ 

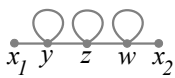
$+ 12 \cdot$ 

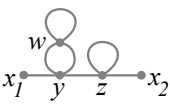
$+$

$+ 288 \cdot$ 

$+ 288 \cdot$ 

$+ 192 \cdot$ 

$+ 10\,368 \cdot$ 

$+ 41\,472 \cdot$ 

$+ \ldots$ (20.47)

Bei der Herleitung der LSZ-Formel in Abschnitt 19.3 war es eine essentielle Voraussetzung, dass es außerhalb des Raum-Zeit-Bereichs $t_e < t < t_a$, in dem Wechselwirkung stattfindet, auch einen Raum-Zeit-Bereich gibt, in dem *keine* Wechselwirkung stattfindet. Zwar haben wir t_e und t_a schließlich nach $\pm\infty$ geschoben, wir haben aber auch betont dass damit lediglich „ferne Vergangenheit“ und „ferne Zukunft“ gemeint ist, und nicht wortwörtlich „unendlich“. Weil aber Selbstwechselwirkungen wie in (20.47) dargestellt

zu jeder beliebigen Zeit möglich sind haben wir behauptet (und werden den Beweis für diese Behauptung in Kapitel 22 nachholen), dass derartige Selbstwechselwirkungs-Graphen quasi automatisch in die einfache Linie des ersten Summanden verwandelt werden, wenn man die Masse und den Feldoperator in geeigneter Weise renormiert. Später werden wir auch das zweite Diagramm in (19.44) berechnen. Dessen Divergenz werden wir durch die Renormierung der Kopplungskonstanten beheben.

Dementsprechend haben wir bei allen Berechnungen der vorangegangenen Abschnitte mit den renormierten Größen gearbeitet. Die Graphen (20.47) müssen dagegen mit der nicht renormierten Masse und dem nicht renormierten Feldoperator berechnet werden, bei Verwendung der renormierten Größen würden sie ja sofort verschwinden. Und das zweite Diagramm in (19.44) muss mit der nicht renormierten Kopplungskonstanten berechnet werden. Wir bezeichnen weiterhin die renormierte Masse als m, dagegen die nicht renormierte „nackte“ Masse als m_0. Die renormierte Kopplungskonstante heißt λ, die nicht renormierte Kopplungskonstante λ_0. $\psi(x)$ ist der renormierte, $\psi_0(x)$ der nicht renormierte Feldoperator.

Die allgemeine Formel[2] für Matrixelemente

$$\begin{aligned}\langle 0|\, T\psi_0^{(W)}(x_1)\,\psi_0^{(W)}(x_2)\,|0\rangle &\overset{(19.19)}{=} \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\\ &\cdot\ \langle 0|\, T\psi_0(x_1)\,\psi_0(x_2)\Big(-i\lambda\hbar^2c^2\int\limits_{\Omega}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^4y\,\psi_0^4(y)\Big)^n|0\rangle\\ &\text{mit } M = (20.4)\ ,\end{aligned} \tag{20.48}$$

die in Abschnitt 19.1 hergeleitet wurde, eignet sich zur Berechnung des Propagators mit Selbstwechselwirkung, während die LSZ-Formel für die Graphen (20.47) nicht gültig ist. Wie bereits in Abschnitt 20.1 werden wir die im Zähler auftretenden unverbundenen Diagramme gegen den Nenner M kürzen, so dass nur verbundene Graphen berechnet werden müssen. In (20.47) wurden von vornherein nur verbundene Graphen eingetragen. Weil wir die Nomenklatur

[2] Wir erinnern an die Umbenennung (19.21) der Indizes!

$$G^{(0)}(x_2 - x_1) \equiv G(x_2 - x_1) \overset{(15.43)}{=} \langle 0|\, T\psi_0(x_1)\psi_0(x_2)\, |0\rangle$$

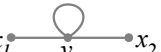
des Feynman-Propagators nicht ändern wollen, nennen wir den Propagator mit Selbstwechselwirkung

$$G^{(W)}(x_2 - x_1) = \sum_{n=0}^{\infty} G^{(n)}(x_2 - x_1) = \langle 0|\, T\psi_0^{(W)}(x_1)\, \psi_0^{(W)}(x_2)\, |0\rangle \ .$$

20.3.1 Der Tadpole der ψ^4-Theorie

Die Korrektur des Propagators ist in erster Ordnung

$$12 \cdot \quad \widehat{=} \ G^{(1)}(x_2 - x_1) \ =$$



$$= \langle 0|\, T\psi_0(x_1)\, \psi_0(x_2)\, (-i\lambda\hbar^2c^2) \int\limits_{\Omega} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}^4y\, \psi_0^4(y)\, |0\rangle_c$$

$$\overset{(19.40a)}{=} 12 \cdot (-i\lambda\hbar^2c^2) \int\limits_{\Omega} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}^4y\, G(y - x_1)\, G(y - y)\, G(x_2 - y) \ .$$

Diese Korrektur bezeichnet man als Tadpole (englisch für Kaulquappe). Der Name wird verständlich, wenn man den rechts abgebildeten Graphen des Tadpoles der Quantenelektrodynamik betrachtet. Allerdings kommt der Tadpole in der QED – ebenso wie in der ψ^3-Theorie, deren Tadpole in (20.35) ganz rechts abgebildet ist – erst in Störungsrechnung zweiter und höherer Ordnung vor, weil diese Tadpoles Sackgassen sind, die nur über einen Propagator mit der Außenwelt verbunden sind. Dagegen ist der Tadpole der ψ^4-Theorie über zwei Propagatoren mit der Außenwelt verbunden, und taucht deshalb bereits in erster Ordnung der Störungstheorie auf. Zu seiner Berechnung setzen wir die Fourier-Transformation (7.13a) aller Propagatoren ein:

$$\frac{1}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{f}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}f^0}{2\pi}\,\widetilde{G}^{(1)}(f)\exp\{-if(x_2-x_1)\} = -i\,12\lambda\hbar^2c^2\cdot$$
$$\cdot\int_{\Omega}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^4y\,\frac{1}{\Omega^3}\sum_{\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}k_1^0\,\mathrm{d}k^0\,\mathrm{d}k_2^0}{(2\pi)^3}\,\widetilde{G}(k_1)\,\widetilde{G}(k)\,\widetilde{G}(k_2)\cdot$$
$$\cdot\exp\{-ik_1(y-x_1)-ik(y-y)-ik_2(x_2-y)\} \tag{20.49}$$

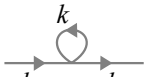
Man identifiziert

$$\int_{\Omega}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^4y\,\exp\{+i(k_2-k_1)y\} \overset{(7.16b)}{=} 2\pi\Omega\,\delta(k_2^0-k_1^0)\,\delta_{\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{k}_1}\ ,$$

führt das Integral und die Summe über k_2 aus, und benennt die Integrationsvariable f auf der linken Seite um in k_1:

$$\frac{1}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{k_1}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}k_1^0}{2\pi}\,\widetilde{G}^{(1)}(k_1)\exp\{-ik_1(x_2-x_1)\} = -i\,12\lambda\hbar^2c^2\cdot$$
$$\cdot\,\frac{1}{\Omega^2}\sum_{\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}k_1^0\,\mathrm{d}k^0}{(2\pi)^2}\,\widetilde{G}(k_1)\,\widetilde{G}(k)\,\widetilde{G}(k_1)\,\exp\{-ik_1(x_2-x_1)\}$$

Also müssen die Integranden gleich sein:

$12\cdot$ 

$$\widehat{=}\,\widetilde{G}^{(1)}(k_1) = \widetilde{G}(k_1)\,\underbrace{\frac{-i\,12\lambda\hbar^2c^2}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{k}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}k^0}{2\pi}\,\widetilde{G}(k)}_{\equiv F}\,\widetilde{G}(k_1) \tag{20.50a}$$

$$F \overset{(12.7)}{=} \frac{12\lambda\hbar^2c^2}{\hbar c}\,\frac{1}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{k}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}k^0}{2\pi}\,\frac{1}{k^2-m_0^2c^2/\hbar^2+i\epsilon'} \tag{20.50b}$$

Es ist charakteristisch für Graphen mit Schleifen dass eine Wellenzahl k auftritt, die nicht durch Energie- und Impulserhaltung eingeschränkt wird.

Eine Besonderheit des Tadpoles der ψ^4-Theorie ist es, dass die Funktion F nicht von der Wellenzahl k_1 des propagierenden Teilchens abhängt. Wegen

$$\frac{1}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{k}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}k^0}{2\pi} \overset{(7.5)}{\approx} \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4} \tag{20.50c}$$

divergiert F für $|k| \to \infty$ wie $\mathrm{d}^4k\, k^{-2} \sim k^2$.

Die Gleichung von F kann man auch in der Form

$$F = \frac{1}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{k}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}k^0}{2\pi}\,\frac{12\lambda\hbar c}{\Big(k^0+\frac{\omega_{\boldsymbol{k}}}{c}-i\epsilon\Big)\Big(k^0-\frac{\omega_{\boldsymbol{k}}}{c}+i\epsilon\Big)} \tag{20.50d}$$

schreiben. Denn es ist

$$\begin{aligned} k^2 - m_0^2c^2/\hbar^2 = (k^0)^2 - \boldsymbol{k}^2 - m_0^2c^2/\hbar^2 = (k^0)^2 - \frac{\omega_{\boldsymbol{k}}^2}{c^2} = \\ = \Big(k^0+\frac{\omega_{\boldsymbol{k}}}{c}\Big)\Big(k^0-\frac{\omega_{\boldsymbol{k}}}{c}\Big) \\ \frac{\omega_{\boldsymbol{k}}}{c} \overset{(7.18)}{=} +\sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m_0^2c^2/\hbar^2}\ . \end{aligned} \tag{20.51}$$

Nur „auf der Masseschale“ ist

$$k^2 = m_0^2c^2/\hbar^2 \quad \text{und} \quad k^0 = \frac{\omega_{\boldsymbol{k}}}{c}\ .$$

Als Summations- und Integrationsvariable sind $\boldsymbol{k}$ und k^0 jedoch nicht auf der Masseschale fixiert. k^0 nimmt sämtliche Werte im Kontinuum $-\infty \ldots +\infty$ an. $\boldsymbol{k}$ nimmt sämtliche Werte an, die mit dem Normierungsvolumen Ω verträglich sind. Deshalb wurden die Pole von F

$$\begin{aligned} \text{bei } k^2 &= m_0^2c^2/\hbar^2 - i\epsilon' \\ \text{bzw. bei } k^0 &= \pm\Big(\frac{\omega_{\boldsymbol{k}}}{c} - i\epsilon\Big) \end{aligned}$$

durch

$$\omega_{\boldsymbol{k}}/c \overset{(12.9)}{\longrightarrow} \omega_{\boldsymbol{k}}/c - i\epsilon \quad \text{mit } \epsilon \in \mathbb{R}\ ,\ \epsilon > 0$$

von der reellen k^0-Achse in die komplexe Ebene geschoben. Es ist wichtig, die Verschiebungen der Pole in genau dieser Weise durchzuführen, damit das Frequenz-Zeit-Produkt der Feldoperatoren stets positiv bleibt, wie bei (12.12) diskutiert. Nur Propagatoren mit positivem Frequenz-Zeit-Produkt beschreiben Teilchen oder Antiteilchen mit positiver Energie, die sich vorwärts durch die Zeit bewegen.

Integrale der Art (20.50) werden uns in allen Berechnungen von Feynman-Graphen mit Schleifen wieder begegnen. Wir lösen das Integral deshalb zur künftigen Referenzierung gleich in der verallgemeinerten Form

$$F_K \equiv \frac{1}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{k}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}k^0}{2\pi}\, \frac{J}{(k^2 - K^2 + i\epsilon')^r} \tag{20.52a}$$

$$= \frac{1}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{k}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}k^0}{2\pi}\, \frac{J}{(k^0 + \vartheta_{\boldsymbol{k}} - i\epsilon)^r (k^0 - \vartheta_{\boldsymbol{k}} + i\epsilon)^r} \tag{20.52b}$$

$$1 \le r \in \mathbb{N}\ ,\ 0 \le K^2 \in \mathbb{R}\ ,\ \vartheta_{\boldsymbol{k}} \equiv + \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + K^2}$$
$$J \equiv 1 \text{ or } k^2 \text{ or } k^\mu k^\nu \text{ or } (k^2)^2\ .$$

Die beiden Pole sind in Abbildung 20.3 als rote Punkte eingetragen. Mit

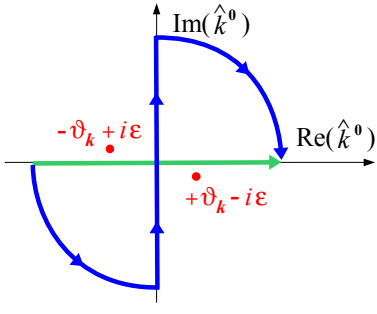


Abb. 20.3: Integrationswege ohne (grün) und mit (blau) Wick-Rotation

$J = k^\mu$ wäre das Integral Null, denn es wird symmetrisch über $+k^\mu$ und $-k^\mu$ integriert bzw. summiert. Das Gleiche würde für $J = k^\mu k^\nu$ mit $\mu \neq \nu$ gelten. Deshalb brauchen wir diese beiden Möglichkeiten nicht weiter zu betrachten.

Wir erweitern den Definitionsbereich der Variablen k^0 von der reellen Achse durch analytische Fortsetzung in die komplexe Ebene, wobei die komplexe Variable $\hat{k}^0$ durch einen Hut gekennzeichnet wird. Tatsächlich haben wir diese Erweiterung auch schon genutzt, als wir die Pole von den Integrationswegen in die komplexe Ebene verschoben haben. Aber das waren nur infinitesimale Abweichungen von der reellen Achse. Jetzt betrachten wir die komplette komplexe Ebene als Definitionsbereich der Nullkomponente von k, und verwenden Polarkoordinaten für die Nullkomponente:

$$\begin{aligned} \hat{k}^0 &\equiv |\hat{k}^0| \exp\{i\varphi\} \\ \mathrm{d}\hat{k}^0 &= \exp\{i\varphi\}\mathrm{d}|\hat{k}^0| + i|\hat{k}^0| \exp\{i\varphi\}\mathrm{d}\varphi \end{aligned} \tag{20.53}$$

Der Polarwinkel φ wird wie üblich von der positiven reellen $\hat{k}^0$-Achse gegen den Uhrzeigersinn gezählt. Nur auf der reellen $\hat{k}^0$-Achse ist $\hat{k}^0 = k^0$.

Der Integrationsweg von Gleichung (20.52) ist in Abbildung 20.3 als grüner Pfeil eingezeichnet. Nach dem Cauchy'schen Integralsatz[3] erhält man das gleiche Resultat, wenn man den blau gezeichneten Integrationsweg verwendet. Denn es gibt keine singulären Punkte in der Fläche, die von den beiden Integrationswegen eingeschlossen wird. Wir werden unsere Untersuchung im Folgenden auf den Fall beschränken, dass das Integral über die beiden blauen Kreisbögen Null ergibt:

$$\lim_{|\hat{k}^0|\to\infty} \int_{\pi}^{3\pi/2} \int_{\pi/2}^{0} \mathrm{d}\varphi \, \frac{i|\hat{k}^0| \exp\{i\varphi\}\hat{J}}{|\hat{k}^0|^{2r} \exp\{i2r\varphi\}} = 0 \tag{20.54}$$

Durch den Hut wird darauf hingewiesen, dass gegebenenfalls auch $\hat{J}$ von der Drehung des Integrationsweges auf die imaginäre k^0-Achse betroffen ist:

[3] In [37] findet man eine auf den Bedarf von Physikern zugeschnittene, kurz gefasste Erklärung dieses wichtigen mathematischen Werkzeugs.

$$\hat{J} = \begin{cases} 1 \\ \hat{k}^\mu \hat{k}^\nu = -k^\mu k^\nu \text{ mit } \mu = \nu = 0 \\ k^\mu k^\nu \text{ mit } \mu = \nu \neq 0 \\ \hat{k}^2 = (ik^0)^2 - \boldsymbol{k}^2 = -(k^0)^2 - \boldsymbol{k}^2 \\ (\hat{k}^2)^2 = [(k^0)^2 + \boldsymbol{k}^2]^2 \end{cases} \tag{20.55}$$

Hier wurde beachtet, dass auf der imaginären $\hat{k}^0$-Achse $\hat{k}^0 \equiv ik^0$ ist. Die Bedingung (20.54) ist dann erfüllt, wenn k^0 im Nenner in höherer Potenz vorkommt als im Zähler. Abhängig von J müssen deshalb folgende Einschränkungen für den Exponenten $r \in \mathbb{N}$ festgelegt werden:

$$\begin{aligned} J = 1 &\implies r \geq 1 \\ J = k^\mu k^\nu \text{ mit } \mu = \nu &\implies \begin{cases} r \geq 2 \text{ falls } \mu = 0 \\ r \geq 0 \text{ falls } \mu \neq 0 \end{cases} \\ J = k^2 &\implies r \geq 2 \\ J = (k^2)^2 &\implies r \geq 3 \end{aligned} \tag{20.56}$$

Wenn diese Voraussetzung erfüllt ist, dann hat das blaue Integral von $-i\infty$ nach $+i\infty$ über die imaginäre $\hat{k}^0$-Achse den gleichen Wert wie das grüne Integral von $-\infty$ nach $+\infty$ über die reelle $\hat{k}^0$-Achse:

$$\begin{aligned} F_K &\overset{(20.52)}{=} \frac{1}{\Omega} \sum_{\boldsymbol{k}} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\mathrm{d}\hat{k}^0}{2\pi} \frac{\hat{J}}{(\hat{k}^0 + \vartheta_{\boldsymbol{k}})^r (\hat{k}^0 - \vartheta_{\boldsymbol{k}})^r} \\ &= \frac{1}{\Omega} \sum_{\boldsymbol{k}} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{i\mathrm{d}k^0}{2\pi} \frac{\hat{J}}{\Big((ik^0)^2 - \boldsymbol{k}^2 - K^2\Big)^r} \end{aligned} \tag{20.57}$$

Die kleinen Summanden ϵ konnten entfallen. Denn der Integrationsweg über die imaginäre $\hat{k}^0$-Achse verläuft fernab von den Polstellen bei $\hat{k}^0 = \pm\vartheta_{\boldsymbol{k}}$, siehe Abbildung 20.3. Die Drehung des Integrationsweges in der komplexen $\hat{k}^0$-Ebene um den Winkel $\pi/2$ ist ein in der Quantenfeldtheorie häufig genutzter Kunstgriff, der als „Wick-Rotation“ bezeichnet wird.

Für die Wellenzahl k gilt die Minkowski[4]-Metrik

$$(k)^2 = (k^0, \boldsymbol{k})^2 = (k^0)^2 - \boldsymbol{k}^2 \ .$$

Wir definieren einen Vierervektor k_E mit Euklidischer[5] Metrik, in dessen Quadrat die Quadrate aller vier Komponenten mit dem gleichen, in diesem Fall positiven, Vorzeichen summiert werden:

$$\begin{aligned} (k_E)^2 &= (k_E^0, \boldsymbol{k}_E)^2 = (k_E^0)^2 + \boldsymbol{k}_E^2 \\ -(k_E)^2 &= -(k_E^0)^2 - \boldsymbol{k}_E^2 \end{aligned} \tag{20.58}$$

Das vergleichen wir mit der Summations- und Integrationsvariablen $\hat{k} = (\hat{k}^0, \boldsymbol{k}) = (ik^0, \boldsymbol{k})$ in (20.57) und in (20.55):

$$(\hat{k})^2 = (ik^0, \boldsymbol{k})^2 = -(k^0)^2 - \boldsymbol{k}^2 \tag{20.59}$$

Es ist genau dieses Quadrat, das im Nenner von (20.57) auftaucht. $\hat{k} = (ik^0, \boldsymbol{k})$ ist ein Vektor mit negativer Euklidischer Metrik. Also kann man in (20.57), ohne den Wert des Integrals zu verändern, die Ersetzungen

$$\hat{k} = (ik^0, \boldsymbol{k}) \ \longrightarrow \ (k_E^0, \boldsymbol{k}_E) = \hat{k}_E \tag{20.60a}$$

$$(\hat{k})^2 = (ik^0, \boldsymbol{k})^2 \longrightarrow \ -(k_E^0, \boldsymbol{k}_E)^2 = -(k_E)^2 \tag{20.60b}$$

$$\hat{k}^\mu \, \hat{k}^\nu \ \longrightarrow \ \left\{ \begin{array}{l} -k_E^\mu \, k_E^\nu \, ; \, \mu = \nu = 0 \\ +k_E^\mu \, k_E^\nu \, ; \, \mu = \nu \neq 0 \end{array} \right\} = -g^{\mu\nu} \frac{(k_E)^2}{4} \tag{20.60c}$$

vornehmen:

$$F_K \overset{(20.57)}{=} \frac{1}{\Omega} \sum_{\boldsymbol{k}} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\mathrm{d}k_E^0}{2\pi} \frac{J_E}{\Big(-(k_E)^2 - K^2 \Big)^r} \tag{20.61}$$

$$J_E \overset{(20.52)}{=} 1 \text{ oder } -(k_E)^2 \text{ oder } -g^{\mu\nu}(k_E)^2/4 \text{ oder } (k_E)^4$$

[4] Hermann Minkowski (1864 - 1909)
[5] Euklid von Alexandria (etwa 360 v.u.Z. - etwa 280 v.u.Z.)

Im Integrand kommt der euklidische Vektor k_E nur quadratisch vor. Deshalb bietet sich der Übergang zu vierdimensionalen Kugelkoordinaten an. Eine n-dimensionale Kugel mit Radius R hat das Volumen V_n und die Oberfläche S_n. Mit den Formeln[6]

$$\begin{aligned} V_n &= \frac{2\pi R^2}{n} V_{n-2} & \qquad S_n &= \frac{\mathrm{d}V_n}{\mathrm{d}R} \\ V_2 &= \pi R^2 & \qquad V_3 &= \frac{4}{3}\pi R^3 \end{aligned} \tag{20.62}$$

können die Werte für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ berechnet werden. Eine vierdimensionale Euklidische Kugel mit Radius $R = |k_E|$ hat die Oberfläche $2\pi^2 R^3$. Zur Einführung von Kugelkoordinaten ersetzt man die Summe über die diskreten Wellenzahlen $\boldsymbol{k}_E$ durch das Integral über ein Kontinuum von $\boldsymbol{k}_E$-Werten. Es gilt

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Omega} \sum_{\boldsymbol{k}_E} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\mathrm{d}k_E^0}{2\pi} \overset{(7.5)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}^3 k_E}{(2\pi)^3} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\mathrm{d}k_E^0}{2\pi} = i \int_0^{+\infty} \frac{2\pi^2 R^3 \mathrm{d}R}{(2\pi)^4} = \\ &= i \int_0^{+\infty} \mathrm{d}R \, \frac{R^3}{8\pi^2} = i \int_0^{+\infty} \mathrm{d}R^2 \, \frac{R^2}{16\pi^2} \, . \end{aligned} \tag{20.63}$$

Der Faktor i stammt daher, dass k_E eine imaginäre und drei reelle Komponenten hat, während R reell ist. Mit den durchgeführten Umformungen haben wir folgendes Resultat erreicht:

[6] Einen guten Artikel „n-sphere“ gibt es im englischsprachigen Wikipedia.

$$\frac{1}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{k}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}k^0}{2\pi}\,\frac{J}{\left(k^2-K^2+i\epsilon'\right)^r}=\frac{i(-1)^r}{16\pi^2}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}R^2\,\frac{R^2J_E}{\left(R^2+K^2\right)^r}$$

$$1\le r\in\mathbb{N}\ ,\ 0\le K^2\in\mathbb{R} \tag{20.64}$$

$J=$	1	k^μ	k^2	$k^\mu k^\nu$	$(k^2)^2$
$J_E=$	1	0	$-R^2$	$-g^{\mu\nu}R^2/4$	R^4
$r=$	≥ 1	—	≥ 2	$\begin{cases}\ge 2 \text{ falls } \mu=0\\ \ge 0 \text{ falls } \mu\neq 0\end{cases}$	≥ 3

Beim Tadpole der ψ^4-Theorie ist $K^2=m_0^2c^2/\hbar^2$, $r=1$, $J=1$:

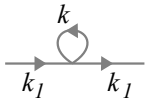
$$\begin{aligned}F &\overset{(20.50b)}{=} \frac{12\lambda\hbar^2c^2}{\hbar c}\,\frac{1}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{k}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}k^0}{2\pi}\,\frac{1}{k^2-m_0^2c^2/\hbar^2+i\epsilon'}\\ &\overset{(20.64)}{=} \frac{i(-1)\,12\lambda\hbar c}{16\pi^2}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}R^2\,\frac{R^2}{R^2+m_0^2c^2/\hbar^2}\end{aligned} \tag{20.65}$$

Das Integral divergiert für $R\to\infty$. Um es zu regularisieren (d.h. berechenbar zu machen), führen wir einen Abschneide-Parameter Λ ein:

$$\begin{aligned}F &= \frac{-i3\lambda\hbar c}{4\pi^2}\lim_{\Lambda\to\infty}\int_0^{\Lambda^2}\mathrm{d}R^2\,\frac{R^2}{R^2+m_0^2c^2/\hbar^2}\\ &= \frac{-i3\lambda\hbar c}{4\pi^2}\lim_{\Lambda\to\infty}\left(R^2-m_0^2c^2/\hbar^2\,\ln(R^2+m_0^2c^2/\hbar^2)\right)\Big|_0^{\Lambda^2}\\ &= \frac{-i3\lambda\hbar c}{4\pi^2}\,m_0^2c^2/\hbar^2\lim_{\Lambda\to\infty}\left(\frac{\Lambda^2\hbar^2}{m_0^2c^2}-\ln\left(\frac{\Lambda^2\hbar^2}{m_0^2c^2}+1\right)\right)\end{aligned} \tag{20.66}$$

Wegen $\Lambda\to\infty$ kann der Summand 1 im Logarithmus entfallen. Damit erhält man für den Propagator mit Selbstwechselwirkung in Störungsrechnung erster Ordnung (sprich für den Tadpole) das Ergebnis

$$12 \cdot \quad \widehat{=}\ \widetilde{G}^{(1)}(k_1) =$$



$$\overset{(20.50)}{=} \widetilde{G}(k_1) \underbrace{\frac{-i\,12\lambda\hbar^2c^2}{\Omega} \sum_{\boldsymbol{k}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}k^0}{2\pi}\, \widetilde{G}(k)}_{F}\, \widetilde{G}(k_1) \tag{20.67a}$$

$$F = -\frac{i3\lambda\hbar c}{4\pi^2}\left(\frac{m_0c}{\hbar}\right)^2 \lim_{\Lambda\to\infty}\left(\frac{\Lambda^2\hbar^2}{m_0^2c^2} - \ln\left(\frac{\Lambda^2\hbar^2}{m_0^2c^2}\right)\right). \tag{20.67b}$$

Die Funktion F des Tadpoles divergiert für $\Lambda \to \infty$ quadratisch und logarithmisch. Wir werden in Kapitel 22 klären, wie diese Divergenz durch Renormierung der Masse m_0 und des Feldoperators ψ_0 behandelt werden kann.

20.3.2 Propagatorkorrektur der ψ^3-Theorie

Bei ψ^3-Wechselwirkung ist $G^{(1)} = 0$, und man findet die führende Korrektur zum Propagator in Störungsrechnung 2. Ordnung:

$$G^{(2)}(x_2 - x_1) \mathrel{\widehat{=}} 36 \cdot$$

(20.68)

Der wesentliche Unterschied zum Tadpole besteht darin, dass es in dieser Schleife 2 Vertizes gibt, und die Schleife deshalb aus zwei Propagator-Linien zusammengesetzt ist. Wir werden sehen, dass dieser Graph deshalb „nur“ logarithmisch, aber nicht quadratisch divergiert. Die Berechnung muss mit der „nackten“ (nicht renormierten) Masse m_0 durchgeführt werden.

Es gibt $3^2 \cdot 2^2/2!$ Möglichkeiten, die beiden inneren Propagatoren zu bilden. Dann kann entweder x_1 oder x_2 mit y kontrahiert werden, was einen weiteren Faktor 2 ergibt. Daher ist der Symmetriefaktor 36. Der Graph wird mithilfe der allgemeinen Formel (20.48) berechnet, wobei wie gewohnt unverbundene Strukturen im Zähler gegen den Nenner gekürzt werden.

$$G^{(2)}(x_2-x_1) \overset{(19.40a)}{=} 36\cdot\frac{(-i\lambda\hbar^2c^2)^2}{2!}\int\limits_\Omega\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^4y\int\limits_\Omega\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^4z\cdot$$
$$\cdot\, G(y-x_1)\,G(z-y)\,G(z-y)\,G(x_2-z) \qquad (20.69)$$

Man setzt die Fourier-Transformationen der Propagatoren ein

$$\frac{1}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{f}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}f^0}{2\pi}\,\widetilde{G}^{(2)}(f)\,\exp\{-if(x_2-x_1)\} = 36\cdot\frac{(-i\lambda\hbar^2c^2)^2}{2!}\cdot$$
$$\cdot\int\limits_\Omega\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^4y\int\limits_\Omega\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^4z\,\frac{1}{\Omega^4}\sum_{\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k},\boldsymbol{g},\boldsymbol{k}_2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}k_1^0\,\mathrm{d}k^0\,\mathrm{d}g^0\,\mathrm{d}k_2^0}{(2\pi)^4}\cdot$$
$$\cdot\,\widetilde{G}(k_1)\,\widetilde{G}(k)\,\widetilde{G}(g)\,\widetilde{G}(k_2)\cdot$$
$$\cdot\,\exp\Big\{-i\Big(k_1(y-x_1)+k(z-y)+g(z-y)+k_2(x_2-z)\Big)\Big\}\,,$$

identifiziert die beiden Deltafunktionen

$$\int\limits_\Omega\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^4y\,\exp\{+i(g-k_1+k)y\} \overset{(7.16b)}{=} 2\pi\Omega\,\delta\Big(g^0-(k_1^0-k^0)\Big)\,\delta_{\boldsymbol{g},(\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k})}$$
$$\int\limits_\Omega\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^4z\,\exp\{+i(k_2-g-k)y\} \overset{(7.16b)}{=} 2\pi\Omega\,\delta\Big(k_2^0-(g^0+k^0)\Big)\,\delta_{\boldsymbol{k}_2,(\boldsymbol{g}+\boldsymbol{k})}\,,$$

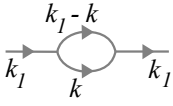
führt die Integrale und Summen über g und k_2 aus, und benennt die Integrationsvariable f auf der linken Seite um in k_1:

$$\frac{1}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{k}_1}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}k_1^0}{2\pi}\,\widetilde{G}^{(2)}(k_1)\,\exp\{-ik_1(x_2-x_1)\}\;=$$

$$=36\cdot\frac{1}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{k}_1}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}k_1^0}{2\pi}\,\frac{(-i\lambda\hbar^2c^2)^2}{2!}\,\frac{1}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{k}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}k^0}{2\pi}$$

$$\cdot\,\widetilde{G}(k_1)\,\widetilde{G}(k)\,\widetilde{G}(k_1-k)\,\widetilde{G}(k_1)\,\exp\Big\{-ik_1(x_2-x_1)\Big\}\qquad(20.70)$$

Die Integranden müssen gleich sein. Also gilt

$36\cdot$ 

$\widehat{=}\,\widetilde{G}^{(2)}(k_1)=$ (20.71a)

$$=\widetilde{G}(k_1)\cdot\underbrace{18(-i\lambda\hbar^2c^2)^2\,\frac{1}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{k}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}k^0}{2\pi}\,\widetilde{G}(k)\,\widetilde{G}(k_1-k)}_{\equiv F(k_1)}\cdot\widetilde{G}(k_1)\;.$$

Die Umformungen, die uns zu diesem Zwischenergebnis geführt haben, sind den Umformungen sehr ähnlich, die zuvor bei der Berechnung des Tadpoles auftraten. Damit wir nicht jedes mal wieder all die Fourier-Transformationen und Deltafunktionen aufschreiben müssen, notieren wir zur künftigen Verwendung die allgemeinen Regeln für die Berechnung von Propagator-Korrekturen in Kasten 20.4 auf der nächsten Seite.

Wieder tritt – wie für Graphen mit Schleifen typisch – eine Wellenzahl k auf, die nicht durch eine Deltafunktion festgelegt wird. Wir berechnen die in der letzten Gleichung definierte Funktion

$$F(k_1)\overset{(12.7)}{=}18(-i\lambda\hbar^2c^2)^2\,\frac{1}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{k}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}k^0}{2\pi}\,\Big(\frac{i}{\hbar c}\Big)^2\cdot$$

$$\cdot\,\frac{1}{\Big(k^2-m_0^2\frac{c^2}{\hbar^2}+i\epsilon'\Big)\Big((k_1-k)^2-m_0^2\frac{c^2}{\hbar^2}+i\epsilon'\Big)}\;.\qquad(20.71b)$$

Zur Ermittlung von $F(k_1)$ kann man nicht unmittelbar wie beim Tadpole

vorgehen. Denn die unbestimmte Wellenzahl kommt im Nenner des Integranden nicht nur quadratisch (wie beim Tadpole) vor, sondern auch linear als Summand $-2k_1k$. Deshalb wird der Integrand zunächst in trickreicher Weise umgeformt. Für $A, B \in \mathbb{C}$ und dimensionsloses $\xi \in \mathbb{R}$ gilt

Kasten 20.4: **Feynman-Regeln im Energie-Impuls-Raum** für die Berechnung von Propagator-Korrekturen des ungeladenen Klein-Gordon-Feldes mit ψ^s-Wechselwirkung

A Die Propagatorkorrektur entspricht der Summe sämtlicher verbundener Graphen mit n Vertizes, die die Struktur

$$\widetilde{G}^{(n)} = \widetilde{G}^{(0)} \cdot F^{(n)} \cdot \widetilde{G}^{(0)} \quad \text{mit } \widetilde{G}^{(0)} \equiv \widetilde{G}$$

haben.

B An jedem Vertex laufen s Linien zusammen. (Zwei Enden eines Loops werden hier als 2 Linien gezählt.)

C Der Symmetriefaktor ist die Anzahl der Möglichkeiten, die Operatoren ψ, aus denen der Graph aufgebaut ist, paarweise zu den Propagatoren des Graphen zusammenzufassen. Nur einer der gleichwertigen Graphen wird gezeichnet und mit dem Symmetriefaktor multipliziert.

D Für die n Vertizes gibt es einen Faktor

$$\frac{1}{n!}(-i\lambda\hbar^2c^2)^n \quad .$$

E Für jede Linie mit Wellenzahl k gibt es einen Faktor

$$\widetilde{G}(k) = \frac{i}{\hbar c\Big(k^2 - \dfrac{m^2c^2}{\hbar^2} + i\epsilon'\Big)} \quad .$$

F Über jede Wellenzahl k, die nicht durch Energie- und Impulserhaltung festgelegt ist, wird mit

$$\frac{1}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{k}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}k^0}{2\pi}$$

summiert und integriert.

$$\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}\xi}{\Big(\xi A + (1-\xi)B\Big)^2} = \int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}\xi}{\Big(\xi(A-B)+B\Big)^2} \ . \tag{20.72a}$$

Wegen $\quad \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\,\dfrac{1}{\xi(A-B)+B} = \dfrac{-(A-B)}{\Big(\xi(A-B)+B\Big)^2}$

folgt $\quad \displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}\xi}{\Big(\xi A + (1-\xi)B\Big)^2} = \frac{1}{B-A}\cdot\frac{1}{\xi(A-B)+B}\bigg|_0^1 =$

$$= \frac{1}{B-A}\Big(\frac{B}{AB} - \frac{A}{BA}\Big) = \frac{1}{AB}\ , \tag{20.72b}$$

was auch in der Form

$$\frac{1}{AB} = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 \mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\,\frac{\delta(\xi_2-1+\xi_1)}{\Big(\xi_1 A + \xi_2 B\Big)^2} \tag{20.72c}$$

geschrieben werden kann. Im Moment reicht diese Formel aus. Für künftige Anwendungen geben wir ohne Beweis folgende Verallgemeinerung an:

$$n\in\mathbb{N}, m_j\in\mathbb{R}, A_j\in\mathbb{C}, \xi_j\in\mathbb{R}: \qquad \frac{1}{A_1^{m_1}\dots A_n^{m_n}} =$$

$$= \int\limits_0^1 \mathrm{d}\xi_1 \dots \int\limits_0^1 \mathrm{d}\xi_n\, \frac{\Gamma\Big(\sum_{j=1}^n m_j\Big)\,\delta\Big(\sum_{j=1}^n \xi_j - 1\Big)\,\Big(\prod_{j=1}^n \xi_j^{m_j-1}\Big)}{\Big(\prod_{j=1}^n \Gamma(m_j)\Big)\,\Big(\sum_{j=1}^n \xi_j A_j\Big)^{\sum_{j=1}^n m_j}} \tag{20.73a}$$

Hierbei ist Γ die Gamma-Funktion (die Verallgemeinerung der Fakultät). Falls alle Exponenten m_j gleich Eins sind, vereinfacht sich diese Formel zu

$$\frac{1}{A_1\dots A_n} = \int\limits_0^1 \mathrm{d}\xi_1 \dots \int\limits_0^1 \mathrm{d}\xi_n\, \frac{(n-1)!\,\delta\Big(\sum_{j=1}^n \xi_j - 1\Big)}{\Big(\sum_{j=1}^n \xi_j A_j\Big)^n}\ , \tag{20.73b}$$

was sich im Fall $n = 2$ wiederum auf (20.72) reduziert.

Man identifiziert die beiden Faktoren im Nenner des Integranden von $F(k_1)$ mit A und B in (20.72), und formt ihn noch etwas um:

$$\Big(\xi\Big(k^2 - m_0^2\frac{c^2}{\hbar^2}\Big) + (1-\xi)\Big((k_1-k)^2 - m_0^2c^2/\hbar^2\Big)\Big)^2 = \\ = \Big(\Big(k-(1-\xi)k_1\Big)^2 + (\xi-\xi^2)k_1^2 - m_0^2c^2/\hbar^2\Big)^2 \tag{20.74}$$

Wir widerstehen der Versuchung, hier $k_1^2 = m_0^2c^2/\hbar^2$ einzusetzen. Denn wir wollen die Berechnung von vornherein so allgemein anlegen, dass sie auch dann gilt, wenn die Blase (20.71) als Korrektur einer inneren Linie eines größeren Graphen auftaucht. Bei virtuellen Teilchen ist aber $k_1^2 \neq m_0^2c^2/\hbar^2$, wie wir in Abschnitt 20.2 festgestellt haben.

Jetzt substituiert man die Summations- und Integrationsvariable

$$k \longrightarrow \kappa \equiv k - (1-\xi)k_1 \ ,$$

und benennt anschließend κ um in k:

$$F(k_1) \overset{(20.71b)}{=} -\int_0^1 \mathrm{d}\xi\, \frac{1}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{k}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}k^0}{2\pi}\, \frac{2(3\lambda\hbar c)^2}{(k^2 \underbrace{+(\xi-\xi^2)k_1^2 - m_0^2c^2/\hbar^2}_{\equiv -K^2} + i\epsilon')^2}$$

Damit ist ein wichtiges Zwischenergebnis erreicht: Erstens ist die unbestimmte Wellenzahl k wie beim Tadpole im Integranden nur noch quadratisch enthalten. Zweitens identifiziert man

$$\frac{K\hbar}{c} = \sqrt{\underbrace{-(\xi-\xi^2)}_{-0.25\leq\ldots\leq 0} k_1^2\hbar^2/c^2 + m_0^2} \tag{20.75}$$

als effektive Masse. Denn bei $k = \pm K$ hat $F(k_1)$ Pole. Wenn $k_1^2 \geq 4m_0^2c^2/\hbar^2$ ist, dann wird die effektive Masse in einem Intervall um $\xi = 0.5$ imaginär. Das ist das formale Kennzeichen eines dissipativen Prozesses, in dem Energie aus dem untersuchten System verschwindet, indem sie in Wärme

umgewandelt wird. In diesem Fall besteht die Dissipation darin, dass ein Kanal zugänglich wird, der in Konkurrenz zum Diagramm (20.68) steht: Bei $k_1^2 \geq 4m_0^2c^2/\hbar^2$ reicht die Energie im System dafür aus, dass die beiden virtuellen Teilchen in (20.68) zu realen Teilchen werden und dadurch aus der Wahrscheinlichkeitsamplitude (20.68) verschwinden können. Während für reale (d.h. beobachtete) Teilchen $k_1^2 = m_0^2c^2/\hbar^2$ gilt, können virtuelle Teilchen durchaus $k_1^2 > 4m_0^2c^2/\hbar^2$ haben, wie wir zum Beispiel beim linken Graphen (20.44) festgestellt haben.

Mithilfe der allgemeinen Formel (20.64) folgt

$$F(k_1) = -\int_0^1 \mathrm{d}\xi \, \frac{i(3\lambda\hbar c)^2}{8\pi^2} \int_0^{+\infty} \mathrm{d}R^2 \, \frac{R^2}{(R^2+K^2)^2} \tag{20.76a}$$

$$K^2 = (\xi^2 - \xi)k_1^2 + m_0^2c^2/\hbar^2 \; . \tag{20.76b}$$

Für $R \to \infty$ divergiert das Integral. Um es zu regularisieren, führen wir einen Abschneideparameter Λ ein:

$$\begin{aligned} F(k_1) &= -\int_0^1 \mathrm{d}\xi \, \frac{i(3\lambda\hbar c)^2}{8\pi^2} \lim_{\Lambda\to\infty} \int_0^{\Lambda^2} \mathrm{d}R^2 \, \frac{R^2}{(R^2+K^2)^2} \\ &= -\int_0^1 \mathrm{d}\xi \, \frac{i(3\lambda\hbar c)^2}{8\pi^2} \lim_{\Lambda\to\infty} \left(\frac{K^2}{R^2+K^2} + \ln(R^2+K^2) \right) \Big|_0^{\Lambda^2} \\ &= -\int_0^1 \mathrm{d}\xi \, \frac{i(3\lambda\hbar c)^2}{8\pi^2} \lim_{\Lambda\to\infty} \left(\frac{K^2}{\Lambda^2+K^2} - 1 + \ln\left(\frac{\Lambda^2+K^2}{K^2} \right) \right) \end{aligned}$$

Wegen $\Lambda \to \infty$ vereinfacht sich dieser Ausdruck zu

$$F(k_1) = -\int_0^1 \mathrm{d}\xi \, \frac{i(3\lambda\hbar c)^2}{8\pi^2} \lim_{\Lambda\to\infty} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{K^2} \right) \; . \tag{20.77}$$

Bisher haben wir $K^2 \geq 0$ angenommen. Was geschieht bei $K^2 < 0$? $K^2 =$ (20.76b) ist im Fall $k_{1\,E}^2 < -4\,m_0^2c^2/\hbar^2$ bei $\xi = 0.5$ auf jeden Fall negativ.

Bei $\xi = 0$ und $\xi = 1$ ist K^2 dagegen mit Sicherheit positiv. Also gibt es einen Wert $0 < \eta < 0.5$, $\eta \in \mathbb{R}$, so dass K^2 für $\xi < \eta$ und für $\xi > 1 - \eta$ positiv ist, für $\eta < \xi < 1 - \eta$ negativ ist, und bei $\xi = \eta$ und bei $\xi = 1 - \eta$ Null ist. Dementsprechend unterteilen wir das Integral über ξ in drei Bereiche:

$$\underbrace{\int_0^1 \mathrm{d}\xi \ \ldots}_{F(k_1)} = \underbrace{\int_0^\eta \mathrm{d}\xi \ \ldots}_{F_a(k_1)} + \underbrace{\int_\eta^{1-\eta} \mathrm{d}\xi \ \ldots}_{F_b(k_1)} + \underbrace{\int_{1-\eta}^1 \mathrm{d}\xi \ \ldots}_{F_c(k_1)} \tag{20.78}$$

Die beiden Integrale $F_a(k_1)$ und $F_c(k_1)$ unterscheiden sich nur durch die Integrationsgrenzen von (20.77). Bei $\xi = \eta$ und $\xi = 1 - \eta$ ist $K^2 = 0$. Wegen $\lim_{\xi \to 0} \xi \ln(\xi) = 0$ divergieren die Integrale jedoch an den Integrationsgrenzen nicht.

Das mittlere Integral beschreibt den Fall, dass die virtuellen Teilchen zu realen Teilchen werden. Sein Beitrag zur Wahrscheinlichkeitsamplitude (20.68) ist also Null. Man kann ein allgemein gültiges Ergebnis formulieren, indem man in das Integral über ξ einen Faktor V=(20.79c) einfügt.

$$F(k_1) = -\frac{i(3\lambda\hbar c)^2}{8\pi^2} \int_0^1 \mathrm{d}\xi \, V \lim_{\Lambda \to \infty} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{K^2}\right) \tag{20.79a}$$

$$K^2 = (\xi^2 - \xi)k_1^2 + m_0^2 c^2/\hbar^2 \tag{20.79b}$$

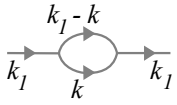
$$V \equiv \begin{cases} 1 & \text{falls } K^2 \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{20.79c}$$

Für ein freies Teilchen ist $V = 1$ und

$$\int_0^1 \mathrm{d}\xi \, \ln\left(\frac{\Lambda^2}{K^2}\right) = \ln\left(\frac{\Lambda^2\hbar^2}{m_0^2c^2}\right) - \int_0^1 \mathrm{d}\xi \, \ln\Big((\xi^2 - \xi) + 1\Big) =$$

$$= \ln\left(\frac{\Lambda^2\hbar^2}{m_0^2c^2}\right) - 0.81 \approx \ln\left(\frac{\Lambda^2\hbar^2}{m_0^2c^2}\right) \quad \text{wegen } \Lambda \to \infty \ .$$

Damit erhält man als Gesamtergebnis:

$$36 \cdot$$ 

$$\widehat{=} \widetilde{G}^{(2)}(k_1) \overset{(20.71)}{=}$$

$$= \underbrace{\widetilde{G}(k_1) \cdot 18(-i\lambda\hbar^2c^2)^2 \frac{1}{\Omega} \sum_{\boldsymbol{k}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}k^0}{2\pi} \widetilde{G}(k)\, \widetilde{G}(k_1 - k)}_{\equiv F(k_1)} \cdot \widetilde{G}(k_1) \tag{20.80a}$$

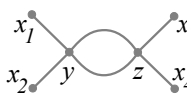
$$F(k_1) = \begin{cases} -\dfrac{i(3\lambda\hbar c)^2}{8\pi^2} \lim\limits_{\Lambda\to\infty} \ln\left(\dfrac{\Lambda^2\hbar^2}{m_0^2c^2}\right) & \text{falls } k_1^2 = m_0^2c^2/\hbar^2 \\ (20.79) \quad \text{sonst} \end{cases} \tag{20.80b}$$

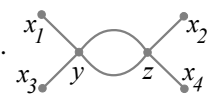
Die Divergenz dieser Schleife ist „nur“ logarithmisch, also weniger katastrophal als beim Tadpole der ψ^4-Theorie.

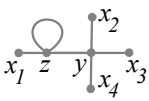
20.3.3 Vierpunktstreuung in 2. Ordnung

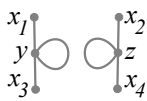
Wir müssen noch zwei weitere Beispiele für Graphen mit Schleifen untersuchen. Dabei werden wir auch eine wichtige Ergänzung für die Sammlung der Feynman-Regeln in den Kästen 20.1 und 20.2 finden. In der ψ^4-Theorie gibt es in der Streuamplitude mit zwei einlaufenden und zwei auslaufenden Teilchen in zweiter Ordnung der Störungsrechnung sechs verbundene Diagramme:

$$\overline{S}^{(2)} \widehat{=} \underbrace{576 \cdot}_{\overline{S}^{(2)}_{eg}} \underbrace{+1152 \cdot}_{\overline{S}^{(2)}_{ev}} + \; + 2304 \cdot + 576 \cdot + \ldots \tag{20.81}$$



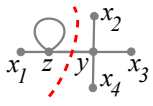




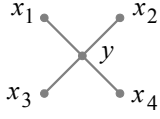


Zwei dem vierten ähnliche Diagramme, eines mit zwei Tadpoles auf einer Linie, und eines mit einem Kaktus auf einer Linie, sind nicht dargestellt. Das dritte und das vierte Diagramm (und die beiden nicht dargestellten Diagramme) unterscheiden sich nur durch Tadpoles auf ein- oder auslaufen-

den Linien von zwei Graphen, die wir bereits untersucht haben: Der vierte Graph ist eine Modifikation von (20.7), der dritte Graph ist eine Modifikation von (20.16). Die Selbstwechselwirkung von Teilchen auf ihrem Weg zum oder vom eigentlichen Streuereignis zwischen verschiedenen Teilchen wollen wir nicht zur Streuamplitude zählen. Denn solche Diagramme können „amputiert“ werden, indem man, wie unten durch die gestrichelte rote Linie angedeutet, die Selbstwechselwirkung abtrennt und den Graphen als Produkt der Propagator-Korrektur eines ein- oder auslaufenden Teilchens und der Streuung zwischen verschiedenen Teilchen interpretiert:

$$2304 \cdot$$ 

$$= 2 \cdot 4 \cdot 12 \cdot$$

$$\cdot\, 24 \cdot$$ 

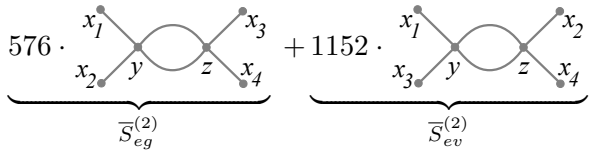
(20.82)

12 und 24 sind die Symmetriefaktoren der Teildiagramme. Die Selbstwechselwirkung kann bei einem beliebigen der x_j angeordnet werden ($\rightarrow$ Faktor 4), und die Vertizes können permutiert werden ($\rightarrow$ Faktor 2). In gleicher Weise kann man die Selbstwechselwirkung des vierten Graphen in (20.81) vom eigentlichen Streuereignis (20.7) amputieren.

Wenn durch das Auftrennen einer Linie eines Graphen ein einziges Teilchen von allen anderen Teilchen vollständig getrennt werden kann, dann heißt dieser Graph amputierbar. Amputierbare Graphen werden auch als „one-particle-reducible“ bezeichnet. Ein Graph, der nicht amputierbar ist, heißt one-particle-irreducible, was auch als 1PI abgekürzt wird. Weil der amputierte Teil nur ein einziges Teilchen betrifft, handelt es sich um einen Selbstwechselwirkungs-Graphen, der bei der Renormierung „automatisch“ zu einer einfachen Propagator-Linie mutiert. Die mühsame Berechnung von amputierbaren Graphen würde deshalb letztlich keinen zusätzlichen Beitrag zur Streuamplitude ergeben. Wir vereinbaren, amputierbare Graphen bei der Berechnung der Streuamplitude von vornherein zu streichen. Diese Vereinbarung wurde in Regel A der Kästen 20.1 und 20.2 integriert.

Es tragen demnach bei ψ^4-Wechselwirkung zur Amplitude eines Streuereignisses mit zwei einlaufenden und zwei auslaufenden Teilchen in zweiter Ordnung der Störungsrechnung nur zwei Graphen bei:

$$\overline{S}^{(2)} \mathrel{\widehat{=}} \underbrace{576 \cdot}_{\overline{S}^{(2)}_{eg}} \underbrace{\quad}_{\overline{S}^{(2)}_{eg}} + \underbrace{1152 \cdot}_{\overline{S}^{(2)}_{ev}} \underbrace{\quad}_{\overline{S}^{(2)}_{ev}} \tag{20.83}$$

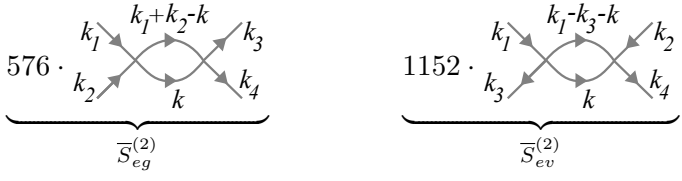


Der Index eg bedeutet: Die beiden einlaufenden Teilchen koppeln am gleichen Vertex, und der Index ev bedeutet: Die beiden einlaufenden Teilchen koppeln an verschiedenen Vertizes.

Zunächst überprüfen wir die Symmetriefaktoren. Im Fall von $\overline{S}^{(2)}_{eg}$ gibt es 8 Möglichkeiten, x_1 an einen der Vertizes y oder z zu koppeln, und 3 Möglichkeiten, x_2 an den gleichen Vertex zu koppeln. Es gibt 4 Möglichkeiten, um x_3 an den anderen Vertex zu koppeln, und noch 3 Möglichkeiten, um x_4 an den gleichen Vertex wie x_3 zu koppeln. Es bleiben 2 Möglichkeiten zur Bildung der beiden Propagatoren $G(z-y)$. Das ergibt insgesamt den Symmetriefaktor 576.

Bei $\overline{S}^{(2)}_{ev}$ gibt es einen weiteren Symmetriefaktor 2, weil x_3 entweder mit dem gleichen Vertex wie x_1 oder mit dem gleichen Vertex wie x_2 kontrahiert werden kann. Das ergibt insgesamt den Symmetriefaktor 1152.

Im Energie-Impuls-Raum sehen die beiden Graphen folgendermaßen aus:



Weil an jedem Vertex Energie und Impuls erhalten werden müssen, hätte man bei $\overline{S}^{(2)}_{eg}$ auch $k_3 + k_4 - k$ an den oberen Ast der Schleife schreiben können, und im Fall von $\overline{S}^{(2)}_{ev}$ auch $k_4 - k_2 - k$. Wie bei jeder Schleife gibt es eine Wellenzahl k, die durch keine Deltafunktion festgelegt wird, und möglicherweise zur Divergenz der Graphen führen kann. Wir berechnen die Graphen mit der nicht renormierten Kopplungskonstanten λ_0. Denn wir werden die Divergenz dieser Diagramme in Kapitel 22 durch Renormierung von λ_0 beheben.

Nach den Regeln von Kasten 20.2 ist

$$\overline{S}^{(2)}_{eg} = \Big(\prod_{j=1}^{4}\sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}_j}\Omega N}}\Big)\cdot$$
$$\cdot\, 2\pi\Omega\,\delta(k_1+k_2-k_3-k_4)\,\delta_{(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2),(\boldsymbol{k}_3+\boldsymbol{k}_4)}\cdot$$
$$\cdot\, \underbrace{\frac{576\,(-i\lambda_0\hbar^2c^2)^2}{2!\,\Omega}\sum_{\boldsymbol{k}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}k^0}{2\pi}\,\widetilde{G}(k)\,\widetilde{G}(k_1+k_2-k)}_{\equiv F(k_1+k_2)} \tag{20.84a}$$

$$F(k_1+k_2) \overset{(12.7)}{=} 288\,(-i\lambda_0\hbar^2c^2)^2\,\frac{1}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{k}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}k^0}{2\pi}\Big(\frac{i}{\hbar c}\Big)^2\cdot$$
$$\cdot\,\frac{1}{\Big(k^2-m^2c^2/\hbar^2+i\epsilon'\Big)\Big((k_1+k_2-k)^2-m^2c^2/\hbar^2+i\epsilon'\Big)} \tag{20.84b}$$

Abgesehen von einem Faktor 16 entspricht $F(k_1+k_2)$ dem Ausdruck für $F(k_1)$ in (20.71b). Es ist jetzt nur k_1 durch k_1+k_2 ersetzt, und es wird jetzt nicht die Masse sondern die Kopplungskonstante in nicht renormierter Form verwendet. Also kann man das Ergebnis sofort aus (20.80) ablesen:

$$F(k_1+k_2) = -2\,\frac{i(3\lambda_0\hbar c)^2}{\pi^2}\int_0^1 \mathrm{d}\xi\, V\lim_{\Lambda\to\infty}\ln\Big(\frac{\Lambda^2}{K^2}\Big) \tag{20.85a}$$

$$K^2 = \frac{4m^2c^2}{\hbar^2}\Big((\xi^2-\xi)\frac{(k_1+k_2)^2\hbar^2}{4m^2c^2}+\frac{1}{4}\Big) \tag{20.85b}$$

$$V \equiv \begin{cases}1 & \text{falls } K^2\geq 0\\ 0 & \text{sonst}\end{cases} \tag{20.85c}$$

Weil es sich bei den ein- und auslaufenden Teilchen um beobachtete Teilchen handelt, für die $k_j^2 = m^2c^2/\hbar^2$ gilt, kann man $(k_1+k_2)^2$ im Schwerpunktsystem $\boldsymbol{k}_2 = -\boldsymbol{k}_1$ berechnen:

$$(k_1+k_2)^2 = \underbrace{(k_1^0)^2 - \boldsymbol{k}_1^2}_{m^2c^2/\hbar^2} + \underbrace{(k_2^0)^2 - \boldsymbol{k}_2^2}_{m^2c^2/\hbar^2} + \underbrace{2k_1^0k_2^0}_{2(\boldsymbol{k}_1^2+m^2c^2/\hbar^2)} + 2\boldsymbol{k}_1^2 =$$
$$= 4m^2c^2/\hbar^2 + 4\boldsymbol{k}_1^2 > 4m^2c^2/\hbar^2$$

Also ist K^2 bei $\xi = 0.5$ immer negativ, bei $\xi = 0$ und $\xi = 1$ immer positiv, bei $\xi = \eta$ und $\xi = 1-\eta$ gleich Null. Das mittlere der drei Integrale

$$\underbrace{\int_0^1 \mathrm{d}\xi \ldots}_{F(k_1+k_2)} \overset{(20.78)}{=} \underbrace{\int_0^\eta \mathrm{d}\xi \ldots}_{F_a(k_1+k_2)} + \underbrace{\int_\eta^{1-\eta} \mathrm{d}\xi \ldots}_{F_b(k_1+k_2)=0} + \underbrace{\int_{1-\eta}^1 \mathrm{d}\xi \ldots}_{F_c(k_1+k_2)}$$

wird durch den Faktor $V =$ (20.85c) auf Null gesetzt, trägt also nichts zur Wahrscheinlichkeitsamplitude bei. Der Beitrag der Randintegrale F_a und F_c wird im hoch relativistischen Fall $\boldsymbol{k}_1^2\hbar^2/(mc)^2 \gg 1$, $\boldsymbol{k}_2^2\hbar^2/(mc)^2 \gg 1$ marginal. Deshalb ist im hoch relativistischen Fall $\overline{S}_{eg}^{(2)}$ sehr klein und – wie wir gleich sehen werden – gegenüber $\overline{S}_{ev}^{(2)}$ vernachlässigbar. Im Anschluss an (20.75) wurde der Begriff „konkurrierender Graph“ eingeführt. Der konkurrierende Graph, der Wahrscheinlichkeitsamplitude aus dem linken Graphen in (20.88) absaugt, ist in diesem Fall interessanterweise der Graph erster Ordnung (20.16).

Weil $\overline{S}_{ev}^{(2)}$ gegenüber $\overline{S}_{eg}^{(2)}$ einen zusätzlichen Symmetriefaktor 2 enthält, ist

$$F(k_1-k_3) = -4\,\frac{i(3\lambda_0\hbar c)^2}{\pi^2}\int_0^1 \mathrm{d}\xi \lim_{\Lambda\to\infty} \ln\Big(\frac{\Lambda^2}{L^2}\Big) \tag{20.86a}$$

$$L^2 = (k_1-k_3)^2\Big((\xi^2-\xi) + \frac{m^2c^2}{(k_1-k_3)^2\hbar^2}\Big) \tag{20.86b}$$

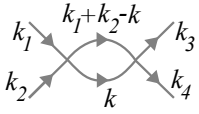
Eine Fallunterscheidung für L^2 ist nicht erforderlich. Denn im Schwerpunktsystem $\boldsymbol{k}_3 = -\boldsymbol{k}_1$ ist

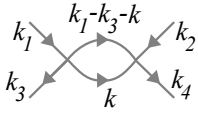
$$(k_1-k_3)^2 = \underbrace{(k_1^0)^2-\boldsymbol{k}_1^2}_{m^2c^2/\hbar^2} + \underbrace{(k_3^0)^2-\boldsymbol{k}_3^2}_{m^2c^2/\hbar^2} - \underbrace{2k_1^0k_3^0}_{2(\boldsymbol{k}_1^2+m^2c^2/\hbar^2)} - 2\boldsymbol{k}_1^2 =$$
$$= -4\boldsymbol{k}_1^2 < 0 \ .$$

L^2 kann also niemals negativ werden. Das Integral über ξ ergibt im hoch relativistischen Fall $\boldsymbol{k}_1^2\hbar^2/(mc)^2 \gg 1$, $\boldsymbol{k}_3^2\hbar^2/(mc)^2 \gg 1$

$$\int_0^1 \mathrm{d}\xi \, \ln\Big(\frac{\Lambda^2}{L^2}\Big) = \ln\Big(\frac{-\Lambda^2}{(k_1-k_3)^2}\Big) - \int_0^1 \mathrm{d}\xi \, \ln(\xi-\xi^2) =$$
$$= \ln\Big(\frac{-\Lambda^2}{(k_1-k_3)^2}\Big) + 2 \approx \ln\Big(\frac{+\Lambda^2}{|(k_1-k_3)^2|}\Big) \ . \qquad (20.87)$$

Also ist das Gesamtergebnis für beide Diagramme:

$$576 \cdot$$ 

$$+ 1152 \cdot$$ 

$$\widehat{=} \ \overline{S}^{(2)}$$

$$\overline{S}^{(2)} = \Big(\prod_{j=1}^{4}\sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}_j}\Omega N}}\Big)\cdot\Big(F(k_1+k_2)+F(k_1-k_3)\Big)\cdot$$
$$\cdot \ 2\pi\Omega\,\delta(k_1+k_2-k_3-k_4)\,\delta_{(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2),(\boldsymbol{k}_3+\boldsymbol{k}_4)} \qquad (20.88a)$$

$$F(k_1+k_2)+F(k_1-k_3) = (20.85)+(20.86) \ \approx \qquad (20.88b)$$
$$\approx -4\,\frac{i(3\lambda_0\hbar c)^2}{\pi^2}\lim_{\Lambda\to\infty}\ln\Big(\frac{\Lambda^2}{|(k_1-k_3)^2|}\Big) \quad \text{falls} \begin{cases} \boldsymbol{k}_1^2\hbar^2/(mc)^2 \gg 1 \\ \boldsymbol{k}_3^2\hbar^2/(mc)^2 \gg 1 \end{cases}$$

Die Schleife (20.88) der ψ^4-Theorie divergiert logarithmisch. Wie die Divergenz durch Renormierung der Kopplungskonstante behoben werden kann, werden wir in Kapitel 22 klären.

20.3.4 Die Doppelschleife der ψ^4-Theorie

Schließlich müssen wir noch die Korrektur 2. Ordnung zum Propagator der ψ^4-Theorie betrachten. Diese Korrektur besteht aus drei Graphen:

$$G^{(2)}(x_2-x_1) \overset{(20.47)}{\widehat{=}} \underbrace{288 \cdot}_{G^{(2a)}(x_2-x_1)} \underbrace{288 \cdot}_{G^{(2b)}(x_2-x_1)} \underbrace{192 \cdot}_{G^{(2c)}(x_2-x_1)} \tag{20.89}$$

Mit den Regeln von Kasten 20.4 berechnen wir diese Graphen, wobei die nackte, nicht renormierte Masse m_0 sowie der nicht renormierte Feldoperator $\psi_0(x)$ verwendet wird.

$$288 \cdot \widehat{=} \widetilde{G}^{(2a)}(k_1) =$$

$$= \frac{2}{2!}\widetilde{G}(k_1) \underbrace{\frac{12(-i\lambda\hbar^2c^2)}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{k}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}k^0}{2\pi}\widetilde{G}(k)}_{F\text{, siehe (20.67)}} \cdot$$

$$\cdot \widetilde{G}(k_1) \underbrace{\frac{12(-i\lambda\hbar^2c^2)}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{f}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}f^0}{2\pi}\widetilde{G}(f)}_{F\text{, siehe (20.67)}} \widetilde{G}(k_1) \tag{20.90}$$

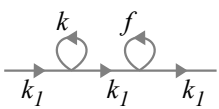
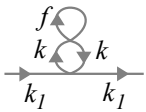
Für das Kaktus-Diagramm $G^{(2b)}(x_2-x_1)$ erhält man mit den gleichen Regeln:

$$288 \cdot \widehat{=} \widetilde{G}^{(2b)}(k_1) =$$

$$= \frac{2}{2!}\,\widetilde{G}(k_1)\,\underbrace{\frac{12(-i\lambda\hbar^2c^2)}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{k}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}k^0}{2\pi}\,\widetilde{G}(k)}_{F\,,\text{siehe (20.67)}}\cdot$$

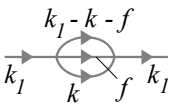
$$\cdot\,\underbrace{\frac{12(-i\lambda\hbar^2c^2)}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{f}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}f^0}{2\pi}\,\widetilde{G}(f)}_{F\,,\text{siehe (20.67)}}\,\widetilde{G}(k_1) \tag{20.91}$$

Weil man stets eine Linie $\xrightarrow[k_1]{}$ amputieren darf, darf man mit gleichem Recht jederzeit auch diese Linie in ein Diagramm implantieren. Das bedeutet konkret, dass man in $\widetilde{G}^{(2b)}(k_1)$ einen Faktor $\widetilde{G}(k_1)$ einfügen darf. Dadurch wird dieser Graph mit $\widetilde{G}^{(2a)}(k_1)$ identisch, so dass gilt:

$288\cdot$  $+\,288\cdot$  $\widehat{=}$

$$\widehat{=}\ \widetilde{G}^{(2a+2b)}(k_1) = \widetilde{G}(k_1)\,F\,\widetilde{G}(k_1)\,F\,\widetilde{G}(k_1) \quad \text{mit } F = (20.67) \tag{20.92}$$

Der dritte Summand von $\widetilde{G}^{(2)}(k_1)$ hat eine andere Struktur:

 $\widehat{=}\ \widetilde{G}^{(2c)}(k_1) = \widetilde{G}(k_1)\,J(k_1)\,\widetilde{G}(k_1)$ (20.93a)

$$J(k_1) \equiv \frac{192(-i\,\lambda\hbar^2c^2)^2}{2!\,\Omega^2}\sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{f}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}k^0\,\mathrm{d}f^0}{(2\pi)^2}\,\widetilde{G}(k)\,\widetilde{G}(f)\,\widetilde{G}(k_1-k-f)$$

$$= \frac{192(-i\,\lambda\hbar^2c^2)^2}{2!\,\Omega^2}\sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{f}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}k^0}{2\pi}\frac{\mathrm{d}f^0}{2\pi}\,\frac{(i/\hbar c)^3}{\left(k^2-m^2\frac{c^2}{\hbar^2}+i\epsilon'\right)}\cdot$$

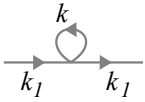
$$\cdot\,\frac{1}{\left(f^2-m^2\frac{c^2}{\hbar^2}+i\epsilon'\right)\left((k_1-k-f)^2-m^2\frac{c^2}{\hbar^2}+i\epsilon'\right)} \tag{20.93b}$$

Wir werden die Berechnung von $J(k_1)$ nicht explizit durchführen, sondern lediglich durch Vergleich mit den vorher berechneten Diagrammen klären, ob

– und wenn ja, in welcher Weise – dieser Graph divergiert. Dazu vergleichen wir mit

$$\frac{1}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{k}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}k^0}{2\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}$$

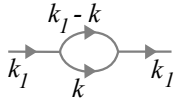
die Struktur der divergierenden Terme der bisher berechneten Graphen:



Struktur: $\dfrac{\mathrm{d}^4k}{k^2}$

$$F \overset{(20.50)}{\sim} \frac{1}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{k}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}k^0}{2\pi}\,\frac{1}{k^2 - m_0^2c^2/\hbar^2 + i\epsilon'}$$

$$\overset{(20.67b)}{\sim} \lim_{\Lambda\to\infty}\left(\frac{\Lambda^2\hbar^2}{m_0^2c^2} - \ln\left(\frac{\Lambda^2\hbar^2}{m_0^2c^2}\right)\right) \tag{20.94a}$$

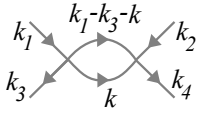


Struktur: $\dfrac{\mathrm{d}^4k}{k^4}$

$$F(k_1) \overset{(20.71b)}{\sim} \frac{1}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{k}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}k^0}{2\pi}\,\frac{1}{\left(k^2 - m_0^2\frac{c^2}{\hbar^2} + i\epsilon'\right)}\cdot$$

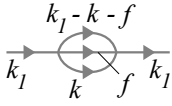
$$\cdot\,\frac{1}{\left((k_1-k)^2 - m_0^2\frac{c^2}{\hbar^2} + i\epsilon'\right)}$$

$$\overset{(20.80b)}{\sim} \lim_{\Lambda\to\infty}\ln\left(\frac{\Lambda^2\hbar^2}{m_0^2c^2}\right) \tag{20.94b}$$



$$\text{Struktur}: \frac{\mathrm{d}^4k}{k^4}$$

$$F(k_1-k_3) \overset{(20.84b)}{\sim} \frac{1}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{k}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}k^0}{2\pi}\,\frac{1}{\left(k^2-m^2\frac{c^2}{\hbar^2}+i\epsilon'\right)}\cdot$$
$$\cdot\,\frac{1}{\left((k_1-k_3-k)^2-m^2\frac{c^2}{\hbar^2}+i\epsilon'\right)}$$
$$\overset{(20.88)}{\sim} \lim_{\Lambda\to\infty}\ln\left(\frac{\Lambda^2}{|(k_1-k_3)^2|}\right) \tag{20.94c}$$



$$\text{Struktur}: \frac{\mathrm{d}^4k}{k^4}\frac{\mathrm{d}^4f}{f^4}$$

$$J(k_1) \overset{(20.93b)}{\sim} \frac{1}{\Omega^2}\sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{f}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}k^0}{2\pi}\frac{\mathrm{d}f^0}{2\pi}\,\frac{1}{\left(k^2-m^2\frac{c^2}{\hbar^2}+i\epsilon'\right)}\cdot$$
$$\cdot\,\frac{1}{\left(f^2-m^2\frac{c^2}{\hbar^2}+i\epsilon'\right)\left((k_1-k-f)^2-m^2\frac{c^2}{\hbar^2}+i\epsilon'\right)} \tag{20.94d}$$

Vergleicht man dies mit den vorherigen Graphen, dann ist es plausibel, dass auch $J(k_1)$ logarithmisch divergiert:

$$J(k_1) = C\Big((k_1)^2\Big)\cdot\lim_{\Lambda\to\infty}\ln\left(\frac{\Lambda^2\hbar^2}{m_0^2c^2}\right) \tag{20.94e}$$

C ist eine endliche Funktion von $(k_1)^2$. Die Form dieses Ergebnisses haben wir nicht berechnet sondern der Literatur entnommen. Man beachte den wichtigen Unterschied zwischen dem Tadpole und den drei anderen Schleifen: Anders als $F(k_1) =$ (20.94b), $F(k_1-k_3) =$ (20.94c), und $J(k_1) =$ (20.94d), ist die divergierende Funktion $F =$ (20.94a) des Tadpoles unabhängig von der Wellenzahl k_1 des propagierenden Teilchens.

Offenbar folgt aus (20.94) die allgemeine Regel:

$$\text{Struktur}: \frac{\mathrm{d}^4k}{k^n} \implies \begin{cases} n=2 : & \text{quadratische Divergenz} \\ n=4 : & \text{logarithmische Divergenz} \\ n\geq 6 : & \text{keine Divergenz} \end{cases} \tag{20.95}$$

Jeder Vertex in einer Schleife bewirkt einen Faktor k^{-2}, so dass keine Schleife divergieren kann, die drei oder mehr Vertizes enthält. Sämtliche Schleifen mit weniger als drei Vertizes, nämlich eine in der ψ^3-Theorie und drei in der ψ^4-Theorie, haben wir bereits gesehen. Es gibt keine weiteren. (Natürlich werden diese Schleifen als Teildiagramme innerhalb von Graphen höherer Ordnung wieder auftauchen.) Sämtliche anderen Diagramme der ψ^3- und der ψ^4-Theorie, die keine dieser vier Arten von Schleifen enthalten, sind konvergent. Sobald man einen Weg gefunden hat, die vier divergierenden Diagramme in konvergente Diagramme umzuwandeln, ist die gesamte ψ^3- und ψ^4-Theorie konvergent, und in keiner Ordnung der Störungstheorie werden irgendwelche weiteren, neuartigen Divergenzen auftreten. In den beiden foldenden Kapiteln werden wir klären, wie die Konvergenz der vier Schleifen-Diagramme durch Renormierung erzwungen werden kann.

21 Physikalische Interpretation der Renormierung

Divergenzen sind das unerfreuliche Markenzeichen der relativistischen Quantenfeldtheorie. In diesem Kapitel werden wir uns mit der Behandlung der Divergenzen befassen, die bei der Berechnung von Schleifendiagrammen wechselwirkender Quantenfelder auftreten. Sämtliche divergierenden Schleifendiagramme der ψ^3-Theorie und der ψ^4-Theorie haben wir bereits im vorigen Kapitel berechnet. Sämtliche divergierenden Schleifendiagramme der Quantenelektrodynamik werden wir in Kapitel 26 berechnen. Alle lassen sich mit einem im Prinzip immer gleichen Renormierungsverfahren behandeln.

Dieses Renormierungsverfahren blieb nach seiner Entdeckung am Ende der vierziger Jahre ein viertel Jahrhundert lang unverstanden. Es war ein verblüffender mathematischer Trick. Er funktionierte, und lieferte korrekte Ergebnisse mit einer Präzision, wie sie die Physik bis dahin nicht gekannt hatte. Aber sein Erfolgsgeheimnis war rätselhaft. Im zweiten unter [24] gelinkten Artikel findet man eine kurz gefasste, lesenswerte Übersicht über die verwickelten Wege und Irrwege, denen die Theoretiker in jenen Jahren folgten.

Licht ins Dunkel brachte die Entdeckung und Erforschung der Renormierungsgruppe, mit der wir uns im folgenden Abschnitt beschäftigen. Im anschließenden Abschnitt führen wir die Renormierung an einem einfachen Minimal-Modell der Quantenfeldtheorie explizit durch, und knüpfen daran im letzten Abschnitt dieses Kapitels eine kurze Diskussion über effektive Theorien und die Möglichkeit einer fundamentalen Länge an.

21.1 Die Renormierungsgruppe

Dieser Abschnitt – und im Grunde das ganze Kapitel – dreht sich letztlich um die Frage, warum und unter welchen Voraussetzungen physikalische

Vorgängen auf Längenskalen unterschiedlicher Größenordnung voneinander entkoppelt oder gegebenenfalls nicht entkoppelt sind. Wilson [26] wählt als Beispiel das Wasser eines Ozeans. Die Längenskala seiner Ausdehnung ist 10^7 m. Auf dieser Längenskala sind auch seine großräumigen Strömungen und die Gezeiten zu beschreiben. Dagegen haben die Oberflächenwellen des Wassers Wellenlängen in der Größenordnung von 10^{-3} m bis 10^{+2} m. Wenn man sie beschreiben will ist es egal, ob es sich um Wellen im Pazifik oder im Schwarzen Meer handelt. Ebenso wenig braucht man sich bei der Beschreibung von Wellen um die Bewegungen der einzelnen Moleküle (Längenskala 10^{-10} m), aus denen das Wasser besteht, zu kümmern. Das ist der Normalfall: Vorgänge, die auf sehr unterschiedlichen Längenskalen stattfinden, sind in aller Regel gut voneinander entkoppelt, und können deshalb unabhängig voneinander untersucht werden.

Das gilt auch für die Kontinuumsphysik der Flüssigkeiten und Festkörper, in der durch die Gitterkonstante G des Kristalls bzw. den Abstand nächster Nachbarmoleküle eine Länge gegeben ist, die der Gültigkeit der Kontinuumsbeschreibung eine Grenze setzt. Mit Hilfe der Molekularfeld-Theorie[1] lassen sich auf Längenskalen $L \gg G$ makroskopische Eigenschaften wie Härte, Magnetisierung, Viskosität, Schallgeschwindigkeit, usw. in den meisten Fällen zufriedenstellend beschreiben, ohne dass man auf ihre atomare Struktur oder die Länge G explizit Bezug nehmen muss. Erst wenn man die Kontinuumsbeschreibung bis in den Bereich der Länge G ausdehnt, sind unsinnige Ergebnisse zu erwarten.

Gute Entkopplung von Phänomenen auf einer makroskopischen Skala L von Phänomenen auf der Skala G der Abstände zwischen benachbarten Molekülen ist in der klassischen Kontinuumstheorie die Regel. Wie jede gute Regel kennt auch diese Regel Ausnahmen. Es handelt sich um Phasenübergänge, bei denen eine sehr starke Kopplung völlig unterschiedlicher Längenskalen beobachtet wird. Das paradigmatische Beispiel ist die Magnetisierung eines ferromagnetischen Festkörpers. Ursache der Magnetisierung sind die magnetischen Dipolmomente von Elektronen, deren detaillierte Beschreibung auf der Längenskala der Gitterkonstanten des Festkörpers von typisch $G \approx 10^{-10}$ m stattfinden muss. Dagegen wird die makroskopische

[1] englisch: mean-field theory

Magnetisierung M auf Längenskalen von typisch $L > 10^{-6}$ m gemessen.

Weil die Energie eines Ferromagneten abnimmt, wenn benachbarte Spins parallel ausgerichtet sind, tendiert er zu einem Zustand mit makroskopischer Magnetisierung. Dem wirkt jedoch die thermische Energie der Spins entgegen. Unterhalb der Curie-Temperatur T_c, die auch als kritische Temperatur bezeichnet wird, dominiert die Wechselwirkung zwischen den Spins. Oberhalb von T_c gibt es keine makroskopisch beobachtbare Magnetisierung, weil der durch parallele Ausrichtung der Spins mögliche Energiegewinn kleiner ist als ihre thermische Energie. In diesem Bereich hoher Temperatur sind die Orientierungen der Spins nur über Bereiche der Größenordnung G korreliert. Das heißt dass ein Spin seine Ausrichtung an derjenigen seiner nächsten Nachbarn, und allenfalls noch seiner übernächsten Nachbarn orientiert, aber nicht an weiter entfernten Spins.

Das ändert sich drastisch, wenn man die Temperatur bis auf T_c absenkt. Dann wächst die Korrelationslänge auf die Größe des gesamten Festkörpers. Das bedeutet in der Theorie, dass die Korrelationslänge divergiert. Die Orientierung eines Spins, die zuvor nur auf der Längenskala G des Gitterabstands wirksam war, beeinflusst nun andere Spins in beliebig großer Entfernung.

Man kann die gegenläufige Tendenz von magnetischer Wechselwirkung und thermischer Energie der Spins modellieren durch einen Parameter λ, der als Kopplungsstärke bezeichnet wird und im einfachsten Fall umgekehrt proportional zur Temperatur ist: $\lambda \sim 1/T$. Die Kopplungsstärke ist ein Maß für die Wahrscheinlichkeit, dass benachbarte Spins parallel ausgerichtet sind. Diese Wahrscheinlichkeit ist $1/2$ bei $T = \infty$ bzw. $\lambda = 0$, und sie ist 1 bei $T = 0$ bzw. $\lambda = \infty$. In realistischen Modellen ist λ eine Funktion, die in komplizierter Weise sowohl die Reichweite wie die Stärke der Spin-Spin-Kopplung festlegt. Wir wählen eine vereinfachende Darstellung, in der λ eine (mit einer physikalischen Einheit multiplizierte) Zahl ist.

Es ist relativ einfach, die makroskopische Magnetisierung aus der Theorie abzuleiten, sobald man den Wert der Kopplungsstärke als Funktion der Temperatur kennt. Dagegen ist die Berechnung der Kopplungsstärke ziemlich schwierig. Die Berechnung gelingt mit der Molekularfeld-Theorie, jedoch nur in deutlicher Entfernung von der Curie-Temperatur. Knapp unterhalb von T_c sagt die Molekularfeld-Theorie die Magnetisierung $M \sim (T_c -$

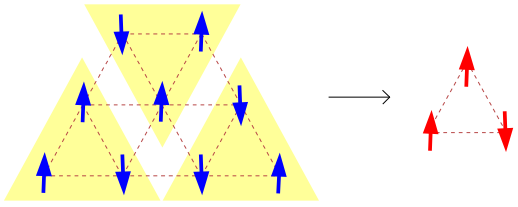


Abb. 21.1 : Spins j_n (links) und Spins j_{n+1} (rechts)

$T)^{1/2}$ voraus, und zwar unabhängig von den Details auf der atomaren Längenskala G, also unabhängig von der Gitterstruktur des Ferromagneten. Diese Vorhersage erwies sich als qualitativ richtig, jedoch quantitativ falsch. Die Magnetisierung bei T_c ist tatsächlich „universell“, d.h. von den Details auf der Längenskala G unabhängig. Ihr Wert ist jedoch $M \sim (T_c - T)^{1/3}$.

Die Universalität des Phasenübergangs bestärkte die Vermutung, dass eine effektive Theorie möglich sein sollte, welche die makroskopische Magnetisierung auf der Längenskala L unabhängig von den Details auf der atomaren Skala G korrekt beschreibt, auch und gerade bei Temperaturen nahe T_c. Die Molekularfeld-Theorie versagt deshalb in der Umgebung von T_c, weil sie annimmt dass die Korrelationslänge, über die sich die Spins wechselseitig nennenswert beeinflussen, nur wenig von der Temperatur abhängig sei. Tatsächlich ändert sich die Korrelationslänge jedoch in der Nähe der kritischen Temperatur drastisch.

Ein besseres Verfahren zur Berechnung der Kopplungsstärke zwischen den Spins in einem Magneten bei Temperaturen nahe T_c wurde durch das Block-Spin-Verfahren von Kadanoff[2] und die darauf aufbauende Theorie der Renormierungsgruppe von Wilson[3] gefunden. Zur Erläuterung des Blockspin-Verfahrens betrachten wir das in Abbildung 21.1 links dargestellte zweidimensionale Ising-Modell, in dem 9 Spins, die nur die Werte $j_0 = +1$ oder $j_0 = -1$ annehmen können, in einem hexagonalen Gitter mit Gitterkonstante G angeordnet sind. Die Kopplungsstärke zwischen nächsten Nachbarn ist λ_0, die Kopplungsstärke zwischen Spins, die nicht nächste

[2] Leo Philip Kadanoff (∗1937)
[3] Kenneth Geddes Wilson (1936 - 2013)

Nachbarn sind, ist per Definition dieses Modells Null. Der Spin im Zentrum hat 6 nächste Nachbarn, die Spins in den unteren Ecken haben 2 nächste Nachbarn, die restlichen Spins haben 3 oder 4 nächste Nachbarn. Da jeder Spin zwei Richtungen annehmen kann, gibt es insgesamt $2^9 = 512$ verschiedene Möglichkeiten, die Spins anzuordnen.

Durch die Kopplungsstärke λ_0 wird die Wahrscheinlichkeit P_0 paralleler bzw. die Wahrscheinlichkeit $1 - P_0$ antiparalleler Stellung benachbarter Spins festgelegt. Damit kann die Wahrscheinlichkeit von jeder der 512 möglichen Konfigurationen berechnet werden. Außerdem werden bei jeder Konfiguration je 3 Spins j_0, die in Abbildung 21.1 durch ein gelbes Dreieck unterlegt sind, zu einem Blockspin j_1 zusammengefasst, und zwar nach dem Mehrheitsprinzip. Der Blockspin ist $j_1 = +1$, wenn mindestens zwei der Spins j_0 in diesem Block den Wert $+1$ haben. Andernfalls ist der Blockspin $j_1 = -1$. Die Blockspins sind im rechten Teil der Zeichnung rot dargestellt.

Es gibt nur $2^3 = 8$ verschiedene Konfigurationen der Blockspins j_1, aber 512 verschiedene Konfigurationen der Spins j_0. Die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller verschiedenen Konfigurationen der Spins j_0, die zur gleichen Konfiguration der Blockspins j_1 führen, ist die Wahrscheinlichkeit dieser Blockspin-Konfiguration. Aus der Wahrscheinlichkeit, mit der die verschiedenen Blockspin-Konfigurationen insgesamt vorkommen, kann man zurückrechnen auf die Wahrscheinlichkeit P_1 von paralleler bzw. die Wahrscheinlichkeit $1 - P_1$ von antiparalleler Stellung benachbarter Blockspins. Im allgemeinen ist $P_1 \neq P_0$. (In [26, Bild 6 auf S. 71] wird das anhand eines einfachen Beispiels explizit vorgerechnet.) Aus P_1 kann man wiederum die renormierte Kopplungsstärke λ_1 berechnen.

Mit der renormierten Kopplungsstärke λ_1 geht man in die nächste Runde des Blockspin-Verfahrens, berechnet wieder die Wahrscheinlichkeiten aller 512 Konfigurationen der Spins j_1 und der 8 Konfigurationen der Blockspins j_2, woraus sich die renormierte Kopplungskonstante λ_2 ergibt. Uns so weiter.

Es ist nur die begrenzte Leistungsfähigkeit der Computer, die uns dazu veranlasst das Verfahren in dieser Weise durchzuführen. Eigentlich würden wir gerne ein größeres Modell mit 3^N Spins berechnen, wobei N eine *sehr* große natürliche Zahl sein soll. Dann werden im ersten Schritt die Wahrscheinlichkeiten aller 2^{3^N} möglichen Konfigurationen der Spins j_0 ermittelt, und damit zugleich die Wahrscheinlichkeiten der $2^{3^{N-1}}$ möglichen Konfi-

gurationen der Blockspins j_1. Daraus ergibt sich wiederum der Wert der renormierten Kopplungskonstanten λ_1. Das Blockspin-Gitter wird – wie bereits in Abbildung 21.1 angedeutet – auf die gleiche Gitterkonstante G geschrumpft wie das ursprüngliche Gitter, hat aber nur ein drittel der Größe des ursprünglichen Gitters. Alle Strukturen (d.h. Domänen mit paralleler Ausrichtung der Spins), die anfangs kleiner als $3\,G$ waren, sind aus dem Modell verschwunden.

Im nächsten Schritt werden mit der Kopplungskonstanten λ_1 die Wahrscheinlichkeiten aller $2^{3^{N-1}}$ möglichen Konfigurationen der Spins j_1 ermittelt, und damit zugleich die Wahrscheinlichkeiten der $2^{3^{N-2}}$ möglichen Konfigurationen der Blockspins j_2, woraus wiederum die renormierte Kopplungskonstante λ_2 berechnet wird. Nach dem n-ten Durchlauf des Blockspin-Verfahrens besteht das Gitter noch aus 3^{N-n} Spins, wobei es sich immer noch um eine sehr große Zahl handeln soll. Alle anfangs vorhandenen Strukturen mit einer Größe von $< 3^n G$ sind aus dem Modell verschwunden. Hand in Hand mit der schrittweisen Vergröberung des Modells geht die schrittweise Renormierung der Kopplungskonstanten. Auf diese Weise findet man eine Folge von Wertepaaren

$$\begin{aligned}&(\lambda_0, G) \;\to\; (\lambda_1, 3G) \;\to\; (\lambda_2, 3^2 G) \;\to\; \dots \\ &\dots \;\to\; (\lambda_s, 3^s G) \;\to\; (\lambda_t, 3^t G) \;\to\; (\lambda_u, 3^u G) \;\to\; \dots\;,\end{aligned} \tag{21.1}$$

die als „Flow“ der Renormierungsgruppe bezeichnet wird. Wieso ist das eine Gruppe? Wir definieren die Transformation

$$\lambda_s \xrightarrow{T_{st}} T_{st}(\lambda_s) = \lambda_t\;. \tag{21.2}$$

Die Verknüpfung von zwei Transformationen wird definiert durch

$$T_{su}(\lambda_s) = T_{tu} T_{st}(\lambda_s) = T_{tu}(T_{st}\lambda_s) = T_{tu}(\lambda_t) = \lambda_u\;. \tag{21.3}$$

Und mit T_{ss} gibt es auch ein Einselement. Allerdings fehlen die inversen Elemente. Denn die schrittweise Mittelung beim Blockspin-Verfahren kann nicht umgedreht werden; man kann nicht aus dem Spinwert eines Blocks die 3 Spinwerte der vorangegangenen Generation rekonstruieren. Deshalb

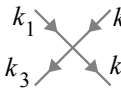
handelt es sich bei der Renormierungsgruppe $\{T\}$ des Modells Abb. 21.1 nicht um eine Gruppe, sondern nur um eine Halbgruppe. Dagegen ist die Renormierungsgruppe der QFT, mit der wir uns im Folgenden beschäftigen werden, eine vollwertige Gruppe.

21.2 Ein minimales QFT-Modell

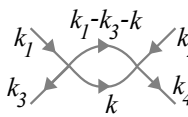
Zum Vergleich des Renormierungsverfahrens der Quantenfeldtheorie mit dem Renormierungsverfahren der Festkörpertheorie, das im vorigen Abschnitt am Beispiel eines Ising-Modells dargestellt wurde, konstruieren wir ein möglichst einfaches, auf das Wesentliche konzentriertes Minimalmodell der QFT. Zur Orientierung dient uns dabei das Beispiel des Streuereignisses der ψ^4-Theorie, bei dem zwei Teilchen einlaufen und zwei Teilchen auslaufen. Bei hoch relativistischer Energie der streuenden Teilchen ist die Wahrscheinlichkeitsamplitude dieses Ereignisses

$$\overline{S} = \overline{S}^{(1)} + \overline{S}^{(2)} + \mathcal{O}(\lambda_0^3) \mathrel{\widehat{=}}$$

$$\mathrel{\widehat{=}} 24 \cdot$$



$$+ 1152 \cdot$$



$$+ \mathcal{O}(\lambda_0^3)$$

$$\overline{S} \overset{(20.19),(20.88)}{=} \Big(\prod_{\text{ein}} \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}_{\text{ein}}}\Omega N}}\Big)\Big(\prod_{\text{aus}} \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}_{\text{aus}}}\Omega N}}\Big) \cdot$$

$$\cdot\, 2\pi\Omega\, \delta\Big(\sum_{\text{ein}} k^0_{\text{ein}} - \sum_{\text{aus}} k^0_{\text{aus}}\Big)\, \delta_{\sum_{\text{ein}}\boldsymbol{k}_{\text{ein}},\, \sum_{\text{aus}}\boldsymbol{k}_{\text{aus}}} \cdot$$

$$\cdot \Big(\lambda_0(-24i\hbar^2c^2) + \lambda_0^2\, \frac{(-36i\hbar^2c^2)}{\pi^2} \lim_{\Lambda\to\infty} \ln\Big(\frac{\Lambda^2}{|(k_3-k_1)^2|}\Big)\Big) \tag{21.4}$$

Anstelle von $\overline{S} =$ (21.4) definieren wir für das Minimalmodell die in ihrer wesentlichen Struktur gleichartige, aber einfachere Funktion

$$J(k) \equiv \lambda_0 f^{(1)}(k) + \lambda_0^2 f^{(2)}(k) + \lambda_0^3 f^{(3)}(k) + \dots \ . \tag{21.5a}$$

Den Koeffizienten

$$f^{(1)}(k) \equiv f_1 = \text{konstant} \neq 0 \tag{21.5b}$$

definieren wir entsprechend (21.4) als Konstante. Für $f^{(2)}(k)$ wählen wir in unserem Modell mit Blick auf (20.84b), (20.71b), und (20.76) die Definition

$$f^{(2)}(k) \equiv u \int_0^{+\infty} \mathrm{d}R \, \frac{1}{R+k} \; . \tag{21.5c}$$

R und k sind Wellenzahlen. Die Wellenzahl k – und ebenso die gleich einzuführende Wellenzahl q – ist in diesem Modell zu verstehen als

$$k \equiv \sqrt{\boldsymbol{k}^2} \;\neq\; \sqrt{(k^0) - \boldsymbol{k}^2} = \frac{mc}{\hbar} \; . \tag{21.6}$$

Anders als die Wurzel des Quadrats eines Minkowski-Vierer-Wellenzahlvektors ist k also keine Konstante, sondern hat für hochenergetische Teilchen einen hohen Wert, und für niederenergetische Teilchen einen niedrigen Wert. In u sind Faktoren zusammengefasst, die von der Integrationsvariablen R (die eine Wellenzahl ist) unabhängig sind. Im Sinne möglichster Einfachheit haben wir keinen Masseparameter und nur die Wellenzahl k eines einzigen einlaufenden Teilchens verwendet. Wir können uns $J(k)$ beispielsweise veranschaulichen als Streumatrix eines masselosen oder hoch-relativistischen Teilchens, das mit Wellenzahl k einläuft, und an einem sehr schweren Atomkern gestreut wird. Wie der Term $\sim \lambda_0^2$ in (21.4) divergiert $f^{(2)}$ bei $R \to \infty$ logarithmisch. Wir nehmen an, dass auch die Entwicklungskoeffizienten $f^{(n)}(k)$ höherer Ordnung divergieren, zumindest einige von ihnen.

Diese Divergenzen sollen durch Renormierung der Kopplungskonstanten eliminiert werden. Damit ist folgendes gemeint: Wir entwickeln die Konstante λ_0 nach einer anderen, zunächst unbekannten Konstanten λ in einer Reihe mit Koeffizienten l_j:

$$\lambda_0 = l_1\lambda + l_2\lambda^2 + l_3\lambda^3 + \ldots \tag{21.7}$$

Dies ist eine völlig unbestimmte Formel, weil anfangs weder die Konstante λ noch die Koeffizienten l_j bekannt sind. Die Reihenentwicklung wird in (21.5a) eingesetzt:

$$\begin{aligned} J(k) &= (l_1\lambda + l_2\lambda^2 + l_3\lambda^3)f_1 + (l_1\lambda + l_2\lambda^2 + l_3\lambda^3)^2 f^{(2)}(k) + \\ &\quad + (l_1\lambda + l_2\lambda^2 + l_3\lambda^3)^3 f^{(3)}(k) + \dots \\ &= \lambda\Big(l_1 f_1\Big) + \lambda^2\Big(l_2 f_1 + l_1^2 f^{(2)}(k)\Big) + \\ &\quad + \lambda^3\Big(l_3 f_1 + 2l_1 l_2 f^{(2)}(k) + l_1^3 f^{(3)}(k)\Big) + \mathcal{O}(\lambda^4) \end{aligned} \tag{21.8}$$

Man erkennt an dieser Stelle bereits den formalen Trick des Renormierungs-Verfahrens. In (21.5a) wird jeder Faktor λ_0^n mit genau einem Koeffizienten $f^{(n)}$ multipliziert, wobei einige der $f^{(n)}$ divergieren. Dagegen wird in (21.8) jedes λ^n mit der Summe aller $f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(n)}$ multipliziert, sodass divergierende $f^{(j)}$ sich wechselseitig kompensieren können, wenn die Koeffizienten l_j geeignet gewählt werden. $J(k) =$ (21.5a) ist identisch mit $J(k) =$ (21.8). Aber in (21.8) wird der Algorithmus der Reihenentwicklung so geschickt modifiziert, dass jeder einzelne Entwicklungskoeffizient endlich ist – vorausgesetzt er erfüllt gewisse Bedingungen, die wir im Folgenden spezifizieren werden.

Nun bestimmen wir die Koeffizienten l_j sukzessive in einer Störungsrechnung nach den Ordnungen von λ. Die Größe J wird experimentell bestimmt, und zwar nur bei einer einzigen, bestimmten Wellenzahl des einlaufenden Teilchens, die wir q nennen. Es ist eine Eigentümlichkeit des Renormierungsverfahrens, dass man pro Parameter, der renormiert werden soll (in diesem Beispiel λ_0) genau einen Messwert benötigt. Mit diesem Messergebnis gilt in erster Ordnung von λ

$$\begin{aligned} & J_{\text{exp}}(q) \overset{(21.8)}{=} \lambda l_1 f_1 + \mathcal{O}(\lambda^2) = \lambda f_1 + \mathcal{O}(\lambda^2) \\ \Longrightarrow \quad & l_1 = 1 \ . \end{aligned} \tag{21.9}$$

Die Wahl von $l_1 = 1$ ist nicht zwingend, aber naheliegend. Eine andere Wahl würde lediglich eine unnötige Reskalierung von λ bedeuten. Weil f_1 per Definition unseres Modells endlich und verschieden von Null ist, und der durch Messung ermittelte Wert $J_{\text{exp}}(q)$ ebenfalls endlich ist, erhalten wir in erster Ordnung auch einen endlichen, wohlbestimmten Wert von λ. Die Renormierung wäre für die Berechnung erster Ordnung offensichtlich gar nicht erforderlich gewesen, wir hätten genau so gut mit λ_0 weiter arbeiten

können. $J(k)$ hängt in erster Ordnung nicht von k ab. Also gilt für beliebige $k \neq q$

$$J(k) = \lambda f_1 + \mathcal{O}(\lambda^2) \; . \tag{21.10}$$

In zweiter Ordnung der Kopplungskonstanten ist der berechnete Wert von $J(k)$ gleich

$$J(k) \overset{(21.8)}{=} \lambda f_1 + \lambda^2 \Big(l_2 f_1 + f^{(2)}(k) \Big) + \mathcal{O}(\lambda^3) \; . \tag{21.11}$$

Hier tritt das Problem auf, dass $f^{(2)}$ divergiert. Um überhaupt mit der Rechnung fortfahren zu können, regularisieren wir $f^{(2)}$ dadurch, dass wir die obere Integrationsgrenze $+\infty$ durch die große, aber endliche Wellenzahl Λ ersetzen:

$$f^{(2)}_\Lambda(k) \equiv u \int_0^\Lambda \mathrm{d}R \, \frac{1}{R+k} = u \ln\Big(\frac{\Lambda + k}{k} \Big) \tag{21.12a}$$

$$f^{(2)}(k) = \lim_{\Lambda \to \infty} f^{(2)}_\Lambda(k) \tag{21.12b}$$

Wenn J oder ein Koeffizient f bzw. l mit dem Abschneide-Parameter Λ berechnet wird, kennzeichnen wir ihn durch den Index $_\Lambda$. Damit wird J in zweiter Ordnung

$$J_\Lambda(k) = \lambda f_1 + \lambda^2 \Big(l_{2,\Lambda} f_1 + f^{(2)}_\Lambda(k) \Big) + \mathcal{O}(\lambda^3) \tag{21.13a}$$

$$J(k) = \lim_{\Lambda \to \infty} J_\Lambda(k) \; . \tag{21.13b}$$

Der Koeffizient l_2 wird mithilfe des experimentell ermittelten Wertes bestimmt:

$$J_{\exp}(q) = \underbrace{\lambda f_1}_{J_{\exp}(q)\text{, siehe (21.9)}} + \lambda^2 \Big(l_2 f_1 + f^{(2)}(q) \Big) + \mathcal{O}(\lambda^3) \tag{21.14}$$

Falls wir λ als unbestimmt betrachten, hat diese Gleichung zwei Variable (nämlich λ und l_2), und deshalb keine eindeutige Lösung. Es spricht aber nichts dagegen zu verlangen, dass der in (21.9) festgelegte Wert von λ

beibehalten wird. Dann muss

$$l_2 = \lim_{\Lambda\to\infty} l_{2,\Lambda} = -\frac{f^{(2)}(q)}{f_1} = -\lim_{\Lambda\to\infty} \frac{f_\Lambda^{(2)}(q)}{f_1} \tag{21.15}$$

gelten. Weil f_1 endlich und konstant ist, und $f_\Lambda^{(2)}$ bei $\Lambda \to \infty$ logarithmisch divergiert, muss auch $l_{2,\Lambda}$ bei $\Lambda \to \infty$ logarithmisch divergieren. Für beliebige k gilt damit

$$J_\Lambda(k) = \lambda f_1 + \lambda^2\Big(f_\Lambda^{(2)}(k) - f_\Lambda^{(2)}(q)\Big) + \mathcal{O}(\lambda^3) \ .$$

Auch diese Relation soll im Grenzfall $\Lambda \to \infty$ endlich sein. Das ist sie genau dann, wenn

$$\lim_{\Lambda\to\infty} \Big(f_\Lambda^{(2)}(k) - f_\Lambda^{(2)}(q)\Big) = \text{endlich} \tag{21.16}$$

ist. Bei unserer Definition von $f^{(2)}$ ist das der Fall, weil

$$\lim_{\Lambda\to\infty} \Big(f_\Lambda^{(2)}(k) - f_\Lambda^{(2)}(q)\Big) \overset{(21.12)}{=} \lim_{\Lambda\to\infty} u \ln\Big(\frac{(\Lambda+k)q}{k(\Lambda+q)}\Big) = u\ln\Big(\frac{q}{k}\Big) \tag{21.17}$$

von Λ unabhängig ist. Damit gilt für beliebige k

$$J(k) = \lambda f_1 + \lambda^2 \underbrace{\Big(f^{(2)}(k) - f^{(2)}(q)\Big)}_{u\ln(q/k)} + \mathcal{O}(\lambda^3) \ . \tag{21.18a}$$

Man beachte erstens, dass die Bedingung (21.16) eine sehr starke Einschränkung der möglichen Form von $f^{(2)}$ bedeutet. Entsprechende Einschränkungen ergeben sich auch für alle weiteren $f^{(n)}$ mit $n > 2$. Man beachte zweitens, dass durch die Renormierung große und kleine Wellenzahlen voneinander entkoppelt wurden: In (21.5a) ist die kleine Wellenzahl k im Argument von $J(k)$ in zweiter Ordnung von λ_0 durch den Koeffizienten $f^{(2)}(k)$ sehr stark (sogar divergierend) mit der (unendlich) großen Wellenzahl Λ verkoppelt. In (21.18a) ist die kleine Wellenzahl k im Argument von $J(k)$ in zweiter Ordnung von λ nur mit der Wellenzahl q verkoppelt, die von der

gleichen Größenordnung wie k ist. Die große Wellenzahl Λ kommt in (21.18a) überhaupt nicht mehr vor.

Wir haben beim Ising-Modell gesehen, dass der jeweilige Wert der Kopplungsstärke korreliert ist mit der Feinheit, mit der das Modell untersucht wird. (Je mehr Spins j_0 zu einem einzigen Blockspin j_n zusammengefasst sind, um so gröber ist das Modell, und man findet eine entsprechend veränderte Kopplungsstärke λ_n.) Deshalb überrascht es uns nicht, dass auch in der QFT der Wert der renormierten Kopplungskonstante $\lambda(q)$ abhängt von der Feinheit $\approx q^{-1}$, mit der man bei der Messung von $J_{\text{exp}}(q)$ arbeitet.

Wenn die experimentelle Bestimmung von J bei einer anderen Wellenzahl q' des einlaufenden Teilchens durchgeführt wird, erhält man anstelle von (21.18a) die Gleichung

$$J(k) = \lambda' f_1 + \lambda'^2 \Big(f^{(2)}(k) - f^{(2)}(q') \Big) + \mathcal{O}(\lambda'^3) \; . \tag{21.18b}$$

Wir ziehen (21.18b) von (21.18a) ab, und setzen (21.17) ein:

$$0 = (\lambda - \lambda') f_1 + \lambda^2 u \ln\Big(\frac{q}{k}\Big) - \lambda'^2 u \ln\Big(\frac{q'}{k}\Big) + \mathcal{O}(\lambda^3) - \mathcal{O}(\lambda'^3)$$

Mit $\lambda(q) \equiv \lambda$ und $\lambda(q') \equiv \lambda'$ sowie der Reihenentwicklung

$$\lambda(q') = \lambda(q) + a_2 \lambda^2(q) + \mathcal{O}\Big(\lambda^3(q)\Big)$$

folgt daraus

$$\begin{aligned} \lambda(q') &= \lambda(q) + \lambda^2(q) \frac{u}{f_1} \ln\Big(\frac{q}{q'}\Big) + \mathcal{O}\Big(\lambda^3(q)\Big) \\ &= \lambda(q) + \frac{q'-q}{q} \underbrace{q \frac{\mathrm{d}\lambda(q)}{\mathrm{d}q}}_{\beta(\lambda,q)} + \mathcal{O}\Big(\lambda^3(q)\Big) \; . \end{aligned} \tag{21.19}$$

Die zweite Zeile ist der Beginn einer Taylor-Entwicklung, und enthält die Definition der Betafunktion. Wenn $\beta > 0$ ist, wird die Kopplung bei steigendem q' bzw. abnehmendem Abstand der wechselwirkenden Teilchen stärker. Wir werden in Kapitel 26 sehen, dass die Quantenelektrodynamik ein Beispiel für

diesen Fall ist. Ladungen sind in der QED von Wolken virtueller Ladungen umgeben, die sie nach außen hin dielektrisch abschirmen. Wenn ein zweites Teilchen mit hohem Impuls in diese Ladungswolke eindringt und dem ersten Teilchen nahe kommt, dann spürt es eine größere Ladung und demzufolge eine stärkere Kopplung als in weiterem Abstand. Die Kopplungskonstante

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx \begin{cases} 1/137 \text{ bei } k \approx 0 \\ 1/128 \text{ bei } k \approx 100\,\mathrm{GeV}/(\hbar c) \end{cases} \tag{21.20a}$$

der QED hat bei großem Abstand den Wert $\alpha \approx 1/137$. Bei den hohen Wellenzahlen von etwa $100\,\mathrm{GeV}/(\hbar c)$, wie sie zur Erzeugung von Z-Bosonen erforderlich sind, konnten die Messergebnisse nur mit der Annahme der Kopplungskonstanten $\alpha \approx 1/128$ interpretiert werden.

Wenn $\beta < 0$ ist, dann wird die Kopplung bei steigendem q bzw. abnehmendem Abstand der wechselwirkenden Teilchen schwächer. Dies ist der Fall bei der Kopplungskonstanten der starken Wechselwirkung. Die Abhängigkeit der starken Kopplungskonstanten α_s vom Impulsübertrag $\hbar k$ ist deutlicher ausgeprägt als bei der elektromagnetischen Wechselwirkung. Aus Messungen wurden die Werte

$$\alpha_s \approx \begin{cases} 0.35 \text{ bei } k \approx 2\,\mathrm{GeV}/(\hbar c) \\ 0.18 \text{ bei } k \approx 10\,\mathrm{GeV}/(\hbar c) \\ 0.11 \text{ bei } k \approx 120\,\mathrm{GeV}/(\hbar c) \end{cases} \tag{21.20b}$$

extrahiert. Die Quarks sind bei großer Wellenzahl (d.h. kleinem Abstand) „asymptotisch frei“. Aber die Bindungsenergie zwischen ihnen wird unendlich groß wenn man versucht, ein einzelnes Quark aus einem Baryon herauszulösen.

Weil die β-Funktion der QED positiv, die β-Funktion der QCD aber negativ ist kann man spekulieren, dass es eine Wellenzahl K geben sollte, bei der $\alpha(K) = \alpha_s(K)$ ist. Schätzungen sagen $K \approx 10^{15}\mathrm{GeV}/(\hbar c)$ voraus. Es ist klar, dass eine derartig weite Extrapolation der Messdaten mit größter Vorsicht zu betrachten ist.

Der Begriff Kopplungskonstante ist so fest verwurzelt, dass er auch für die renormierten Parameter, obwohl sie nicht konstant sind, weiter ver-

wendet wird. Wenn man diese Tatsache betonen will, spricht man von „laufenden Kopplungskonstanten“. Das experimentell bestätigte Laufen der Kopplungskonstanten der Quantenfelder ist ein starkes Indiz dafür, dass der Analogieschluss vom Renormierungsverfahren der klassischen Kontinuumstheorie der Festkörper und Flüssigkeiten zum Renormierungsverfahren der QFT tatsächlich zutrifft. In beiden Fällen korreliert die Renormierung der Kopplungsstärke mit einer Vergröberung der Modelle, und zugleich mit der Entkopplung der verschiedenen Längenskalen.

In Störungsrechnung dritter Ordnung in λ ist

$$\begin{aligned} J(k) &\overset{(21.8)}{=} \lambda l_1 f_1 + \lambda^2\Big(l_2 f_1 + l_1^2 f^{(2)}(k)\Big) + \\ &\quad + \lambda^3\Big(l_3 f_1 + 2 l_1 l_2 f^{(2)}(k) + l_1^3 f^{(3)}(k)\Big) + \mathcal{O}(\lambda^4) \\ &\overset{(21.15),(21.18a)}{=} \lambda f_1 + \lambda^2\Big(f^{(2)}(k) - f^{(2)}(q)\Big) + \\ &\quad + \lambda^3\Big(l_3 f_1 - \frac{2}{f_1} f^{(2)}(q) f^{(2)}(k) + f^{(3)}(k)\Big) + \mathcal{O}(\lambda^4)\ . \end{aligned}$$

Wenn man in diese Gleichung den Messwert $J_{\text{exp}}(q)$ einsetzt und verlangt, dass der in (21.9) festgelegte Wert von λ beibehalten wird, dann muss

$$\begin{aligned} l_3 = \lim_{\Lambda\to\infty} l_{3,\Lambda} &= \frac{1}{f_1}\Big(\frac{2}{f_1} f^{(2)}(q) f^{(2)}(q) - f^{(3)}(q)\Big) = \\ &= \lim_{\Lambda\to\infty} \frac{1}{f_1}\Big(\frac{2}{f_1} f_\Lambda^{(2)}(q) f_\Lambda^{(2)}(q) - f_\Lambda^{(3)}(q)\Big) \end{aligned} \tag{21.21}$$

sein. Wir haben in unserem einfachen Modell $f^{(3)}$ nicht definiert. Deshalb ist unbestimmt, ob dieser Ausdruck endlich oder unendlich ist. Wenn man gegebenenfalls $\lim_{\Lambda\to\infty} l_{3,\Lambda} = \pm\infty$ akzeptiert ist die Gleichung auf jeden Fall erfüllbar, weil $l_{3,\Lambda}$ völlig frei gewählt werden kann.

Man erkennt, dass die Struktur

$$l_n = \lim_{\Lambda\to\infty} l_{n,\Lambda} = \text{Funktion}\Big(f^{(1)}(q), f^{(2)}(q), \ldots, f^{(n)}(q)\Big)$$

sich in allen Ordnungen der Störungsrechnung wiederholt. Weil l_n frei

gewählt werden kann, ist diese Gleichung in jeder Ordnung n erfüllbar, vorausgesetzt dass wir $\lim_{\Lambda\to\infty} l_{n,\Lambda} = \infty$ zulassen.

Für beliebiges k gilt in dritter Ordnung der Störungsrechnung

$$J(k) = \lambda f_1 + \lambda^2\Big(f^{(2)}(k) - f^{(2)}(q)\Big) + \lambda^3\Big(-\frac{2}{f_1} f^{(2)}(q)\, f^{(2)}(k) + \\ + f^{(3)}(k) + \frac{2}{f_1} f^{(2)}(q) f^{(2)}(q) - f^{(3)}(q)\Big) + \mathcal{O}(\lambda^4)\ . \tag{21.22}$$

Diese Gleichung ist nur sinnvoll, wenn erstens

$$\Big(-\frac{2}{f_1} f^{(2)}(q)\, f^{(2)}(k) + f^{(3)}(k) + \frac{2}{f_1} f^{(2)}(q) f^{(2)}(q) - f^{(3)}(q)\Big) = \\ = \lim_{\Lambda\to\infty}\Big(-\frac{2}{f_1} f_\Lambda^{(2)}(q)\, f_\Lambda^{(2)}(k) + f_\Lambda^{(3)}(k) + \frac{2}{f_1} f_\Lambda^{(2)}(q) f_\Lambda^{(2)}(q) - \\ - f_\Lambda^{(3)}(q)\Big) = \text{endlich} \tag{21.23}$$

ist, und wenn zweitens auch weiterhin (21.16) gilt.

Um die Größe $J(k)$ zu berechnen, haben wir die Kopplungskonstante renormiert, und zwar mithilfe eines Messwerts

$$J_{\text{exp}}(q) \overset{(21.9)}{=} \lambda f_1 + \mathcal{O}(\lambda^2)\ ,$$

der bei der Wellenzahl q des einlaufenden Teilchens gewonnen wurde. In (21.18) haben wir das Konzept der laufenden Kopplungskonstanten aus der Forderung abgeleitet, dass der Wert der Messgröße $J(k)$ nicht davon abhängen darf, welche Wellenzahl q zur experimentellen Feststellung von $J_{\text{exp}}(q)$ verwendet wird:

$$J_{q,\lambda}(k) = J_{q',\lambda'}(k) = J_{q'',\lambda''}(k) = \ldots \tag{21.24}$$

Vergleicht man dies mit dem

Renormierungs-Flow des Ising-Modells:

$$(\lambda_0, G) \to (\lambda_1, 3G) \to (\lambda_2, 3^2 G) \to \dots$$
$$\dots \to (\lambda_s, 3^s G) \to (\lambda_t, 3^t G) \to (\lambda_u, 3^u G) \to \dots , \tag{21.25}$$

dann erkennt man den

Renormierungs-Flow der QFT:

$$(\lambda_0, \infty) \leftrightarrow \dots \leftrightarrow (\lambda, q) \leftrightarrow (\lambda', q') \leftrightarrow (\lambda'', q'') \leftrightarrow \dots ,$$

der die jeweilige renormierte Kopplungskonstante mit der Längenskala q^{-1} verknüpft, bei der die experimentelle Ermittlung von $J_{\exp}(q)$ durchgeführt wurde. Weil uns in der Feldtheorie jedoch ein (quasi-)Kontinuum von experimentell zugänglichen Wellenzahlen zur Verfügung steht, beschreiben wir den Flow der Renormierungsgruppe als ein Kontinuum unendlich vieler infinitesimal kleiner Schritte:

$$\boxed{\lambda(q) \to \lambda(q + \mathrm{d}q) \overset{(21.19)}{=} \lambda(q) + \frac{\mathrm{d}q}{q}\, \underbrace{q\, \frac{\mathrm{d}\lambda(q)}{\mathrm{d}q}}_{\beta(\lambda, q)}} \tag{21.26a}$$

Endliche Schrittweiten lassen sich durch Integrale darstellen:

$$\boxed{\lambda(q_r) \to \lambda(q_s) = \lambda(q_r) + \int_{q_r}^{q_s} \frac{\mathrm{d}k}{k}\, \beta(\lambda, k)} \tag{21.26b}$$

Im Fall der QFT ist die Renormierungsgruppe eine vollwertige Gruppe. Denn anders als bei der Halbgruppe der Blockspin-Transformationen (21.2) kann man die Transformationen (21.26) zu größeren und zu kleineren Wellenzahlen q durchführen, d.h. es gibt auch die inversen Transformationen.

Trotz der weitreichenden Analogie zwischen der Renormierung in der Kontinuumsphysik von Festkörpern und der Renormierung der QFT darf aber ein grundlegender Unterschied nicht übersehen werden: Der Renormierungsflow des Ising-Modells beginnt mit dem Wertepaar (λ_0, G), während der Renormierungsflow der QFT mit (λ_0, ∞) beginnt. Die QFT ist so kon-

struiert, als ob ihr Formalismus bis zu unendlich kleinen Abständen, sprich bis zu unendlich großen Wellenzahlen, unverändert gültig bleibt. Das ist der Grund für die Divergenzen, die in der QFT auftreten. Auch im „extremsten“ Wertepaar (λ_0, G) des Renormierungsflows des Ising-Modells sind sowohl λ_0 als auch G endlich. Dagegen ist die Kopplungskonstante

$$\lambda_0 \overset{(21.7)}{=} l_1\lambda + l_2\lambda^2 + l_3\lambda^3 + \dots$$

der nicht renormierten QFT unendlich groß, und sie gilt bei unendlich kleinem Abstand. Denn der Koeffizient $l_2 = (21.15)$ divergiert, und in der Regel divergieren auch noch weitere l_n.

Dies ist auch der Grund, warum man – formal betrachtet – in der QFT an einem kritischen Punkt arbeitet. Die starke Kopplung zwischen sehr unterschiedlichen Längenskalen, die durch Renormierungen kompensiert werden muss, tritt in der klassischen Kontinuumstheorie von Flüssigkeiten und Festkörpern nur bei Phasenübergängen in der Nähe der kritischen Temperatur auf, und es ist einige Kunstfertigkeit der Experimentatoren erforderlich um ein System so genau auf T_c einzujustieren, dass eine Messung der Parameter möglich wird. In der Quantenfeldtheorie kommt die Temperatur überhaupt nicht vor. Quantenfelder sind „von selbst“ und jederzeit auf einen kritischen Zustand einjustiert. Denn der kritische Zustand ist dadurch charakterisiert, dass die Korrelationslänge sehr groß ist gegenüber der untersuchten Längenskala. Wenn – wie in der nicht renormierten QFT – die untersuchte Längenskala Null ist, dann erscheint im Vergleich dazu selbstverständlich jede noch so winzige endliche Korrelationslänge unendlich zu sein, so dass die formale Voraussetzung des kritischen Zustands gegeben ist.

21.3 Die fundamentale Länge

Jede gute Theorie (andere Theorien interessieren uns ohnehin nicht) hat einen gewissen Anwendbarkeitsbereich, innerhalb dessen sie korrekte Ergebnisse liefert und sinnvoll benutzt werden kann. Beispielsweise ist der Anwendbarkeitsbereich der Newton'schen Mechanik dadurch gekennzeichnet, dass Ausdrücke $\mathcal{O}(v^2/c^2)$ vernachlässigbar klein sind. Dabei ist v die

typische Geschwindigkeit der Objekte relativ zum Beobachter, und c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum. Wenn ein mechanischer Vorgang diese Voraussetzung nicht erfüllt, dann muss er durch die relativistische Mechanik beschrieben werden, aus der die Newton'sche Mechanik im Grenzfall $(v^2/c^2) \to 0$ hervorgeht.

Eine quantentheoretische Beschreibung ist erforderlich für Vorgänge, bei denen Ausdrücke $\mathcal{O}(\hbar/S)$ signifikant sind. Dabei ist S die Wirkung des untersuchten Systems. Wenn Ausdrücke $\mathcal{O}(\hbar/S)$ vernachlässigbar sind, dann gehört der Vorgang in den Anwendbarkeitsbereich der klassischen (Newton'schen oder relativistischen) Theorie.

In einem immer noch lesenswerten Aufsatz [47] äußerte Heisenberg im Jahr 1938 die Vermutung, dass die Divergenzen der Quantenfeldtheorie als Hinweis darauf zu verstehen seien, dass es sich bei der QFT um den niederenergetischen Grenzfall einer umfassenderen, bisher unbekannten Theorie handele. So wie sich die Newton'sche Mechanik einerseits als Grenzfall der relativistischen Mechanik herausstellte, die auf der angemessenen Behandlung der Naturkonstanten c beruht, und andererseits als Grenzfall der Quantenmechanik, die auf der angemessenen Behandlung der Naturkonstanten $\hbar$ beruht, so würde sich die unzulängliche Quantenfeldtheorie nach Heisenbergs Vermutung früher oder später als Grenzfall einer Theorie erweisen, die auf der angemessenen Behandlung einer noch unbekannten Naturkonstanten r beruht. r sollte die Dimension einer Länge haben, und größenordnungsmäßig 10^{-15}m betragen.

Heute wissen wir, dass der Wert von 10^{-15}m viel zu hoch gegriffen war. Denn seither ist die Quantenelektrodynamik bis etwa 10^{-18}m gut erforscht worden, ohne dass dabei eine neuartige fundamentale Länge ins Blickfeld der Experimentatoren getreten wäre. In der jüngeren Diskussion wird zuweilen vermutet, dass der Kehrwert $K^{-1} \approx 10^{-30}$m der Wellenzahl, bei der möglicherweise die Kopplungskonstanten der starken, schwachen, und elektromagnetischen Wechselwirkungen etwa gleich groß werden, eine fundamentale Länge definieren könnte.

Sicherlich stellen die Planck-Länge und die Planck-Zeit

$$l_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 1.6 \cdot 10^{-35}\,\mathrm{m} \quad , \quad t_P = \frac{l_P}{c} = 5.4 \cdot 10^{-44}\,\mathrm{s}\,, \tag{21.27}$$

die durch Kombination des Wirkungsquantums, der Gravitationskonstante, und der Lichtgeschwindigkeit konstruiert werden, eine untere Grenze für die sinnvolle Benutzung unserer Begriffe Zeitintervall und Raumintervall dar. Um diese Annahme zu bestätigen, stellen wir die folgende Überlegung an: Wenn wir vernünftig über eine gewisse minimale Länge r sprechen wollen, dann müssen wir – zumindest im Prinzip – über einen Maßstab verfügen, mit dem diese Länge gemessen werden kann. Gemäß Heisenbergs Unbestimmtheits-Relationen kann ein Teilchen nicht mit einer Genauigkeit lokalisiert werden, die kleiner als seine halbe reduzierte Compton-Wellenlänge ist, d. h. kleiner als der Kehrwert seiner halben invarianten Wellenzahl κ. Diese Lokalisierung darf nicht genauer sein als zweimal der Schwarzschild-Radius r_S des Teilchens, denn sonst würde das Teilchen zu einem schwarzen Loch kollabieren:

$$r \approx \frac{1}{2\kappa} \geq 2r_S = \frac{4G}{c^2} \cdot \frac{\kappa\hbar}{c}$$

$$\kappa \leq \sqrt{\frac{c^3}{8G\hbar}} = \frac{1}{l_{\mathrm{Planck}}\sqrt{8}} = 2.2 \cdot 10^{34}\mathrm{m}^{-1} \tag{21.28a}$$

$$r \approx \frac{1}{2\kappa} \approx 2 \cdot 10^{-35}\mathrm{m} \overset{(21.27)}{\approx} l_P \tag{21.28b}$$

Statt uns auf Spekulationen einzulassen, beschränken wir uns auf die vorsichtige Formulierung: Falls es eine fundamentale Länge r geben sollte, die den Anwendungsbereich der heute bekannten Quantenfeldtheorien beschränkt, dann ist sie kleiner (vermutlich viel kleiner) als die bis heute experimentell erforschte Längenskala, d. h. kleiner (vermutlich viel kleiner) als $10^{-18}\mathrm{m}$, und größer oder gleich der Planck-Länge:

$$10^{-18}\mathrm{m} > r \geq l_P \approx 2 \cdot 10^{-35}\mathrm{m} \tag{21.29a}$$

Für die maximale Wellenzahl κ gilt demnach:

$$\frac{2\pi}{10^{-18}\mathrm{m}} \approx 6 \cdot 10^{18}\mathrm{m}^{-1} < \kappa \leq \frac{1}{l_{\mathrm{Planck}}\sqrt{8}} \approx 2 \cdot 10^{34}\mathrm{m}^{-1} \,. \tag{21.29b}$$

So wie die klassische Kontinuumstheorie von Festkörpern eine nützliche effektive Theorie ist, die auf Längenskalen $L \gg G$ korrekte Ergebnisse liefert, so kann man die QFT als brauchbare effektive Kontinuumstheorie von Quantenfeldern betrachten, die auf Längenskalen $k^{-1} \gg r$ korrekte Ergebnisse liefert. Die Existenz einer fundamentalen Länge in Form der

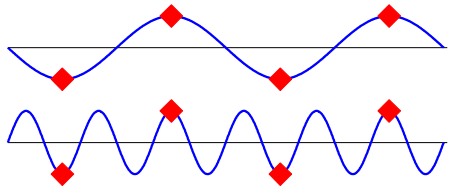


Abb. 21.2: Phonon mit Wellenlänge $2\,G$ (oben) und $2\,G/3$ (unten)

Gitterkonstanten G in der Festkörperphysik bewirkt, dass ein Integral über die Wellenzahl von Phononen spätestens bei $k \approx \pi/G$ abgeschnitten werden muss. In Abbildung 21.2 sind zwei transversale Phononen eines eindimensionalen, aus roten Atomen bestehenden Festkörpers skizziert. Obwohl dem unteren Phonon theoretisch eine drei mal so große Wellenzahl wie dem oberen zugeschrieben wird, sind tatsächlich beide Phononen identisch. Deshalb würde die Integration über Wellenzahlen $k > \pi/G$ „ins Leere laufen“, und zu einem unsinnigen Ergebnis führen.

Insgesamt ändert die Annahme der Länge r nichts weiter, als dass erstens die Grenzübergänge $\Lambda \to \infty$ entfallen, und dass zweitens alle Divergenzen verschwinden, weil $\Lambda_{\max} = \kappa$ endlich ist. Nach wie vor müssen die Quantenfeldtheorien renormiert werden, weil wir erstens die Werte von r und κ nicht kennen, und weil zweitens die Kopplungskonstante ohnehin mit (21.26) auf die Wellenzahlen angepasst werden muss, bei denen die Theorie experimentell geprüft wird.

22 Renormierung der ψ^s-Theorie

In Abschnitt 20.3 haben wir die vier divergierenden Schleifendiagramme, die es in der ψ^3- und ψ^4-Theorie insgesamt gibt, identifiziert und in (20.94) aufgelistet. In diesem Kapitel werden wir klären, wie die Divergenzen durch Renormierung der Masse, der Kopplungskonstanten, sowie des Feldoperators beseitigt werden können.

Wir legen folgende Schreibweise fest: m_0 ist die nicht renormierte Masse, λ_0 die nicht renormierte Kopplungskonstante, $\psi_0(x)$ der nicht renormierte Feldoperator. m ohne Null bezeichnet die renormierte Masse, λ ohne Null die renormierte Kopplungskonstante, $\psi(x)$ ohne Null den renormierten Feldoperator. Wie in (19.21) vereinbart, bezeichnen Operatoren und Propagatoren mit dem Index (W) die vollständigen Größen des wechselwirkenden Gesamtsystems, während es sich bei denselben Größen ohne diesen Index um Größen im Wechselwirkungsbild handelt.

In der ψ^4-Theorie enthält der Propagator

$$G^{(W)}(x_2 - x_1) = \langle 0 | \, T\psi_{(W)}(x_1)\, \psi_{(W)}(x_2) \, | 0 \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} G^{(n)}(x_2 - x_1)$$

zwei Arten von Korrekturen, nämlich Tadpole- und Kaktusdiagramme der Art (20.92), sowie Doppelschleifen-Diagramme der Art (20.93a). In nullter Ordnung der Störungstheorie ist $G^{(W)}$ identisch mit dem Feynman-Propagator:

$$G^{(0)}(x_2 - x_1) \equiv G(x_2 - x_1) \overset{(15.43)}{=} \langle 0 | \, T\psi_0(x_1)\psi_0(x_2) \, | 0 \rangle \tag{22.1}$$

In erster Ordnung gibt es nur den Tadpole. In zweiter Ordnung gibt es die Doppelschleife, den aus zwei Tadpoles bestehenden Kaktus, und zwei Tadpoles in Serie. In höheren Ordnungen der Störungstheorie gibt es Kombinationen dieser Diagramme, z.B. Doppelschleifen, auf deren Zweige Tadpoles

sitzen, sowie serielle Wiederholungen bereits bekannter Diagramme. Die seriellen Wiederholungen sind one-particle-reduzibel[1], denn sie können dadurch in zwei vollständige Diagramme zerlegt werden, dass eine einzige Linie aufgetrennt wird. Der Graph, bei dem auf den drei Zweigen der Doppelschleife je ein Tadpole aufgepflanzt ist, ist ein one-particle-irreduzibler Graph (abgekürzt 1PI) der Ordnung $\mathcal{O}(\lambda^5)$. Wir definieren

$$F_{1\mathrm{PI}} = F + J + \ldots + \ldots$$

als Summe sämtlicher one-particle-irreduzibler Graphen GFG, GJG, ..., die in irgend einer Ordnung der Störungstheorie auftreten. Aus (20.67) und (20.92) erkennt man, dass die Beiträge zu $G^{(W)}$ als Glieder einer geometrischen Reihe betrachtet werden können:

$$\begin{aligned}\widetilde{G}^{(W)} &= \widetilde{G} + \widetilde{G}F_{1\mathrm{PI}}\widetilde{G} + \widetilde{G}F_{1\mathrm{PI}}\widetilde{G}F_{1\mathrm{PI}}\widetilde{G} + \\ &\quad + \widetilde{G}F_{1\mathrm{PI}}\widetilde{G}F_{1\mathrm{PI}}\widetilde{G}F_{1\mathrm{PI}}\widetilde{G} + \ldots = \frac{\widetilde{G}}{1 - F_{1\mathrm{PI}}\widetilde{G}} = \\ &\overset{(12.7)}{=} \frac{i}{\hbar c\Big(k_1^2 - m_0^2\frac{c^2}{\hbar^2} + i\epsilon'\Big)\Big(1 - \dfrac{iF_{1\mathrm{PI}}}{\hbar c(k_1^2 - m_0^2\frac{c^2}{\hbar^2}) + i\epsilon'}\Big)} \\ &= \frac{i}{\hbar c\Big(k_1^2 - m_0^2\frac{c^2}{\hbar^2} - iF_{1\mathrm{PI}}\frac{1}{\hbar c} + i\epsilon'\Big)}\end{aligned} \tag{22.2}$$

Die Reihe wird auf jeden Fall konvergieren. Denn jeder Term in $F_{1\mathrm{PI}}$ enthält die Kopplungskonstante λ, für die wir $\lim_{n\to\infty}\lambda^n = 0$ vorausgesetzt haben. $F_{1\mathrm{PI}}$ enthält Terme, die von k_1 unabhängig sind (nämlich den Tadpole und die Kakteen), und Terme, die von k_1^2 abhängen (nämlich alle Diagramme, die Doppelschleifen enthalten). Wir entwickeln $F_{1\mathrm{PI}}\frac{1}{\hbar c}$ in einer Taylorreihe um $k_1^2 = m_0^2c^2/\hbar^2$:

[1] Definition im Anschluss an (20.82)

$$F_{1\mathrm{PI}}\tfrac{1}{\hbar c} = A + (k_1^2 - m_0^2\tfrac{c^2}{\hbar^2})B + \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty}(k_1^2 - m_0^2\tfrac{c^2}{\hbar^2})^n C_n}_{\mathcal{O}(\lambda^4)}$$

$$A \equiv F_{1\mathrm{PI}}\tfrac{1}{\hbar c}\Big|_{k_1^2=m_0^2\frac{c^2}{\hbar^2}} \quad , \quad B \equiv \frac{1}{\hbar c}\frac{\partial F_{1\mathrm{PI}}}{\partial k_1^2}\Big|_{k_1^2=m_0^2\frac{c^2}{\hbar^2}} \tag{22.3}$$

Zu C_n mit $n \geq 2$ können nur Diagramme beitragen, die mindestens zwei Doppelschleifen enthalten, also mindestens $\mathcal{O}(\lambda^4)$ sind. A enthält einen Term $\mathcal{O}(\lambda)$, nämlich den Tadpole, sowie unendlich viele Terme höherer Ordnung:

$$\begin{aligned} A &= F_{1\mathrm{PI}}\tfrac{1}{\hbar c}\Big|_{k_1^2=m_0^2\frac{c^2}{\hbar^2}} \overset{(20.67b)}{=} \\ &= -\frac{i3\lambda}{4\pi^2}\Big(\frac{m_0 c}{\hbar}\Big)^2 \lim_{\Lambda\to\infty}\left(\frac{\Lambda^2\hbar^2}{m_0^2c^2} - \ln\Big(\frac{\Lambda^2\hbar^2}{m_0^2c^2}\Big)\right) + \mathcal{O}(\lambda^2) \end{aligned} \tag{22.4}$$

B enthält einen Term $\mathcal{O}(\lambda^2)$, nämlich die Doppelschleife, sowie unendlich viele Terme höherer Ordnung:

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{\hbar c}\frac{\partial F_{1\mathrm{PI}}}{\partial k_1^2}\Big|_{k_1^2=m_0^2\frac{c^2}{\hbar^2}} \overset{(20.94e)}{=} \\ &= \frac{1}{\hbar c}\lim_{\Lambda\to\infty}\ln\Big(\frac{\Lambda^2\hbar^2}{m_0^2c^2}\Big)\cdot \underbrace{\frac{\partial\, C\Big((k_1)^2\Big)}{\partial k_1^2}\Big|_{k_1^2=m_0^2\frac{c^2}{\hbar^2}}}_{\neq 0 \text{ und endlich}} + \mathcal{O}(\lambda^3) \end{aligned} \tag{22.5}$$

Wir geben uns im Folgenden mit einem Ergebnis zufrieden, das korrekt bis $\mathcal{O}(\lambda^2)$ einschließlich ist. Unter dieser Voraussetzung ist

$$\begin{aligned} &k_1^2 - m_0^2\tfrac{c^2}{\hbar^2} - iF_{1\mathrm{PI}} = k_1^2 - m_0^2\tfrac{c^2}{\hbar^2} - iA - i(k_1^2 - m_0^2\tfrac{c^2}{\hbar^2})B = \\ &= \frac{-iA + (k_1^2 - m_0^2\frac{c^2}{\hbar^2})(1-iB)(1+iB)}{(1+iB)} = \frac{-iA + (k_1^2 - m_0^2\frac{c^2}{\hbar^2})}{(1+iB)} \,. \end{aligned}$$

Terme AB und BB wurden vernachlässigt. Dies setzen wir in die Formel

(22.2) des Propagators mit Selbstwechselwirkung ein:

$$\widetilde{G}^{(W)} = \frac{i(1+iB)}{\hbar c\Big(k_1^2 - m_0^2\frac{c^2}{\hbar^2} - iA + i\epsilon'\Big)} \tag{22.6}$$

Sowohl A als auch B sind von k_1 unabhängige Konstanten. Beide sind wegen $\Lambda \to \infty$ unendlich groß. Wir werden die Divergenzen jetzt durch Renormierung eliminieren:

Es ist unmöglich, die „nackte Masse“ m_0 eines Teilchens durch Experimente zu bestimmen. Messtechnisch fassbar ist nur die Masse, die den Pol im Propagator bewirkt, also die

$$\boxed{\text{physikalische Masse} = m \equiv +\sqrt{m_0^2 + iA\tfrac{\hbar^2}{c^2}}} \; . \tag{22.7}$$

Die physikalische Masse ist endlich, wie die Experimente beweisen. Die berechnete Größe A divergiert. Also divergiert auch die nicht messbare nackte Masse m_0 exakt so, dass die Summe der beiden divergierenden Größen den endlichen Wert (22.7) ergibt.

Durch

$$\widetilde{G} \sim G \sim \langle 0|\, T\psi_0(x_1)\,\psi_0(x_2)\,|0\rangle$$

stecken die Feldoperatoren $\psi_0(x)$ implizit im Propagator (22.6). Man renormiert die Feldoperatoren durch

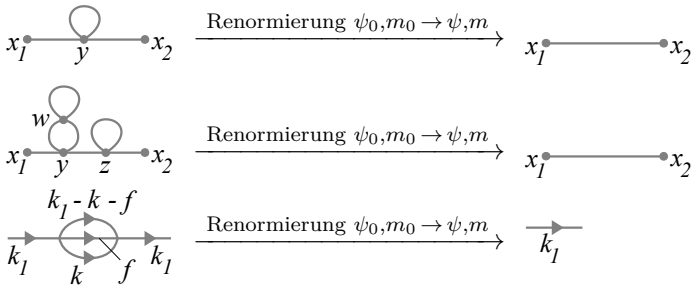
$$\boxed{\psi(x) \equiv \psi_0(x)\sqrt{1+iB}} \; . \tag{22.8}$$

B divergiert. Also muss auch $\psi_0(x)$ divergieren, und zwar in genau der Weise, dass das Produkt der divergierenden Größen den endlichen Wert $\psi(x)$ ergibt.

Wenn die Masse und die Feldoperatoren entsprechend (22.7) und (22.8) renormiert werden, dann erhält der Propagator die einfache Struktur

$$\widetilde{G}^{(W)} = \widetilde{G} = \frac{i}{\hbar c\Big(k^2 - m^2\frac{c^2}{\hbar^2} + i\epsilon'\Big)}\,, \tag{22.9}$$

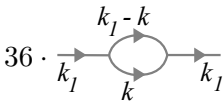
und zugleich verschwinden die Tadpoles, Kakteen, und Doppelschleifenstrukturen automatisch aus allen Diagrammen:



usw. ... (22.10)

Wo immer in einem Diagramm Tadpoles, Kakteen, oder Doppelschleifen auftauchen, werden sie durch die einfache Propagatorlinie ersetzt. Es ist dabei nicht erforderlich, auf die Symmetriefaktoren zu achten, die in (20.47) angegeben sind. Denn das renormierte Diagramm ist mit einem einfacheren Diagramm identisch, das bereits in niedrigerer Ordnung der Störungstheorie berechnet wurde. Weil es nicht ein weiteres Mal berücksichtigt werden soll, wird es komplett gestrichen, egal welchen Symmetriefaktor es hat. Hier taucht das gleiche Argument wieder auf, mit dem wir in Abschnitt 20.3 auch die Streichung sämtlicher amputierbarer Graphen begründet haben.

Das divergente Diagramm



$$\overset{(20.68)}{\widehat{=}}\ \widetilde{G}^{(2)}(k_1) =$$

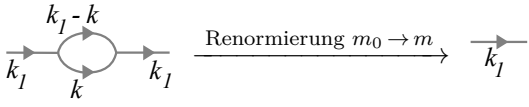
$$= \widetilde{G}(k_1)\cdot\underbrace{\Big(\frac{3\lambda\hbar c}{2\pi}\Big)^2\Big(-\frac{1}{2}\lim_{\Lambda\to\infty}\ln\Big(\frac{\Lambda^2\hbar^2}{m_0^2c^2}\Big) + C(k_1)\Big)}_{F(k_1)}\cdot\widetilde{G}(k_1)$$

der ψ^3-Theorie, das ebenfalls mit der nackten Masse m_0 berechnet wur-

de, wird in gleicher Weise renormiert. Die divergierenden Terme aus allen Ordnungen der Störungstheorie werden als geometrische Reihe (22.2) aufsummiert, und dann die

$$\text{physikalische Masse} = m \equiv + \sqrt{m_0^2 + iF(k_1)\,\frac{\hbar}{c^3}} \tag{22.11}$$

festlegt. Das bedeutet, dass nicht nur in Propagator-Korrekturen, sondern in sämtlichen Diagrammen der ψ^3-Theorie, in denen die divergente Schleife auftaucht, die Ersetzung



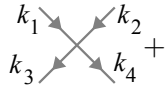
(22.12)

durchzuführen ist. Weil das so entstehende vereinfachte Diagramm bereits in niedrigerer Ordnung der Störungstheorie berücksichtigt wurde, ist es – unabhängig von seinem Symmetriefaktor – zu streichen. Die Renormierung der ψ^3-Theorie ist damit abgeschlossen, da in ihr keine weiteren Divergenzen vorkommen.

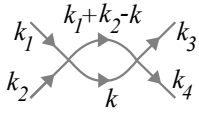
Es bleibt noch die Behandlung des divergierenden Vierpunkt-Diagramms (20.94c) zu klären. Man behandelt es durch Renormierung der Kopplungskonstanten. Die nackte Kopplungskonstante λ_0 ist nicht messbar. Messbar ist die Wahrscheinlichkeit des Streuereignisses mit zwei einlaufenden Teilchen, die Wellenzahlen k_1 und k_2 haben, und zwei auslaufenden Teilchen, die Wellenzahlen k_3 und k_4 haben. Die Wahrscheinlichkeitsamplitude dieses Streuereignisses ist

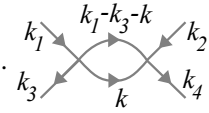
$$\overline{S} \overset{(24.10)}{\equiv} \mathcal{M} \cdot \Big(\prod_{\text{ein}} \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}_{\text{ein}}}\Omega N}} \Big) \Big(\prod_{\text{aus}} \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}_{\text{aus}}}\Omega N}} \Big) \cdot$$
$$\cdot\ 2\pi\Omega\,\delta\Big(\sum_{\text{ein}} k^0_{\text{ein}} - \sum_{\text{aus}} k^0_{\text{aus}} \Big)\, \delta_{\sum_{\text{ein}} \boldsymbol{k}_{\text{ein}},\, \sum_{\text{aus}} \boldsymbol{k}_{\text{aus}}} \ \cdot$$

Die Streumatrix $\mathcal{M}$, die hier definiert wurde, hat für dieses Streuereignis den folgenden Wert:

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}^{(1)} + \mathcal{M}^{(2)} + \mathcal{O}(\lambda_0^3) \mathrel{\hat{=}} 24 \cdot$$ 

$+$

$+ 576 \cdot$ 

$+ 1152 \cdot$ 

$+ \mathcal{O}(\lambda_0^3)$

$$\overset{(20.19),(20.88)}{\mathrel{\hat{=}}} 24(-i\lambda_0\hbar^2c^2) - 4\,\frac{i(3\lambda_0\hbar c)^2}{\pi^2} \lim_{\Lambda\to\infty} \ln\Big(\frac{\Lambda^2}{|(k_3-k_1)^2|}\Big)$$

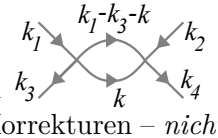
$$\text{falls } \boldsymbol{k}_1^2\hbar^2/(mc)^2 \gg 1\ ,\ \boldsymbol{k}_3^2\hbar^2/(mc)^2 \gg 1 \tag{22.13}$$

Nur um Schreibarbeit zu sparen, beschränken wir uns hier auf den hoch relativistischen Fall, in dem der Beitrag des mittleren der drei Diagramme vernachlässigt werden kann. Man kann die folgende Renormierung durchaus mit Streuexperimenten bei niedriger Energie durchführen, nur muss man dann die vollständigen Formeln (20.85) und (20.86) einsetzen.

(22.13) wird mit der renormierten Masse m und dem renormierten Feldoperator $\psi(x)$, jedoch mit der nackten Kopplungskonstanten λ_0 berechnet. Für $\Lambda \to \infty$ divergiert der Ausdruck. Man definiert die renormierte Kopplungskonstante λ dadurch, dass man

$$\boxed{\lambda = \lambda_0 + \frac{3\lambda_0^2}{2\pi^2} \lim_{\Lambda\to\infty} \ln\Big(\frac{\Lambda^2}{|(k_3-k_1)^2|}\Big)} \tag{22.14}$$

festsetzt. Die experimentell festgestellte Wahrscheinlichkeit für die Streuung $k_1, k_2 \to k_3, k_4$ ist endlich. Also ist auch λ endlich. Der Logarithmus divergiert für $\Lambda \to \infty$. Also muss auch λ_0 divergieren, und zwar genau so, dass die Summe (22.14) endlich ist.

Der Graph 

wird durch die Renormierung – anders als Propagator-Korrekturen – *nicht* unsichtbar. Zwar bewirkt die Renormierung

$$24(-i\lambda_0\hbar^2c^2) - 4\,\frac{i(3\lambda_0\hbar c)^2}{\pi^2} \lim_{\Lambda\to\infty} \ln\Big(\frac{\Lambda^2}{|(k_3-k_1)^2|}\Big) = 24(-i\lambda\hbar^2c^2)\ ,$$

dass der Graph zweiter Ordnung formal aus der Theorie verschwindet. Das gilt aber nur für genau die Wellenzahlen, mit denen die Renormierung (22.14) durchgeführt wurde. Für Teilchen mit anderen Wellenzahlen q_j gilt in zweiter Ordnung der Störungstheorie:

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= 24(-i\lambda_0\hbar^2c^2) - 4\,\frac{i(3\lambda_0\hbar c)^2}{\pi^2}\lim_{\Lambda\to\infty}\cdot \\ &\quad\cdot\left(\ln\Big(\frac{\Lambda^2}{|(q_3-q_1)^2|}\Big) - \ln\Big(\frac{\Lambda^2}{|(k_3-k_1)^2|}\Big)\right) + \mathcal{O}(\lambda^3) \\ &= 24(-i\lambda\hbar^2c^2) - 4\,\frac{i(3\lambda\hbar c)^2}{\pi^2}\ln\Big(\frac{|(k_3-k_1)^2|}{|(q_3-q_1)^2|}\Big) + \mathcal{O}(\lambda^3)\end{aligned}$$

In der letzten Zeile gibt es beim Wechsel zur renormierten Kopplungskonstante eine Ungenauigkeit, die aber $\mathcal{O}(\lambda^3)$ und damit akzeptabel ist. Man braucht also keine neue Renormierung durchzuführen, wenn man die Streuung von Teilchen mit anderen Impulsen berechnen will. Das ist eine allgemeine Regel: Für die Renormierung eines Parameters (in diesem Fall Renormierung $\lambda_0 \to \lambda$) genügt ein einziger Messwert.

Die Abschneide-Parameter Λ sind aus sämtlichen Ergebnissen verschwunden. Die Formeln enthalten nur noch Wellenzahlen k_j, q_j, die in Experimenten beobachtet werden können, also sehr klein sind gegenüber dem Kehrwert r^{-1} der fundamentalen Länge (siehe Abschnitt 21.3). Das bedeutet: Durch die Renormierungen wurden die Vorgänge auf der Skala der kleinen Wellenzahlen k_j, q_j von den (unendlich) hohen Wellenzahlen Λ entkoppelt. Damit sind die ψ^3-Theorie und die ψ^4-Theorie zu effektiven Theorien geworden, die für Vorgänge auf der Skala der kleinen Wellenzahlen k_j, q_j korrekte, endliche Ergebnisse liefern.

23 Yukawa-Wechselwirkung

Seit Rutherfords[1] Experimenten im Jahr 1910 weiß man, dass die Masse von Atomen im Wesentlichen in einem Kern konzentriert ist, dessen Durchmesser um mehrere Größenordnungen kleiner ist als die Gitterkonstante kristalliner Festkörper. Da die Bestandteile des Atomkerns elektrisch positiv geladen oder neutral sind (die Existenz von Neutronen wurde in den frühen dreißiger Jahren nachgewiesen) ist klar, dass zwischen den Nukleonen eine anziehende Kraft wirken muss, die bei kleiner Distanz wesentlich stärker als die elektromagnetische Abstoßung zwischen ihnen ist. Bei großer Distanz ist diese Kraft dagegen offenbar wesentlich schwächer als die elektromagnetische Kraft. 1935 veröffentlichte Yukawa[2] die erste brauchbare Theorie der Kernkraft. Bevor wir seine Theorie beschreiben, wollen wir kurz den Gedankengang skizzieren, der ihn zu dieser Theorie führte.

Das von einer Punktladung q im Abstand r erzeugte elektrostatische Potential ist

$$\varphi_E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{r}\ . \tag{23.1}$$

Die Reichweite der elektrostatischen Kraft ist unendlich. Um eine Wechselwirkung mit endlicher Reichweite zu modellieren, führte Yukawa einen Abschneideparameter R folgendermaßen ein:

$$\varphi_K(r) = \frac{g}{r}\,\exp\{-r/R\} \tag{23.2}$$

$q/4\pi\epsilon_0$ ist ersetzt durch die Kopplungskonstante g. Die zusätzliche Exponentialfunktion bewirkt, dass die Kernkraft unmessbar klein wird, sobald der Abstand r von der Quelle des Potentials wesentlich größer als R ist. φ_E

[1] Ernest Rutherford (1871-1937)
[2] Yukawa Hideki (1907-1981)

bzw. φ_K sind Lösungen der Potentialgleichungen

$$\Delta\varphi_E(r) = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \Big(\Delta - \frac{1}{R^2}\Big)\varphi_K(r) = 0\ , \tag{23.3}$$

wie man durch Einsetzen überprüft. (Der Laplaceoperator in Kugelkoordinaten ist in Anhang A.20 angegeben.) Außerdem weiß man, dass φ_E die Wellengleichung

$$\Big(-\frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + \Delta\Big)\varphi_E(\boldsymbol{r},t) = 0 \tag{23.4}$$

erfüllt, wenn man den Laplaceoperator zum d'Alembertoperator erweitert. Aufgrund von (23.3) kann man dann spekulieren, dass φ_K die Wellengleichung

$$\Big(-\frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + \Delta - \frac{1}{R^2}\Big)\varphi_K(\boldsymbol{r},t) = 0 \tag{23.5}$$

erfüllen sollte. Mit dem Ansatz $\varphi_K(\boldsymbol{r},t) = \varphi_{K0}\exp\{-i(\omega t - \boldsymbol{k}\boldsymbol{r})\}$ folgt aus dieser Wellengleichung

$$\frac{\omega^2}{c^2} - \boldsymbol{k}^2 = \frac{1}{R^2} \overset{(7.18)}{=} \frac{M^2c^2}{\hbar^2}\ . \tag{23.6}$$

Durch diese Relation hängt die Masse M des Feldes φ_K mit der Reichweite R der Kraft zusammen. Indem Yukawa die experimentell bestimmte Reichweite R der Kernkraft von etwa einem Femtometer einsetzte, konnte er die Ruhenergie

$$Mc^2 \approx \frac{\hbar c}{R} \approx \frac{\hbar c}{10^{-15}\mathrm{m}} \approx 200\,\mathrm{MeV} \tag{23.7}$$

des Feldes abschätzen. Erst 1947 konnten die von Yukawa erfundenen Pionen erstmals in der Höhenstrahlung experimentell direkt nachgewiesen werden.

Yukawas Theorie beschreibt die Nukleonen und Antinukleonen als Fermionen mit Spin 1/2 (also als Dirac-Felder), die zwischen ihnen wirkende Kraft aber als ungeladenes Klein-Gordon-Feld. Die Lagrangedichte dieses

Modells der Kernkraft hat die Form

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}_{(W)}\Big(i\hbar c\gamma^\nu \mathrm{d}_\nu - g(\hbar c)^{3/2}\phi_{(W)} - mc^2\Big)\psi_{(W)} + \\ + \frac{1}{2}\Big(\hbar^2 c^2 \mathrm{d}_\mu \mathrm{d}^\mu - M^2c^4\Big)\phi^2_{(W)} \ . \tag{23.8}$$

Sie besteht aus der Lagrangedichte des Diracfeldes (ohne Wechselwirkung mit einem Eichfeld), der Lagrangedichte des ungeladenen Klein-Gordon-Feldes, und dem Wechselwirkungsterm mit der Kopplungskonstante g. Wie in (19.21) vereinbart, sind $\psi_{(W)}, \overline{\psi}_{(W)}, \phi_{(W)}$ die Feldoperatoren der wechselwirkenden Felder. Operatoren ohne Index sind Operatoren im Wechselwirkungsbild. Der Vergleich mit der Lagrangedichte von Diracfeld plus Eichfeld ist instruktiv:

$$\mathcal{L} \overset{(8.21)}{=} \overline{\psi}_{(W)}\Big(i\hbar c\gamma^\nu(\mathrm{d}_\nu + \frac{i}{\hbar}qA_{(W)\nu}) - mc^2\Big)\psi_{(W)} - \frac{1}{4\mu_0}F_{\sigma\tau}F^{\sigma\tau}$$

Das Klein-Gordon-Feld $\phi_{(W)}(x)$, das die Yukawa-Wechselwirkung vermittelt, hat anders als das Eichfeld $A_{(W)}(x)$ eine von Null verschiedene Ruhemasse M, und seine Lagrangedichte hat nicht die Struktur von Rotationstermen wie $F_{\sigma\tau}F^{\sigma\tau}$. $\phi_{(W)}$ wird auch nicht mit den Gamma-Matrizen multipliziert, ist also nicht so dicht in den Spinorformalismus des Diracfeldes verwoben wie das Eichfeld. Schließlich ist $\phi_{(W)}$ auch – anders als das Eichfeld – kein Vektorfeld, sondern ein skalares Feld.

Weil das Diracfeld die Dimension Volumen$^{-1/2}$ und das Klein-Gordon-Feld die Dimension Energie$^{-1/2}$·Volumen$^{-1/2}$ hat – wie unten in (23.14) nochmals erkennbar – , ist die Kopplungskonstante dimensionslos:

$$[g] \cdot \frac{(\text{Energie} \cdot \text{Länge})^{3/2}}{\text{Volumen} \cdot \text{Energie}^{1/2} \cdot \text{Volumen}^{1/2}} = [\mathcal{L}] = \frac{\text{Energie}}{\text{Volumen}} \\ \Longrightarrow \quad [g] = 1 \tag{23.9}$$

23.1 Streuprozesse

Wir kennen bereits die Feynman-Propagatoren des Diracfeldes

$$S(x-y) \overset{(16.31)}{=} \langle 0|\, T\psi(x)\overline{\psi}(y)\,|0\rangle \tag{23.10a}$$

und des Klein-Gordon-Feldes

$$G(x-y) \overset{(15.43)}{=} \langle 0|\, T\phi(x)\phi^\dagger(y)\,|0\rangle\ . \tag{23.10b}$$

Zur Erinnerung: Der Zeitordnungsoperator $T =$ (15.44) bewirkt bei jeder Vertauschung zweier fermionischer Operatoren einen Faktor (-1). Außerdem ist in der Yukawa-Theorie $\phi^\dagger = \phi$, weil das Klein-Gordon-Feld ungeladen ist. In der Beschreibung von Streuereignissen mit zwei einlaufenden und zwei auslaufenden Nukleonen werden Matrixelemente der Form

$$\langle 0|\, T\psi_{(W)}(x_3)\,\psi_{(W)}(x_4)\,\overline{\psi}_{(W)}(x_1)\,\overline{\psi}_{(W)}(x_2)\,|0\rangle$$

auftauchen. Derartige Matrixelemente können mithilfe der Formel

$$\begin{aligned}
&\langle 0|\, T\psi_{(W)}(x_r)\ldots\overline{\psi}_{(W)}(x_1)\,|0\rangle \overset{(19.19)}{=} \\
&= \frac{\langle 0|\, T\psi(x_r)\ldots\overline{\psi}(x_1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\Big(-\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\tau\, H(\tau)\Big)^n|0\rangle}{\langle 0|\, T\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\Big(-\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\tau\, H(\tau)\Big)^m|0\rangle}
\end{aligned} \tag{23.11}$$

als Matrixelemente von Feldoperatoren im Wechselwirkungsbild berechnet werden. Denn bei der Herleitung dieser Formel in Abschnitt 19.1 wurde an keiner Stelle von den speziellen Eigenschaften des ungeladenen Klein-Gordon-Feldes Gebrauch gemacht. Sie gilt auch für das Diracfeld ψ und sein Antifeld $\overline{\psi}$. Der Hamiltonoperator $H(\tau)$, der in diese Formel einzusetzen ist, folgt aus der Lagrangedichte (23.8):

$$H_{(W)} = H_{\text{Dirac}} + H_{\text{Klein-Gordon}} + \underbrace{g(\hbar c)^{3/2}\int_\Omega \mathrm{d}^3x\,\overline{\psi}(x)\,\phi(x)\,\psi(x)}_{H(\tau)}$$

Genau wie in (20.20)ff durchgeführt werden wir auch in (23.11) die unverbundenen Diagramme des Zählers gegen den Nenner kürzen, so dass nur verbundene Graphen berechnet werden müssen. Das wird durch den Index $_c$ am Matrixelement angedeutet:

$$\langle 0|\, T\psi_{(W)}(x_r)\dots\overline{\psi}_{(W)}(x_1)\,|0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-ig\sqrt{\hbar c})^n\cdot$$
$$\cdot\ \langle 0|\, T\psi(x_r)\dots\overline{\psi}(x_1)\Big(\int\limits_{\Omega}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^4y\,\overline{\psi}(y)\,\phi(y)\,\psi(y)\Big)^n\,|0\rangle_c \qquad (23.12)$$

Zur Berechnung von Matrixelementen mit Feldoperatoren im Wechselwirkungsbild ist Wicks Theorem nützlich. Für ungeladene und geladene Klein-Gordon-Felder wurde es in (19.40) formuliert. Die Erweiterung auf Kombinationen von Operatoren des Diracfeldes und des Klein-Gordon-Feldes findet man im folgenden

Satz: Der Vakuum-Erwartungswert eines zeitgeordneten Produkts von n Feldoperatoren $\psi(x)$ und m Feldoperatoren $\overline{\psi}(x)$ des Dirac-Feldes und j Feldoperatoren $\phi(x)$ eines ungeladenen bosonischen Feldes im Wechselwirkungsbild ist

- Null, wenn j ungerade und/oder $n \neq m$ ist.
- im Fall von geradem j und $n = m$ gleich der Summe der
$$\Big((2n-1)\cdot(2n-3)\cdot(2n-5)\cdot\ \dots\ \cdot 1\Big)\cdot$$
$$\cdot\Big((j-1)\cdot(j-3)\cdot(j-5)\cdot\ \dots\ \cdot 1\Big)$$
unterschiedlichen Produkte der n Feynman-Propagatoren des Dirac-Feldes und $j/2$ Feynman-Propagatoren des bosonischen Feldes, zu denen die $n+m+j$ Operatoren kontrahiert werden können.

(23.13)

Achtung: Jede Vertauschung zweier fermionischer Operatoren, die bei der Kontraktion der Operatoren zu Propagatoren erforderlich ist, ergibt einen Faktor (-1).

Bei der Berechnung von Streuamplituden wird die LSZ-Reduktionsformel, die in Abschnitt 19.3 für ungeladene Bosonen untersucht wurde, von

großem Nutzen sein. Durch den Vergleich der Feldoperatoren wird deutlich, welche Ersetzungen erforderlich sind: Die Feldoperatoren des Dirac-Feldes im Wechselwirkungsbild sind

$$\psi(x) \overset{(16.1a)}{=} \sum_{\boldsymbol{k},r} \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}\Omega}} \Big({}^{r}a_{\boldsymbol{k}}\, {}^{r}u^{\boldsymbol{k}} \exp\{-ikx\} + {}^{r}b^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}\, {}^{r}v^{\boldsymbol{k}} \exp\{+ikx\} \Big)$$

$$\overline{\psi}(x) = \sum_{\boldsymbol{k},r} \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}\Omega}} \Big({}^{r}a^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}\, {}^{r}\overline{u}^{\boldsymbol{k}} \exp\{+ikx\} + {}^{r}b_{\boldsymbol{k}}\, {}^{r}\overline{v}^{\boldsymbol{k}} \exp\{-ikx\} \Big) \ . \quad (23.14a)$$

Über die Spinvariable r wird nur dann summiert, wenn der Spinzustand ($r = 1$ oder $r = 2$) der Felder nicht gemessen wird. Wenn der Spinzustand kontrolliert wird, setzt man anstelle der Summen über r den jeweiligen Wert von r ein. Um nicht so viele Summationszeichen schreiben zu müssen, nehmen wir im Folgenden letzteren Fall an. Die Feldoperatoren des ungeladenen Klein-Gordon-Feldes, ebenfalls im Wechselwirkungsbild, sind:

$$\phi(x) \overset{(19.11)}{=} \sum_{\boldsymbol{k}} \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}\Omega}} \Big(a_{\boldsymbol{k}} \exp\{-ikx\} + a^{\dagger}_{\boldsymbol{k}} \exp\{+ikx\} \Big) \quad (23.14b)$$

Die Normierungsfaktoren $\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}$ sind aufgrund der unterschiedlichen Ruhemassen des Klein-Gordon-Feldes und des Diracfeldes unterschiedlich, und die Fourier-Operatoren ${}^{r}a_{\boldsymbol{k}}$ des Diracfeldes unterscheiden sich von den Fourier-Operatoren $a_{\boldsymbol{k}}$ des Klein-Gordon-Feldes. Rein formal unterscheiden sich die Feldoperatoren aber nur durch die Spinorfunktionen $u, v, \bar{u}, \bar{v}$. Diese Spinorfunktionen haben die Dimension $\sqrt{\text{Energie}}$.

In der Herleitung der LSZ-Formel erhält man anstelle der Relationen (A.187) für die Nukleonenfelder die Relationen

$${}^{r}a_{\boldsymbol{k}}\, {}^{r}u^{\boldsymbol{k}} = +ic \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{\boldsymbol{k}}\Omega}} \int_{\Omega} \mathrm{d}^3x \exp\{+ikx\} \overset{\leftrightarrow}{\mathrm{d}_0} \psi(x) \quad (23.15a)$$

$${}^{r}b^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}\, {}^{r}v^{\boldsymbol{k}} = -ic \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{\boldsymbol{k}}\Omega}} \int_{\Omega} \mathrm{d}^3x \exp\{-ikx\} \overset{\leftrightarrow}{\mathrm{d}_0} \psi(x) \quad (23.15b)$$

$$ {}^{r}a_{\boldsymbol{k}}^{\dagger}\, {}^{r}\bar{u}^{\boldsymbol{k}} = -ic\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{\boldsymbol{k}}\Omega}}\int\limits_{\Omega} \mathrm{d}^3x \exp\{-ikx\} \overset{\leftrightarrow}{\mathrm{d}_0}\, \overline{\psi}(x) \tag{23.15c} $$

$$ {}^{r}b_{\boldsymbol{k}}\, {}^{r}\bar{v}^{\boldsymbol{k}} = +ic\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{\boldsymbol{k}}\Omega}}\int\limits_{\Omega} \mathrm{d}^3x \exp\{+ikx\} \overset{\leftrightarrow}{\mathrm{d}_0}\, \overline{\psi}(x)\ . \tag{23.15d} $$

Die dritte und vierte Relation sind die adjungierten der ersten und zweiten. Diese werden wie bei (A.187) durch Einsetzen des Feldoperators überprüft. Jetzt multipliziert man (23.15a) von links mit $\sum_s {}^{s}\bar{u}^{\boldsymbol{k}}$, (23.15b) von links mit $\sum_s {}^{s}\bar{v}^{\boldsymbol{k}}$, (23.15c) von rechts mit $\sum_s {}^{s}u^{\boldsymbol{k}}$, (23.15d) von rechts mit $\sum_s {}^{s}v^{\boldsymbol{k}}$, und nutzt

$$ {}^{r}\bar{u}^{\boldsymbol{k}}\, {}^{s}u^{\boldsymbol{k}} \overset{(8.72a)}{=} 2mc^2\,\delta_{rs} $$

$$ {}^{r}\bar{v}^{\boldsymbol{k}}\, {}^{s}v^{\boldsymbol{k}} \overset{(8.72b)}{=} -2mc^2\,\delta_{rs}\ . $$

Damit gilt

$$ {}^{r}a_{\boldsymbol{k}} = +ic\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{\boldsymbol{k}}\Omega}}\int\limits_{\Omega} \mathrm{d}^3x \exp\{+ikx\} \overset{\leftrightarrow}{\mathrm{d}_0}\, \frac{{}^{r}\bar{u}^{\boldsymbol{k}}\psi(x)}{2mc^2} \tag{23.16a} $$

$$ {}^{r}b_{\boldsymbol{k}}^{\dagger} = +ic\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{\boldsymbol{k}}\Omega}}\int\limits_{\Omega} \mathrm{d}^3x \exp\{-ikx\} \overset{\leftrightarrow}{\mathrm{d}_0}\, \frac{{}^{r}\bar{v}^{\boldsymbol{k}}\psi(x)}{2mc^2} \tag{23.16b} $$

$$ {}^{r}a_{\boldsymbol{k}}^{\dagger} = -ic\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{\boldsymbol{k}}\Omega}}\int\limits_{\Omega} \mathrm{d}^3x \exp\{-ikx\} \overset{\leftrightarrow}{\mathrm{d}_0}\, \frac{\overline{\psi}(x)\, {}^{r}u^{\boldsymbol{k}}}{2mc^2} \tag{23.16c} $$

$$ {}^{r}b_{\boldsymbol{k}} = -ic\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{\boldsymbol{k}}\Omega}}\int\limits_{\Omega} \mathrm{d}^3x \exp\{+ikx\} \overset{\leftrightarrow}{\mathrm{d}_0}\, \frac{\overline{\psi}(x)\, {}^{r}v^{\boldsymbol{k}}}{2mc^2}\ . \tag{23.16d} $$

Alle vier Fourier-Operatoren sind dimensionslose Spinor-Skalare. Aus dem Vergleich dieser Relationen mit (A.187) ist erkennbar, dass man bei der Herleitung der LSZ-Formel in den weiteren Schritten, die (A.187)ff entsprechen, die Feldoperatoren der ungeladenen Klein-Gordon-Bosonen folgendermaßen ersetzen muss:

$$\begin{aligned}
&\text{ein- oder auslaufendes Boson:} && \phi(x) = \phi^\dagger(x) \\
&\text{einlaufendes} \begin{cases} \text{Nukleon:} & (2mc^2)^{-1}\,\overline{\psi}(x)\,{}^r u^{\boldsymbol{k}} \\ \text{Antinukleon:} & -(2mc^2)^{-1}\,{}^r\bar{v}^{\boldsymbol{k}}\,\psi(x) \end{cases} \\
&\text{auslaufendes} \begin{cases} \text{Nukleon:} & (2mc^2)^{-1}\,{}^r\bar{u}^{\boldsymbol{k}}\,\psi(x) \\ \text{Antinukleon:} & -(2mc^2)^{-1}\,\overline{\psi}(x)\,{}^r v^{\boldsymbol{k}} \end{cases}
\end{aligned} \tag{23.17}$$

In (A.200) haben wir dann die Multipunkt-Greensfunktion des Klein-Gordon-Feldes

$$G(y,x) \equiv \langle 0|\, T\psi_{(W)}(y)\,\psi_{(W)}(x)\,|0\rangle$$

eingeführt, die wegen (23.17) für Nukleonen durch

$$G(y,x) \;\longrightarrow\; S(y,x)\cdot \frac{{}^{s_1}\bar{u}^{\boldsymbol{q}_1}\ldots(-1)^{s_m}v^{\boldsymbol{q}_n}\,{}^{r_1}u^{\boldsymbol{k}_1}\ldots(-1)^{r_n}\bar{v}^{\boldsymbol{k}_m}}{(2mc^2)^{n+m}}$$

ersetzt werden muss. Schließlich haben wir in (A.201)

$$\Big(k^2 - m^2\frac{c^2}{\hbar^2}\Big)\,G(y,x) = \frac{i\,G(y,x)}{\hbar c\,\widetilde{G}(k)} \tag{23.18}$$

eingesetzt. Jetzt führen wir an der entsprechende Stelle für Nukleonen die Ersetzung

$$\begin{aligned}
\Big(k^2 - m^2\frac{c^2}{\hbar^2}\Big)\frac{S(y,x)}{2mc^2} &= \frac{(k^2 - m^2\frac{c^2}{\hbar^2})\,S(y,x)}{\hbar c(\gamma^\nu k_\nu + m\frac{c}{\hbar})} = \frac{i\,S(y,x)}{\hbar c\,\widetilde{S}(k)} \\
\text{mit } \widetilde{S}(k) &\overset{(12.24)}{=} \frac{i(\gamma^\nu k_\nu + m\frac{c}{\hbar})}{k^2 - m^2\frac{c^2}{\hbar^2} + i\epsilon'}
\end{aligned} \tag{23.19}$$

durch. Dass diese Ersetzung korrekt ist, erscheint nicht völlig unglaubwürdig. Denn die Herleitung der LSZ-Formel ist eine Gratwanderung haarscharf neben der Masseschale, und auf der Masseschale gilt

$$\hbar^2c^2k^2 = m^2c^4 \implies \hbar c(\gamma^\nu k_\nu + m\frac{c}{\hbar}) \approx 2mc^2\ .$$

Dennoch ist klar, dass wir (23.19) nicht zwingend bewiesen, sondern bestenfalls plausibel gemacht haben. Mit einer kleinen zusätzlichen Komplikation, wegen der ein zusätzlicher sogleich zu erklärender Operator $\mathcal{U}_\mathrm{S}$ eingeschoben wird, folgt jetzt wie bei (19.49) die LSZ-Formel für Nukleonen:

$$
\begin{aligned}
S_{\boldsymbol{q}_1\dots\boldsymbol{q}_n\boldsymbol{k}_1\dots\boldsymbol{k}_m} &= \langle \boldsymbol{q}_1\dots\boldsymbol{q}_n|\, S\,|\boldsymbol{k}_1\dots\boldsymbol{k}_m\rangle \;= \\
&= \mathcal{U}_\mathrm{S} \prod_{j=1}^{n} \frac{{}^{r_j}\bar{u}^{\boldsymbol{q}_j}\,\widetilde{S}^{-1}(q_j)}{\sqrt{2\hbar\omega_{\boldsymbol{q}_j}\Omega}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{\Omega} \mathrm{d}^4 y_j\, \exp\{+iq_jy_j\}\cdot \\
&\quad\cdot \prod_{l=1}^{m} \frac{\widetilde{S}^{-1}(k_l)\,{}^{r_l}u^{\boldsymbol{k}_l}}{\sqrt{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}_l}\Omega}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{\Omega} \mathrm{d}^4 x_l\, \exp\{-ik_lx_l\} \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\cdot \\
&\quad\cdot \frac{\langle 0|\, T\psi(y_1)\dots\psi(y_n)\,\overline{\psi}(x_1)\dots\overline{\psi}(x_m)\Big(-\frac{i}{\hbar}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\tau\, H(\tau)\Big)^j\,|0\rangle}{\langle 0|\, T\sum\limits_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}\Big(-\frac{i}{\hbar}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\tau\, H(\tau)\Big)^r\,|0\rangle}
\end{aligned}
\tag{23.20}
$$

Hier wurde angenommen, dass nur Nukleonen (jedoch keine Antinukleonen) ein- und auslaufen. Wenn ein Antinukleon einläuft, dann ist ${}^{r_l}u^{\boldsymbol{k}_l}$ durch $-{}^{r_j}\bar{v}^{\boldsymbol{k}_l}$ und $\overline{\psi}(x_l)$ durch $\psi(x_l)$ zu ersetzen. Wenn ein Antinukleon ausläuft, dann ist ${}^{r_j}\bar{u}^{\boldsymbol{q}_j}$ durch $-{}^{r_j}v^{\boldsymbol{q}_j}$ und $\psi(y_j)$ durch $\overline{\psi}(y_j)$ zu ersetzen.

Wir überprüfen die Konsistenz unserer Überlegungen durch Analyse der Dimensionen: Jedes ein- oder auslaufende Teilchen trägt in (23.20) die Dimension

$$
\left[\frac{\bar{u}\,\widetilde{S}^{-1}}{\sqrt{\hbar\omega\Omega}}\,\mathrm{d}^4x\,\psi(x)\right] = \frac{\sqrt{\text{Energie}}\cdot\text{Länge}^{-1}}{\sqrt{\text{Energie}\cdot\text{Volumen}}}\cdot\frac{\text{Länge}^4}{\sqrt{\text{Volumen}}} = 1
$$

bei. Also ist die Wahrscheinlichkeitsamplitude dimensionslos, wie es sein muss.

Die angekündigte kleine Komplikation ergibt sich daraus, dass die Spinorfunktionen der Diractheorie – anders als die skalaren Funktionen des Klein-Gordon-Feldes – im allgemeinen nicht kommutieren. Wir ersparen uns

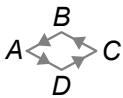
die langwierige Untersuchung, in welcher Reihenfolge die Faktoren in der LSZ-Formel anzuordnen sind, und entnehmen der Literatur das folgende einfache Ergebnis. In die LSZ-Formel ist der Umordnungs-Operator für Spinorfunktionen $\mathcal{U}_{\mathrm{S}}$ einzufügen, der folgendermaßen definiert wird:

Definition: Der Umordnungs-Operator $\mathcal{U}_{\mathrm{S}}$ ordnet die Spinorfunktionen $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \ldots, \mathsf{Z}$, die einer durchgehenden Fermionen-Linie (die sich über einen oder mehrere Vertizes erstreckt) zugeordnet sind, zu einem Produkt an, in dem links die Faktoren stehen, zu denen die Pfeile auf der Linie hindeuten, und rechts die Faktoren stehen, von denen die Pfeile weg deuten:

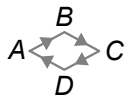
$\Longrightarrow \mathsf{DCBA}$

$\Longrightarrow \mathsf{ABCD}$

(23.21)



$\Longrightarrow \mathsf{C}_{ab}\mathsf{D}_{bc}\mathsf{A}_{cd}\mathsf{B}_{da}$
$= \mathrm{Sp}\{\mathsf{CDAB}\}$



$\Longrightarrow \mathsf{B}_{ab}\mathsf{A}_{bc}\mathsf{D}_{cd}\mathsf{C}_{da}$
$= \mathrm{Sp}\{\mathsf{BADC}\}$

Wo man den Anfangspunkt einer geschlossenen Fermionenschleife wählt ist egal, weil die Spinorfaktoren zyklisch zur Spur verknüpft werden.

Diese Regel bewirkt, dass am Anfang des Produkts ein Zeilenspinor und am Ende des Produkts ein Spaltenspinor steht, so dass das Produkt insgesamt ein Spinorskalar ist. Wenn die Fermionenlinie aber keinen Anfang und kein Ende hat, weil sie zu einer Schleife fermionischer Linien geschlossen ist, dann ergibt diese Regel die Spur eines Produkts von Spinormatrizen, die ebenfalls ein Spinorskalar ist. Für beide Möglichkeiten werden wir Beispiele kennenlernen, und die Funktionsweise des Umordnungs-Operators wird deutlicher werden, sobald wir diese Beispiele betrachten.

23.1.1 Nukleon-Nukleon-Streuung

Wir untersuchen zunächst ein Streuereignis mit zwei einlaufenden und zwei auslaufenden Nukleonen (nicht Antinukleonen). Die einlaufenden Nukleonen haben Wellenzahlen k_1 und k_2, die auslaufenden Nukleonen haben Wellenzahlen k_3 und k_4. Die Wahrscheinlichkeitsamplitude

$$S_{\boldsymbol{k}_4\boldsymbol{k}_3\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{k}_1} \overset{(20.1)}{=} \langle \boldsymbol{k}_3\boldsymbol{k}_4 |\, S \,| \boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2 \rangle \overset{(20.32)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \overline{S}^{(n)} \tag{23.22}$$

hat nach der LSZ-Formel mit der Abkürzung

$$N_j \equiv \sqrt{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}_j}\Omega}$$

den folgenden Wert:

$$\begin{aligned}
\overline{S}^{(n)} &\overset{(23.20)}{=} \mathcal{U}_\mathrm{S} \prod_{j=1}^{4} \frac{\widetilde{S}^{-1}(k_j)}{N_j} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_\Omega \mathrm{d}^4 x_j \, \frac{(-ig\sqrt{\hbar c})^n}{n!} \cdot \\
&\cdot {}^{r_4}\overline{u}^{\boldsymbol{k}_4\, r_3}\overline{u}^{\boldsymbol{k}_3\, r_2}u^{\boldsymbol{k}_2\, r_1}u^{\boldsymbol{k}_1} \exp\{-i(k_1x_1 + k_2x_2 - k_3x_3 - k_4x_4\} \\
&\cdot \langle 0|\, T\psi(x_3)\,\psi(x_4)\,\overline{\psi}(x_1)\,\overline{\psi}(x_2) \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_\Omega \mathrm{d}^4 y \, \overline{\psi}(y)\,\phi(y)\,\psi(y) \Big)^n |0\rangle_c
\end{aligned}$$

$\overline{S}^{(0)}$ ist Null. Denn genau wie in (20.14) reichen die beiden Propagatoren $S(x_3 - x_1)$ und $S(x_4 - x_2)$, die in nullter Ordnung aus dem Matrixelement gebildet werden können, nicht aus, um die vier Nullfaktoren $\widetilde{S}^{-1}$ der LSZ-Formel zu kompensieren. In erster Ordnung enthält das Matrixelement einen Operator $\phi(y)$, und ist wegen (23.13) ebenfalls Null. Das gleiche gilt für alle ungeraden Ordnungen $n = 1, 3, 5, \ldots$ der Störungsrechnung. Nur die geraden Ordnungen $n = 2, 4, \ldots$ können einen Beitrag zur Streuamplitude leisten.

Den führenden von Null verschiedenen Beitrag findet man in Störungsrechnung zweiter Ordnung:

$$\overline{S}^{(2)} \mathrel{\widehat{=}} \underbrace{2 \cdot}_{\overline{S}^{(2a)}} \underbrace{\begin{array}{ccccc} x_1 & & & & x_2 \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & & y & - - & z \\ & \nearrow & & \searrow & \\ x_3 & & & & x_4 \end{array}}_{\overline{S}^{(2a)}} + \underbrace{2 \cdot}_{\overline{S}^{(2b)}} \underbrace{\begin{array}{ccccc} x_1 & & & & x_2 \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & & y & - - & z \\ & \nearrow & & \searrow & \\ x_4 & & & & x_3 \end{array}}_{\overline{S}^{(2b)}} \tag{23.23}$$

Zur Unterscheidung von fermionischen Linien werden die Linien skalarer Felder gestrichelt gezeichnet.

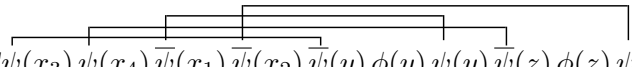
$$\begin{aligned} \overline{S}^{(2)} = \mathcal{U}_{\mathrm{S}} \prod_{j=1}^{4} \frac{\widetilde{S}^{-1}(k_j)}{N_j} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\Omega} \mathrm{d}^4x_j \frac{(-ig\sqrt{\hbar c})^2}{2!} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\Omega} \mathrm{d}^4y \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\Omega} \mathrm{d}^4z \cdot \\ \cdot {}^{r_4}\overline{u}^{\boldsymbol{k}_4\,r_3}\overline{u}^{\boldsymbol{k}_3\,r_2}u^{\boldsymbol{k}_2\,r_1}u^{\boldsymbol{k}_1} \exp\{-i(k_1x_1 + k_2x_2 - k_3x_3 - k_4x_4\} \\ \cdot \langle 0|\, T\psi(x_3)\,\psi(x_4)\,\overline{\psi}(x_1)\,\overline{\psi}(x_2)\,\overline{\psi}(y)\,\phi(y)\,\psi(y)\,\overline{\psi}(z)\,\phi(z)\,\psi(z)\,|0\rangle_c \end{aligned} \tag{23.24}$$

Es gibt nur eine Möglichkeit, die beiden Operatoren $\phi(y)$ und $\phi(z)$ zum Propagator zu kombinieren. Die Feldoperatoren der ein- und auslaufenden Nukleonen dürfen nicht miteinander kombiniert werden, sondern müssen mit den Operatoren des Wechselwirkungsterms kontrahiert werden, damit es genügend Propagatoren zur Kompensation der 4 Nullfaktoren $\widetilde{S}^{-1}(k_j)$ gibt. Außerdem sind die Kombinationsmöglichkeiten dadurch eingeschränkt, dass jeder Nukleonenpropagator aus einem Operator ψ und einen Operator $\overline{\psi}$ aufgebaut werden muss.

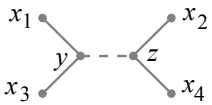
$\overline{\psi}(x_1)$ kann mit $\psi(y)$ oder $\psi(z)$ kontrahiert werden (2 Möglichkeiten), anschließend bleibt für die Kontraktion von $\overline{\psi}(x_2)$ nur noch eine Möglichkeit. $\psi(x_3)$ kann mit $\overline{\psi}(y)$ oder $\overline{\psi}(z)$ kontrahiert werden (2 Möglichkeiten), danach ist die Kontraktion von $\psi(x_4)$ eindeutig festgelegt. Es gibt insgesamt 4 von Null verschiedene Möglichkeiten der Kontraktion, von denen jeweils zwei in einem Graphen zusammengefasst wurden, weil sie offensichtlich den gleichen numerischen Wert haben, denn sie unterscheiden sich nur durch die Vertauschung der Vertizes y und z. Das ist ein Charakteristikum der Yukawa-Theorie (und – wie wir sehen werden – auch der Quantenelektrodynamik): Weil die drei Operatoren $\overline{\psi}\,\phi\,\psi$, die zu jedem Vertex gehören, sich nicht wechselseitig ersetzen können, ist der Symmetriefaktor jedes Graphen mit n Vertizes gleich $n!$. Denn die Permutationen der Vertizes sind die einzigen Modifikationen, welche die Topologie des Graphen nicht verändern. Der

Symmetriefaktor kompensiert in der Yukawa-Theorie (und in der QED) bei allen Diagrammen gerade den Faktor $1/n!$, der aus der Reihenentwicklung des Wechselwirkungsterms stammt.

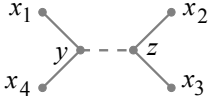
Wenn man die Feldoperatoren zu Propagatoren kontrahiert, muss man bei jeder Vertauschung zweier fermionischer Operatoren einen Faktor (-1) einfügen. Im Matrixelement



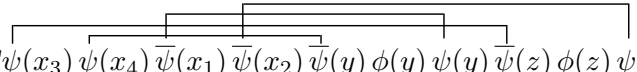
$$\langle 0|\, T\psi(x_3)\,\psi(x_4)\,\overline{\psi}(x_1)\,\overline{\psi}(x_2)\,\overline{\psi}(y)\,\phi(y)\,\psi(y)\,\overline{\psi}(z)\,\phi(z)\,\psi(z)\,|0\rangle_c \qquad (23.25a)$$



sind die Kontraktionen des Graphen mit den in Abschnitt 19.2.1 eingeführten Klammern markiert. Die Klammern überkreuzen sich an 7 Stellen. Außerdem müssen noch $\overline{\psi}(x_1)$ mit $\psi(y)$ und $\overline{\psi}(x_2)$ mit $\psi(z)$ getauscht werden, damit in allen Propagatoren rechts die Erzeugungs- und links die Vernichtungsoperatoren stehen. Also erfordert die Kontraktion des Matrixelements zu den Propagatoren des Diagramms 9 Vertauschungen fermionischer Operatoren, was einen Faktor (-1) ergibt.

Das Diagramm 

erfordert eine Vertauschung weniger:



$$\langle 0|\, T\psi(x_3)\,\psi(x_4)\,\overline{\psi}(x_1)\,\overline{\psi}(x_2)\,\overline{\psi}(y)\,\phi(y)\,\psi(y)\,\overline{\psi}(z)\,\phi(z)\,\psi(z)\,|0\rangle_c \qquad (23.25b)$$

Deshalb erhält $\overline{S}^{(2a)}$ einen Faktor (-1), $\overline{S}^{(2b)}$ jedoch nicht.

Anmerkung: Wären wir nicht von dem Matrixelement ausgegangen, das in (23.24) enthalten ist, sondern beispielsweise von

$$\langle 0|\, T\psi(x_4)\,\psi(x_3)\,\overline{\psi}(x_1)\,\overline{\psi}(x_2)\,\overline{\psi}(y)\,\phi(y)\,\psi(y)\,\overline{\psi}(z)\,\phi(z)\,\psi(z)\,|0\rangle_c\ ,$$

dann hätte sich für $\overline{S}^{(2b)}$ ein Faktor (-1) ergeben, für $\overline{S}^{(2a)}$ jedoch nicht. Dies ist lediglich ein Sonderfall der allgemeinen Unbestimmtheit von Matrixelementen in der Quantentheorie, die nur bis auf einen beliebigen Phasenfaktor festgelegt sind. Nur die Betragsquadrate der Matrixelemente, in diesem

Fall also $|\overline{S}^{(2a)} + \overline{S}^{(2b)}|^2$, können experimentell überprüft werden. Für das Betragsquadrat ist es gleichgültig, welcher Summand das positive und welcher Summand das negative Vorzeichen hat. Aber es ist wichtig und hat experimentell nachprüfbare Folgen, dass die Vorzeichen von $\overline{S}^{(2a)}$ und $\overline{S}^{(2b)}$ unterschiedlich sind.

Schließlich wird der in (23.21) definierte Umordnungs-Operator angewendet, und man erhält folgendes Ergebnis:

$$\begin{aligned}
\overline{S}^{(2)} = \prod_{j=1}^{4} \frac{1}{N_j} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\Omega} \mathrm{d}^4 x_j \, \frac{(-ig\sqrt{\hbar c})^2}{2!} \cdot \\
\cdot \exp\{-i(k_1 x_1 + k_2 x_2 - k_3 x_3 - k_4 x_4\} \cdot 2\, G(z-y) \cdot \Big(\\
- \Big({}^{r_3}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_3} \widetilde{S}^{-1}(k_3) S(x_3 - y)\, S(y - x_1) \widetilde{S}^{-1}(k_1)^{r_1} u^{\boldsymbol{k}_1} \Big) \cdot \\
\cdot \Big({}^{r_4}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_4} \widetilde{S}^{-1}(k_4) S(x_4 - z)\, S(z - x_2) \widetilde{S}^{-1}(k_2)^{r_2} u^{\boldsymbol{k}_2} \Big) + \\
+ \Big({}^{r_4}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_4} \widetilde{S}^{-1}(k_4) S(x_4 - y)\, S(y - x_1) \widetilde{S}^{-1}(k_1)^{r_1} u^{\boldsymbol{k}_1} \Big) \cdot \\
\cdot \Big({}^{r_3}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_3} \widetilde{S}^{-1}(k_3) S(x_3 - z)\, S(z - x_2) \widetilde{S}^{-1}(k_2)^{r_2} u^{\boldsymbol{k}_2} \Big) \Big)
\end{aligned} \tag{23.26}$$

Die Spinorfunktionen der vier letzten Zeilen gehören zu jeweils einer durchgehenden Fermionen-Linie eines Diagramms. Die Faktoren sind entsprechend Definition (23.21) angeordnet, und ergeben jeweils einen Spinorskalar. Denn S und $\widetilde{S}$ sind 4×4 Spinormatrizen – siehe (12.24) und (12.27) – , $\bar{u}$ ist ein Zeilenspinor, und u ist ein Spaltenspinor.

Genau wie bei der Berechnung der strukturell ähnlichen Diagramme (20.42) führt man nun geeignete Variablensubstitutionen ein, transformiert die Greensfunktionen S in den Wellenzahl-Raum, kürzt sie gegen die Nullfaktoren $\widetilde{S}^{-1}$, und erhält dabei mehrere Deltafunktionen. Wir wollen das nicht alles noch einmal durchexerzieren. In Kasten 20.2 auf Seite 431 haben wir die Regeln festgehalten, nach denen man die Streuamplitude ungeladener Klein-Gordon-Felder direkt im Energie-Impuls-Raum formulieren kann. Die Übertragung dieser Regeln auf die Yukawa-Wechselwirkung findet man in

Kasten 23.1 : **Feynman-Regeln im Energie-Impuls-Raum** für die Berechnung der Komponente $\overline{S}^{(n)}$ der Streuamplitude in der Yukawa-Theorie

A , **B** wie Kasten 20.1 auf Seite 430

B′ Jede Vertauschung zweier fermionischer Operatoren bei der Kombination zu Propagatoren ergibt einen Faktor (-1).

C Jeder Vertex hat die Struktur .

D Für die n Vertizes gibt es einen Faktor

$$\frac{1}{n!}(-ig\sqrt{\hbar c})^n \quad .$$

E Für die ein- und auslaufenden Linien mit Vierer-Wellenzahlen k_{ein} und k_{aus} gibt es einen Faktor

$$2\pi\Omega\,\delta\Big(\sum_{\text{ein}} k^0_{\text{ein}} - \sum_{\text{aus}} k^0_{\text{aus}}\Big)\,\delta_{\sum_{\text{ein}}\boldsymbol{k}_{\text{ein}}\,,\,\sum_{\text{aus}}\boldsymbol{k}_{\text{aus}}} \ .$$

F Für jede äußere Linie mit Wellenzahl k_j wird ein Faktor

$$\sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}_j}\Omega}}\cdot\begin{cases} {}^{r}u^{\boldsymbol{k}} \text{ für einlaufendes Nukleon} \\ {}^{r}\bar{u}^{\boldsymbol{k}} \text{ für auslaufendes Nukleon} \\ (-{}^{r}\bar{v}^{\boldsymbol{k}}) \text{ für einlaufendes Antinukleon} \\ (-{}^{r}v^{\boldsymbol{k}}) \text{ für auslaufendes Antinukleon} \\ 1 \text{ für ein- oder auslaufendes Boson} \end{cases}$$

in den Summanden eingetragen.

G Für jede innere Bosonen-Linie mit Wellenzahl k gibt es einen Faktor

$$\widetilde{G}(k) = \frac{i}{\hbar c(k^2 - M^2\frac{c^2}{\hbar^2} + i\epsilon')} \ ,$$

für jede innere Fermionen-Linie mit Wellenzahl k einen Faktor

$$\widetilde{S}(k) \overset{(12.24)}{=} \frac{i(\gamma^\nu k_\nu + m\frac{c}{\hbar})}{k^2 - m^2\frac{c^2}{\hbar^2} + i\epsilon'} \ .$$

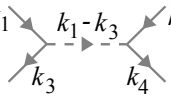
H wie Kasten 20.2 auf Seite 431

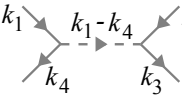
J Es ist der Umordnungs-Operator $\mathcal{U}_{\text{S}} =$ (23.21) einzutragen.

K Innere Fermionen-Linien müssen *immer* als Teilchen (nicht als Antiteilchen) interpretiert werden.

Kasten 23.1 auf der vorherigen Seite. Die neue Regel K wird in Abschnitt 23.1.4 begründet.

Anwendung der Regeln von Kasten 23.1 ergibt für die Streuung zwischen zwei Nukleonen (nicht Antinukleonen), die mit Wellenzahlen k_1 und k_2 einlaufen:

$$2 \cdot$$ 

$$+\, 2 \cdot$$ 

$$\widehat{=}\ \overline{S}^{(2)} = \frac{(-ig\sqrt{\hbar c})^2}{2!}$$
$$\cdot \left(\prod_{j=1}^{4} \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}_j}\Omega}} \right) 2\pi\Omega\, \delta\Big(k_1^0 + k_2^0 - k_3^0 - k_4^0\Big)\, \delta_{(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2),(\boldsymbol{k}_3+\boldsymbol{k}_4)}$$
$$\cdot \Bigg(-2\, ({}^{r_3}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_3\, r_1}u^{\boldsymbol{k}_1})({}^{r_4}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_4\, r_2}u^{\boldsymbol{k}_2})\, \frac{i}{\hbar c\Big((k_1-k_3)^2 - M^2\frac{c^2}{\hbar^2} + i\epsilon'\Big)}$$
$$+\, 2\, ({}^{r_4}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_4\, r_1}u^{\boldsymbol{k}_1})({}^{r_3}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_3\, r_2}u^{\boldsymbol{k}_2})\, \frac{i}{\hbar c\Big((k_1-k_4)^2 - M^2\frac{c^2}{\hbar^2} + i\epsilon'\Big)} \Bigg) \tag{23.27}$$

Hier wurde der Umordnungs-Operator (23.21) bereits angewendet und wird deshalb nicht nochmals explizit ausgeschrieben.

Die vier Spinorprodukte ${}^{r_\alpha}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_\alpha\, r_\beta}u^{\boldsymbol{k}_\beta}$ werden in Anhang A.21 berechnet. Dort wird gezeigt, dass im nichtrelativistischen Grenzfall folgende Näherung gilt:

$${}^{r}\bar{u}^{\boldsymbol{f}\ s}u^{\boldsymbol{k}} \approx 2mc^2\, \delta_{rs} \tag{23.28a}$$
$${}^{r}\bar{v}^{\boldsymbol{f}\ s}v^{\boldsymbol{k}} \approx -2mc^2\, \delta_{rs} \tag{23.28b}$$
$${}^{r}\bar{u}^{\boldsymbol{f}\ s}v^{\boldsymbol{k}} \approx 0 \tag{23.28c}$$
$${}^{r}\bar{v}^{\boldsymbol{f}\ s}u^{\boldsymbol{k}} \approx 0 \tag{23.28d}$$
$$\text{falls } |c\hbar\boldsymbol{f}| \ll mc^2 \text{ und } |c\hbar\boldsymbol{k}| \ll mc^2.$$

Im nichtrelativistischen Grenzfall ist der Nukleonenspin an jedem Vertex erhalten. Wenn die Nukleonen mit unterschiedlichem Spin einlaufen ($r_1 \neq r_2$), dann verschwindet der zweite Summand in der Streuamplitude. Denn dieser kam ja nur dadurch zustande, dass man das auslaufende Teilchen k_3 in

(23.26) entweder durch den Propagator $S(x_3 - y)$ oder – mit gleichem Recht – durch den Propagator $S(x_3 - z)$ beschreiben konnte. Wenn wir aber definieren dass dasjenige der beiden auslaufenden Nukleonen, das den Spin r_1 hat, den Namen k_3 bekommt, dann muss das zweite Diagramm in (23.27) gestrichen werden. Dadurch vereinfacht sich die Streuamplitude zu

$$2 \cdot \quad \widehat{=} \; \overline{S}^{(2)} \approx \frac{ig^2\, 4m^2c^4\, \delta_{r_3 r_1}\, \delta_{r_4 r_2}}{(k_1 - k_3)^2 - M^2 \frac{c^2}{\hbar^2} + i\epsilon'}$$

$$\cdot \left(\prod_{j=1}^{4} \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}_j}\Omega}} \right) 2\pi\Omega\, \delta\left(k_1^0 + k_2^0 - k_3^0 - k_4^0\right) \delta_{(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2),(\boldsymbol{k}_3+\boldsymbol{k}_4)}$$

$$\text{falls } |c\hbar\boldsymbol{k}_j| \ll mc^2 \text{ für } j = 1, 2 \text{ und } r_1 \neq r_2 \; . \tag{23.29}$$

23.1.2 Antinukleon-Antinukleon-Streuung

In den bisher betrachteten Diagrammen im Energie-Impuls-Raum war die Richtung des dreieckigen Pfeils identisch mit der Richtung des Impulses der Teilchen. Im Fall von Antiteilchen ist es jedoch üblich, den dreieckigen Pfeil im Diagramm entgegengesetzt zum Impuls zu zeichnen.

Das Diagramm kann demnach auf verschiedene Weisen interpretiert werden:

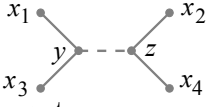
- Ein Nukleon läuft von links zum Vertex, wechselwirkt dort mit einem Boson, und läuft dann nach rechts weiter.
- Ein Antinukleon läuft von rechts zum Vertex, wechselwirkt dort mit einem Boson, und läuft dann nach links weiter.
- Ein Nukleon läuft von links zum Vertex, und ein Antinukleon läuft von rechts zum Vertex. Am Vertex vernichten sich Nukleon und Antinukleon zu einem Boson, das nach oben ausläuft.
- Ein Boson läuft von oben zum Vertex. Dort zerfällt es durch Paarbildung in ein Nukleon, das nach rechts ausläuft, und in ein Antinukleon, das nach links ausläuft.

Um eine eindeutige Interpretation sicher zu stellen, kann man die Richtung der Impulse der Antinukleonen durch zusätzliche Pfeile an den äußeren Lini-

en (nicht an den inneren Linien, wie unten begründet wird) der Diagramme andeuten.

Nach Regel C von Kasten 23.1 zeigt *immer* ein Fermionen-Pfeil zum Vertex hin und ein Fermionen-Pfeil vom Vertex fort. Es gibt keine Diagramme, in denen beide Fermionen-Pfeile zum Vertex hin gerichtet oder beide Pfeile vom Vertex weg gerichtet sind. Diese Regel der Yukawa-Theorie spiegelt die Erfahrungstatsache wieder, dass Atomkerne, die aus mehreren Nukleonen zusammengesetzt sind, nicht in Bosonen zerstrahlen.

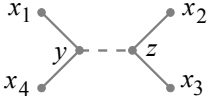
Obwohl die Feynman-Graphen im Zeit-Orts-Raum für die Streuung eines Antinukleons an einem anderen Antinukleon genau so aussehen wie für die Streuung eines Nukleons an einem anderen Nukleon, unterscheiden sich die Matrixelemente für Antinukleon-Antinukleon-Streuung von (23.25), und erfordern andere Kontraktionen.

Um den Graphen 

für Antinukleon-Antinukleon-Streuung aus dem Matrixelement

$$\langle 0|\, T\overline{\psi}(x_3)\,\overline{\psi}(x_4)\,\psi(x_1)\,\psi(x_2)\,\overline{\psi}(y)\,\phi(y)\,\psi(y)\,\overline{\psi}(z)\,\phi(z)\,\psi(z)\,|0\rangle_c \tag{23.30a}$$

zu bilden, sind 11 Vertauschungen fermionischer Operatoren erforderlich, was einen Faktor (-1) ergibt.

Das Diagramm 

erfordert eine Vertauschung weniger:

$$\langle 0|\, T\overline{\psi}(x_3)\,\overline{\psi}(x_4)\,\psi(x_1)\,\psi(x_2)\,\overline{\psi}(y)\,\phi(y)\,\psi(y)\,\overline{\psi}(z)\,\phi(z)\,\psi(z)\,|0\rangle_c \tag{23.30b}$$

Das ergibt einen Faktor (+1). Deshalb unterscheidet sich

$$2 \cdot \quad + 2 \cdot \quad \widehat{=} \overline{S}^{(2)} = \frac{(-ig\sqrt{\hbar c})^2}{2!} \cdot$$

$$\cdot \left(\prod_{j=1}^{4} \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}_j}\Omega}} \right) 2\pi\Omega\, \delta\Big(k_1^0 + k_2^0 - k_3^0 - k_4^0\Big)\, \delta_{(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2),(\boldsymbol{k}_3+\boldsymbol{k}_4)} \cdot$$

$$\cdot \Bigg(- 2\, ({}^{r_3}\bar{v}^{\boldsymbol{k}_3}\, {}^{r_1}v^{\boldsymbol{k}_1})({}^{r_4}\bar{v}^{\boldsymbol{k}_4}\, {}^{r_2}v^{\boldsymbol{k}_2})\, \frac{i}{\hbar c\Big((k_1 - k_3)^2 - M^2\frac{c^2}{\hbar^2} + i\epsilon'\Big)} +$$

$$+ 2\, ({}^{r_4}\bar{v}^{\boldsymbol{k}_4}\, {}^{r_1}v^{\boldsymbol{k}_1})({}^{r_3}\bar{v}^{\boldsymbol{k}_3}\, {}^{r_2}v^{\boldsymbol{k}_2})\, \frac{i}{\hbar c\Big((k_1 - k_4)^2 - M^2\frac{c^2}{\hbar^2} + i\epsilon'\Big)} \Bigg) \qquad (23.31)$$

von (23.27) durch nichts anderes, als dass alle Spinoren $\bar{u}$ und u ersetzt sind durch $\bar{v}$ und v. In der nichtrelativistischen Näherung bleibt wegen (23.28) der Spin der Antinukleonen an jedem Vertex erhalten. Wenn die Antinukleonen mit unterschiedlichem Spin einlaufen, dann verschwindet der zweite Summand aus dem im Anschluss an (23.28) genannten Grund. Weil sich die beiden negativen Vorzeichen im Produkt

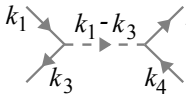
$$({}^{r_3}\bar{v}^{\boldsymbol{k}_3}\, {}^{r_1}v^{\boldsymbol{k}_1})({}^{r_4}\bar{v}^{\boldsymbol{k}_4}\, {}^{r_2}v^{\boldsymbol{k}_2}) \overset{(23.28)}{\approx} (-2mc^2)^2\, \delta_{r_3 r_1}\, \delta_{r_4 r_2} \qquad (23.32)$$

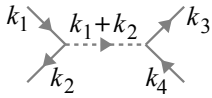
falls $|c\hbar\boldsymbol{k}_j| \ll mc^2$ für $j = 1, 2, 3, 4$

kompensieren, erhält man für die elastische Streuung von Antinukleonen an Antinukleonen in nichtrelativistischer Näherung exakt die gleiche Amplitude (23.29) wie für die elastische Streuung von Nukleonen an Nukleonen.

23.1.3 Nukleon-Antinukleon-Streuung

Als dritte Variante betrachten wir die Streuung eines Nukleons, das mit Wellenzahl k_1 einläuft und mit Wellenzahl k_3 ausläuft, an einem Antinukleon, das mit Wellenzahl k_2 einläuft und mit Wellenzahl k_4 ausläuft. Dieser Vorgang kann in zwei Graphen zusammengefasst werden:

$$\overline{S}^{(2)} \mathrel{\widehat{=}} 2 \cdot$$ 

$$+\, 2 \cdot$$ 

(23.33)

Man beachte, dass die beiden Graphen sich nur durch die Beschriftungen (und den Begleittext) unterscheiden, jedoch nicht durch die Linien und Pfeile. Im ersten Graphen schreitet die Zeit von oben nach unten fort. Ein Nukleon läuft mit Wellenzahl k_1 ein, emittiert ein Boson, und läuft mit Wellenzahl k_3 aus. Ein Antinukleon läuft mit Wellenzahl k_2 ein, absorbiert ein Boson, und läuft mit Wellenzahl k_4 aus. Im zweiten Diagramm läuft die Zeit von links nach rechts. Ein Nukleon mit Wellenzahl k_1 und ein Antinukleon mit Wellenzahl k_2 zerstrahlen zu einem Boson, das durch Paarbildung in ein Nukleon mit Wellenzahl k_3 und ein Antinukleon mit Wellenzahl k_4 zerfällt.

Das einlaufende Nukleon mit Wellenzahl k_1 kann am einen oder am anderen Vertex kontaktieren (2 Möglichkeiten), anschließend ist der Rest der beiden Graphen eindeutig festgelegt. Nach den Regeln von Kasten 23.1 ist die Wahrscheinlichkeitsamplitude

$$\begin{aligned}
\overline{S}^{(2)} &= 2 \cdot \frac{(-ig\sqrt{\hbar c})^2}{2!} \Big(\prod_{j=1}^{4} \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}_j}\Omega}} \Big) \cdot \\
&\cdot\, 2\pi\Omega\, \delta\Big(k_1^0 + k_2^0 - k_3^0 - k_4^0\Big)\, \delta_{(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2),(\boldsymbol{k}_3+\boldsymbol{k}_4)} \cdot \\
&\cdot \Bigg(({}^{r_3}\overline{u}^{\boldsymbol{k}_3\, r_1}u^{\boldsymbol{k}_1})({}^{r_2}\overline{v}^{\boldsymbol{k}_2\, r_4}v^{\boldsymbol{k}_4}) \frac{i}{\hbar c\Big((k_1-k_3)^2 - M^2\frac{c^2}{\hbar^2} + i\epsilon'\Big)} - \\
&\quad - ({}^{r_2}\overline{v}^{\boldsymbol{k}_2\, r_1}u^{\boldsymbol{k}_1})({}^{r_3}\overline{u}^{\boldsymbol{k}_3\, r_4}v^{\boldsymbol{k}_4}) \frac{i}{\hbar c\Big((k_1+k_2)^2 - M^2\frac{c^2}{\hbar^2} + i\epsilon'\Big)} \Bigg) .
\end{aligned} \tag{23.34}$$

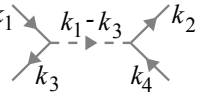
Zur Kontrolle der Vorzeichen gehen wir aus vom Matrixelement

$$\langle 0|\, T\psi(x_3)\, \overline{\psi}(x_4)\, \overline{\psi}(x_1)\, \psi(x_2)\, \overline{\psi}(y)\, \phi(y)\, \psi(y)\, \overline{\psi}(z)\, \phi(z)\, \psi(z)\, |0\rangle_c \ ,$$

das unter Berücksichtigung von (23.17) konstruiert wurde. Man erhält die beiden Graphen durch die Kontraktionen

$$\langle 0|\, T\psi(x_3)\,\overline{\psi}(x_4)\,\overline{\psi}(x_1)\,\psi(x_2)\,\overline{\psi}(y)\,\phi(y)\,\psi(y)\,\overline{\psi}(z)\,\phi(z)\,\psi(z)\,|0\rangle_c$$

$$\Longrightarrow\; 2\cdot$$

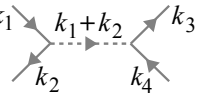


(23.35a)

und

$$\langle 0|\, T\psi(x_3)\,\overline{\psi}(x_4)\,\overline{\psi}(x_1)\,\psi(x_2)\,\overline{\psi}(y)\,\phi(y)\,\psi(y)\,\overline{\psi}(z)\,\phi(z)\,\psi(z)\,|0\rangle_c$$

$$\Longrightarrow\; 2\cdot$$



. (23.35b)

Das erste Matrixelement enthält 4 Kreuzungen der Kontraktionsklammern. Außerdem muss $\overline{\psi}(x_1)$ mit $\psi(y)$ und $\psi(x_2)$ mit $\overline{\psi}(y)$ getauscht werden, um die Propagatoren des Graphen zu bilden. Die 6 Vertauschungen fermionischer Operatoren ergeben den Faktor (+1).

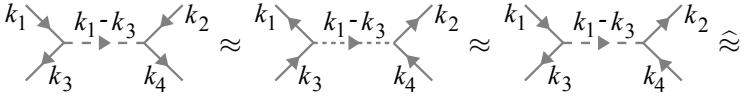
Das zweite Matrixelement enthält 1 Kreuzung der Kontraktionsklammern. Außerdem muss $\overline{\psi}(x_1)$ mit $\psi(y)$ und $\psi(x_2)$ mit $\overline{\psi}(y)$ getauscht werden, um die Propagatoren des Graphen zu bilden. Die 3 Vertauschungen fermionischer Operatoren ergeben den Faktor (-1).

Im niederenergetischen Grenzfall sind die Spinorprodukte des zweiten Summanden laut (23.28) Null. Das erscheint im ersten Moment überraschend. Wir wissen, dass ein Proton und ein Antiproton, die mit beliebig kleiner Energie aufeinander zu laufen, sich wechselseitig vernichten werden. Sie zerstrahlen aber nicht in ein Yukawa-Boson, sondern in ein Photon, d.h. wir müssen die Quantenelektrodynamik in die Betrachtung einbeziehen, um die Wechselwirkung zwischen den Nukleonen vollständig zu beschreiben. Allerdings enthält – wie wir später sehen werden – die Yukawa-Theorie die Möglichkeit der Zerstrahlung eines Nukleons und eines Antinukleons in *zwei* Bosonen.

Der erste Summand, der die elastische Streuung von Nukleon und Antinukleon beschreibt, erhält wegen

$$({}^{r_3}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_3\,r_1}u^{\boldsymbol{k}_1})({}^{r_2}\bar{v}^{\boldsymbol{k}_2\,r_4}v^{\boldsymbol{k}_4}) \overset{(23.28)}{\approx} -(2mc^2)^2\,\delta_{r_3r_1}\,\delta_{r_2r_4} \qquad (23.36)$$
$$\text{falls } |c\hbar\boldsymbol{k}_j| \ll mc^2 \text{ für } j=1,2,3,4$$

gegenüber den zuvor betrachteten Streuereignissen das umgekehrte Vorzeichen. Das wird dadurch kompensiert, dass dieser Summand aufgrund der geraden Zahl von Vertauschungen fermionischer Operatoren ein positives Vorzeichen hat, während der entsprechende Summand bei der Streuung von Nukleonen an Nukleonen oder der Streuung von Antinukleonen an Antinukleonen eine ungerade Anzahl von Operatorvertauschungen erforderte und deshalb ein negatives Vorzeichen hatte. Insgesamt wird also auch die Streuung von Nukleonen an Antinukleonen in niederenergetischer Näherung durch (23.29) beschrieben. Zusammenfassend gilt für die drei Möglichkeiten der Streuung von (Anti-)Nukleonen nach der Yukawa-Theorie in nichtrelativistischer Näherung



$$\approx \frac{ig^2\,2m^2c^4\,\delta_{r_3r_1}\,\delta_{r_4r_2}}{(k_1-k_3)^2 - M^2\frac{c^2}{\hbar^2} + i\epsilon'}\left(\prod_{j=1}^{4}\sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}_j}\Omega}}\right)$$
$$\cdot\; 2\pi\Omega\,\delta\Big(k_1^0+k_2^0-k_3^0-k_4^0\Big)\,\delta_{(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2),(\boldsymbol{k}_3+\boldsymbol{k}_4)}$$
$$\text{falls } |c\hbar\boldsymbol{k}_j| \ll mc^2 \text{ für } j=1,2\,. \qquad (23.37)$$

Alle drei Diagramme haben den gleichen Wert und das gleiche Vorzeichen. Man sieht der Gleichung aber nicht ohne weiteres an, ob es sich in allen drei Fällen um eine anziehende oder in allen drei Fällen um eine abstoßende Wechselwirkung handelt. Natürlich ist ersteres der Fall, weil Yukawa eine anziehende Wechselwirkung konstruieren wollte. Den Beweis dafür, dass die Yukawa-Wechselwirkung tatsächlich anziehend ist, werden wir erst bei der Besprechung der Quantenelektrodynamik nachliefern, wenn wir (23.37) mit (24.73) vergleichen.

23.1.4 Innere Fermionen-Linien

Bisher haben wir Diagramme berechnet, deren innere Linie eine Bosonen-Linie ist. Mehrdeutigkeiten treten auf, sobald ein Diagramm innere Fermionenlinien enthält. Das einfachste Beispiel eines Streudiagramms mit innerer Fermionenlinie findet man bei der Zerstrahlung eines Nukleons (das mit Wellenzahl k_1 einläuft) und eines Antinukleons (das mit Wellenzahl k_2 einläuft) in zwei Bosonen (die mit Wellenzahl k_3 und k_4 auslaufen), siehe linkes Diagramm:

(23.38)

Dies Diagramm kann auf zwei Arten interpretiert werden. Entweder bewegt sich ein Nukleon nach y, emittiert ein Boson, bewegt sich weiter nach z, und zerstrahlt dort mit einem Antinukleon in das Boson mit Wellenzahl k_4. Oder ein Antinukleon emittiert bei z ein Boson, bewegt sich dann weiter nach y, wo es mit einem Nukleon in das Boson mit Wellenzahl k_3 zerstrahlt. Die beiden Interpretationen führen aus zwei Gründen zu unterschiedlichen Ergebnissen. Erstens enthält die Wahrscheinlichkeitsamplitude für den Streuvorgang das Matrixelement

$$\langle 0|\, T\phi(x_3)\,\phi(x_4)\,\overline{\psi}(x_1)\,\psi(x_2)\,\overline{\psi}(y)\,\phi(y)\,\psi(y)\,\overline{\psi}(z)\,\phi(z)\,\psi(z)\,|0\rangle\ ,$$

dessen Fermionen eindeutig in der eingezeichneten Weise kontrahiert werden müssen. Wenn die innere Linie als Antiteilchen interpretiert wird, das sich von z nach y bewegt, dann haben die Operatoren $\overline{\psi}(y)$ und $\psi(z)$ bereits die richtige Reihenfolge, da der Erzeugungsoperator rechts stehen muss. Wenn man die innere Linie aber als Teilchen interpretiert, das sich von y nach z bewegt, dann müssen die Operatoren $\overline{\psi}(y)$ und $\psi(z)$ vertauscht werden, was zu einem Vorzeichenwechsel führt.

Zweitens muss nach Regel G von Kasten 23.1 für die innere Linie der Propagator

$$\widetilde{S}(k) \overset{(12.24)}{=} \frac{i(\gamma^\nu k_\nu + m\frac{c}{\hbar})}{k^2 - m^2\frac{c^2}{\hbar^2} + i\epsilon'}$$

eingesetzt werden, der in der Wellenzahl k linear ist. Für ein Antinukleon, das sich von z nach y bewegt hat der Impuls das umgekehrte Vorzeichen wie für ein Nukleon, das sich von y nach z bewegt. Dieser Unterschied im Vorzeichen wird durch den Vorzeichenwechsel wegen Vertauschung der Operatoren im Matrixelement nicht kompensiert, weil das Vorzeichen von $mc/\hbar$ nicht wechselt.

Zweites Beispiel: Wenn man eine Störungsrechnung für den Propagator des Yukawa-Bosons durchführt, so wie wir das in (20.47) für den Bosonen-Propagator der ψ^4-Theorie gemacht haben, dann findet man in 2. Ordnung das rechte Diagramm in (23.38). Auch dies Diagramm erlaubt mehrere Lesarten. Erste Lesart: Das Boson bewegt sich mit Wellenzahl k_1 von links nach y, zerfällt durch Paarbildung in ein Fermion und ein Anti-Fermion, die sich dann bei z wiederum in ein Boson vernichten, das mit Wellenzahl k_1 nach rechts ausläuft. Zweite Lesart: Ein Boson bewegt sich von links nach y, gleichzeitig bewegt sich ein Fermion von z nach y. Bei y absorbiert das Fermion das Boson, bewegt sich nach z, und emittiert dort ein Boson, das mit Wellenzahl k_1 nach rechts ausläuft. Dritte Lesart: Ein Boson bewegt sich von links nach y, gleichzeitig bewegt sich ein Anti-Fermion von z nach y. Bei y absorbiert das Anti-Fermion das Boson, bewegt sich nach z, und emittiert dort ein Boson, das mit Wellenzahl k_1 nach rechts ausläuft.

Bei der Berechnung des Diagramms muss ein Matrixelement zu Propagatoren kontrahiert werden, und dafür gibt es je nach Lesart unvereinbare Möglichkeiten:

$$\langle 0|\, T\phi(x_1)\, \phi(x_2)\, \overline{\psi}(y)\, \phi(y)\, \psi(y)\, \overline{\psi}(z)\, \phi(z)\, \psi(z)\, |0\rangle$$

Die Kontraktionsklammern der Fermionen sind für alle drei Lesarten gleich. Es gibt keine Überkreuzungen fermionischer Klammern. Bei Lesart Eins (ein Nukleon und ein Antinukleon laufen von y nach z) müssen die Operatoren beider Fermionenpaare getauscht werden, weil die Erzeugungsoperatoren rechts von den Vernichtungsoperatoren stehen müssen. Die 2 Vertauschungen ergeben insgesamt den Faktor (+1). Lesart Zwei (ein Nukleon läuft von z nach y, und ein Nukleon läuft von y nach z) erfordert nur die Vertauschung von $\overline{\psi}(y)$ mit $\psi(z)$, und ergibt den Faktor (-1). Lesart Drei (ein Antinukleon

läuft von z nach y, und ein Antinukleon läuft von y nach z) erfordert nur die Vertauschung von $\overline{\psi}(z)$ mit $\psi(y)$, und ergibt wiederum den Faktor (-1).

Die Graphen wurden nicht frei erfunden, sondern sie sind abstrahierende Darstellungen algebraischer Formeln, die wir nach den Regeln von Kasten 23.1 wieder in algebraische Formeln zurückverwandeln. Wenn es dabei Mehrdeutigkeiten gibt, dann muss man nochmal einen Schritt zurückgehen, und durch algebraische Berechnung ab initio klären, welches denn nun die korrekten Formeln sind. Diese langwierige Arbeit ersparen wir uns, und entnehmen ohne Beweis der Literatur das einfache Ergebnis:

Satz: Die Berechnungen von Graphen der Diracfelder stimmen dann und nur dann mit den algebraischen Rechnungen überein, wenn innere Fermionenlinien ausnahmslos als Teilchen (nicht als Antiteilchen) betrachtet werden. (23.39)

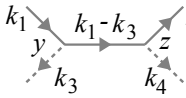
Diese Regel wurde unter K in Kasten 23.1 eingetragen. Aus dieser Regel kann man eine allgemeine Aussage ableiten: Wenn ein Graph eine Schleife enthält, die aus n fermionischen Linien und Null bosonischen Linien besteht, dann enthält das Matrixelement den Faktor

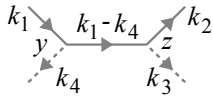
$$\langle 0| \ldots \overline{\overline{\psi}(y_1)\, \overline{\psi(y_1)\, \overline{\psi}(y_2)} \ldots \overline{\psi(y_{n-1})\, \overline{\psi}(y_n)}\, \psi(y_n)} \ldots |0\rangle \ .$$

Die Kontraktion dieser $2 \times n$ fermionischen Operatoren zu einer Schleife von n Teilchen (und Null Antiteilchen) steuert stets einen Faktor (-1) zum Gesamtergebnis bei, weil immer ein Operatorpaar $\overline{\psi}\,\psi$ umgedreht werden muss, um die Schleife zu schließen.

23.1.5 Zerstrahlung in Bosonen

Die Zerstrahlung eines Nukleons (das mit Wellenzahl k_1 einläuft) und eines Antinukleons (das mit Wellenzahl k_2 einläuft) in zwei Bosonen (die mit Wellenzahl k_3 und k_4 auslaufen), wurde im vorigen Abschnitt bereits als Beispiel für einen Graphen mit innerer Fermionenlinie erwähnt. Jetzt wollen wir diesen Vorgang genauer untersuchen.

$$\overline{S}^{(2)} \mathrel{\widehat{=}} 2 \cdot$$ 

$$+\, 2 \cdot$$ 

(23.40)

Der an der inneren Linie eingetragene Impuls $\hbar(\boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_3)$ beziehungsweise $\hbar(\boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_4)$ wird entsprechend Regel K in Kasten 23.1 parallel (nicht antiparallel) zum eingezeichneten dreieckigen Pfeil gelesen, weil die innere Linie als Teilchen (nicht Antiteilchen) interpretiert werden muss.

Das mit k_1 einlaufende Teilchen kann am Vertex y oder z andocken:

$$\langle 0|\, T\phi(x_3)\, \phi(x_4)\, \overline{\psi}(x_1)\, \psi(x_2)\, \overline{\psi}(y)\, \phi(y)\, \psi(y)\, \overline{\psi}(z)\, \phi(z)\, \psi(z)\, |0\rangle_c$$

$$\langle 0|\, T\phi(x_3)\, \phi(x_4)\, \overline{\psi}(x_1)\, \psi(x_2)\, \overline{\psi}(y)\, \phi(y)\, \psi(y)\, \overline{\psi}(z)\, \phi(z)\, \psi(z)\, |0\rangle_c$$

Die erste Variante der möglichen Kontraktionen der fermionischen Operatoren enthält 3 Kreuzungen der Kontraktionsklammern. Außerdem müssen alle 3 kontrahierten Operatorpaare umgedreht werden, damit der Erzeugungsoperator stets rechts steht. Also erhält man insgesamt den Faktor $(+1)$. Bei der zweiten Variante gibt es keine Überkreuzung der Kontraktionsklammern, und es müssen nur 2 Operatorpaare umgedreht werden. Denn das Operatorpaar $\psi(y)\,\overline{\psi}(z)$ hat bereits die richtige Stellung, weil sich in diesem Fall das virtuelle innere Fermion von z nach y bewegt. Also gibt es auch in diesem Fall einen Faktor $(+1)$, und beide Möglichkeiten können zu einem Graphen mit dem Symmetriefaktor 2 zusammengefasst werden. Wie bei allen Diagrammen der Yukawa-Theorie (und der QED) beruht der Symmetriefaktor (hier 2!) allein auf der Permutation der Vertizes, und wird im Folgenden durch den Faktor 1/2! aufgrund der Taylorentwicklung des Wechselwirkungsterms kompensiert. Das liegt daran, dass – anders als bei der ψ^s-Wechselwirkung – die drei Operatoren $\overline{\psi}(y)\,\phi(y)\,\psi(y)$ eines Wechselwirkungsterms sich nicht gegenseitig ersetzen können.

Das auslaufende Boson k_3 kann durch Kontraktion von $\phi(x_3)$ mit $\phi(y)$ oder mit $\phi(z)$ gebildet werden, wonach die Kontraktion des zweiten auslaufenden Bosons eindeutig ist. Einen Faktor (-1) gibt es aufgrund von Regel F in Kasten (23.1) für das einlaufende Antinukleon. Also erhält man in zweiter Ordnung der Störungsrechnung folgende Wahrscheinlichkeitsamplitude für

die Zerstrahlung eines Nukleons und eines Antinukleons in zwei Bosonen:

$$\begin{aligned}\overline{S}^{(2)} &\overset{(23.40)}{=} -2 \cdot \frac{(-ig\sqrt{\hbar c})^2}{2!} \\ &\cdot \left(\prod_{j=1}^{4} \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}_j}\Omega}} \right) 2\pi\Omega\, \delta\Big(k_1^0 + k_2^0 - k_3^0 - k_4^0\Big)\, \delta_{(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2),(\boldsymbol{k}_3+\boldsymbol{k}_4)} \\ &\cdot {}^{r_2}\overline{v}^{\boldsymbol{k}_2} \left(\frac{i\Big(\gamma^\nu (k_1 - k_3)_\nu + m\frac{c}{\hbar}\Big)}{(k_1-k_3)^2 - m^2\frac{c^2}{\hbar^2} + i\epsilon'} + \frac{i\Big(\gamma^\nu (k_1 - k_4)_\nu + m\frac{c}{\hbar}\Big)}{(k_1-k_4)^2 - m^2\frac{c^2}{\hbar^2} + i\epsilon'} \right)^{r_1} u^{\boldsymbol{k}_1} \end{aligned} \tag{23.41}$$

24 Quantenelektrodynamik

Die Quantenelektrodynamik beschreibt die Wechselwirkung der elektrisch geladenen elementaren Felder mit ihrem Eichfeld. Das

$$\text{Photon} = \gamma$$

ist das Quant des Eichfelds. Man kennt die folgenden elektrisch geladenen elementaren Felder:

Die drei Leptonen

$$\text{Elektron} = e = e^- \quad \text{Myon} = \mu = \mu^- \quad \text{Tauon} = \tau = \tau^-$$

und ihre drei Antiteilchen

$$\text{Positron} = e^+ \quad \text{Anti-Myon} = \mu^+ \quad \text{Anti-Tauon} = \tau^+$$

sowie die sechs Quarks

$$\text{Up} = u \quad \text{Down} = d \quad \text{Strange} = s$$
$$\text{Charm} = c \quad \text{Bottom} = b \quad \text{Top} = t$$

und ihre sechs Antiteilchen

$$\text{Anti-Up} = \bar{u} \quad \text{Anti-Down} = \bar{d} \quad \text{Anti-Strange} = \bar{s}$$
$$\text{Anti-Charm} = \bar{c} \quad \text{Anti-Bottom} = \bar{b} \quad \text{Anti-Top} = \bar{t}$$

und die beiden Vektorbosonen

$$W^+ \qquad W^- \ .$$

Das Photon, das W^+, und das W^- haben keine Antiteilchen.[1] Das Photon

[1] Manche Leute sagen: Das Photon ist sein eigenes Antiteilchen. Das ist eine Frage der Definition. Wenn man den Begriff Teilchen/Antiteilchen so *definiert*, dass Teilchen und Antiteilchen durch die C-Transformation (siehe Abschnitt 11.2.3) auseinander hervorgehen, dann ist das Photon tatsächlich das Antiteilchen des Photons, und das

trägt keine elektrische Ladung. Die drei Leptonen und das W^- haben die Ladung

$$-e = -1,6 \cdot 10^{-19}\mathrm{C} \ ,$$

die drei Antileptonen und das W^+ haben die Ladung

$$+e = +1,6 \cdot 10^{-19}\mathrm{C} \ .$$

Die Quarks u, c, t haben die elektrische Ladung $+2e/3$, die Quarks d, s, b haben die elektrische Ladung $-e/3$. Ihre Antiteilchen haben jeweils die umgekehrten Ladungen.

Achtung: Anders als wir definieren etwa 50 % der Autoren $+e = -1,6 \cdot 10^{-19}\mathrm{C}$.

Die drei Leptonen haben gleiche Ladung und gleichen Spin, aber unterschiedliche Massen und elektrische und magnetische Momente. Auch die sechs Quarks haben unterschiedliche Massen. Die Ruhemasse des Photons, des Eichbosons der elektromagnetischen Wechselwirkung, ist Null, während die Eichbosonen W^+ und W^- der schwachen Wechselwirkung eine endliche Ruhemasse haben.

Die Leptonen und Quarks sind die Quanten von Diracfeldern, haben also den Spin $\hbar/2$. Die Photonen sowie W^+ und W^- haben den Spin $\hbar$.

Alle genannten Teilchen werden als elementare Teilchen ohne Substruktur betrachtet.

24.1 Feynman-Regeln

Im vorigen Kapitel wurden in Kasten 23.1 die Regeln aufgelistet, mit denen S-Matrixelemente der Yukawa-Theorie berechnet werden können. Zur Übertragung dieser Regeln auf die Quantenelektrodynamik müssen sämtliche

W^+ ist das Antiteilchen des W^-. Wenn man dagegen definiert, dass Teilchen und Antiteilchen paarweise beim Zerfall eines Photons erzeugt werden können, und dass Teilchen und Antiteilchen paarweise zu einem Photon vernichtet werden können, dann ist der Begriff von Teilchen und Antiteilchen nur auf Fermionen anwendbar. Weder Photonen, noch W^+/W^--Bosonen, noch Z^0-Bosonen, noch Gluonen, noch Higgs-Bosonen werden paarweise beim Zerfall von Photonen erzeugt, noch können sie paarweise zu Photonen vernichtet werden. In diesem Buch geben wir letzterer Definition von Teilchen/Antiteilchen den Vorzug.

Kasten 24.1 : **Feynman-Regeln im Energie-Impuls-Raum** für die Berechnung der Komponente $\overline{S}^{(n)}$ der Streuamplitude in der Quantenelektrodynamik

A $\overline{S}^{(n)}$ ist gleich der Summe sämtlicher verbundener, nicht amputierbarer Graphen mit n Vertizes.

B Der Symmetriefaktor ist die Anzahl der Möglichkeiten, die Operatoren, aus denen der Graph aufgebaut ist, paarweise zu den Propagatoren des Graphen zusammenzufassen. Nur einer der gleichwertigen Graphen wird als Summand in die Streuamplitude eingetragen, und mit dem Symmetriefaktor multipliziert.

B′ Jede Vertauschung zweier fermionischer Operatoren bei der Kombination zu Propagatoren ergibt einen Faktor (-1).

C Jeder Vertex hat die Struktur .

D Für die n Vertizes gibt es einen Faktor

$$\frac{1}{n!}\Big(\frac{-iq\gamma^{\nu}}{\hbar}\Big)^{n} \quad .$$

Der Index ν ist mit dem entsprechenden Index des andockenden Photons zu kontrahieren.

E Für die ein- und auslaufenden Linien mit Vierer-Wellenzahlen k_{ein} und k_{aus} gibt es einen Faktor

$$2\pi\Omega\,\delta\Big(\sum_{\text{ein}} k^0_{\text{ein}} - \sum_{\text{aus}} k^0_{\text{aus}}\Big)\,\delta_{\sum_{\text{ein}}\boldsymbol{k}_{\text{ein}}\,,\,\sum_{\text{aus}}\boldsymbol{k}_{\text{aus}}} \quad .$$

F Für jede äußere Linie mit Wellenzahl k wird ein Faktor

$$\sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}\Omega}}\cdot\begin{cases} {}^{r}u^{\boldsymbol{k}} \text{ für einlaufendes Lepton} \\ {}^{r}\overline{u}^{\boldsymbol{k}} \text{ für auslaufendes Lepton} \\ (-{}^{r}\overline{v}^{\boldsymbol{k}}) \text{ für einlaufendes Antilepton} \\ (-{}^{r}v^{\boldsymbol{k}}) \text{ für auslaufendes Antilepton} \\ \epsilon^{(\alpha)}_{\boldsymbol{k}\nu}\hbar c\sqrt{\mu_0} \text{ für einlaufendes Photon} \\ \epsilon^{(\alpha)*}_{\boldsymbol{k}\nu}\hbar c\sqrt{\mu_0} \text{ für auslaufendes Photon} \end{cases}$$

in den Summanden eingetragen.

Fortsetzung auf der nächsten Seite!

(Fortsetzung der vorigen Seite)

G Für jede innere Photonen-Linie mit Wellenzahl k gibt es einen Faktor

$$\widetilde{D}_{\nu\mu}(k) \overset{(17.86)}{=} \frac{-ig_{\nu\mu}\,\mu_0\hbar c}{k^2 + i\epsilon'},$$

für jede innere Fermionen-Linie mit Wellenzahl k einen Faktor

$$\widetilde{S}(k) \overset{(12.24)}{=} \frac{i(\gamma^\nu k_\nu + m\frac{c}{\hbar})}{k^2 - m^2\frac{c^2}{\hbar^2} + i\epsilon'}\ .$$

H Über die Wellenzahl k einer inneren Linie wird mit

$$\frac{1}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{k}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}k^0}{2\pi}$$

summiert und integriert, falls k nicht durch Energie- und Impulserhaltung festgelegt ist.

J Es ist der Umordnungs-Operator $\mathcal{U}_\mathrm{S} =$ (23.21) einzutragen.

K Innere Fermionen-Linien müssen *immer* als Teilchen (nicht als Antiteilchen) interpretiert werden.

Formeln, die sich auf das Pionen-Feld der Yukawa-Theorie beziehen, in entsprechende Formeln des Photonenfeldes übersetzt werden. Das ist in Kasten 24.1 geschehen. Wir überprüfen die Übersetzung der Regeln Schritt für Schritt:

Regel C: Die Linien masseloser Bosonen werden in Feynman-Graphen als Wellenlinien gezeichnet. Erfahrungsgemäß verlaufen sämtliche Reaktionen der QED so, dass der Flavor der Fermionen an jedem Vertex erhalten bleibt. Das bedeutet: Wenn z.B. ein e^- an einem Vertex einläuft, dann muss die zweite Fermionenlinie an diesem Vertex entweder ein auslaufendes Elektron oder ein einlaufendes Positron sein. Wenn ein $\bar{c}$ einläuft, dann kann die zweite Fermionenlinie an diesem Vertex nur ein einlaufendes c oder ein auslaufendes $\bar{c}$ sein. Deshalb zeigt immer ein Fermionenpfeil zum Vertex hin, und ein Fermionenpfeil zeigt vom Vertex fort. Ein Fermionenpfeil einer äußeren Linie, der zum Vertex hin zeigt, kann ein Fermion symbolisieren, das sich zum Vertex bewegt, oder ein Antifermion, das sich vom Vertex entfernt. Man kann eine eindeutige Interpretation des Diagramms dadurch erzwingen, dass

man bei äußeren Linien neben dem Fermionenpfeil einen zusätzlichen kleinen Pfeil zeichnet, der die Richtung des Impulses angibt. Innere Linien müssen wegen Satz (23.39) immer als Teilchen (nicht Antiteilchen) interpretiert werden, deren Impulsrichtung mit dem Fermionenpfeil übereinstimmt.

Es ist nicht üblich, die Richtung des Photonenimpulses durch Pfeile auf der Wellenlinie anzugeben. Falls erforderlich, wird der Impuls äußerer Photonenlinien durch einen kleinen Pfeil neben der Wellenlinie angedeutet. Bei inneren Photonenlinien ist die Richtung des Impulses egal, weil der Photonenpropagator quadratisch in k ist, siehe Regel G.

Regel D: Die Lagrangedichte der Quantenelektrodynamik ist

$$\mathcal{L} \overset{(8.21)}{=} \overline{\psi}_{(W)}\Big(i\hbar c\gamma^\nu(\mathrm{d}_\nu + \frac{i}{\hbar}qA_{(W)\nu}) - mc^2\Big)\psi_{(W)} - \frac{1}{4\mu_0}F_{\sigma\tau}F^{\sigma\tau} \ .$$

Man erkennt gegenüber der Lagrangedichte

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \overset{(23.8)}{=} \overline{\psi}_{(W)}\Big(i\hbar c\gamma^\nu\mathrm{d}_\nu - g(\hbar c)^{3/2}\phi_{(W)} - mc^2\Big)\psi_{(W)} + \\ + \frac{1}{2}\Big(\hbar^2c^2\mathrm{d}_\mu\mathrm{d}^\mu - M^2c^4\Big)\phi^2_{(W)}\end{aligned}$$

der Yukawa-Theorie folgende Ersetzung im Wechselwirkungsteil:

$$\begin{aligned} -g(\hbar c)^{3/2}\phi_{(W)} \ &\longrightarrow \ +i\hbar c\gamma^\nu\frac{i}{\hbar}q\,A_{(W)\nu} \\ \Longrightarrow \text{ Vertexfaktor: } -ig\sqrt{\hbar c} \ &\longrightarrow \ \frac{-iq\gamma^\nu}{\hbar}\end{aligned}$$

In den Regeln F und G werden wir Faktoren finden, mit denen der Index $^\nu$ kontrahiert wird. Für q ist im Vertexfaktor stets die Ladung des Feldes, nicht die Ladung des Antifeldes einzusetzen, egal ob man die Fermionenlinien, die am Vertex andocken, als Teilchen oder als Antiteilchen interpretiert. Der Vertexfaktor in einem Elektronenstrom und in einem Positronenstrom ist gleichermaßen $+ie\gamma^\nu/\hbar = +i|e|\gamma^\nu/\hbar$, der Vertexfaktor in einem up-Strom und in einem Anti-up-Strom ist gleichermaßen $-i2e\gamma^\nu/(3\hbar)$. Aus Sicht der Klassischen Physik muss es überraschend erscheinen, dass man beim Ladungsparameter keinen Unterschied macht, egal ob man Teilchen

oder Antiteilchen beschreiben möchte. Wir werden aber sehen, dass die Unterschiede – die es natürlich geben muss – durch eine unterschiedliche Anzahl von Vertauschungen fermionischer Operatoren bei Anwendung von Regel B′ sowie durch unterschiedliche Spinorfunktionen (Regel F) geliefert werden.

Regel F: Die Regeln für Fermionen können von Kasten 23.1 der Yukawa-Theorie übernommen werden. Zur Bestimmung der Regel für Photonen müssen wir auf die Herleitung der LSZ-Reduktionsformel zurückgreifen, die in Abschnitt 19.3 für ungeladene Klein-Gordon-Felder untersucht wurde. Dazu vergleichen wir den Feldoperator des ungeladenen Klein-Gordon-Feldes

$$\phi(x) \overset{(19.11)}{=} \sum_{\boldsymbol{k}} \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}\Omega}}\Big(a_{\boldsymbol{k}} \exp\{-ikx\} \; + a_{\boldsymbol{k}}^{\dagger} \exp\{+ikx\}\Big)$$

mit dem Feldoperator der Photonen, der die vier Raum-Zeit-Komponenten

$$A^{\nu}(x) \overset{(17.79)}{=} \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{\alpha=0}^{3} \sqrt{\frac{\mu_0 c^2 \hbar^2}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}\Omega}} \cdot \cdot \Big(\epsilon_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)\nu} c_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)} \exp\{-ikx\} + \epsilon_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)\nu *} c_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)\dagger} \exp\{+ikx\}\Big)$$

hat. Wie gewohnt und in (19.21) vereinbart bezeichnen Feldoperatoren mit dem Index $_{(W)}$ die vollständigen Operatoren der wechselwirkenden Felder. Operatoren ohne diesen Index sind Operatoren im Wechselwirkungsbild. In der Herleitung der LSZ-Formel erhält man anstelle der Relationen (A.187) des Klein-Gordon-Feldes für die ν-Komponente des Photonenfeldes die Relationen

$$\sum_{\alpha=0}^{3} \epsilon_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)\nu} c_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)} = ic \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{\boldsymbol{k}}\Omega\mu_0 c^2\hbar^2}} \int_{\Omega} \mathrm{d}^3x \exp\{ikx\} \overset{\leftrightarrow}{\mathrm{d}_0} A^{\nu}(x) \tag{24.1a}$$

$$\sum_{\alpha=0}^{3} \epsilon_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)\nu *} c_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)\dagger} = -ic \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{\boldsymbol{k}}\Omega\mu_0 c^2\hbar^2}} \int_{\Omega} \mathrm{d}^3x \exp\{-ikx\} \overset{\leftrightarrow}{\mathrm{d}_0} A^{\nu}(x) \tag{24.1b}$$

Die zweite Relation ist die adjungierte der ersten. Diese wird wie bei (A.187)

durch Einsetzen des Feldoperators überprüft.

Jetzt multipliziert man (24.1a) mit $\sum_{\nu=0}^{3} \epsilon_{\boldsymbol{k}\nu}^{(\beta)*}$, und (24.1b) mit $\sum_{\nu=0}^{3} \epsilon_{\boldsymbol{k}\nu}^{(\beta)}$. Weil der Index ν in den Produkten doppelt auftritt, braucht man wegen der Summenkonvention das Zeichen $\sum_\nu$ nicht auszuschreiben. Der imaginäre Anteil der Polarisationsvektoren – siehe (17.9) – verschwindet im Produkt. Weil es sich um Einheitsvektoren handelt, gilt

$$\sum_{\alpha=0}^{3} \epsilon_{\boldsymbol{k}\nu}^{(\beta)*} \epsilon_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)\nu} = \sum_{\alpha=0}^{3} \epsilon_{\boldsymbol{k}\nu}^{(\beta)} \epsilon_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)\nu*} = 1 \ .$$

Damit ergeben sich die Fourier-Operatoren

$$c_{\boldsymbol{k}}^{(\beta)} = ic \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{\boldsymbol{k}}\Omega}} \int\limits_{\Omega} \mathrm{d}^3x \exp\{ikx\} \overset{\leftrightarrow}{\mathrm{d}_0} \frac{A^\nu(x)\, \epsilon_{\boldsymbol{k}\nu}^{(\beta)*}}{c\hbar\sqrt{\mu_0}}$$

$$c_{\boldsymbol{k}}^{(\beta)\dagger} = -ic \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{\boldsymbol{k}}\Omega}} \int\limits_{\Omega} \mathrm{d}^3x \exp\{-ikx\} \overset{\leftrightarrow}{\mathrm{d}_0} \frac{A^\nu(x)\, \epsilon_{\boldsymbol{k}\nu}^{(\beta)}}{c\hbar\sqrt{\mu_0}} \ .$$

Sie sind dimensionslose Skalare, wie es sein muss. Aus dem Vergleich dieser Relationen mit (A.187) ist erkennbar, dass man bei der Herleitung der LSZ-Formel in den weiteren Schritten, die (A.187)ff entsprechen, die Feldoperatoren der ungeladenen Klein-Gordon-Bosonen folgendermaßen ersetzen muss:

$$\begin{aligned}
&\text{ein- oder auslaufendes KG-Boson}: && \phi(x) \\
&\text{einlaufendes Photon, Polarisation } \epsilon_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)}: && \frac{A^\nu(x)\, \epsilon_{\boldsymbol{k}\nu}^{(\alpha)}}{c\hbar\sqrt{\mu_0}} \\
&\text{auslaufendes Photon, Polarisation } \epsilon_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)}: && \frac{A^\nu(x)\, \epsilon_{\boldsymbol{k}\nu}^{(\alpha)*}}{c\hbar\sqrt{\mu_0}}
\end{aligned} \qquad (24.3)$$

In (A.201) haben wir dann

$$\left(k^2 - m^2\frac{c^2}{\hbar^2}\right) = \frac{i}{\hbar c}\, \widetilde{G}^{-1}(k) \qquad (24.4)$$

eingesetzt. Jetzt führen wir an der entsprechende Stelle für Photonen (bei denen $m = 0$ ist) die Ersetzung

$$k^2 \overset{(17.86)}{=} -ig_{\sigma\tau}\,\mu_0\hbar c\,\widetilde{D}^{-1}_{\sigma\tau}(k) \tag{24.5}$$

durch, wobei auf der rechten Seite über σ und τ ausnahmsweise *nicht* automatisch zu summieren ist. Auf die Behandlung der Raum-Zeit-Indizes kommen wir gleich zurück. Die LSZ-Formel (19.49) enthält für jedes ein- oder auslaufende Klein-Gordon-Teilchen einen Faktor $\widetilde{G}^{-1}(k)\,\phi(x)$. Wegen (24.5) und (24.3) ist dieser Faktor für jedes ein- oder auslaufende Photon zu ersetzen durch

$$\begin{aligned}
&\text{einlaufendes Photon, Polarisation } \epsilon^{(\alpha)}_{\boldsymbol{k}}:\\
&\quad \widetilde{G}^{-1}(k)\,\phi(x) \;\longrightarrow\; -g_{\sigma\tau}\,\hbar c\,\sqrt{\mu_0}\,\widetilde{D}^{-1}_{\sigma\tau}(k)\,A^{\nu}(x)\,\epsilon^{(\alpha)}_{\boldsymbol{k}\nu}\\
&\text{auslaufendes Photon, Polarisation } \epsilon^{(\alpha)}_{\boldsymbol{k}}:\\
&\quad \widetilde{G}^{-1}(k)\,\phi(x) \;\longrightarrow\; -g_{\sigma\tau}\,\hbar c\,\sqrt{\mu_0}\,\widetilde{D}^{-1}_{\sigma\tau}(k)\,A^{\nu}(x)\,\epsilon^{(\alpha)*}_{\boldsymbol{k}\nu}\ .
\end{aligned} \tag{24.6}$$

Die Faktoren, die gegenüber den Bosonen der Yukawa-Theorie neu hinzu kommen, sind in Regel F eingetragen.

Wir ersparen uns die langwierige Untersuchung, wie in (24.5) und den weiteren Formeln die Raum-Zeit-Indizes der Photonenfunktionen, und damit zusammenhängend die Faktoren $g_{\nu\mu}$ zu behandeln sind, und entnehmen der Literatur das einfache und plausible Ergebnis: Der Index ν des Vertexfaktors (Regel D) ist mit dem Index ν des Polarisationsvektors (Regel F) bzw. dem Index ν des Propagators (Regel G) des Photons zu kontrahieren, das an diesem Vertex andockt. Diese Regel ist unter D in Kasten 24.1 eingetragen. Sie bewirkt, dass die Wahrscheinlichkeitsamplitude insgesamt ein Lorentzskalar ist.

Nicht in Regel F eingetragen: Wenn Spin bzw. Polarisation nicht gemessen werden, dann wird über die Spinorindizes $r = 1, 2$ der Fermionen-Operatoren bzw. den Polarisationsindex $\alpha = 0, 1, 2, 3$ der Photonen-Operatoren gemittelt (einlaufende Teilchen) bzw. summiert (auslaufende Teilchen).

Regel G: Der Photonenpropagator wurde in Abschnitt 17.5 berechnet. Über die Indizes $_{\mu}$ und $_{\nu}$ des Photonenpropagators und die Indizes $^{\mu}$ und $^{\nu}$ in

den Vertexfaktoren (Regel D) wird nach der Summenkonvention summiert. Dazu muss selbstverständlich der Vertexfaktor γ^μ am einen Ende der inneren Photonenlinie mit μ indiziert werden, und der Vertexfaktor γ^ν am anderen Ende der inneren Photonenlinie mit ν. Durch diese Multiplikation werden die Produkte von Photon-Propagator und Vertexvektoren zu Lorentzskalaren.

Regel J: Diese Regel wird unverändert von der Yukawa-Theorie übernommen. Sie bewirkt, dass alle Fermionen-Produkte zu Spinorskalaren werden. Man könnte diese Regel „einsparen“, wenn man sämtliche Spinorindizes explizit ausschreiben würde, so wie wir in den Regeln sämtliche Raum-Zeit-Indizes explizit ausschreiben. Regel J ist aber nach dem ästhetischen Empfinden des Autors leichter zu ertragen als massenhaft auftretende Spinorindizes. Die Streuamplitude ist insgesamt ein Skalar, da alle Vektorfaktoren der Photonen und alle Spinorfaktoren der Fermionen zu Skalarprodukten kombiniert werden.

Regel K: Diese Regel, die auf Satz (23.39) beruht, wird ebenfalls unverändert von der Yukawa-Theorie übernommen.

24.2 Wirkungsquerschnitt und Zerfallsrate

In einem zylindrischen Volumen mit Länge L_A und Querschnittsfläche F befinden sich N_A Teilchen oder Antiteilchen der Sorte A. In einem zweiten zylindrischen Volumen mit Länge L_B und Querschnittsfläche F befinden sich N_B Teilchen oder Antiteilchen der Sorte B (die mit der Teilchensorte A identisch sein kann, aber nicht muss). Die beiden Teilchenbündel werden so gegeneinander geschossen, dass die beiden Bündel mit ihren Stirnflächen F genau aufeinandertreffen und sich der Länge nach durchdringen. Die Dichte der Teilchen sei in beiden Bündeln so gering, und die Längen L_A und L_B der Bündel seien so klein, dass praktisch niemals ein Teilchen eines Bündels durch ein anderes Teilchen des gleichen Bündels verdeckt wird (sich „im Windschatten“ des anderen Teilchens befindet). Dann ist die Anzahl der Streuereignisse proportional zur Anzahl der einlaufenden Teilchen Z_A, proportional zur Anzahl der einlaufenden Teilchen Z_B, und umgekehrt proportional zur Querschnittsfläche F der Bündel:

$$\text{Anzahl der Streuereignisse} = \sigma \frac{Z_A Z_B}{F} \tag{24.7}$$

Der Proportionalitätsfaktor σ, der offensichtlich die Dimension einer Fläche hat, wird als Wirkungsquerschnitt bezeichnet. Nicht ausdrücklich erwähnt wird in dieser Gleichung, dass der Wirkungsquerschnitt nicht nur von Zahl und Art der Teilchen, sondern auch von ihrer jeweiligen Energie und ihrer jeweiligen Polarisation abhängt. Man beachte, dass die Anzahl der Streuereignisse wegen der angenommenen geringen Teilchendichte unabhängig von der Länge der Teilchenbündel ist. Deshalb ist diese Formel invariant beim Wechsel zwischen Koordinatensystemen, deren Nullpunkt an einem beliebigen Punkt auf der Bewegungslinie der Teilchenbündel fixiert ist (beispielsweise am Schwerpunkt der kollidierenden Teilchen oder am einen oder anderen Teilchenbündel). Denn nur L_A und L_B ändern sich durch relativistische Längenkontraktion. Die Querschnittsfläche F bleibt aber in all diesen Koordinatensystemen gleich.

In (24.7) wird der totale oder integrale Wirkungsquerschnitt definiert. Häufig unterteilt man ihn noch in die verschiedenen Kanäle der möglichen Streuereignisse. Wenn man beispielsweise ein Bündel von Elektronen mit einem Bündel von Positronen kollidieren lässt, dann sind bei ausreichender Energie eine Vielzahl von Reaktionen wie $e^-e^+ \to e^-e^+$, $e^-e^+ \to \mu^-\mu^+$, $e^-e^+ \to$ Hadronen, $e^-e^+ \to \tau^-\tau^+\gamma$, … möglich. Jedem dieser Streuereignisse kann man einen eigenen Wirkungsquerschnitt zuordnen.

Weitere Details eines Streuereignisses kann man durch differentielle Wirkungsquerschnitte dokumentieren. Wenn beispielsweise bei der Streureaktion (unter anderem) ein Myon erzeugt wird, dann kann man den differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_\mu}{\mathrm{d}\widetilde{\Omega}} = \frac{\text{Anzahl der im Raumwinkel } \mathrm{d}\widetilde{\Omega} \text{ beobachteten Myonen}}{Z_A Z_B / F} \tag{24.8}$$

messen, indem man zählt, wie viele Myonen sich vom Streuzentrum in den Raumwinkel $\mathrm{d}\widetilde{\Omega}$ entfernen. (Wir kennzeichnen den Raumwinkel $\widetilde{\Omega}$ durch eine Tilde, um ihn vom Normierungsvolumen Ω unterscheiden zu können.) Wenn man auch noch die Energie dieser Myonen ermittelt, kann man den doppelt differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma_\mu}{\mathrm{d}\widetilde{\Omega}\mathrm{d}E} = \frac{\text{Zahl Myonen in } (E, E+\mathrm{d}E) \text{ und } \mathrm{d}\widetilde{\Omega}}{N_A N_B / F} \tag{24.9}$$

messen. Trotz der Schreibweise als Differentiale sind in diesen Formeln $\mathrm{d}\widetilde{\Omega}$ und $\mathrm{d}E$ nicht als infinitesimal klein zu betrachten, sondern als endliche Intervalle $\Delta\widetilde{\Omega}$ und ΔE, deren Größe vom Auflösungsvermögen der Detektoren abhängt.

Es ist klar, dass der Wirkungsquerschnitt eng verwandt ist mit der Streuamplitude, die in den vorangegangenen Kapiteln berechnet wurde. Bevor wir den genauen Zusammenhang bestimmen, definieren wir noch die Streumatrix $\mathcal{M}$. In den Streuamplituden S taucht regelmäßig für jedes ein- oder auslaufende Teilchen ein Normierungsfaktor, sowie für alle Teilchen zusammen eine Deltafunktion und ein Kronecker-Symbol auf, welche die Erhaltung von Energie und Impuls sicherstellen. Man definiert eine Streumatrix $\mathcal{M}$ durch

$$\begin{aligned} \overline{S}^{(n)} &\overset{(23.27)}{\equiv} \mathcal{M}^{(n)} \cdot \Big(\prod_{\text{ein}} \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}_{\text{ein}}}\Omega}} \Big) \Big(\prod_{\text{aus}} \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}_{\text{aus}}}\Omega}} \Big) \cdot \\ &\cdot\ 2\pi\Omega\, \delta\Big(\sum_{\text{ein}} k^0_{\text{ein}} - \sum_{\text{aus}} k^0_{\text{aus}} \Big)\, \delta_{\sum_{\text{ein}} \boldsymbol{k}_{\text{ein}},\, \sum_{\text{aus}} \boldsymbol{k}_{\text{aus}}} \ . \end{aligned} \tag{24.10}$$

Man könnte $\mathcal{M}$ den „interessanten“ Faktor der Streuamplitude nennen, den Rest den „selbstverständlichen“ Faktor. Im Slang der Hochenergiephysiker ist es aber üblich, $\mathcal{M}$ als den „dynamischen“ Faktor, den Rest als den „kinematischen“ Faktor zu bezeichnen.

Die S-Matrix

$$S_{\boldsymbol{k}_3 \ldots \boldsymbol{k}_n, \boldsymbol{k}_1 \boldsymbol{k}_2} \overset{(19.43b)}{=} \langle \boldsymbol{k}_3 \ldots \boldsymbol{k}_n |\, S\, | \boldsymbol{k}_1 \boldsymbol{k}_2 \rangle \tag{24.11}$$

ist die Wahrscheinlichkeitsamplitude eines Streuereignisses, bei dem zwei Teilchen mit Impulsen $\hbar\boldsymbol{k}_1$ und $\hbar\boldsymbol{k}_2$ einlaufen, und $(n-2)$ Teilchen mit Impulsen $\hbar\boldsymbol{k}_3 \ldots \hbar\boldsymbol{k}_n$ auslaufen. Die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses ist

$$|S|^2 = |\mathcal{M}|^2 \cdot \Big(\prod_{\text{ein}} \frac{1}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}_{\text{ein}}}\Omega}\Big)\Big(\prod_{\text{aus}} \frac{1}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}_{\text{aus}}}\Omega}\Big) \cdot$$
$$\cdot \Big|2\pi\,\delta\Big(\sum_{\text{ein}} k^0_{\text{ein}} - \sum_{\text{aus}} k^0_{\text{aus}}\Big)\Big|^2 \Omega^2\,\delta_{\sum_{\text{ein}}\boldsymbol{k}_{\text{ein}}\,,\,\sum_{\text{aus}}\boldsymbol{k}_{\text{aus}}} \ . \tag{24.12}$$

Hier wurde bereits $|\Omega\delta_{\sum_{\text{ein}}\boldsymbol{k}_{\text{ein}}\,,\,\sum_{\text{aus}}\boldsymbol{k}_{\text{aus}}}|^2 = \Omega^2\delta_{\sum_{\text{ein}}\boldsymbol{k}_{\text{ein}}\,,\,\sum_{\text{aus}}\boldsymbol{k}_{\text{aus}}}$ eingesetzt. Das Betragsquadrat der Deltafunktion ergibt unter einem Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}k_{\text{ein}}\,\delta(k_{\text{ein}} - k_{\text{aus}})\,f(k_{\text{ein}}) = f(k_{\text{aus}}) \quad \Longrightarrow$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}k_{\text{ein}}\,\delta(k_{\text{ein}} - k_{\text{aus}})\,\delta(k_{\text{ein}} - k_{\text{aus}}) = \delta(k_{\text{aus}} - k_{\text{aus}}) = \delta(0) \ .$$

Um den irritierenden Faktor $\delta(0)$ besser zu verstehen erinnern wir uns daran, dass wir den Zeitraum, in dem die Streuung stattfindet, zwar vereinfachend $t = -\infty$ bis $t = +\infty$ genannt haben. Wir haben aber im Anschluss an diese Festlegung in (19.48) ausdrücklich betont, dass eigentlich ein endlicher Zeitraum $T = t_a - t_e$ gemeint ist, wobei T sehr groß ist im Vergleich zu allen anderen für diesen Streuvorgang charakteristischen Zeitintervallen. Wir definieren $\Delta k^0 \equiv \sum_{\text{ein}} k^0_{\text{ein}} - \sum_{\text{aus}} k^0_{\text{aus}}$ als abkürzende Schreibweise, und berechnen die Deltafunktion

$$\delta(\Delta k^0) \overset{(7.16b)}{=} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-cT/2}^{+cT/2} \mathrm{d}x^0\ \exp\{+i\Delta k^0 x^0\}$$
$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi}\,\frac{2\sin(\Delta k^0 cT/2)}{\Delta k^0} \ . \tag{24.13}$$

Daraus ergibt sich mithilfe der l'Hospital'schen Regel

$$\delta(0) = \lim_{\Delta k^0 \to 0} \delta(\Delta k^0) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{\pi} \lim_{\Delta k^0 \to 0} \frac{cT\cos(\Delta k^0 cT/2)}{2}$$
$$\approx \frac{cT}{2\pi} \text{ für } T \text{ sehr groß .} \tag{24.14}$$

Also ist das Betragsquadrat der Streuamplitude

$$|S|^2 = |\mathcal{M}|^2 \cdot \Big(\prod_{\text{ein}} \frac{1}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}_{\text{ein}}}\Omega}\Big)\Big(\prod_{\text{aus}} \frac{1}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}_{\text{aus}}}\Omega}\Big)\cdot$$
$$\cdot\, \Omega cT\, 2\pi\Omega\, \delta\Big(\sum_{\text{ein}} k^0_{\text{ein}} - \sum_{\text{aus}} k^0_{\text{aus}}\Big)\, \delta_{\sum_{\text{ein}}\boldsymbol{k}_{\text{ein}}\,,\,\sum_{\text{aus}}\boldsymbol{k}_{\text{aus}}} \ . \tag{24.15}$$

Dies ist nach (24.11) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass $(n-2)$ gestreute Teilchen mit Wellenzahlen $\boldsymbol{k}_3 \ldots \boldsymbol{k}_n$ auslaufen, wenn zwei Teilchen mit Wellenzahlen $\boldsymbol{k}_1$ und $\boldsymbol{k}_2$ einlaufen. Da man nicht über unendlich genaue Detektoren verfügt, muss man dies Betragsquadrat multiplizieren mit der Anzahl der möglichen Wellenzahlen in unmessbar enger Nachbarschaft zu $\boldsymbol{k}_3 \ldots \boldsymbol{k}_n$. Bei einem Auflösungsvermögen $\Delta\boldsymbol{k}$ der Detektoren nennen wir diese Umgebung

$$U(\boldsymbol{k}_j) \equiv \text{Menge aller } \boldsymbol{k} \text{ mit } |\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}_j| \le |\Delta\boldsymbol{k}| \ . \tag{24.16}$$

Aufgrund des endlichen Normierungsvolumens Ω erfüllt jede Wellenzahl $\boldsymbol{k}_j$ die Bedingung

$$k^i_j\, \Omega^{1/3} = n^i_j\, 2\pi \quad \text{mit } i = 1,2,3 \text{ und } n^i_j \in \mathbb{N} \ . \tag{24.17}$$

Also kann ein auslaufendes Teilchen, dessen Impuls als $\hbar\boldsymbol{k}_j$ detektiert wird, tatsächlich einen von

$$\prod_{i=1}^{3} n^i_j = \sum_{U(\boldsymbol{k}_j)} \frac{\Omega}{(2\pi)^3}\Big(\prod_{i=1}^{3} k^i\Big) \tag{24.18}$$

verschiedenen Impulsen haben. Deshalb ist

$$|S_{\boldsymbol{k}_3\ldots\boldsymbol{k}_n,\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2}|^2 \cdot \Big(\prod_{j=3}^{n}\sum_{U(\boldsymbol{k}_j)}\frac{\Omega\,(\prod_{i=1}^{3}k_j^i)}{(2\pi)^3}\Big) =$$

$$= |\mathcal{M}|^2\,\Omega c T\Big(\prod_{j=1}^{2}\frac{1}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}_j}\Omega}\Big)\Big(\prod_{j=3}^{n}\sum_{U(\boldsymbol{k}_j)}\frac{(\prod_{i=1}^{3}k_j^i)}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}_j}(2\pi)^3}\Big)\cdot$$

$$\cdot\; 2\pi\Omega\,\delta\Big(\sum_{\text{ein}}k^0_{\text{ein}}-\sum_{\text{aus}}k^0_{\text{aus}}\Big)\,\delta_{\sum_{\text{ein}}\boldsymbol{k}_{\text{ein}}\,,\,\sum_{\text{aus}}\boldsymbol{k}_{\text{aus}}} \qquad (24.19)$$

die Wahrscheinlichkeit eines Streuereignisses, das von $S_{\boldsymbol{k}_3\ldots\boldsymbol{k}_n,\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2}$ messtechnisch nicht unterschieden werden kann. Die Formeln werden jetzt reichlich umständlich und unübersichtlich, weil wir einerseits ein diskretes Spektrum möglicher Wellenzahlen annehmen (das auf das endliche Normierungsvolumen Ω zurückzuführen ist), andererseits aber durch die Summation über $U(\boldsymbol{k}_j)$ ausdrücklich berücksichtigen, dass das Spektrum der Wellenzahlen aufgrund des mangelhaften Auflösungsvermögens der Detektoren als Kontinuum erscheint. Deshalb ist es an dieser Stelle besser, durch

$$\sum_{U(\boldsymbol{k}_j)}\frac{(\prod_{i=1}^{3}k_j^i)}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}_j}(2\pi)^3} \quad\to\quad \int_{U(\boldsymbol{k}_j)}\mathrm{d}^3k_j\,\frac{1}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}_j}(2\pi)^3}$$

$$\Omega\,\delta_{\sum_{\text{ein}}\boldsymbol{k}_{\text{ein}}\,,\,\sum_{\text{aus}}\boldsymbol{k}_{\text{aus}}} \quad\to\quad (2\pi)^3\delta^{(3)}\Big(\sum_{\text{ein}}\boldsymbol{k}_{\text{ein}}-\sum_{\text{aus}}\boldsymbol{k}_{\text{aus}}\Big)$$

zu einer durchgängigen Kontinuums-Schreibweise zu wechseln. Man definiert das $(n-2)$-dimensionale lorentzinvariante „Phasenraumvolumen“

$$\Phi^{(n-2)}_{\text{LIPS}} \equiv \Big(\prod_{j=3}^{n}\int_{U(\boldsymbol{k}_j)}\frac{\mathrm{d}^3k_j}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}_j}(2\pi)^3}\Big)\,(2\pi)^4\,\delta^{(4)}\Big(\sum_{\text{ein}}k_{\text{ein}}-\sum_{\text{aus}}k_{\text{aus}}\Big) =$$

$$= \Big(\prod_{j=3}^{n}\int_{U(\boldsymbol{k}_j)}\frac{\mathrm{d}\widetilde{\Omega}\,\mathrm{d}|\boldsymbol{k}_j|\,|\boldsymbol{k}_j|^2}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}_j}(2\pi)^3}\Big)\,(2\pi)^4\,\delta^{(4)}\Big(\sum_{\text{ein}}k_{\text{ein}}-\sum_{\text{aus}}k_{\text{aus}}\Big)\,, \qquad (24.20)$$

in dem $\widetilde{\Omega}$ der Raumwinkel ist, und nicht mit dem Normierungsvolumen Ω verwechselt werden darf. Der Index $_{\text{LIPS}}$ bedeutet „lorentz-invariant phase

space“. $\Phi_{\text{LIPS}}^{(n-2)}$ ist deshalb lorentzinvariant, weil die vierdimensionale Deltafunktion die Lorentzinvarianz der dreidimensionalen Integrale erzwingt. $\Phi_{\text{LIPS}}^{(m)}$ enthält zwar den Faktor (24.18), und ist deshalb proportional zum Phasenraumvolumen, das den auslaufenden Teilchen zur Verfügung steht. Aber $\Phi_{\text{LIPS}}^{(m)}$ ist kein Phasenraumvolumen, sondern hat – falls die Normierungsfaktoren N_j dimensionslos sind – die eigenartige Dimension

$$\left[\Phi_{\text{LIPS}}^{(m)}\right] = \frac{\text{Wellenzahl}^{3m-4}}{\text{Energie}^m} \ . \tag{24.21}$$

$\Phi_{\text{LIPS}}^{(n-2)}$ enthält den Faktor

$$\prod_{j=3}^{n} \frac{\mathrm{d}^3 k_j}{\hbar\omega_{\boldsymbol{k}_j}} = 4\pi \prod_{j=3}^{n} \frac{\mathrm{d}|\boldsymbol{k}_j|\,|\boldsymbol{k}_j|^2}{\hbar\omega_{\boldsymbol{k}_j}} \ .$$

Dieser Faktor bewirkt, dass es sich bei den Streuprodukten mit der Energie $\hbar\omega_{\boldsymbol{k}_j}$ mit höherer Wahrscheinlichkeit um leichte Teilchen mit großem Impuls als um schwere Teilchen mit kleinem Impuls handelt. Das liegt daran, dass n_j in (24.17) bei kleinem $|\boldsymbol{k}_j|$ klein ist, also nur relativ wenige mögliche Endzustände für dieses Streuereignis zur Verfügung stehen. Man sagt, dass die Produktion schwerer Streuprodukte „Phasenraum-unterdrückt“ ist.

Das Normierungsvolumen Ω ist in $\Phi_{\text{LIPS}}^{(n-2)}$ nicht mehr enthalten. Auch in den Normierungsfaktoren der beiden einlaufenden Teilchen kann es nicht stehen bleiben. Denn wir haben zwar die einlaufenden Teilchen als ebene Wellen dargestellt, die überall in Ω mit gleicher Wahrscheinlichkeit nachgewiesen werden können. Bei der Berechnung für die Wahrscheinlichkeit eines Streuereignisses wissen wir aber (weil das Experiment dementsprechend aufgebaut wurde), dass sich die beiden Teilchen während des Zeitraums $T = t_a - t_e$ der Streuung im wesentlich kleineren Streuvolumen

$$|v_{\text{rel}}|\,TF \ll \Omega \tag{24.22}$$

(mit v_{rel} = Relativgeschwindigkeit der beiden einlaufenden Teilchen) befinden. In einem Laborsystem, in dem sich das einlaufende Teilchen$_1$ in Ruhe befindet, ist $|v_{\text{rel}}| = |v_2|$ gleich der Geschwindigkeit des anderen einlaufen-

den Teilchens. Wir entnehmen der Literatur [48, §12] die lorentzinvariante Verallgemeinerung

$$\hbar\omega_{\boldsymbol{k}_1}\hbar\omega_{\boldsymbol{k}_2}|v_{\text{rel}}| = \hbar\omega_{\boldsymbol{k}_1}\hbar\omega_{\boldsymbol{k}_2}\sqrt{(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2)^2-(\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2)^2}\,, \tag{24.23}$$

die als Flussfaktor bezeichnet wird. Wenn $\boldsymbol{v}_1$ und $\boldsymbol{v}_2$ antiparallel sind, gilt

$$|v_{\text{rel}}| = |v_1 - v_2| \quad \text{falls } \boldsymbol{v}_1 = r\boldsymbol{v}_2 \text{ mit } r\in\mathbb{R}\,. \tag{24.24}$$

Wir ersparen uns die Mühe, die einlaufenden Teilchen als Wellenpakete zu beschreiben, deren Wellenzahlen um $\boldsymbol{k}_1$ und $\boldsymbol{k}_2$ herum zentriert sind, sondern schreiben sie vereinfachend weiterhin als ebene Wellen $\boldsymbol{k}_1$ und $\boldsymbol{k}_2$. Den Faktor Ω ersetzen wir aber durch $|v_{\text{rel}}|TF$:

$$|S_{\boldsymbol{k}_3\ldots\boldsymbol{k}_n,\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2}|^2\cdot\left(\prod_{j=3}^{n}\int_{U(\boldsymbol{k}_j)}\mathrm{d}^3k_j\right)Z|\mathcal{M}|^2\,\frac{c}{|v_{\text{rel}}|\,F}\left(\prod_{j=1}^{2}\frac{1}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}_j}}\right)\Phi_{\text{LIPS}}^{(n-2)}$$
$$\text{mit } \Phi_{\text{LIPS}}^{(n-2)} = (24.20) \text{ und } v_{\text{rel}} = (24.23) \tag{24.25}$$

Oben wurde der Wirkungsquerschnitt

$$\sigma \overset{(24.7)}{=} \frac{\text{Anzahl der Streuereignisse}\cdot F}{Z_A Z_B}$$

für Z_A und Z_B einlaufende Teilchen angegeben. In Gleichung (24.25) wird die

$$\frac{\text{Wahrscheinlichkeit der Streuung}_{\boldsymbol{k}_3\ldots\boldsymbol{k}_n,\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2}}{Z_A Z_B} \quad \text{mit } Z_A = Z_B = 1$$

berechnet. Also ist

$$\boxed{\begin{aligned}\sigma_{\boldsymbol{k}_3\ldots\boldsymbol{k}_n,\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2} &= |\mathcal{M}|^2\,\frac{c}{|v_{\text{rel}}|}\left(\prod_{j=1}^{2}\frac{1}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}_j}}\right)\Phi_{\text{LIPS}}^{(n-2)}\\ \text{mit } v_{\text{rel}} &= (24.23) \text{ und } \Phi_{\text{LIPS}}^{(n-2)} = (24.20)\end{aligned}} \tag{24.26}$$

der Wirkungsquerschnitt dieses Streuereignisses. Der Wirkungsquerschnitt

kann gemessen, und mithilfe dieser Formel die Theorie überprüft werden. Weil die Streumatrix $\mathcal{M}$, das Phasenraumvolumen $\Phi_{\text{LIPS}}^{(n-2)} = (24.20)$, sowie der Flussfaktor (24.23) lorentzinvariant sind, ist auch der Wirkungsquerschnitt (24.26) lorentzinvariant.

Im Fall $n = 4$, d. h. wenn nur zwei Teilchen auslaufen, gilt im Schwerpunktsystem $\boldsymbol{k}_2 = -\boldsymbol{k}_1$ und $\boldsymbol{k}_4 = -\boldsymbol{k}_3$. Damit kann man das Integral über $\boldsymbol{k}_4$ im Phasenraumvolumen der auslaufenden Teilchen berechnen:

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{LIPS}}^{(2)} &\overset{(24.20)}{=} \int\limits_{U(\boldsymbol{k}_4)} \mathrm{d}^3k_4 \int\limits_{U(\boldsymbol{k}_3)} \mathrm{d}^3k_3 \, \frac{(2\pi)^4\,\delta(k_1^0 + k_2^0 - k_3^0 - k_4^0)\,\delta^{(3)}(\boldsymbol{k}_3 + \boldsymbol{k}_4)}{4\hbar^2\omega_{\boldsymbol{k}_4}\omega_{\boldsymbol{k}_3}(2\pi)^6} \\ &= \int\limits_{U(\boldsymbol{k}_3)} \mathrm{d}^3k_3 \, \frac{\delta(k_1^0 + k_2^0 - k_3^0 - k_4^0)}{16\pi^2\hbar^2\omega_{\boldsymbol{k}_4}\omega_{\boldsymbol{k}_3}} \end{aligned} \tag{24.27}$$

In diesem Integral sind $k_3^0, k_4^0, \omega_{\boldsymbol{k}_3}, \omega_{\boldsymbol{k}_4}$ wegen

$$k_j^0 = \frac{\omega_{\boldsymbol{k}_j}}{c} \overset{(7.18)}{=} \sqrt{\boldsymbol{k}_3^2 + m_j^2\frac{c^2}{\hbar^2}} \quad \text{für } j = 3, 4 \tag{24.28}$$

nicht unabhängig, sondern alle durch $|\boldsymbol{k}_3|$ eindeutig festgelegt. Auch die Gesamtenergie im Schwerpunktsystem

$$E_{\text{CM}} = \hbar c k_{\text{CM}}^0 \equiv \hbar c(k_1^0 + k_2^0) \tag{24.29}$$

ist als Konstante zu betrachten, so dass das Integral (24.27) als einzige Variable $\boldsymbol{k}_3$ enthält. Wir definieren

$$\begin{aligned} k_{34}^0 &\equiv k_3^0 + k_4^0 \\ \frac{\mathrm{d}\,k_{34}^0}{\mathrm{d}\,|\boldsymbol{k}_3|} &\overset{(24.28)}{=} \frac{|\boldsymbol{k}_3|}{k_3^0} + \frac{|\boldsymbol{k}_3|}{k_4^0} \\ \mathrm{d}|\boldsymbol{k}_3| &= \frac{\mathrm{d}k_{34}^0}{|\boldsymbol{k}_3|\left((k_3^0)^{-1} + (k_4^0)^{-1}\right)} \,, \end{aligned} \tag{24.30}$$

und nutzen

$$\int\limits_{U(\boldsymbol{k}_3)} \mathrm{d}^3k = \int\limits_{U(\boldsymbol{k}_3)} \mathrm{d}\widetilde{\Omega}_3 \, \mathrm{d}|\boldsymbol{k}_3| \, \boldsymbol{k}_3^2 \ ,$$

um $\Phi^{(2)}_{\mathsf{LIPS}}$ in der Form

$$\begin{aligned}
\Phi^{(2)}_{\mathsf{LIPS}} &= \int\limits_{U(\boldsymbol{k}_3)} \mathrm{d}\widetilde{\Omega}_3 \, \mathrm{d}k^0_{34} \, \frac{|\boldsymbol{k}_3| \, \delta(k^0_{\mathrm{CM}} - k^0_{34})}{16\pi^2\hbar^2c^2k^0_4k^0_3\Big((k^0_3)^{-1} + (k^0_4)^{-1}\Big)} \\
&= \int\limits_{U(\boldsymbol{k}_3)} \mathrm{d}\widetilde{\Omega}_3 \, \mathrm{d}k^0_{34} \, \frac{|\boldsymbol{k}_3| \, \delta(k^0_{\mathrm{CM}} - k^0_{34})}{16\pi^2\hbar^2c^2k^0_{34}} \\
&= \int\limits_{U(\boldsymbol{k}_3)} \mathrm{d}\widetilde{\Omega}_3 \, \frac{|\boldsymbol{k}_3|}{16\pi^2\hbar c E_{\mathrm{CM}}}
\end{aligned} \tag{24.31}$$

zu schreiben. Also ist der differentielle Wirkungsquerschnitt

$$\boxed{\begin{array}{c} \dfrac{\mathrm{d}\sigma_{\boldsymbol{k}_3\boldsymbol{k}_4,\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2}}{\mathrm{d}\widetilde{\Omega}_3} = \dfrac{|\mathcal{M}|^2 \ |\boldsymbol{k}_3|}{|v_{\mathrm{rel}}| \, \hbar \, 16\pi^2 E^3_{\mathrm{CM}}} \\ \text{im Schwerpunktsystem mit } v_{\mathrm{rel}} = (24.23) \ . \end{array}} \tag{24.32}$$

In Anhang A.22 wird die nützliche Beziehung

$$|\boldsymbol{k}_3| \overset{(A.154)}{=} \frac{S_{34}}{2E_{\mathrm{CM}}\hbar c} \tag{24.33a}$$

$$S_{34} \equiv \sqrt{\Big(E^2_{\mathrm{CM}} - (m_3+m_4)^2c^4\Big)\Big(E^2_{\mathrm{CM}} - (m_3-m_4)^2c^4\Big)} \tag{24.33b}$$

bewiesen, mit der der Wirkungsquerschnitt in der Form

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{\boldsymbol{k}_3\boldsymbol{k}_4,\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2}}{\mathrm{d}\widetilde{\Omega}_3} = \frac{|\mathcal{M}|^2 \ S_{34}}{|v_{\mathrm{rel}}| \, \hbar^2 c \, 32\pi^2 E^4_{\mathrm{CM}}} \tag{24.34}$$

im Schwerpunktsystem mit $v_{\mathrm{rel}} = (24.23)$ und $S_{34} = (24.33b)$

geschrieben werden kann. In dieser Schreibweise kommen die Impulse der auslaufenden Teilchen nicht mehr explizit vor.

Wenn die beiden einlaufenden Teilchen gleiche Ruhemasse haben (was in der experimentellen Praxis sehr häufig der Fall ist), dann gilt im Schwerpunktsystem erstens

$$\hbar\omega_{\boldsymbol{k}_1} = \hbar\omega_{\boldsymbol{k}_2} = \tfrac{1}{2}E_{\mathrm{CM}} \ , \tag{24.35}$$

und zweitens muss aufgrund der Erhaltung des Teilchenflavors an jedem Vertex auch

$$m_3 = m_4 \quad \text{und} \quad \hbar\omega_{\boldsymbol{k}_3} = \hbar\omega_{\boldsymbol{k}_4} = \tfrac{1}{2}E_{\mathrm{CM}} \tag{24.36}$$

gelten. Damit vereinfacht sich der Wirkungsquerschnitt im Schwerpunktsystem zu

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{\boldsymbol{k}_3\boldsymbol{k}_4,\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2}}{\mathrm{d}\widetilde{\Omega}_3} = \frac{|\mathcal{M}|^2 \ \sqrt{E_{\mathrm{CM}}^2 - (2m_3c^2)^2}}{|v_{\mathrm{rel}}|\,\hbar^2 c\, 32\pi^2 E_{\mathrm{CM}}^3}$$

im Schwerpunktsystem mit $v_{\mathrm{rel}} = (24.23)$, falls $m_1 = m_2$ und $m_3 = m_4$

Hier erkennt man deutlich, dass das Auftreten schwerer Streuprodukte $m_3 + m_4 = 2m_3 \to E_{\mathrm{CM}}/c^2$ Phasenraum-unterdrückt ist. Die einlaufenden Teilchen sind normalerweise auf hoch relativistische Energie beschleunigt. Dann vereinfacht sich die Formel wegen $E_{\mathrm{CM}} \gg m_1c^2 \implies |v_{\mathrm{rel}}| \approx 2c$ weiter zu

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}\sigma_{\boldsymbol{k}_3\boldsymbol{k}_4,\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2}}{\mathrm{d}\widetilde{\Omega}_3} = \frac{|\mathcal{M}|^2 \ \sqrt{E_{\mathrm{CM}}^2 - (2m_3c^2)^2}}{\hbar^2c^2\, 64\pi^2 E_{\mathrm{CM}}^3} \\ &\text{im Schwerpunktsystem,} \\ &\text{falls } m_1 = m_2 \text{ und } m_3 = m_4 \text{ und } E_{\mathrm{CM}} \gg m_1c^2 \ . \end{aligned}} \tag{24.37}$$

Eine letzte mögliche Vereinfachung, die typischerweise bei $m_3 = m_1$ möglich ist, ergibt sich im Fall $m_3c^2 \ll E_{\mathrm{CM}}$. Dann gilt

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{\boldsymbol{k}_3\boldsymbol{k}_4,\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2}}{\mathrm{d}\widetilde{\Omega}_3} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{\hbar^2 c^2 64\pi^2 E_{\mathrm{CM}}^2} \tag{24.38}$$

im Schwerpunktsystem, falls $m_1 = m_2$ und $m_3 = m_4$ und $E_{\mathrm{CM}} \gg m_1 c^2$ und $E_{\mathrm{CM}} \gg m_3 c^2$.

Bisher haben wir durchwegs den Fall betrachtet, dass 2 Teilchen einlaufen, und $(n-2)$ gestreute Teilchen auslaufen. Die S-Matrix (24.10) gilt unverändert auch in dem Fall, dass nur 1 Teilchen einläuft, und $(n-1)$ Teilchen auslaufen. Man bezeichnet diesen Vorgang nicht als Streuung, sondern als Zerfall des Teilchens Nummer 1. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein mit Wellenzahl $\boldsymbol{k}_1$ einlaufendes Teilchen im Zeitintervall T in $(n-1)$ Teilchen mit Wellenzahlen $\boldsymbol{k}_2 \ldots \boldsymbol{k}_n$ zerfällt, ist

$$|S_{\boldsymbol{k}_2 \ldots \boldsymbol{k}_n, \boldsymbol{k}_1}|^2 \cdot \left(\prod_{j=2}^{n} \int_{U(\boldsymbol{k}_j)} \mathrm{d}^3 k_j \right) \overset{(24.19)}{=} |\mathcal{M}|^2 \, \Omega c T \, \frac{1}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}_1} \Omega} \, \Phi_{\mathrm{LIPS}}^{(n-1)}$$

mit

$$\Phi_{\mathrm{LIPS}}^{(n-1)} \overset{(24.20)}{=} \left(\prod_{j=2}^{n} \int_{U(\boldsymbol{k}_j)} \frac{\mathrm{d}^3 k_j}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}_j} (2\pi)^3} \right) (2\pi)^4 \, \delta^{(4)}\Big(k_1 - \sum_{l=2}^{n} k_l \Big) \, . \tag{24.39}$$

Die Wahrscheinlichkeit für diesen Zerfall pro Zeit wird als Zerfallsrate

$$\boxed{\Gamma_{\boldsymbol{k}_2 \ldots \boldsymbol{k}_n, \boldsymbol{k}_1} = |\mathcal{M}|^2 \, \frac{c}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}_1}} \, \Phi_{\mathrm{LIPS}}^{(n-1)} \text{ mit } \Phi_{\mathrm{LIPS}}^{(n-1)} = (24.39)} \tag{24.40}$$

bezeichnet. Oft kann ein Teilchen auf verschiedene Arten („über verschiedene Kanäle“) zerfallen. Die Summe der Zerfallsraten ist die totale Zerfallsrate, ihr Inverses die Lebensdauer des Teilchens:

$$\text{Lebensdauer} \equiv \tau \equiv \frac{1}{\Gamma_{\mathrm{total}}} \equiv \frac{1}{\sum_{\text{alle Kanäle}} \Gamma} \tag{24.41}$$

Die Faktoren $\mathcal{M}$ und $\Phi_{\mathrm{LIPS}}^{(n-1)}$ sind lorentzinvariant, nicht jedoch der Faktor

$$\hbar\omega_{\boldsymbol{k}_1} = \frac{m_1 c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \ , \tag{24.42}$$

in dem v die Geschwindigkeit des zerfallenden Teilchens ist. Die Lebensdauer eines instabilen Teilchens wird beliebig groß in einem Bezugssystem, in dem die Geschwindigkeit des Teilchens der Lichtgeschwindigkeit beliebig nahe kommt. Das am längsten bekannte Beispiel für diesen relativistischen Effekt sind die Myonen, die durch die Kosmische Höhenstrahlung in der oberen Erdatmosphäre ($\approx 10\,\mathrm{km}$ über dem Erdboden) erzeugt werden. Im Ruhesystem ist ihre Lebensdauer[2] $\tau_0 = 2.2\,\mu\mathrm{s}$. Um die Strecke bis zum Erdboden zurückzulegen benötigen sie, wenn sie sich fast mit Lichtgeschwindigkeit bewegen, etwa die Zeit $10\,\mathrm{km}/c \approx 150 \cdot \tau_0$. Die Beobachtung zeigt [49], dass ein viel größerer Teil von ihnen den Erdboden erreicht, als ohne den relativistischen Effekt (24.42) erklärbar wäre.

Wenn ein Teilchen in nur 2 Teilchen zerfällt, kann man im Schwerpunktsystem mit $\boldsymbol{k}_1 = 0$ und $\boldsymbol{k}_3 = -\boldsymbol{k}_2$ den invarianten Phasenraum $\Phi^{(2)}_{\mathsf{LIPS}}$ aus (24.31) ablesen. Man braucht nur E_{CM} durch m_1c^2 und die Indizes 3 und 4 durch 2 und 3 zu ersetzen:

$$\begin{aligned}\Phi^{(2)}_{\mathsf{LIPS}} &\overset{(24.31)}{=} \int\limits_{U(\boldsymbol{k}_2)} \mathrm{d}\widetilde{\Omega}_2 \, \frac{|\boldsymbol{k}_2|}{16\pi^2\hbar c\, m_1 c^2} \overset{(24.33)}{=} \\ &= \int\limits_{U(\boldsymbol{k}_2)} \mathrm{d}\widetilde{\Omega}_2 \, \frac{c^4 \sqrt{\left(m_1^2-(m_2+m_3)^2\right)\left(m_1^2-(m_2-m_3)^2\right)}}{32\pi^2\hbar^2 c^2\,(m_1c^2)^2}\end{aligned} \tag{24.43}$$

Daraus folgt die differentielle Zerfallsrate

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}\widetilde{\Omega}_2} &\overset{(24.40)}{=} |\mathcal{M}|^2 \, \frac{c^5 \sqrt{\left(m_1^2-(m_2+m_3)^2\right)\left(m_1^2-(m_2-m_3)^2\right)}}{64\pi^2\hbar^2 c^2\,(m_1c^2)^3} \\ &\text{Zerfall } m_1 \to m_2, m_3 \text{ im Schwerpunktsystem .}\end{aligned} \tag{24.44}$$

[2] Die Myonen zerfallen durch Schwache Wechselwirkung. Insofern passt das Beispiel nur bedingt in dies Kapitel über QED.

Achtung: Einige Autoren betonen, dass man bei der Berechnung des Phasenraumvolumens Φ_{LIPS} einen Faktor $1/n!$ einfügen müsse, wenn n gleichartige und deshalb ununterscheidbare Streu- oder Zerfallsprodukte entstehen. Das ist nur dann richtig, wenn die Streuamplitude $\mathcal{M}$ in einer weniger differenzierten Weise definiert wird als nach unseren Regeln. Nach unseren Definitionen werden alle denkbaren Fallunterscheidungen hinsichtlich identischer oder unterscheidbarer Teilchen bereits bei der Berechnung von $\mathcal{M}$ berücksichtigt, und dürfen deshalb nicht nochmals als Modifikationen von Φ_{LIPS} eingefügt werden.

24.3 Baumgraphen

24.3.1 Lepton-Lepton Streuung

Als erstes Beispiel berechnen wir die Streuung eines Leptons an einem anderen Lepton (nicht Antilepton). Es laufen zwei Leptonen mit Wellenzahlen k_1 und k_2, Spinvariablen r_1 und r_2, sowie Masseparametern m_1 und m_2 ein. Nach dem Streuereignis laufen zwei Leptonen mit Wellenzahlen k_3 und k_4 und Spinvariablen r_3 und r_4 aus. Weil an jedem Vertex der Fermionenflavor erhalten wird, müssen die beiden auslaufenden Teilchen die gleichen Massen m_1 und m_2 wie die einlaufenden Teilchen haben. Zur Berechnung der Streuamplitude kann man fast wörtlich das abschreiben, was auf den Seiten 501ff zur Streuung zwischen Nukleonen in der Yukawa-Theorie gesagt wurde. Man braucht lediglich die Klein-Gordon-Bosonen der Yukawa-Theorie durch Photonen zu ersetzen.

Die Wahrscheinlichkeitsamplitude $\overline{S}^{(0)}$ in erster Ordnung der Störungsrechnung ist Null. Denn genau wie in (20.14) reichen die beiden Propagatoren $S(x_3 - x_1)$ und $S(x_4 - x_2)$, die in nullter Ordnung aus dem Matrixelement

$$\langle 0|\, T\psi(x_3)\, \psi(x_4)\, \overline{\psi}(x_1)\, \overline{\psi}(x_2)\, |0\rangle_c$$

gebildet werden können, nicht aus, um die vier Nullfaktoren $\widetilde{S}^{-1}$ der LSZ-Formel zu kompensieren. In erster Ordnung enthält das Matrixelement

$$\langle 0|\, T\psi(x_3)\, \psi(x_4)\, \overline{\psi}(x_1)\, \overline{\psi}(x_2)\, \overline{\psi}(y)\, \gamma^\mu A_\mu(y)\, \psi(y)\, |0\rangle_c$$

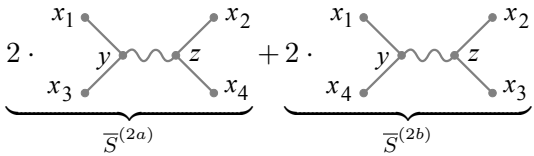
einen Operator $\gamma^\nu A_\nu(y)$, und ist wegen (23.13) ebenfalls Null. Das gleiche gilt für alle ungeraden Ordnungen $n = 1, 3, 5, \ldots$ der Störungsrechnung. Nur die geraden Ordnungen $n = 2, 4, \ldots$ können einen Beitrag zur Streuamplitude leisten.

Den führenden von Null verschiedenen Beitrag findet man in Störungsrechnung zweiter Ordnung mit dem Matrixelement

$$\langle 0|\, T\psi(x_3)\,\psi(x_4)\,\overline{\psi}(x_1)\,\overline{\psi}(x_2)\,\overline{\psi}(y)\cdot \\ \cdot\,\gamma^\mu A_\mu(y)\,\psi(y)\,\overline{\psi}(z)\,\gamma^\nu A_\nu(z)\,\psi(z)\,|0\rangle_c\ , \tag{24.45}$$

das zu den Graphen

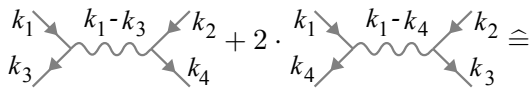
$$\overline{S}^{(2)} \mathrel{\widehat{=}} 2\cdot \underbrace{\quad}_{\overline{S}^{(2a)}} + 2\cdot \underbrace{\quad}_{\overline{S}^{(2b)}} \tag{24.46}$$



kontrahiert werden kann. Der zweite Graph existiert nur, wenn beide Leptonen den gleichen Flavor haben. Andernfalls verschwindet dieser Term, weil die gestreuten Teilchen voneinander unterscheidbar sind, siehe die Begründung im Anschluss an (23.28). Wortwörtlich kann man dem an (23.24) anschließenden Text die Begründung der beiden Symmetriefaktoren entnehmen, sowie den Hinweis, dass wegen der Anzahl der Vertauschungen fermionischer Operatoren $\overline{S}^{(2a)}$ einen Faktor (-1) erhält, $\overline{S}^{(2b)}$ jedoch nicht.

Damit sind die Regeln A, B, und B′ von Kasten 24.1 abgearbeitet. Mithilfe der weiteren Regeln dieses Kastens erhält man folgende Streuamplitude:

$$2\cdot \quad + 2\cdot \quad \mathrel{\widehat{=}}$$



$$\mathrel{\widehat{=}}\ \overline{S}^{(2)} = \left(\prod_{j=1}^{4}\sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}_j}\Omega}}\right)\mathcal{M}^{(2)}\cdot \\ \cdot\, 2\pi\Omega\,\delta\Big(k_1^0 + k_2^0 - k_3^0 - k_4^0\Big)\,\delta_{(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2),(\boldsymbol{k}_3+\boldsymbol{k}_4)} \tag{24.47a}$$

$$\mathcal{M}^{(2)} = 2 \cdot \frac{1}{2!}\Big(\frac{+ie}{\hbar}\Big)^2 \cdot$$
$$\cdot \Big(- \, ({}^{r_3}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_3}\, \gamma^{\mu\, r_1} u^{\boldsymbol{k}_1}) \, \frac{(-ig_{\mu\nu}\, \mu_0 \hbar c)}{(k_1 - k_3)^2 + i\epsilon'} \, ({}^{r_4}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_4}\, \gamma^{\nu\, r_2} u^{\boldsymbol{k}_2}) +$$
$$+ \, ({}^{r_4}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_4}\, \gamma^{\mu\, r_1} u^{\boldsymbol{k}_1}) \, \frac{(-ig_{\mu\nu}\, \mu_0 \hbar c)}{(k_1 - k_4)^2 + i\epsilon'} \, ({}^{r_3}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_3}\, \gamma^{\nu\, r_2} u^{\boldsymbol{k}_2}) \Big) \qquad (24.47b)$$

Hier wurde der Umordnungs-Operator (23.21) bereits angewendet und wird deshalb nicht nochmals explizit ausgeschrieben. Die Spinorfaktoren, die zum zweiten Graphen gehören, sind grün eingefärbt. Wenn die beiden auslaufenden Teilchen unterschiedlichen Flavor haben und deshalb voneinander unterschieden werden können, entfällt dieser Graph, und alle grünen Faktoren sind gleich Null zu setzen.

In den Propagatoren des intermediären Photons kommen die von Mandelstam[3] definierten Variablen

$$s \equiv (k_1 + k_2)^2 \, , \; t \equiv (k_1 - k_3)^2 \, , \; u \equiv (k_1 - k_4)^2 \qquad (24.48)$$

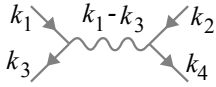
vor. Deshalb wird das erste Diagramm in (24.47b) auch als t-Kanal, das zweite als u-Kanal der Streuung bezeichnet. (Beispiele für Streuung im s-Kanal werden wir weiter unten betrachten.) Im allgemeinen gilt kein Erhaltungssatz für die Spinvariable r, wohl aber im nichtrelativistischen Grenzfall. Dann gilt

$$({}^{r_3}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_3}\, \gamma^{\mu\, r_1} u^{\boldsymbol{k}_1})\, g_{\mu\nu}\, ({}^{r_4}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_4}\, \gamma^{\nu\, r_2} u^{\boldsymbol{k}_2}) \overset{(A.153)}{\approx} 4 m_1 m_2 c^4\, \delta_{r_3 r_1}\, \delta_{r_4 r_2}$$
$$({}^{r_4}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_4}\, \gamma^{\mu\, r_1} u^{\boldsymbol{k}_1})\, g_{\mu\nu}\, ({}^{r_3}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_3}\, \gamma^{\nu\, r_2} u^{\boldsymbol{k}_2}) \overset{(A.153)}{\approx} 4 m_1 m_2 c^4\, \delta_{r_4 r_1}\, \delta_{r_3 r_2}$$
$$\text{falls } |c\hbar \boldsymbol{k}_1| \ll m_1 c^2 \text{ und } |c\hbar \boldsymbol{k}_2| \ll m_2 c^2 \, , \qquad (24.49)$$

und der Spin der Leptonen ist an jedem Vertex erhalten. Wenn $r_1 \neq r_2$ ist, dann sind die Teilchen sogar bei $m_1 = m_2$ unterscheidbar, so dass der zweite Summand in (24.47b) auch bei gleichem Flavor verschwindet. (Im Fall $m_1 \neq m_2$ ist er immer Null, weil dann die Teilchen unabhängig von ihrer Polarisation unterscheidbar sind.) Also ist im nichtrelativistischen Grenzfall

[3] Stanley Mandelstam (1928 – 2016)

die Matrix für Streuung eines Leptons an einem anderen Lepton

$2\cdot$ 

$\widehat{\approx}\ \mathcal{M}^{(2)} \approx \dfrac{-ie^2\, 4m_1 m_2 c^4\, \mu_0 c\hbar^{-1}\, \delta_{r_3 r_1}\, \delta_{r_4 r_2}}{(k_1-k_3)^2 + i\epsilon'}$

$$\text{falls } \Big(|c\hbar \boldsymbol{k}_j| \ll m_j c^2 \text{ für } j=1,2\Big) \text{ und } \Big(r_1 \neq r_2 \text{ falls } m_1 = m_2\Big)\,. \tag{24.50}$$

Wir erinnern nochmals daran, dass wir zwischen Graphen und algebraischen Formeln stets das „entspricht“-Zeichen, jedoch nicht das Gleichheitszeichen setzen, weil die Interpretation eines Graphen stets vom Zusammenhang abhängt. Hier entspricht der Graph $\mathcal{M}$, in (24.47a) entspricht er $\overline{S}$. Es ist instruktiv, das Ergebnis (24.50) mit Gleichung (23.29) zu vergleichen, die die Streuung eines Nukleons oder Antinukleons an einem Nukleon oder Antinukleon durch Yukawa-Wechselwirkung beschreibt. (24.50) und (23.29) haben ein unterschiedliches Vorzeichen, das sich zum unterschiedlichen Vorzeichen der Bosonen-Propagatoren

$$\widetilde{G}(k) = \frac{i}{\hbar c(k^2 - M^2 \frac{c^2}{\hbar^2} + i\epsilon')} \quad \longleftrightarrow \quad \widetilde{D}_{\nu\mu}(k) = \frac{-ig_{\nu\mu}\, \mu_0 \hbar c}{k^2 + i\epsilon'}$$

in Regel G der Kästen 23.1 und 24.1 zurückverfolgen lässt. Denn in nichtrelativistischer Näherung ist wegen (A.153) nur der Summand mit $-g_{00} = -1$ von Null verschieden.

Experimentell überprüfbar ist nicht die Streuamplitude, sondern der Wirkungsquerschnitt

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{\boldsymbol{k}_3\boldsymbol{k}_4,\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2}}{\mathrm{d}\widetilde{\Omega}_3} \overset{(24.32)}{=} \frac{|\mathcal{M}|^2\, |\boldsymbol{k}_3|}{|v_{\mathrm{rel}}|\, \hbar 64\pi^2 \hbar\omega_{\boldsymbol{k}_1} \hbar\omega_{\boldsymbol{k}_2} E_{\mathrm{CM}}}$$

im Schwerpunktsystem mit $v_{\mathrm{rel}} = (24.23)$

für das Streuereignis mit zwei einlaufenden und zwei auslaufenden Teilchen. Um ihn zu berechnen, braucht man das Betragsquadrat $|\mathcal{M}|^2 = \mathcal{M}^*\mathcal{M}$ der Streumatrix (24.47b). Dazu berechnen wir zunächst das konjugiert-komplexe des Spinorprodukts

$$(\bar{u}\gamma^\mu v)^* = v^\dagger \gamma^{\mu\dagger}\gamma^{0\dagger} u \overset{(8.12)}{=} v^\dagger g^{\mu\nu}\gamma^\nu\gamma^0 u \overset{(8.9)}{=}$$
$$= g^{\mu\nu} v^\dagger (2g^{\nu 0}\mathbb{1} - \gamma^0\gamma^\nu) u = v^\dagger\gamma^0\gamma^\mu u = \bar{v}\gamma^\mu u \; . \tag{24.51}$$

Also gilt:

$$\left|\mathcal{M}^{(2)}\right|^2 \overset{(24.47b)}{=} \frac{e^4\mu_0^2 c^2}{\hbar^2} \cdot$$
$$\cdot \Bigg(\frac{(^{r_1}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_1}\,\gamma^\mu\,^{r_3}u^{\boldsymbol{k}_3})(^{r_3}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_3}\,\gamma^\nu\,^{r_1}u^{\boldsymbol{k}_1})(^{r_2}u^{\boldsymbol{k}_2}\,\gamma_\mu\,^{r_4}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_4})(^{r_4}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_4}\,\gamma_\nu\,^{r_2}u^{\boldsymbol{k}_2})}{(k_1-k_3)^4+\epsilon'^2}$$
$$- \frac{(^{r_1}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_1}\,\gamma^\mu\,^{r_3}u^{\boldsymbol{k}_3})(^{r_4}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_4}\,\gamma^\tau\,^{r_1}u^{\boldsymbol{k}_1})(^{r_2}u^{\boldsymbol{k}_2}\,\gamma_\mu\,^{r_4}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_4})(^{r_3}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_3}\,\gamma_\tau\,^{r_2}u^{\boldsymbol{k}_2})}{(k_1-k_3)^2(k_1-k_4)^2+\epsilon'^2}$$
$$- \frac{(^{r_1}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_1}\,\gamma^\sigma\,^{r_4}u^{\boldsymbol{k}_4})(^{r_3}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_3}\,\gamma^\nu\,^{r_1}u^{\boldsymbol{k}_1})(^{r_2}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_2}\,\gamma_\sigma\,^{r_3}u^{\boldsymbol{k}_3})(^{r_4}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_4}\,\gamma_\nu\,^{r_2}u^{\boldsymbol{k}_2})}{(k_1-k_4)^2(k_1-k_3)^2+\epsilon'^2}$$
$$+ \frac{(^{r_1}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_1}\,\gamma^\sigma\,^{r_4}u^{\boldsymbol{k}_4})(^{r_4}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_4}\,\gamma^\tau\,^{r_1}u^{\boldsymbol{k}_1})(^{r_2}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_2}\,\gamma_\sigma\,^{r_3}u^{\boldsymbol{k}_3})(^{r_3}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_3}\,\gamma_\tau\,^{r_2}u^{\boldsymbol{k}_2})}{(k_1-k_4)^4+\epsilon'^2} \Bigg) \tag{24.52}$$

In dieser Formel wird für jedes ein- oder auslaufende Teilchen durch ^{r_j} eine bestimmte Orientierung des Spins spezifiziert. Wenn in einem Experiment die Spins der einlaufenden Teilchen nicht kontrolliert werden, dann ist der gemessene Wirkungsquerschnitt gleich dem Mittelwert der Wirkungsquerschnitte mit allen möglichen Spin-Orientierungen der einlaufenden Teilchen. Wenn auch die Spins der auslaufenden Teilchen nicht gemessen werden, dann ist der gemessene Wirkungsquerschnitt die Summe aller Wirkungsquerschnitte mit allen möglichen Spin-Orientierungen der auslaufenden Teilchen. Der Wirkungsquerschnitt muss demnach mit

$$\left|\mathcal{M}^{(2)}\right|^2_{\text{SNB}} = \frac{1}{2}\sum_{r_1=1}^{2}\frac{1}{2}\sum_{r_2=1}^{2}\sum_{r_3=1}^{2}\sum_{r_4=1}^{2}\left|\mathcal{M}^{(2)}\right|^2 \tag{24.53}$$

berechnet werden, wenn die Spins der ein- und auslaufenden Leptonen unbekannt sind. Der Index SNB bedeutet „Spins nicht beobachtet“. In Abschnitt 8.5 wurden bereits die Spinsummen

$$\sum_{r=1}^{2} {}^{r}u^{\boldsymbol{k}}\,{}^{r}\bar{u}^{\boldsymbol{k}} \overset{(8.77a)}{=} c\gamma^{\mu}p_{\mu} + mc^{2} \tag{24.54a}$$

$$\sum_{r=1}^{2} {}^{r}v^{\boldsymbol{k}}\,{}^{r}\bar{v}^{\boldsymbol{k}} \overset{(8.77b)}{=} c\gamma^{\mu}p_{\mu} - mc^{2} \tag{24.54b}$$

berechnet. Wir benutzen den

$$\text{Feynman-dagger} \equiv \not{b} \equiv \gamma^{\mu}b_{\mu} \tag{24.55}$$

als abkürzende Schreibweise, und erhalten für die erste Hälfte des ersten Spinorprodukts in (24.52)

$$\begin{aligned}\sum_{r_1,r_3} {}^{r_1}\bar{u}_a^{\boldsymbol{k}_1}\,\gamma_{ab}^{\mu}\,{}^{r_3}u_b^{\boldsymbol{k}_3}\,{}^{r_3}\bar{u}_c^{\boldsymbol{k}_3}\,\gamma_{cd}^{\nu}\,{}^{r_1}u_d^{\boldsymbol{k}_1} &= \sum_{r_1,r_3} {}^{r_1}u_d^{\boldsymbol{k}_1}\,{}^{r_1}\bar{u}_a^{\boldsymbol{k}_1}\,\gamma_{ab}^{\mu}\,{}^{r_3}u_b^{\boldsymbol{k}_3}\,{}^{r_3}\bar{u}_c^{\boldsymbol{k}_3}\,\gamma_{cd}^{\nu} = \\ &= (c\hbar\not{k}_1 + m_1c^2)_{da}\gamma_{ab}^{\mu}(c\hbar\not{k}_3 + m_3c^2)_{bc}\gamma_{cd}^{\nu} = \\ &= \hbar^2c^2\,\mathrm{Sp}\Big\{(\not{k}_1 + m_1\frac{c}{\hbar})\,\gamma^{\mu}(\not{k}_3 + m_3\frac{c}{\hbar})\,\gamma^{\nu}\Big\}\,,\end{aligned} \tag{24.56}$$

worin Sp{ } die Spur (also die Summe der Diagonalelemente) der Spinormatrix bedeutet. Die zweite Hälfte des ersten Spinorprodukts in (24.52) wird in gleicher Weise in eine Spur umgeformt, ebenso die beiden Hälften des vierten Spinorprodukts in (24.52). Das zweite und das dritte Spinorprodukt können mit dieser Methode nur zu jeweils einer Spur umgeformt werden. Damit folgt

$$\left|\mathcal{M}^{(2)}\right|^2_{\text{SNB}} = \frac{1}{4}\sum_{r_1,r_2,r_3,r_4}\left|\mathcal{M}^{(2)}\right|^2 = \frac{e^4\hbar^2c^6\mu_0^2}{4}\cdot$$
$$\cdot\Bigg(\text{Sp}\Big\{(\not{k}_1 + m_1\tfrac{c}{\hbar})\,\gamma^\mu(\not{k}_3 + m_3\tfrac{c}{\hbar})\,\gamma^\nu\Big\}\cdot$$
$$\cdot\frac{\text{Sp}\Big\{(\not{k}_2 + m_2\tfrac{c}{\hbar})\,\gamma_\mu(\not{k}_4 + m_4\tfrac{c}{\hbar})\,\gamma_\nu\Big\}}{(k_1-k_3)^4+\epsilon'^2} -$$
$$-\frac{\text{Sp}\Big\{(\not{k}_1 + m_1\tfrac{c}{\hbar})\,\gamma^\mu(\not{k}_3 + m_3\tfrac{c}{\hbar})\,\gamma_\tau(\not{k}_2 + m_2\tfrac{c}{\hbar})\,\gamma_\mu(\not{k}_4 + m_4\tfrac{c}{\hbar})\,\gamma^\tau\Big\}}{(k_1-k_3)^2(k_1-k_4)^2+\epsilon'^2} -$$
$$-\frac{\text{Sp}\Big\{(\not{k}_1 + m_1\tfrac{c}{\hbar})\,\gamma^\sigma(\not{k}_4 + m_4\tfrac{c}{\hbar})\,\gamma_\nu(\not{k}_2 + m_2\tfrac{c}{\hbar})\,\gamma_\sigma(\not{k}_3 + m_3\tfrac{c}{\hbar})\,\gamma^\nu\Big\}}{(k_1-k_4)^2(k_1-k_3)^2+\epsilon'^2} +$$
$$+\frac{\text{Sp}\Big\{(\not{k}_1 + m_1\tfrac{c}{\hbar})\,\gamma^\sigma(\not{k}_4 + m_4\tfrac{c}{\hbar})\,\gamma^\tau\Big\}}{(k_1-k_4)^4+\epsilon'^2}\cdot$$
$$\cdot\,\text{Sp}\Big\{(\not{k}_2 + m_2\tfrac{c}{\hbar})\,\gamma_\sigma(\not{k}_3 + m_3\tfrac{c}{\hbar})\,\gamma_\tau\Big\}\Bigg) \tag{24.57}$$

Die Spur einer Summe ist gleich der Summe der Spuren jedes einzelnen Summanden. Weil außerdem Zahlenfaktoren wie k_1^3, $g^{\mu\nu}$, $m_1\frac{c}{\hbar}$, ... mit den γ-Matrizen kommutieren, und weil Zahlenfaktoren vor die Spur gezogen werden können, ist die erste Spur gleich

$$A \equiv \text{Sp}\Big\{(k_1^\alpha\gamma_\alpha + m_1\tfrac{c}{\hbar})\,\gamma^\mu(k_3^\beta\gamma_\beta + m_3\tfrac{c}{\hbar})\,\gamma^\nu\Big\} =$$
$$= k_1^\alpha k_3^\beta\,\text{Sp}\Big\{\gamma_\alpha\gamma^\mu\gamma_\beta\gamma^\nu\Big\} + k_1^\alpha m_3\tfrac{c}{\hbar}\,\text{Sp}\Big\{\gamma_\alpha\gamma^\mu\gamma^\nu\Big\} +$$
$$+ m_1\tfrac{c}{\hbar}k_3^\beta\,\text{Sp}\Big\{\gamma^\mu\gamma_\beta\gamma^\nu\Big\} + m_1\tfrac{c}{\hbar}m_3\tfrac{c}{\hbar}\,\text{Sp}\Big\{\gamma^\mu\gamma^\nu\Big\} \tag{24.58}$$

Es sind die Spuren der Produkte von 2, 3, und 4 γ-Matrizen zu berechnen. Die entsprechenden Terme der zweiten und dritten Zeile von (24.57) enthalten Spuren der Produkte von bis zu 8 γ-Matrizen. Dafür verwendet man am besten algebraische Computerprogramme wie Reduce, oder Maple, oder Mathematica. Außerdem gibt es eine Reihe nützlicher Sätze zur Vereinfachung dieser Spuren. Wir listen hier ohne Beweis die wichtigsten auf.

Eine empfehlenswerte Referenz, in der diese Sätze genauer erläutert und begründet werden, ist [3, Abschnitt 5.1].

Sätze über die Spur von γ-Matrizen:

$$\mathrm{Sp}\{\underbrace{\gamma^\alpha \dots \gamma^\tau}_{n \text{ Matrizen}}\} = 0 \text{ falls } n \text{ ungerade} \tag{24.59a}$$

$$\mathrm{Sp}\{\gamma^\alpha \gamma^\beta\} = 4g^{\alpha\beta} \tag{24.59b}$$

$$\mathrm{Sp}\{\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\delta\} = 4(g^{\alpha\beta}g^{\gamma\delta} - g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta} + g^{\alpha\delta}g^{\beta\gamma}) \tag{24.59c}$$

$$\mathrm{Sp}\{\gamma^\mu \dots \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\delta\} = \mathrm{Sp}\{\gamma^\mu \dots \gamma^\nu \gamma^\delta \gamma^\gamma \gamma^\beta \gamma^\alpha\} \tag{24.59d}$$

$$\mathrm{Sp}\{\gamma^\mu \dots \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma_\alpha\} = 4\,\mathrm{Sp}\{\gamma^\mu \dots \gamma^\nu\} \tag{24.59e}$$

$$\mathrm{Sp}\{\gamma^\mu \dots \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma_\alpha\} = -2\,\mathrm{Sp}\{\gamma^\mu \dots \gamma^\nu \gamma^\beta\} \tag{24.59f}$$

$$\mathrm{Sp}\{\gamma^\mu \dots \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma_\alpha\} = 4g^{\beta\gamma}\mathrm{Sp}\{\gamma^\mu \dots \gamma^\nu\} \tag{24.59g}$$

$$\mathrm{Sp}\{\gamma^\mu \dots \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\delta \gamma_\alpha\} = -2\,\mathrm{Sp}\{\gamma^\mu \dots \gamma^\nu \gamma^\delta \gamma^\gamma \gamma^\beta\} \tag{24.59h}$$

Weil Faktoren unter der Spur zyklisch vertauscht werden dürfen, brauchen in den letzten fünf Sätzen die Faktoren $\gamma^\mu \dots \gamma^\nu$ nicht am linken Rand des Produkts zu stehen. Außerdem kann $\gamma^\mu \dots \gamma^\nu = \mathbb{1}$ sein. Klarerweise ist $\mathrm{Sp}\{\mathbb{1}\} = 4$.

Mithilfe dieser Sätze erhält man

$$\begin{aligned} A &\overset{(24.58)}{=} k_1^\alpha k_3^\beta\, 4(g_\alpha{}^\mu g_\beta{}^\nu - g_{\alpha\beta}g^{\mu\nu} + g_\alpha{}^\nu g^\mu{}_\beta) + m_1\tfrac{c}{\hbar}m_3\tfrac{c}{\hbar}\,4g^{\mu\nu} \\ &= 4(k_1^\mu k_3^\nu - k_1 k_3 g^{\mu\nu} + k_1^\nu k_3^\mu + m_1\tfrac{c}{\hbar}m_3\tfrac{c}{\hbar}\,g^{\mu\nu}) \end{aligned} \tag{24.60}$$

$$\begin{aligned} &\mathrm{Sp}\Big\{(\not{k}_1 + m_1\tfrac{c}{\hbar})\,\gamma^\mu(\not{k}_3 + m_3\tfrac{c}{\hbar})\,\gamma^\nu\Big\} \cdot \mathrm{Sp}\Big\{(\not{k}_2 + m_2\tfrac{c}{\hbar})\,\gamma_\mu(\not{k}_4 + m_4\tfrac{c}{\hbar})\,\gamma_\nu\Big\} = \\ &= 4\,(k_1^\mu k_3^\nu - k_1 k_3 g^{\mu\nu} + k_1^\nu k_3^\mu + m_1\tfrac{c}{\hbar}m_3\tfrac{c}{\hbar}\,g^{\mu\nu}) \cdot \\ &\quad \cdot 4\,(k_{2\mu}k_{4\nu} - k_2 k_4 g^{\mu\nu} + k_{2\nu}k_{4\mu} + m_2\tfrac{c}{\hbar}m_4\tfrac{c}{\hbar}\,g^{\mu\nu}) = \\ &= 32\Big((k_1k_2)(k_3k_4) + (k_1k_4)(k_2k_3) - k_1k_3m_2m_4c^2/\hbar^2 - \\ &\qquad - k_2k_4m_1m_3c^2/\hbar^2 + 2m_1m_3m_2m_4c^4/\hbar^4\Big) \end{aligned} \tag{24.61}$$

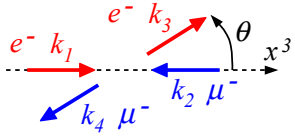
Um uns die mühsame Berechnung der drei letzten Summanden in (24.57) zu

ersparen, beschränken wir unsere weiteren Überlegungen auf den konkreten Fall der Streuung eines Elektrons (Masse m_e, Impuls $\hbar\boldsymbol{k}_1$) an einem Myon (Masse m_μ, Impuls $\hbar\boldsymbol{k}_2$). Wegen der Erhaltung des Flavors an jedem Vertex laufen bei dieser Reaktion ein Elektron mit Impuls $\hbar\boldsymbol{k}_3$ und ein Myon mit Impuls $\hbar\boldsymbol{k}_4$ aus. Da die auslaufenden Teilchen unterscheidbar sind, müssen in (24.57) alle grünen Faktoren gleich Null gesetzt werden. Weil das Myon etwa 207 mal so schwer ist wie das Elektron, können außerdem die Summanden in der letzten Zeile von (24.61), in denen die Elektronenmasse sogar quadratisch vorkommt, gegenüber dem Masseterm in der vorletzten Zeile vernachlässigt werden. Damit erhält man als Betragsquadrat der Streumatrix, wenn die Spins der Elektronen und Myonen nicht kontrolliert werden,

$$\left|\mathcal{M}^{(2)}\right|^2_{\text{SNB}} = \frac{1}{4}\sum_{r_1,r_2,r_3,r_4}\left|\mathcal{M}^{(2)}\right|^2 \overset{(24.57)}{=} \tag{24.62}$$

$$= \frac{8e^4\hbar^2c^6\mu_0^2}{(k_1-k_3)^4+\epsilon'^2}\left((k_1k_2)(k_3k_4)+(k_1k_4)(k_2k_3)-k_1k_3m_\mu^2c^2/\hbar^2\right)$$

Bevor wir mit diesem Ergebnis den Wirkungsquerschnitt angeben, formulieren wir es noch so um, dass anstelle der Vierer-Wellenzahlen die Energien, Massen, und Streuwinkel der Teilchen explizit sichtbar werden. Im



Schwerpunktsystem: $\quad \boldsymbol{k}_2 = -\boldsymbol{k}_1 \quad , \quad \boldsymbol{k}_4 = -\boldsymbol{k}_3$

gilt

$$|\boldsymbol{k}_1| = |\boldsymbol{k}_2| = |\boldsymbol{k}_3| = |\boldsymbol{k}_4| = \sqrt{\left(\frac{E_1}{\hbar c}\right)^2 - \left(\frac{m_e c}{\hbar}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{E_2}{\hbar c}\right)^2 - \left(\frac{m_\mu c}{\hbar}\right)^2}$$

$$E_3 = E_1 \quad , \quad E_4 = E_2 \; . \tag{24.63}$$

Wir nehmen im Folgenden hoch relativistische Elektronen an:

$$E_1 \gg m_e c^2 \tag{24.64}$$
$$\Longrightarrow \quad |\boldsymbol{k}_1| = \frac{E_1}{\hbar c} \quad \Longrightarrow \quad k_1 k_1 = k_1^0 k_1^0 - \boldsymbol{k}_1^2 = 0 \ .$$

Damit können die Faktoren in Gleichung (24.62) in folgender Form geschrieben werden:

$$\begin{aligned}
k_1 k_2 &= k_1^0 k_2^0 - \boldsymbol{k}_1 \boldsymbol{k}_2 = \frac{E_1}{(\hbar c)^2}\,(E_2 + E_1) \\
k_1 k_3 &= \frac{E_1^2}{(\hbar c)^2}\,(1 - \cos\theta) \\
k_1 k_4 &= \frac{E_1 E_2}{(\hbar c)^2} - \frac{E_1^2}{(\hbar c)^2}\cos(\pi - \theta) = \frac{E_1}{(\hbar c)^2}\,(E_2 + E_1 \cos\theta) \\
k_2 k_3 &= k_1 k_4 \quad , \quad k_3 k_4 = k_1 k_2 \\
(k_1 - k_3)^4 &\overset{(24.48)}{=} t^2 = 4(k_1 k_3)^2
\end{aligned} \tag{24.65}$$

Im nächsten Schritt wird die erste der beiden Relationen

$$1 - \cos\theta = 2\sin^2(\theta/2) \quad , \quad 1 + \cos\theta = 2\cos^2(\theta/2) \tag{24.66}$$

benutzt. Die zweite werden wir in (24.69) verwenden. Mit (24.65) erhält man als Betragsquadrat der Streumatrix bei unbeobachteten Spins

$$\left|\mathcal{M}^{(2)}\right|^2_{\text{SNB}} \overset{(24.62)}{=} e^4 \hbar^2 c^6 \mu_0^2 \, \frac{(E_2 + E_1)^2 + (E_2 + E_1\cos\theta)^2 - (1 - \cos\theta) m_\mu^2 c^4}{2E_1^2 \sin^4(\theta/2)}$$
$$\text{falls } m_e c^2 \ll E_1 \ . \tag{24.67}$$

Hier wurde $\theta \neq 0$ vorausgesetzt, so dass der Summand ϵ'^2 im Nenner entfallen konnte. Einsetzen dieser Streumatrix in (24.32) ergibt mit $\epsilon_0 \mu_0 = c^{-2}$ folgenden Wirkungsquerschnitt für die Streuung eines Elektrons an einem Myon, wenn die Spins nicht beobachtet werden:

$$\Big(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\widetilde{\Omega}_3}\Big)_{\text{SNB}} \overset{(24.32)}{=}$$
$$= \Big(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}\Big)^2 \hbar^2 c^3 \, \frac{(E_2+E_1)^2 + (E_2+E_1\cos\theta)^2 - (1-\cos\theta)m_\mu^2 c^4}{|v_{\text{rel}}|\, 8E_1^2 E_2 (E_1+E_2)\sin^4(\theta/2)}$$
im Schwerpunktsystem mit $v_{\text{rel}} = (24.23)$ und $m_e c^2 \ll E_1$ (24.68)

Im hoch relativistischen Fall $m_\mu c^2 \ll E_2$ ist $E_1 = E_2 \equiv E$. Außerdem kann man den dritten Summanden im Zähler vernachlässigen, und $|v_{\text{rel}}| = 2c$ setzen:

$$\Big(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\widetilde{\Omega}_3}\Big)_{\text{SNB}} \overset{(24.32)}{=} \Big(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}\Big)^2 \hbar^2 c^2 \, \frac{1+\cos^4(\theta/2)}{8E^2\sin^4(\theta/2)}$$
im Schwerpunktsystem, falls $m_\mu c^2 \ll E$ (24.69)

Wir überprüfen die Dimensionen: $e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c \approx 1/137$ ist die dimensionslose Feinstrukturkonstante der Quantenelektrodynamik. (Sie ist ein Produkt der charakteristischen Konstante $e^2/4\pi\epsilon_0$ der Klassischen Elektrodynamik, der charakteristischen Konstante c der Speziellen Relativitätstheorie, und der charakteristischen Konstante $\hbar$ der Quantentheorie.) Also ist

$$[\sigma] = \frac{(\text{Energie}\cdot\text{Zeit})^2\cdot\text{Länge}^2}{\text{Zeit}^2\cdot\text{Energie}^2} = \text{Fläche}\ ,$$

wie es sein muss.

Wir haben am Anfang dieses Abschnitts die Streuamplitude für die Streuung gleichartiger Leptonen angesetzt. Um uns die mühsame Berechnung der drei letzten Summanden in (24.57) zu ersparen, sind wir dann aber auf die Streuung eines Elektrons an einem Myon ausgewichen. Die komplette Streuamplitude für die Streuung gleichartiger Leptonen in zweiter Ordnung der Störungsrechnung – inklusive der Interferenzterme von (24.57) – wurde 1932 von Møller[4] veröffentlicht [50]. Sein Ergebnis lautet

[4] Christian Møller (1904 - 1980)

$$\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\widetilde{\Omega}_3}\right)_{\mathrm{SNB}} = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}\right)^2 \frac{\hbar^2 c^2}{8E^2} \cdot \cdot \left(\frac{1+\cos^4(\theta/2)}{\sin^4(\theta/2)} + \frac{2}{\sin^2(\theta/2)\,\cos^2(\theta/2)} + \frac{1+\sin^4(\theta/2)}{\cos^4(\theta/2)}\right) \quad \text{im Schwerpunktsystem, falls } mc^2 \ll E\ , \tag{24.70}$$

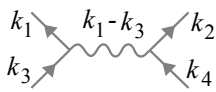
wobei E die Energie jedes ein- oder auslaufenden Leptons im Schwerpunktsystem ist. Im ersten Summanden, der das Resultat bei kleinem Streuwinkel θ dominiert, erkennt man die t-Kanal-Streuung (24.69). Der dritte Summand beschreibt die u-Kanal-Streuung. Der zweite Summand, der – ebenso wie die beiden anderen Summanden – für beliebige Streuwinkel ≥ 0 ist, entsteht durch die Interferenz zwischen beiden Kanälen.

Bei $\theta \to 0$, dem Fall der sogenannten Vorwärtsstreuung, divergieren die beiden ersten Summanden. Weil bei Vorwärtsstreuung die Frequenz des intermediären Photons im linken Graphen (24.47a) unmessbar klein wird, bezeichnet man die Divergenz bei Vorwärtsstreuung als Infrarotdivergenz. In Abschnitt 24.3.6 werden wir das Problem der IR-Divergenzen, das uns an vielen Stellen der QED begegnet, weiter diskutieren.

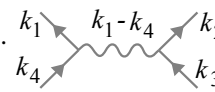
24.3.2 Antilepton-Antilepton Streuung

Bei der Streuung eines Antileptons an einem Antilepton erhält man die gleichen Symmetriefaktoren, wie sie in (23.31) für die Streuung eines Antinukleons an einem Antinukleon in der Yukawa-Theorie angegeben wurden. Auch die Anzahl der jeweils erforderlichen Vertauschungen fermionischer Operatoren ist die gleiche wie in den Matrixelementen (23.30), so dass die beiden Summanden das gleiche Vorzeichen wie in (23.31) haben. Die Streumatrix der Antileptonen

$$\mathcal{M}^{(2)} \mathrel{\widehat{=}} 2 \cdot$$



$$+\, 2 \cdot$$



$$\mathcal{M}^{(2)} = 2 \cdot \frac{1}{2!}\Big(\frac{+ie}{\hbar}\Big)^2 \cdot \cdot \Bigg(- \,({}^{r_3}\bar{v}^{\boldsymbol{k}_3}\,\gamma^{\mu\,r_1} v^{\boldsymbol{k}_1})\,\frac{(-ig_{\mu\nu}\,\mu_0\hbar c)}{(k_1-k_3)^2+i\epsilon'}\,({}^{r_4}\bar{v}^{\boldsymbol{k}_4}\,\gamma^{\nu\,r_2} v^{\boldsymbol{k}_2}) + + \,({}^{r_4}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_4}\,\gamma^{\mu\,r_1} u^{\boldsymbol{k}_1})\,\frac{(-ig_{\mu\nu}\,\mu_0\hbar c)}{(k_1-k_4)^2+i\epsilon'}\,({}^{r_3}\bar{v}^{\boldsymbol{k}_3}\,\gamma^{\nu\,r_2} v^{\boldsymbol{k}_2})\Bigg) \tag{24.71}$$

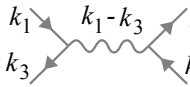
unterscheidet sich von (24.47b) durch nichts anderes, als dass die Spinoren $\bar{u}$ und u durch die Spinoren $\bar{v}$ und v ersetzt sind. Insbesondere haben beide Gleichungen das selbe Vorzeichen. Auch das Betragsquadrat der Streumatrix unterscheidet sich von (24.52) nur durch die Ersetzung aller Spinoren $\bar{u}$ und u durch die Spinoren $\bar{v}$ und v.

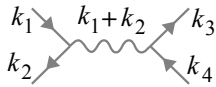
Wenn man Streumatrix und Wirkungsquerschnitt für den Fall berechnet, dass die Spins der ein- und auslaufenden Teilchen nicht gemessen werden, dann erhalten wegen (24.54) die Massen das umgekehrte Vorzeichen wie bei der Streuung von Leptonen. Bei der Berechnung der Spuren in (24.57) erhält man aber in allen Termen, die eine ungerade Anzahl von Massefaktoren enthalten, auch die Spur einer ungeraden Anzahl von γ-Matrizen, die nach den Sätzen (24.59) Null ergeben. Nur Terme mit einer geraden Anzahl von Massefaktoren überleben, und in ihnen kompensieren sich die negativen Vorzeichen. Deshalb erhält man, wenn die Spins der ein- und auslaufenden Teilchen nicht kontrolliert werden, für die Streuung von Antileptonen an Antileptonen *exakt* die gleiche Streumatrix und den gleichen Wirkungsquerschnitt wie für die Streuung von Leptonen an Leptonen, nämlich (24.68) bzw. (24.69) für die Streuung zwischen unterschiedlichen Antileptonen und (24.70) für die Streuung zwischen gleichartigen Antileptonen.

Der zweite Summand in (24.71) verschwindet, wenn die streuenden Teilchen unterscheidbar sind. Das sind sie bei unterschiedlichem Flavor immer, bei gleichem Flavor nur im nichtrelativistischen Grenzfall bei unterschiedlicher Polarisation. Wegen (A.153h) = (A.153e) gilt auch für die Streuung von Antileptonen an Antileptonen die nichtrelativistische Streumatrix (24.50).

24.3.3 Lepton-Antilepton Streuung

Es laufen ein Lepton mit Wellenzahl k_1, Spinvariable r_1, und Masse m_1, sowie ein Antilepton mit Wellenzahl k_2, Spinvariable r_2, und Masse m_2 ein. Nach dem Streuereignis läuft ein Lepton mit Wellenzahl k_3, Masse m_3 und Spinvariable r_3, sowie ein Antilepton mit Wellenzahl k_4, Spinvariable r_4, und Masse m_4 aus. Die Symmetriefaktoren und Vorzeichen sind die gleichen, wie sie in der Yukawa-Theorie für die Streuung eines Nukleons an einem Antinukleon gefunden wurden, siehe (23.34). Mit den Regeln von Kasten 24.1 erhält man

$$\mathcal{M}^{(2)} \mathrel{\widehat{=}} 2 \cdot$$ 

$$+\, 2 \cdot$$ 

$$\mathcal{M}^{(2)} = 2 \cdot \frac{1}{2!}\Big(\frac{+ie}{\hbar}\Big)^2 \Big((\bar{u}^{\boldsymbol{k}_3 r_3} \gamma^\mu u^{\boldsymbol{k}_1 r_1}) \frac{(-ig_{\mu\nu}\,\mu_0\hbar c)}{(k_1-k_3)^2 + i\epsilon'} (\bar{v}^{\boldsymbol{k}_2 r_2} \gamma^\nu v^{\boldsymbol{k}_4 r_4}) - \\ - (\bar{v}^{\boldsymbol{k}_2 r_2} \gamma^\mu u^{\boldsymbol{k}_1 r_1}) \frac{(-ig_{\mu\nu}\,\mu_0\hbar c)}{(k_1+k_2)^2 + i\epsilon'} (\bar{u}^{\boldsymbol{k}_3 r_3} \gamma^\nu v^{\boldsymbol{k}_4 r_4}) \Big) \,. \tag{24.72}$$

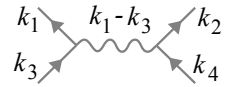
Beim zweiten Summanden handelt es sich um den „s-Kanal“ der Streuung, vergleiche (24.48). Er ist in der QED nur bei $m_1 = m_2$ von Null verschieden, weil an jedem Vertex der Flavor der Fermionen erhalten wird. Der für die Praxis bei weitem wichtigste Fall ist die Streuung von Elektronen an Positronen, die in den letzten Jahrzehnten des vergangenen Jahrhunderts intensiv untersucht wurde. Wenn nach der Streuung auch wieder ein Elektron und ein Positron auslaufen, dann tragen sowohl der t-Kanal als auch der s-Kanal zum Wirkungsquerschnitt bei, und es gibt Interferenzen zwischen beiden Arten der Streuung. Um die sehr umfangreichen Formeln für diesen interessanten Fall zu vermeiden, werden wir stattdessen zwei einfachere Szenarien betrachten: Zunächst die Streuung eines Elektrons an einem Antimyon (dabei trägt nur der t-Kanal bei, der s-Kanal ist Null), anschließend die Vernichtung eines Elektrons und eines Positrons in ein Photon, aus dem durch Paarbildung ein Myon und ein Antimyon entstehen (dabei trägt nur der s-Kanal bei, der t-Kanal ist Null).

Zur Streuung eines Elektrons an einem Antimyon trägt nur der erste Graph in (24.72) bei. Weil

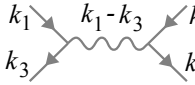
$$({}^{r_3}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_3}\,\gamma^{\mu\,r_1}u^{\boldsymbol{k}_1})g_{\mu\nu}({}^{r_2}\bar{v}^{\boldsymbol{k}_2}\,\gamma^{\nu\,r_4}v^{\boldsymbol{k}_4}) \overset{(A.153)}{\approx} 4m_1m_2c^4\,\delta_{r_3r_1}\,\delta_{r_2r_4}$$
$$\text{falls } |c\hbar\boldsymbol{k}_j| \ll m_jc^2 \text{ für } j=1,2$$

gilt, ist die Streumatrix in nichtrelativistischer Näherung

$$\mathcal{M}^{(2)} \approx \frac{ie^2\,4m_1m_2c^4\,\delta_{r_3r_1}\,\delta_{r_2r_4}\,\mu_0\hbar^{-1}c}{(k_1-k_3)^2+i\epsilon'} \approx 2\cdot$$



$$\overset{(24.50)}{\approx} -2\cdot$$



$$\overset{(24.50)}{\approx} -2\cdot$$

$$\text{falls } |c\hbar\boldsymbol{k}_j| \ll m_jc^2 \text{ für } j=1,2\,. \tag{24.73}$$

Bei Streuung zwischen Teilchen mit gleichnamigen Ladungen hat die Streumatrix ein negatives Vorzeichen, bei Streuung zwischen Teilchen mit ungleichnamigen Ladungen aber ein positives Vorzeichen. Aus der klassischen elektrostatischen Theorie wissen wir, dass gleichnamige elektrische Ladungen sich abstoßen, ungleichnamige sich aber anziehen. Also bedeutet negatives Vorzeichen der Streumatrix Abstoßung, positives Vorzeichen der Streumatrix Anziehung. In Gleichung (23.37) der Yukawa-Theorie hat die Amplitude stets ein positives Vorzeichen. Also ist die Yukawa-Wechselwirkung stets anziehend, egal ob Nukleonen mit Nukleonen oder Nukleonen mit Antinukleonen oder Antinukleonen mit Antinukleonen wechselwirken. (In den auf (23.25b) folgenden Zeilen hatten wir angemerkt, dass der Wert eines Matrixelements in der Quantentheorie nur bis auf einen beliebig wählbaren Phasenfaktor bestimmt ist. Unser Vergleich zwischen den Vorzeichen der Streumatrizen in der Yukawa-Theorie und der QED ist trotzdem sinnvoll und korrekt, weil wir zur Berechnung exakt die gleichen Matrixelemente verwendet haben, die sich nur durch den Bosonen-Operator ϕ bzw. A unterscheiden, aber nicht durch irgend einen Phasenfaktor.)

Es sind nicht die Ladungsparameter (e oder g), die in der Quantenfeldtheorie über Anziehung oder Abstoßung zwischen Fermionen entscheiden. Denn die Ladungsparameter werden in den Formeln mit gleichem Vorzeichen eingesetzt, egal ob es sich um Teilchen oder Antiteilchen handelt. Anziehung oder Abstoßung wird vielmehr erstens festgelegt durch die Anzahl (die in

Yukawa-Theorie und QED identisch ist) der Vertauschungen fermionischer Operatoren bei der Kontraktion der Matrixelemente zu Propagatoren, und zweitens durch die unterschiedlichen Vorzeichen der Produkte

$$
\begin{aligned}
{}^{r}\bar{u}^{\boldsymbol{f}}\ {}^{s}u^{\boldsymbol{k}} &\overset{(A.153a)}{\approx} 2mc^2\,\delta_{rs} & {}^{r}\bar{u}^{\boldsymbol{f}}\,\gamma^0\ {}^{s}u^{\boldsymbol{k}} &\overset{(A.153e)}{\approx} 2mc^2\,\delta_{rs}\\
{}^{r}\bar{v}^{\boldsymbol{f}}\ {}^{s}v^{\boldsymbol{k}} &\overset{(A.153d)}{\approx} -2mc^2\,\delta_{rs} & {}^{r}\bar{v}^{\boldsymbol{f}}\,\gamma^0\ {}^{s}v^{\boldsymbol{k}} &\overset{(A.153h)}{\approx} 2mc^2\,\delta_{rs}\ ,
\end{aligned}
$$

(die in Yukawa-Theorie und QED im Fall ungleichnamiger Ladungen der streuenden Teilchen unterschiedliche Vorzeichen des Gesamtprodukts ergeben). Die Quantenfeldtheorie ist in dieser Hinsicht weitaus weniger anschaulich als die klassische Theorie.

Wir setzen jetzt $t \overset{(24.48)}{=} (k_1-k_3)^2 \neq 0$ voraus, so dass der Summand $i\epsilon'$ im Nenner der Streumatrix entfallen kann, und berechnen das Betragsquadrat der Streumatrix für den t-Kanal bei beliebiger Energie:

$$
\begin{aligned}
\left|\mathcal{M}^{(2)}\right|^2 &\overset{(24.51)}{=} \frac{e^4\mu_0^2c^2}{\hbar^2(k_1-k_3)^4}\cdot \qquad (24.74)\\
&\cdot\ ({}^{r_3}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_3}\,\gamma^\mu\,{}^{r_1}u^{\boldsymbol{k}_1})({}^{r_1}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_1}\,\gamma^\nu\,{}^{r_3}u^{\boldsymbol{k}_3})({}^{r_2}\bar{v}^{\boldsymbol{k}_2}\,\gamma_\mu\,{}^{r_4}v^{\boldsymbol{k}_4})({}^{r_4}\bar{v}^{\boldsymbol{k}_4}\,\gamma_\nu\,{}^{r_2}v^{\boldsymbol{k}_2})
\end{aligned}
$$

Wenn die Spins der ein- und auslaufenden Teilchen nicht gemessen werden, gilt

$$
\begin{aligned}
\left|\mathcal{M}^{(2)}\right|^2_{\mathrm{SNB}} &= \frac{1}{4}\sum_{r_1,r_2,r_3,r_4}\left|\mathcal{M}^{(2)}\right|^2 =\\
&= \frac{e^4\mu_0^2c^2}{4\hbar^2(k_1-k_3)^4}\sum_{r_1,r_3}({}^{r_3}u_d^{\boldsymbol{k}_3}{}^{r_3}\bar{u}_a^{\boldsymbol{k}_3}\,\gamma^\mu_{ab}\,{}^{r_1}u_b^{\boldsymbol{k}_1}{}^{r_1}\bar{u}_c^{\boldsymbol{k}_1}\,\gamma^\nu_{cd})\cdot\\
&\quad\cdot\sum_{r_2,r_4}({}^{r_2}v_d^{\boldsymbol{k}_2}\,{}^{r_2}\bar{v}_a^{\boldsymbol{k}_2}\,\gamma_{\mu\,ab}\,{}^{r_4}v_b^{\boldsymbol{k}_4}\,{}^{r_4}\bar{v}_c^{\boldsymbol{k}_4}\,\gamma_{\nu\,cd}) =\\
&\overset{(24.54)}{=} \frac{e^4\mu_0^2\hbar^2c^6}{4(k_1-k_3)^4}\,\mathrm{Sp}\Big\{(\not{k}_3+m_3\tfrac{c}{\hbar})\,\gamma^\mu(\not{k}_1+m_1\tfrac{c}{\hbar})\,\gamma^\nu\Big\}\cdot\\
&\quad\cdot\,\mathrm{Sp}\Big\{(\not{k}_2-m_2\tfrac{c}{\hbar})\,\gamma_\mu(\not{k}_4-m_4\tfrac{c}{\hbar})\,\gamma_\nu\Big\} \qquad (24.75)
\end{aligned}
$$

Das unterscheidet sich vom ersten Summanden in (24.57) durch nichts

anderes, als dass unter der Spur die Indizes 1 und 3 vertauscht sind, und dass die Massen m_2 und m_4 negative Vorzeichen haben. Aus (24.61) erkennt man, dass diese beiden Unterschiede in der weiteren Berechnung exakt kompensiert werden. Man bekommt also für die Streuung eines Elektrons an einem Antimyon genau den gleichen Wirkungsquerschnitt (24.68) bzw. (24.69) wie für die Streuung eines Elektrons an einem Myon.

Jetzt betrachten wir den s-Kanal der Lepton-Antilepton-Streuung. Um Interferenzen mit dem t-Kanal zu vermeiden, untersuchen wir die Vernichtung eines Elektrons und eines Positrons in ein virtuelles Photon, aus dem dann durch Paarbildung ein Myon und ein Antimyon entstehen, siehe den zweiten Graphen in (24.72). Für diese Reaktion muss die Schwerpunktsenergie mindestens $2m_\mu c^2 \approx 414 m_e c^2$ betragen. Deshalb gibt es keinen niederenergetischen Grenzfall. Wir setzen im Folgenden $s \overset{(24.48)}{=} (k_1+k_2)^2 \neq 0$ voraus, so dass der Summand $i\epsilon'$ im Nenner der Streumatrix entfallen kann, und berechnen das Betragsquadrat der Streumatrix für den s-Kanal:

$$\left|\mathcal{M}^{(2)}\right|^2 \overset{(24.51)}{=} \frac{e^4\mu_0^2 c^2}{\hbar^2(k_1+k_2)^4} \cdot \tag{24.76}$$
$$\cdot \, ({}^{r_1}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_1}\,\gamma^\nu\,{}^{r_2}v^{\boldsymbol{k}_2})({}^{r_4}\bar{v}^{\boldsymbol{k}_4}\,\gamma_\nu\,{}^{r_3}u^{\boldsymbol{k}_3})({}^{r_2}\bar{v}^{\boldsymbol{k}_2}\,\gamma^\mu\,{}^{r_1}u^{\boldsymbol{k}_1})({}^{r_3}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_3}\,\gamma_\mu\,{}^{r_4}v^{\boldsymbol{k}_4})$$

Wenn die Spins nicht beobachtet werden, erhält man mit den gleichen Umformungen, die bereits in (24.54)ff verwendet wurden,

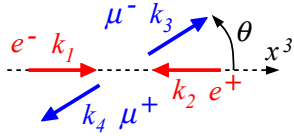
$$\begin{aligned}
\left|\mathcal{M}^{(2)}\right|^2_{\text{SNB}} &= \frac{1}{4}\sum_{r_1,r_2,r_3,r_4}\left|\mathcal{M}^{(2)}\right|^2 = \\
&= \frac{e^4\mu_0^2\hbar^2c^6}{4(k_1+k_2)^4}\,\text{Sp}\Big\{(\not{k}_1 + m_1\tfrac{c}{\hbar})\,\gamma^\nu(\not{k}_2 - m_2\tfrac{c}{\hbar})\,\gamma^\mu\Big\}\cdot \\
&\quad\cdot\,\text{Sp}\Big\{(\not{k}_4 - m_4\tfrac{c}{\hbar})\,\gamma_\nu(\not{k}_3 + m_3\tfrac{c}{\hbar})\,\gamma_\mu\Big\} = \\
&= \frac{e^4\mu_0^2\hbar^2c^6}{4(k_1+k_2)^4}\Big(k_1^\alpha k_2^\beta\,\text{Sp}\Big\{(\gamma_\alpha\gamma^\nu\gamma_\beta\gamma^\mu\Big\} - m_1\tfrac{c}{\hbar}m_2\tfrac{c}{\hbar}\,\text{Sp}\Big\{\gamma^\nu\gamma^\mu\Big\}\Big)\cdot \\
&\quad\cdot\,\Big(k_4^\gamma k_3^\delta\,\text{Sp}\Big\{\gamma_\gamma\gamma_\nu\gamma_\delta\gamma_\mu\Big\} - m_4\tfrac{c}{\hbar}m_3\tfrac{c}{\hbar}\,\text{Sp}\Big\{\gamma_\nu\gamma_\mu\Big\}\Big)\,.
\end{aligned} \tag{24.77}$$

Summanden, welche die Spur von drei γ-Matrizen enthalten, wurden wegen

(24.59) sofort gestrichen. Weiter folgt mit (24.59):

$$\left|\mathcal{M}^{(2)}\right|^2_{\text{SNO}} = \frac{e^4\mu_0^2\hbar^2c^6}{4(k_1+k_2)^4}\cdot \tag{24.78}$$
$$\cdot\left(k_1^\alpha k_2^\beta\, 4(g_\alpha{}^\nu g_\beta{}^\mu - g_{\alpha\beta}g^{\nu\mu} + g_\alpha{}^\mu g^\nu{}_\beta) - 4g^{\nu\mu}m_1m_2c^2/\hbar^2\right)\cdot$$
$$\cdot\left(k_4^\gamma k_3^\delta\, 4(g_{\gamma\nu}g_{\delta\mu} - g_{\gamma\delta}g_{\nu\mu} + g_{\gamma\mu}g_{\nu\delta}) - 4g_{\nu\mu}m_4m_3c^2/\hbar^2\right)$$
$$= \frac{8e^4\mu_0^2\hbar^2c^6}{(k_1+k_2)^4}\left((k_1k_4)(k_2k_3) + (k_1k_3)(k_2k_4) + (k_1k_2)m_4m_3c^2/\hbar^2\right)$$

Hier wurden zwei Summanden gestrichen, die das Produkt m_1m_2 der Massen von Elektron und Positron enthalten. Denn diese Summanden sind vernachlässigbar klein gegen die drei anderen Summanden in diesem Ausdruck. Wir formulieren den Ausdruck so um, dass anstelle der Vierer-Wellenzahlen die Energien, Massen, und Streuwinkel der Teilchen explizit sichtbar werden. Weil die Masse des Positrons gleich der Masse des Elektrons und die Masse des Antimyons gleich der Masse des Myons ist, gilt im Schwerpunktsystem



$$\boldsymbol{k}_2 = -\boldsymbol{k}_1 \quad , \quad \boldsymbol{k}_4 = -\boldsymbol{k}_3$$
$$E_1 = E_2 = E_3 = E_4\ .$$

Aufgrund der vernachlässigbar kleinen Elektronenmasse gilt außerdem

$$|\boldsymbol{k}_3| = |\boldsymbol{k}_4| = \sqrt{\left(\frac{E_3}{\hbar c}\right)^2 - \left(\frac{m_\mu c}{\hbar}\right)^2}$$
$$|\boldsymbol{k}_1| = |\boldsymbol{k}_2| = \frac{E_1}{\hbar c}$$
$$k_2k_2 = k_1k_1 = k_1^0k_1^0 - \boldsymbol{k}_1^2 = 0\ .$$

Damit können die Faktoren in Gleichung (24.78) in folgender Form geschrieben werden:

$$
\begin{aligned}
k_1k_2 &= k_1^0k_2^0 - \boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2 = (k_1^0)^2 + |\boldsymbol{k}_1|^2 = 2\Big(\frac{E_1}{\hbar c}\Big)^2 \\
k_1k_3 &= \Big(\frac{E_1}{\hbar c}\Big)^2 - \frac{E_1}{\hbar c}\sqrt{\Big(\frac{E_1}{\hbar c}\Big)^2 - \Big(\frac{m_\mu c}{\hbar}\Big)^2}\,\cos\theta \\
k_1k_4 &= \Big(\frac{E_1}{\hbar c}\Big)^2 + \frac{E_1}{\hbar c}\sqrt{\Big(\frac{E_1}{\hbar c}\Big)^2 - \Big(\frac{m_\mu c}{\hbar}\Big)^2}\,\cos\theta \\
k_2k_3 &= k_1k_4 \quad , \quad k_2k_4 = k_1k_3 \\
k_3k_4 &= \Big(\frac{E_1}{\hbar c}\Big)^2 + \Big(\frac{E_1}{\hbar c}\Big)^2 - \Big(\frac{m_\mu c}{\hbar}\Big)^2 \\
(k_1{+}k_2)^4 &\overset{(24.48)}{=} s^2 = 4(k_1k_2)^2 = 16\Big(\frac{E_1}{\hbar c}\Big)^4
\end{aligned}
\tag{24.79}
$$

Einsetzen in Gleichung (24.78) ergibt

$$
\begin{aligned}
\Big|\mathcal{M}^{(2)}\Big|^2_{\text{SNB}} &= \frac{e^4\mu_0^2\hbar^4c^8}{2E_1^2}\left(\Big(\frac{E_1}{\hbar c} + |\boldsymbol{k}_3|\,\cos\theta\Big)^2 + \right. \\
&\qquad \left. + \Big(\frac{E_1}{\hbar c} - |\boldsymbol{k}_3|\,\cos\theta\Big)^2 + 2\Big(\frac{m_\mu c}{\hbar}\Big)^2\right) \\
&= e^4\mu_0^2\hbar^2c^6\left(1 + \frac{m_\mu^2c^4}{E_1^2} + \Big(1 - \frac{m_\mu^2c^4}{E_1^2}\Big)\cos^2\theta\right)
\end{aligned}
\tag{24.80}
$$

Dies ist wiederum in den Wirkungsquerschnitt (24.34) einzusetzen. Es ist $|v_{\text{rel}}| = 2c$, weil Elektron und Positron hoch relativistisch sind. Mit $\epsilon_0\mu_0 = c^{-2}$ erhält man als Wirkungsquerschnitt für die Vernichtung eines Elektrons und eines Positrons in ein Myon und ein Antimyon, wenn die Spins nicht beobachtet werden:

$$
\begin{aligned}
\Big(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\widetilde{\Omega}_3}\Big)_{\text{SNB}} &\overset{(24.34)}{=} \Big(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}\Big)^2\frac{\hbar^2c^2}{16E_1^2}\cdot \\
&\quad \cdot\left(1 + \frac{m_\mu^2c^4}{E_1^2} + \Big(1 - \frac{m_\mu^2c^4}{E_1^2}\Big)\cos^2\theta\right)\sqrt{1 - \frac{m_\mu^2c^4}{E_1^2}} \\
&\quad \text{im Schwerpunktsystem}
\end{aligned}
\tag{24.81}
$$

Wenn die Energie der einlaufenden Teilchen sehr groß gegen die Ruheener-

gie der Myonen ist, ist im Schwerpunktsystem $E_1 = E_2 \equiv E$, und der Wirkungsquerschnitt vereinfacht sich zu

$$\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\widetilde{\Omega}_3}\right)_{\text{SNB}} = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}\right)^2 \cdot \hbar^2 c^2 \cdot \frac{1+\cos^2\theta}{16E^2}$$
$$\text{im Schwerpunktsystem, falls } m_\mu c^2 \ll E \ . \tag{24.82}$$

Wir haben die Berechnungen für die Streuung von Elektronen und Myonen bzw. deren Antiteilchen durchgeführt, um uns die mühsame Berechnung der Interferenzterme zwischen t-Kanal-Streuung und s-Kanal-Streuung zu ersparen. 1936 veröffentlichte [51] Bhabha[5] die Berechnung für die Streuung mit ein- und auslaufenden Leptonen und Antileptonen gleichen Flavors inklusive der Interferenzterme. Sein Ergebnis lautet:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\widetilde{\Omega}_3}\right)_{\text{SNB}} = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}\right)^2 \cdot \frac{\hbar^2 c^2}{8E^2} \cdot$$
$$\cdot \left(\frac{1+\cos^2\theta}{2} - \frac{2\cos^4(\theta/2)}{\sin^2(\theta/2)} + \frac{1+\cos^4(\theta/2)}{\sin^4(\theta/2)}\right)$$
$$\text{im Schwerpunktsystem, falls } mc^2 \ll E \ . \tag{24.83}$$

Man erkennt im ersten Summanden die s-Kanal-Streuung (24.82), im dritten Summanden die t-Kanal-Streuung (24.69). Der zweite Summand, der stets ≤ 0 ist, kommt durch die Interferenz der beiden Kanäle zustande.

24.3.4 Kreuzende Symmetrie

Im hoch relativistischen Fall

$$k_j k_j = k_j^0 k_j^0 - \boldsymbol{k}_j \boldsymbol{k}_j = |\boldsymbol{k}_j| \cdot |\boldsymbol{k}_j| - \boldsymbol{k}_j \boldsymbol{k}_j = 0 \ , \tag{24.84}$$

in dem die Massen aller am Streuereignis beteiligten Teilchen vernachlässigbar klein sind, erhalten die Mandelstam-Variablen die Form

[5] Homi Jehangir Bhabha (1909 - 1966)

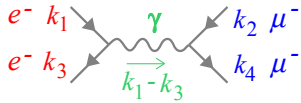
$$s \overset{(24.48)}{=} (k_1 + k_2)^2 = +2k_1k_2 \tag{24.85a}$$

$$t \overset{(24.48)}{=} (k_1 - k_3)^2 = -2k_1k_3 \tag{24.85b}$$

$$u \overset{(24.48)}{=} (k_1 - k_4)^2 = -2k_1k_4\ . \tag{24.85c}$$

Die Betragsquadrate der Streumatrizen bei nicht beobachteten Spins können in diesem Fall für den t-Kanal folgendermaßen geschrieben werden:

$e^-\mu^- \longrightarrow e^-\mu^-$:

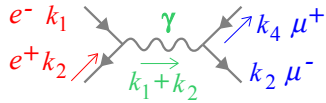


$$\left|\mathcal{M}^{(2)}\right|^2_{\text{SNB}} \overset{(24.62)}{=} 8e^4\mu_0^2\hbar^2c^6\frac{(k_1k_2)(k_3k_4)+(k_1k_4)(k_2k_3)}{(k_1-k_3)^4}$$

$$\overset{(24.65)}{=} 2e^4\mu_0^2\hbar^2c^6\frac{s^2+u^2}{t^4} \tag{24.86a}$$

Für den s-Kanal gilt in der gleichen Näherung:

$e^-e^+ \longrightarrow \mu^-\mu^+$:

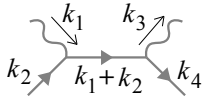


$$\left|\mathcal{M}^{(2)}\right|^2_{\text{SNB}} \overset{(24.78)}{=} 8e^4\mu_0^2\hbar^2c^6\frac{(k_1k_4)(k_2k_3)+(k_1k_3)(k_2k_4)}{(k_1+k_2)^4}$$

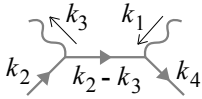
$$\overset{(24.79)}{=} 2e^4\mu_0^2\hbar^2c^6\frac{u^2+t^2}{s^4} \tag{24.86b}$$

Im hoch relativistischen Fall unterscheiden sich die Betragsquadrate der Streumatrizen für t-Kanal-Streuung und s-Kanal-Streuung durch nichts anderes als die Vertauschung $t \leftrightarrow s$. Dieser enge formale Zusammenhang wird als „kreuzende Symmetrie“ bezeichnet. Es ist keine Überraschung, dass diese Symmetrie existiert. Denn die beiden schwarz gezeichneten Diagramme (24.86) sind identisch. Nur ihre farbig gezeichnete Interpretation ist unterschiedlich. Wieder erkennt man, dass Antiteilchen formal Teilchen entsprechen, die sich rückwärts durch die Zeit bewegen.

24.3.5 Photon-Elektron-Streuung



v-Kanal



w-Kanal (24.87)

v-Kanal-Streuung und w-Kanal-Streuung tragen zur Streuung eines Photons an einem Elektron bei, die als Compton-Streuung[6] bezeichnet wird. Die Namen v-Kanal und w-Kanal sind in der Literatur nicht üblich. Sie wurden hier eingeführt, um die Referenzierung zu erleichtern. Bei v-Kanal-Streuung absorbiert ein Elektron mit Wellenzahl k_2, Masse m und Polarisation r_2 ein Photon mit Wellenzahl k_1 und Polarisation $\epsilon_{\boldsymbol{k}_1}^{(\alpha_1)}$. Anschließend emittiert es ein Photon mit Wellenzahl k_3 und Polarisation $\epsilon_{\boldsymbol{k}_3}^{(\alpha_3)}$, und läuft mit Wellenzahl k_4 und Polarisation r_4 aus. Bei w-Kanal-Streuung emittiert ein Elektron mit Wellenzahl k_2, Masse m und Polarisation r_2 ein Photon mit Wellenzahl k_3 und Polarisation $\epsilon_{\boldsymbol{k}_3}^{(\alpha_3)}$. Anschließend absorbiert es ein Photon mit Wellenzahl k_1 und Polarisation $\epsilon_{\boldsymbol{k}_1}^{(\alpha_1)}$, und läuft mit Wellenzahl k_4 und Polarisation r_4 aus.

Zunächst überlegen wir, welche Vorzeichen und welche Symmetriefaktoren die beiden Diagramme haben. Wir nennen in beiden Diagrammen den linken Vertex y, den rechten Vertex z. Die Kontraktionen sind

v-Kanal: (24.88a)

$$\langle 0|\, T\overbrace{\psi(x_4)\, \underbrace{A(x_3)\, \overline{\psi}(z)}\, A(z)\, \psi(z)\, \overline{\psi}(y)}\, \underbrace{A(y)\, \psi(y)\, \overline{\psi}(x_2)}\, A(x_1)\, |0\rangle_c$$

w-Kanal: (24.88b)

$$\langle 0|\, T\overbrace{\psi(x_4)\, \underbrace{A(x_3)\, \overline{\psi}(z)\, \underbrace{A(z)\, \psi(z)\, \overline{\psi}(y)}\, A(y)}\, \psi(y)\, \overline{\psi}(x_2)}\, A(x_1)\, |0\rangle_c$$

In beiden Fällen sind keine Vertauschungen fermionischer Operatoren erforderlich, so dass beide Diagramme mit gleichem Vorzeichen zur Streumatrix

[6] benannt nach Arthur Holly Compton (1892 - 1962), der in den frühen Zwanziger Jahren des 20. Jahrhunderts diese Streuung experimentell und theoretisch untersuchte [52].

beitragen. Der Symmetriefaktor jedes Diagramms ist 2, weil $\overline{\psi}(x_2)$ mit $\psi(y)$ oder mit $\psi(z)$ zum Propagator kombiniert werden kann. Nach dieser Festlegung (die einer Permutation der Vertizes $y \leftrightarrow z$ entspricht) bleibt für die restlichen Kontraktionen der beiden Diagramme nur noch jeweils eine Möglichkeit.

Mit den Regeln von Kasten 24.1 findet man folgende Streumatrix:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^{(2)} = 2 \cdot \mathcal{U}_{\mathrm{S}} \frac{1}{2!} \Big(\frac{+ie\gamma^{\nu}}{\hbar}\Big) \Big(\frac{+ie\gamma^{\mu}}{\hbar}\Big) \hbar^2 c^2 \mu_0 \cdot \\ \cdot \Bigg(\epsilon^{(\alpha_1)}_{\boldsymbol{k}_1 \nu}{}^{r_2} u^{\boldsymbol{k}_2} \frac{i\big(\gamma^{\sigma}(k_1+k_2)_{\sigma} + m\frac{c}{\hbar}\big)}{(k_1+k_2)^2 - m^2\frac{c^2}{\hbar^2} + i\epsilon'} \epsilon^{(\alpha_3)*}_{\boldsymbol{k}_3 \mu}{}^{r_4} \overline{u}^{\boldsymbol{k}_4} + \\ + \epsilon^{(\alpha_3)*}_{\boldsymbol{k}_3 \nu}{}^{r_2} u^{\boldsymbol{k}_2} \frac{i\big(\gamma^{\tau}(k_2-k_3)_{\tau} + m\frac{c}{\hbar}\big)}{(k_2-k_3)^2 - m^2\frac{c^2}{\hbar^2} + i\epsilon'} \epsilon^{(\alpha_1)}_{\boldsymbol{k}_1 \mu}{}^{r_4} \overline{u}^{\boldsymbol{k}_4} \Bigg) \end{aligned} \tag{24.89}$$

Weil das Elektron die Masse m hat und das Photon masselos ist, gilt

$$\begin{aligned}(k_1+k_2)^2 - m^2\frac{c^2}{\hbar^2} &= 0 + 2k_1k_2 + m^2\frac{c^2}{\hbar^2} - m^2\frac{c^2}{\hbar^2} = 2k_1k_2 \\ (k_2-k_3)^2 - m^2\frac{c^2}{\hbar^2} &= m^2\frac{c^2}{\hbar^2} - 2k_2k_3 + 0 - m^2\frac{c^2}{\hbar^2} = -2k_2k_3 \ .\end{aligned}$$

Damit, und mit Anwendung des in (23.21) definierten Umordnungs-Operators $\mathcal{U}_{\mathrm{S}}$, erhält die Streumatrix die etwas einfachere Form

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^{(2)} = -ie^2c^2\mu_0 \, {}^{r_4}\overline{u}^{\boldsymbol{k}_4} \, \gamma^{\mu} \Bigg(\epsilon^{(\alpha_3)*}_{\boldsymbol{k}_3 \mu} \frac{\gamma^{\sigma}(k_1+k_2)_{\sigma} + m\frac{c}{\hbar}}{2k_1k_2 + i\epsilon'} \epsilon^{(\alpha_1)}_{\boldsymbol{k}_1 \nu} - \\ - \epsilon^{(\alpha_1)}_{\boldsymbol{k}_1 \mu} \frac{\gamma^{\tau}(k_2-k_3)_{\tau} + m\frac{c}{\hbar}}{2k_2k_3 - i\epsilon'} \epsilon^{(\alpha_3)*}_{\boldsymbol{k}_3 \nu} \Bigg) \gamma^{\nu} \, {}^{r_2}u^{\boldsymbol{k}_2} \ .\end{aligned} \tag{24.90}$$

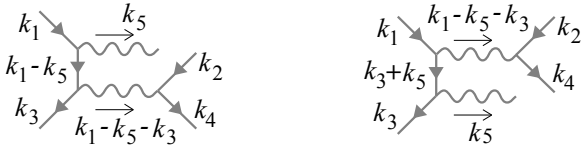
Hier erkennt man eine neuartige Divergenz: Weil das Photon die Ruhemasse Null hat, ist seine Wellenzahl nicht nach unten begrenzt. Im Fall $k_1 \to 0$ und/oder $k_3 \to 0$ divergiert die Streumatrix. Derartige Infrarot-Divergenzen traten weder in der ψ^s-Theorie noch in der Yukawa-Theorie auf, weil deren Bosonen massiv sind. Die ψ^s-Theorie und die Yukawa-Theorie kennen nur UV-Divergenzen, die in Graphen mit bestimmten Schleifen auftreten.

Wir werden sehen, dass auch in der QED Schleifen mit UV-Divergenzen vorkommen. Zusätzlich gibt es aber bereits bei Baumgraphen der QED mit externen Photonenlinien IR-Divergenzen aufgrund der verschwindenden Ruhemasse des Photons.

Anders als UV-Divergenzen werden IR-Divergenzen nicht durch Renormierung behandelt, sondern durch andere Graphen kompensiert.

24.3.6 Bremsstrahlung und IR-Divergenzen

Seit dem Ende des 19. Jahrhunderts ist experimentell bekannt, dass elektrisch geladene Teilchen elektromagnetische Strahlung emittieren, wenn sie beschleunigt werden. Diese Strahlung wird als Bremsstrahlung bezeichnet. Für ein Streuereignis mit einem einlaufenden Elektron, einem einlaufenden Myon, einem auslaufenden Elektron, einem auslaufenden Myon, und einem auslaufenden Bremsstrahlungsphoton findet man in Störungsrechnung 3. Ordnung unter anderem die beiden folgenden Diagramme:

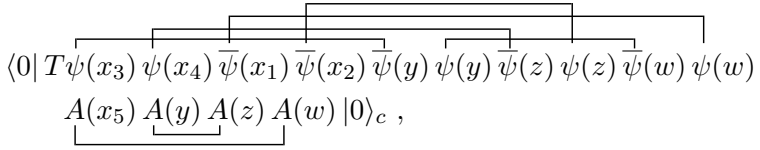


(24.91)

Das Elektron läuft mit Wellenzahl k_1 ein, und mit Wellenzahl k_3 aus. Das Myon läuft mit Wellenzahl k_2 ein, und mit Wellenzahl k_4 aus. Das Bremsstrahlungs-Photon läuft mit Wellenzahl k_5 aus.

Natürlich wird auch am Myonenstrom Bremsstrahlung auftreten. Weil die Streumatrix aber – wie wir gleich sehen werden – umgekehrt proportional zum Quadrat der Masse des geladenen Teilchens ist, und weil die Wahrscheinlichkeit des Streuereignisses wiederum proportional zum Quadrat der Streumatrix ist, wird Bremsstrahlung am Myonenstrom um mehr als den Faktor 10^{-9} mal seltener als am Elektronenstrom auftreten, und kann vernachlässigt werden. Denn Myonen haben eine etwa 207 mal so große Ruhemasse wie Elektronen. Deshalb können wir uns zur Untersuchung der Bremsstrahlung bei der Streuung von Elektronen an Myonen in guter Näherung auf die beiden abgebildeten Diagramme konzentrieren.

Vertauschungen Bosonischer Operatoren mit beliebigen anderen Operatoren ändern den Wert des Matrixelements nicht. Deshalb durften im Matrixelement



$$\langle 0|\, T\psi(x_3)\,\psi(x_4)\,\overline{\psi}(x_1)\,\overline{\psi}(x_2)\,\overline{\psi}(y)\,\psi(y)\,\overline{\psi}(z)\,\psi(z)\,\overline{\psi}(w)\,\psi(w)$$
$$A(x_5)\,A(y)\,A(z)\,A(w)\,|0\rangle_c\;, \tag{24.92}$$

die bosonischen Operatoren nach hinten geschoben werden, damit die Kontraktionsklammern jeweils in eine Zeile passen. Eingetragen sind die Kontraktionen, mit denen das linke Diagramm realisiert wird. Man erhält das gleiche Diagramm bei beliebiger Permutation der 3 Vertizes, deshalb ist der Symmetriefaktor dieses Diagramms $3! = 6$. Das ist in der QED immer so: Der Symmetriefaktor ist gleich der Fakultät der Anzahl der Vertizes. Die Anzahl der Vertizes wiederum ist gleich der Ordnung der Störungsrechnung. Deshalb kürzt sich der Symmetriefaktor gegen den Faktor 1/3!, der aus der Taylorentwicklung des Wechselwirkungsterms stammt. Für die Kontraktion sind 11 Vertauschungen fermionischer Operatoren erforderlich, was einen Faktor (-1) ergibt.

Um aus dem gleichen Matrixelement statt des ersten Graphen den zweiten zu konstruieren, müssen nur bosonische Operatoren anders kontrahiert und vertauscht werden. Deswegen haben beide Graphen den gleichen Symmetriefaktor und das gleiche Vorzeichen. Mithilfe der Regeln von Kasten 24.1 erhält man folgende Streuamplitude:

$$\overline{S}^{(3)} = \mathcal{M}^{(3)} \cdot \Big(\frac{1}{2\hbar\Omega}\Big)^{\frac{5}{2}} \sqrt{\frac{1}{\omega_{\boldsymbol{k_1}}\omega_{\boldsymbol{k_2}}\omega_{\boldsymbol{k_3}}\omega_{\boldsymbol{k_4}}\omega_{\boldsymbol{k_5}}}} \cdot$$
$$\cdot\; 2\pi\Omega\,\delta\Big(\sum_{j=1,2} k_j^0 - \sum_{j=3,4,5} k_j^0\Big) \cdot \delta_{\sum_{j=1,2}\boldsymbol{k}_j\,,\,\sum_{j=3,4,5}\boldsymbol{k}_j} \tag{24.93a}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^{(3)} = \frac{3!}{3!}\Big(\frac{+ie}{\hbar}\Big)^3 \hbar c\sqrt{\mu_0}\cdot \\ \cdot\Bigg(\Big({}^{r_3}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_3}\gamma^\nu \frac{i(\gamma^\tau(k_1-k_5)_\tau + m_e\frac{c}{\hbar})}{(k_1-k_5)^2 - m_e^2\frac{c^2}{\hbar^2}+i\epsilon'}\gamma^{\sigma\,r_1}u^{\boldsymbol{k}_1}\Big)\cdot \\ \cdot\,\epsilon^{(\alpha)*}_{\boldsymbol{k}_5\sigma}\frac{(-ig_{\nu\mu}\mu_0\hbar c)}{(k_1-k_5-k_3)^2+i\epsilon'}\Big({}^{r_4}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_4}\gamma^\mu\,{}^{r_2}u^{\boldsymbol{k}_2}\Big) + \\ + \Big({}^{r_3}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_3}\gamma^\sigma \frac{i(\gamma^\tau(k_3+k_5)_\tau + m_e\frac{c}{\hbar})}{(k_3+k_5)^2 - m_e^2\frac{c^2}{\hbar^2}+i\epsilon'}\gamma^{\nu\,r_1}u^{\boldsymbol{k}_1}\Big)\cdot \\ \cdot\,\epsilon^{(\alpha)*}_{\boldsymbol{k}_5\sigma}\frac{(-ig_{\nu\mu}\mu_0\hbar c)}{(k_1-k_5-k_3)^2+i\epsilon'}\Big({}^{r_4}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_4}\gamma^\mu\,{}^{r_2}u^{\boldsymbol{k}_2}\Big)\Bigg)\end{aligned} \tag{24.93b}$$

Die ein- und auslaufenden Teilchen liegen auf der Masseschale. Deshalb gilt für das auslaufende Photon $k_5^2 = 0$, für die Elektronen gilt $k_1^2 = k_3^2 = m_e^2c^2/\hbar^2$, und die Nenner der Elektronenpropagatoren können in der Form

$$\begin{aligned}(k_1-k_5)^2 - (m_ec/\hbar)^2 + i\epsilon' &= -2k_1k_5 \\ (k_3+k_5)^2 - (m_ec/\hbar)^2 + i\epsilon' &= +2k_3k_5\end{aligned} \tag{24.93c}$$

geschrieben werden. Der kleine imaginäre Summand kann hier entfallen, weil wir voraussetzen dass k_1, k_3, k_5 alle von Null verschieden sind.

Das Streuamplitude (24.93) gilt für Emission von Bremsstrahlung beliebiger Energie. Für den Rest dieses Abschnitts beschränken wir uns auf den Grenzfall sehr weicher, niederfrequenter Bremsstrahlungsphotonen, in dem

$$k_1 - k_5 \approx k_1 \qquad , \qquad k_3 + k_5 \approx k_3 \tag{24.94}$$

gilt. Dann enthält das erste Spinorprodukt in (24.93b) den Faktor

$$\begin{aligned}&(\gamma^\tau k_{1\tau} + m_e\tfrac{c}{\hbar})\gamma^{\sigma\,r_1}u^{\boldsymbol{k}_1}\epsilon^{(\alpha)*}_{\boldsymbol{k}_5\sigma} = \\ &\overset{(8.9)}{=} 2g^{\sigma\tau}\epsilon^{(\alpha)*}_{\boldsymbol{k}_5\sigma}k_{1\tau}{}^{r_1}u^{\boldsymbol{k}_1} - \gamma^\sigma\epsilon^{(\alpha)*}_{\boldsymbol{k}_5\sigma}\underbrace{(\gamma^\tau k_{1\tau} - m_e\tfrac{c}{\hbar})^{r_1}u^{\boldsymbol{k}_1}}_{0} = \\ &\overset{(8.60)}{=} 2\epsilon^{(\alpha)\tau*}_{\boldsymbol{k}_5}k_{1\tau}{}^{r_1}u^{\boldsymbol{k}_1}\ .\end{aligned} \tag{24.95}$$

Auf gleiche Weise identifiziert man im ersten Spinorprodukt des zweiten

Summandens

$$\begin{aligned}
&{}^{r_3}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_3}\,\gamma^\sigma\,(\gamma^\tau k_{3\tau} + m_e\tfrac{c}{\hbar})\,\epsilon^{(\alpha)*}_{\boldsymbol{k}_5\sigma} = \\
&\quad = {}^{r_3}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_3}\,2g^{\sigma\tau}k_{3\tau}\epsilon^{(\alpha)*}_{\boldsymbol{k}_5\sigma} - \underbrace{{}^{r_3}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_3}\,(\gamma^\tau k_{3\tau} - m_e\tfrac{c}{\hbar})}_{0}\,\gamma^\sigma\,\epsilon^{(\alpha)*}_{\boldsymbol{k}_5\sigma} = \\
&\quad = {}^{r_3}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_3}\,2\epsilon^{(\alpha)\tau*}_{\boldsymbol{k}_5}k_{3\tau}\ . \qquad (24.96)
\end{aligned}$$

Im Nenner des Photonenpropagators ergibt die Näherung (24.94)

$$(k_1 - k_5 - k_3)^2 \approx (k_1 - k_3)^2\ . \qquad (24.97)$$

Also ist die Streumatrix in der Näherung weicher Bremsstrahlungsphotonen

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^{(3)} = \Big(\frac{+ie}{\hbar}\Big)^3\hbar c\,\sqrt{\mu_0}\,\Big(&\\
&\Big({}^{r_3}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_3}\,\gamma^\nu\,\frac{i2\epsilon^{(\alpha)\tau*}_{\boldsymbol{k}_5}k_{1\tau}}{-2k_1k_5}\,{}^{r_1}u^{\boldsymbol{k}_1}\Big)\frac{(-ig_{\nu\mu}\,\mu_0\hbar c)}{(k_1-k_3)^2+i\epsilon'}\Big({}^{r_4}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_4}\,\gamma^\mu\,{}^{r_2}u^{\boldsymbol{k}_2}\Big) + \\
&+\Big({}^{r_3}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_3}\,\frac{i2\epsilon^{(\alpha)\tau*}_{\boldsymbol{k}_5}k_{3\tau}}{2k_3k_5}\,\gamma^\nu\,{}^{r_1}u^{\boldsymbol{k}_1}\Big)\frac{(-ig_{\nu\mu}\,\mu_0\hbar c)}{(k_1-k_3)^2+i\epsilon'}\Big({}^{r_4}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_4}\,\gamma^\mu\,{}^{r_2}u^{\boldsymbol{k}_2}\Big)\Big)\\
= -\Big(\frac{+ie}{\hbar}\Big)^2&({}^{r_3}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_3}\,\gamma^\nu\,{}^{r_1}u^{\boldsymbol{k}_1})\,\frac{(-ig_{\nu\mu}\,\mu_0\hbar c)}{(k_1-k_3)^2+i\epsilon'}\,({}^{r_4}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_4}\,\gamma^\mu\,{}^{r_2}u^{\boldsymbol{k}_2})\cdot\\
&\cdot\ ec\,\sqrt{\mu_0}\epsilon^{(\alpha)\tau*}_{\boldsymbol{k}_5}\Big(\frac{k_{3\tau}}{k_3k_5} - \frac{k_{1\tau}}{k_1k_5}\Big)\ . \qquad (24.98)
\end{aligned}$$

Nur durch den Faktor in der letzten Zeile unterscheidet sich dies Ergebnis von der Streumatrix der elastischen Streuung von Elektronen an Myonen in Störungsrechnung 2. Ordnung, vergleiche den ersten Summanden in (24.47b).

Dies Ergebnis gilt viel allgemeiner, als nur für die Streuung eines Elektrons an einem Myon. Wir betrachten in beliebiger Ordnung n der Störungsrechnung einen beliebigen Streuprozess, bei dem ein beliebiges Fermion (egal ob Teilchen oder Antiteilchen) mit Wellenzahl k_1 einläuft und mit Wellenzahl k_3 ausläuft. Wenn dieses Fermion bei diesem Prozess ein Bremsstrahlungsphoton mit Wellenzahl k_5 emittiert, nennen wir die Streumatrix dieses Prozesses $\mathcal{M}^{(n)}_{\text{mit}}$. Den im Übrigen gleichen Prozess, bei dem keine Bremsstrahlung

emittiert wird, findet man in Störungsrechnung der Ordnung $n-1$. Wir nennen die Streumatrix dieses Prozesses $\mathcal{M}^{(n-1)}_{\text{ohne}}$, und stellen ohne Beweis fest:

$$\mathcal{M}^{(n)}_{\text{mit}} = \mathcal{M}^{(n-1)}_{\text{ohne}} \cdot ec\sqrt{\mu_0}\,\epsilon^{(\alpha)\tau *}_{\boldsymbol{k}_5}\left(\frac{k_{3\tau}}{k_3 k_5} - \frac{k_{1\tau}}{k_1 k_5}\right)$$
$$\text{falls } k_1 - k_5 \approx k_1 \text{ und } k_3 + k_5 \approx k_3 \tag{24.99}$$

Die Dimension des Faktors

$$\left[ec\sqrt{\mu_0}\,\epsilon^{(\alpha)\tau *}_{\boldsymbol{k}_5}\left(\frac{k_{3\tau}}{k_3 k_5} - \frac{k_{1\tau}}{k_1 k_5}\right)\right] =$$
$$= \sqrt{\text{Energie} \cdot \text{Volumen}} = \left[\sqrt{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}_5}\Omega}\right]$$

wird gerade durch den Normierungsfaktor $\sqrt{1/2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}_5}\Omega}$ kompensiert, den die Streuamplitude $S^{(n)}$ nach Regel F von Kasten 24.1 wegen des auslaufenden Photons zusätzlich erhält.

Kein Photonendetektor kann Bremsstrahlungsphotonen beliebig niedriger Energie nachweisen. Wenn man in einem Experiment beispielsweise die Streuung eines Elektrons an einem Myon beobachtet und dabei kein Bremsstrahlungsphoton sieht, dann kann man nicht ausschließen dass doch auch Bremsstrahlungsphotonen emittiert wurden, die sich aufgrund ihrer niedrigen Energie dem Nachweis entzogen. Wenn man den Wirkungsquerschnitt für irgendein Streuereignis der QED berechnet, dann muss man stets den Wirkungsquerschnitt des gleichen Ereignisses mit gleichzeitiger Emission unmessbar niederenergetischer Bremsstrahlungsphotonen addieren. Andernfalls kann man keine Übereinstimmung von Theorie und Experiment erwarten.

Der Beitrag der Streuereignisse mit unbeobachteter Bremsstrahlung ist wegen

$$\lim_{|k_5|\to 0} ec\sqrt{\mu_0}\,\epsilon^{(\alpha)\tau *}_{\boldsymbol{k}_5}\left(\frac{k_{3\tau}}{k_3 k_5} - \frac{k_{1\tau}}{k_1 k_5}\right) = \pm\infty \tag{24.100}$$

divergent. Wir werden in diesem Buch etlichen weiteren Formeln mit Infra-

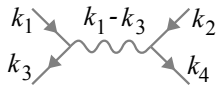
rotdivergenz begegnen. Die detaillierte Untersuchung der IR-Divergenzen der QED ist ein überaus mühsames Geschäft. Die Ergebnisse kann man in einer umfassenden Veröffentlichung von Yennie, Frautschi, und Suura [53] nachlesen. Das entscheidende Ergebnis ist ganz einfach:

> Die Infrarot-Divergenzen der QED kompensieren sich wechselseitig, d.h. sie verschwinden, wenn man sämtliche Graphen berücksichtigt, die – mit oder ohne unmessbar infrarote Bremsstrahlung – zu einem beobachteten Phänomen beitragen. (24.101)

Wir werden den schwierigen Beweis für diesen Sachverhalt an keiner Stelle führen, sondern IR-divergente Resultate unter Verweise auf (24.101) ohne weitere Untersuchung stehen lassen.

24.3.7 Die Massen virtueller Teilchen

Wir beginnen die Untersuchung mit der t-Kanal-Streuung eines Fermions, das mit Wellenzahl k_1 einläuft, an einem anderen Fermion, das mit Wellenzahl k_2 einläuft:

t-Kanal: 

$$m_\gamma^2 \tfrac{c^2}{\hbar^2} = (k_3 - k_1)^2 < 0 \tag{24.102}$$

m_γ ist die Ruhemasse des virtuellen Photons bei t-Kanal-Streuung. Sie kann nicht Null sein. Denn dazu müsste $k_3 = k_1$ sein, d.h. es fände überhaupt keine Streuung statt. Allerdings kann sie dem Wert Null bei schwacher Streuung ($k_3 \approx k_1$) beliebig nahe kommen.

Wir nutzen die Tatsache, dass die Teilchen Nummer 1 und Nummer 3 gleichen Flavor und demnach gleiche Masse haben. Außerdem nehmen wir jetzt an, dass es sich bei diesen Teilchen um freie, beobachtete Teilchen „auf der Masseschale“ handelt, welche die Relation $k_j^2 = m^2c^2/\hbar^2$ erfüllen. Dann gilt

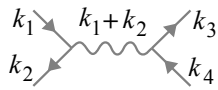
$$\frac{m_\gamma^2 c^2}{\hbar^2} = (k_3 - k_1)^2 \overset{(7.18)}{=} (k_3^0 - k_1^0)^2 - (\boldsymbol{k}_3 - \boldsymbol{k}_1)^2 =$$
$$= \underbrace{(k_3^0)^2 - \boldsymbol{k}_3^2}_{(mc/\hbar)^2} + \underbrace{(k_1^0)^2 - \boldsymbol{k}_1^2}_{(mc/\hbar)^2} - 2\sqrt{(\boldsymbol{k}_3^2 + m^2c^2/\hbar^2)(\boldsymbol{k}_1^2 + m^2c^2/\hbar^2)} + 2\boldsymbol{k}_3\boldsymbol{k}_1 \tag{24.103}$$

Wir betrachten die Verhältnisse im Schwerpunktsystem der Teilchen Nummer 1 und Nummer 3. Dies Bezugssystem ist definiert durch $\boldsymbol{k}_3 = -\boldsymbol{k}_1$. Das invariante Wellenzahlquadrat des virtuellen Photons ist in diesem Bezugssystem

$$\frac{m_\gamma^2 c^2}{\hbar^2} = 2\,\frac{m^2c^2}{\hbar^2} - 2\boldsymbol{k}_1^2 - 2\,\frac{m^2c^2}{\hbar^2} - 2\boldsymbol{k}_1^2 = -4\boldsymbol{k}_1^2 < 0\ . \tag{24.104}$$

Das invariante Wellenzahlquadrat heißt invariant, weil es in jedem Inertialsystem gleich ist. In jedem Bezugssystem ist demnach das invariante Wellenzahlquadrat des virtuellen Photons bei t-Kanal-Streuung kleiner als Null, d.h. seine Masse ist imaginär. Damit ist (24.102) bewiesen. Achtung: Das Wellenzahlquadrat des virtuellen Photons ist eine vom Bezugssystem unabhängige Invariante, die kleiner als Null ist. Aber nicht in jedem Bezugssystem ist $-4\boldsymbol{k}_1^2$ gleich dieser Invarianten. Denn nicht $\boldsymbol{k}_1^2$, sondern $k_1^2 = (k_1^0)^2 - \boldsymbol{k}_1^2$ ist invariant.

s-Kanal:



$$m_\gamma^2 c^2/\hbar^2 = (k_1 + k_2)^2 > 4\,m^2c^2/\hbar^2 \tag{24.105}$$

m_γ ist die Ruhemasse des virtuellen Photons bei s-Kanal-Streuung, m ist die Ruhemasse des mit k_1 einlaufenden fermionischen Teilchens und des mit k_2 einlaufenden Antiteilchens. Auch bei s-Kanal-Streuung kann das invariante Wellenzahlquadrat des virtuellen Photons nicht Null sein. Denn es ist immer $k_1 \neq -k_2$, weil im Fall $\boldsymbol{k}_1 = -\boldsymbol{k}_2$ für die Nullkomponenten $k_1^0 = +k_2^0$ gilt.

Unter der Voraussetzung, dass es sich bei den einlaufenden Teilchen um beobachtete Teilchen auf der Masseschale handelt, ist das invariante

Wellenzahlquadrat des virtuellen Photons

$$\frac{m_\gamma^2 c^2}{\hbar^2} \overset{(24.103)}{=} 2\,\frac{m^2c^2}{\hbar^2} + 2\,\sqrt{(\boldsymbol{k}_1^2 + m^2c^2/\hbar^2)(\boldsymbol{k}_2^2 + m^2c^2/\hbar^2)} - 2\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2 \ .$$

Wir führen die Berechnung im Schwerpunktsystem $\boldsymbol{k}_2 = -\boldsymbol{k}_1$ durch:

$$\frac{m_\gamma^2 c^2}{\hbar^2} = 4\,\frac{m^2c^2}{\hbar^2} + 4\boldsymbol{k}_1^2 > 4\,\frac{m^2c^2}{\hbar^2}$$

Damit ist (24.105) bewiesen.

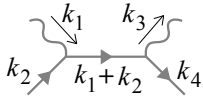
Das virtuelle Photon der t-Kanal-Streuung (genau das gleiche gilt auch für die u-Kanal-Streuung) ist raumartig ($m_\gamma^2 < 0$), das virtuelle Photon der s-Kanal-Streuung ist zeitartig ($m_\gamma^2 > 4m^2 > 0$). In zweiter Ordnung der Störungsrechnung gibt es in der QED keine virtuellen Photonen mit Masse im Intervall $0 \le m_\gamma \le 2m$. (In nullter und in erster Ordnung der Störungsrechnung gibt es in der QED überhaupt keine virtuellen Teilchen.)

Deshalb wäre es bei t-Kanal-Streuung (und u-Kanal-Streuung) sinnlos darüber zu diskutieren, ob zuerst ein Teilchen, das mit Wellenzahl k_1 einläuft, ein virtuelles Photon emittiert, das anschließend von einem anderen Teilchen, das mit Wellenzahl k_2 einläuft, absorbiert wird, oder umgekehrt. Bei raumartigem Verhältnis von Ereignissen haben Begriffe wie früher oder später ihren Sinn verloren. Dagegen kann man bei s-Kanal-Streuung sinnvoll feststellen, dass zuerst ein Teilchen und ein Antiteilchen zu einem virtuellen Photon zerstrahlen, und dass später dieses virtuelle Photon durch Paarbildung in ein Teilchen und ein Antiteilchen zerfällt.

Umgekehrt kann man bei t-Kanal-Streuung (und u-Kanal-Streuung) durchaus die Orte bestimmen, an denen die Wechselwirkung des Photons mit den beiden Teilchen stattfindet, indem man beispielsweise zwei Teilchenstrahlen in sorgfältig kontrolliertem Abstand aneinander vorbei schießt, und die (schwache) Streuung misst. Dagegen ist es nicht möglich, eine räumliche Relation der Orte zu bestimmen, an denen bei s-Kanal-Streuung die Teilchen vernichtet werden und an denen sie entstehen. (Im Schwerpunktsystem werden sie am gleichen Ort vernichtet und erzeugt, nämlich am Nullpunkt des Koordinatensystems. Gemeint ist aber natürlich eine räumliche Relation im Laborsystem des Beobachters.)

Das invariante Wellenzahlquadrat des virtuellen Elektrons bei v-Kanal-Streuung ist

v-Kanal:



$$\frac{m_\mathrm{v}^2c^2}{\hbar^2} = (k_1+k_2)^2 > \frac{m^2c^2}{\hbar^2} \ . \tag{24.106}$$

m_v ist die Ruhemasse des virtuellen Fermions, m ist die Ruhemasse des beobachteten Fermions. Unter der Voraussetzung, dass es sich bei den einlaufenden Teilchen um beobachtete Teilchen handelt, gilt

$$\frac{m_\mathrm{v}^2c^2}{\hbar^2} \overset{(24.103)}{=} 0 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2} + 2\sqrt{\boldsymbol{k}_1^2(\boldsymbol{k}_2^2+m^2c^2/\hbar^2)} - 2\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2 \ .$$

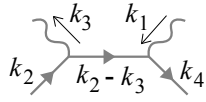
Im Schwerpunktsystem $\boldsymbol{k}_2 = -\boldsymbol{k}_1$ der einlaufenden Teilchen folgt

$$\frac{m_\mathrm{v}^2c^2}{\hbar^2} = \frac{m^2c^2}{\hbar^2} + 2\sqrt{\boldsymbol{k}_1^2(\boldsymbol{k}_1^2+m^2c^2/\hbar^2)} + 2\boldsymbol{k}_1^2 > \frac{m^2c^2}{\hbar^2} + 4\boldsymbol{k}_1^2 \ .$$

Damit ist (24.106) bewiesen.

Bei w-Kanal-Streuung ist das invariante Wellenzahlquadrat des virtuellen Fermions

w-Kanal:



$$\frac{m_\mathrm{w}^2c^2}{\hbar^2} = (k_2-k_3)^2 < \frac{m^2c^2}{\hbar^2} \ . \tag{24.107}$$

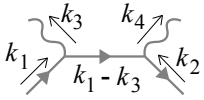
Denn im Schwerpunktsystem $\boldsymbol{k}_3 = -\boldsymbol{k}_2$ gilt unter der Voraussetzung, dass die Teilchen Nummer 2 und Nummer 3 beobachtet werden:

$$\begin{aligned}\frac{m_\mathrm{w}^2c^2}{\hbar^2} &\overset{(24.103)}{=} 0 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2} - 2\sqrt{\boldsymbol{k}_2^2(\boldsymbol{k}_2^2+m^2c^2/\hbar^2)} - 2\boldsymbol{k}_2^2 \\ &< \frac{m^2c^2}{\hbar^2} - 4\boldsymbol{k}_2^2 < \frac{m^2c^2}{\hbar^2} \ .\end{aligned}$$

Damit ist (24.107) bewiesen.

Als letztes Beispiel betrachten wir die Zerstrahlung eines Teilchens und seines Antiteilchens in zwei Photonen. Wir geben diesem Prozess den (nicht allgemein üblichen) Namen z-Kanal-Streuung:

z-Kanal:



$$\frac{m_z^2 c^2}{\hbar^2} = (k_2 - k_3)^2 \lessapprox \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \ . \tag{24.108}$$

Dies Zeichen bedeutet, dass die invariante Wellenzahl des virtuellen Fermions nur wenig kleiner ist als diejenige des freien Teilchens. Denn im Schwerpunktsystem $\boldsymbol{k}_3 = -\boldsymbol{k}_1$ gilt unter der Voraussetzung, dass die Teilchen Nummer 1 und Nummer 3 beobachtet werden:

$$\frac{m_z^2 c^2}{\hbar^2} \overset{(24.103)}{=} \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} + 0 - 2\sqrt{(\boldsymbol{k}_1^2 + m^2 c^2/\hbar^2)\boldsymbol{k}_1^2} + 2\boldsymbol{k}_1^2 \lessapprox \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \ .$$

Damit ist (24.108) bewiesen.

Bei den virtuellen Fermionen gibt es – anders als bei virtuellen Photonen – in zweiter Ordnung der Störungsrechnung keine Lücke im Bereich der möglichen invarianten Wellenzahlquadrate. Bei v-Kanal-Streuung kann das invariante Wellenzahlquadrat der virtuellen Fermionen jeden beliebige Wert $> m^2 c^2/\hbar^2$ haben, bei w-Kanal-Streuung jeden beliebigen (auch negativen) Wert $< m^2 c^2/\hbar^2$. Der Unterschied beruht darauf, dass beobachtete Photonen jede beliebige Energie > 0 haben können, während die Energie beobachteter Fermionen stets $\geq mc^2$ ist.

25 Divergenzgrad und Regularisierung

25.1 Der oberflächliche Divergenzgrad

Jede Schleife in einem Graphen, deren Wellenzahl nicht durch eine Deltafunktion festgelegt ist, bewirkt ein Integral mit einem Faktor $\mathrm{d}^4k \sim k^4$ im Zähler. Wenn dieser Faktor nicht durch hinreichend hohe Potenzen von k im Nenner kompensiert wird, divergiert das Integral. In Abschnitt 20.3 haben wir bereits die Beobachtung

$$\text{Struktur}: \frac{\mathrm{d}^4k}{k^n} \overset{(20.95)}{\Longrightarrow} \begin{cases} n=2 : & \text{quadratische Divergenz} \\ n=4 : & \text{logarithmische Divergenz} \\ n\geq 6 : & \text{keine Divergenz} \end{cases}$$

gemacht. Der durch

$$\frac{\mathrm{d}^4k}{k^n} \sim k^{4-n} = k^d \tag{25.1}$$

definierte Schleifenexponent $d = 4 - n$ bestimmt, ob und wie die Schleife divergiert. Bei $d = 0$ gibt es eine logarithmische Divergenz, bei $d = 1$ eine lineare Divergenz, bei $d = 2$ eine quadratische Divergenz, und so weiter. Bei $d < 0$ ist die Schleife konvergent. Der oberflächliche Divergenzgrad D, den wir im folgenden definieren werden, unterscheidet sich vom Schleifenexponent d dadurch, dass er als Maßzahl für ein komplettes Diagramm mit einer beliebig großen Anzahl von Linien, Schleifen, und Vertizes festgelegt wird.

Bei der Abzählung der Wellenzahl-Potenz im Nenner muss man zwischen Fermionen und Bosonen unterscheiden, weil der Fermionen-Propagator proportional zu k^{-1} ist, der Bosonen-Propagator aber proportional zu k^{-2}. Wir nennen

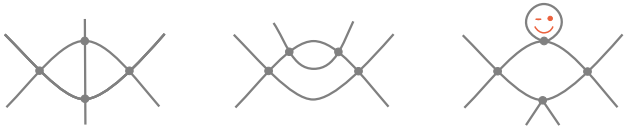
$$L \equiv \text{Anzahl der Schleifen}$$

$$
\begin{aligned}
V &\equiv \text{Anzahl der Vertizes} \\
B_e &\equiv \text{Anzahl der externen Bosonen-Linien} \\
F_e &\equiv \text{Anzahl der externen Fermionen-Linien} \\
B_i &\equiv \text{Anzahl der internen Bosonen-Linien} \\
F_i &\equiv \text{Anzahl der internen Fermionen-Linien .}
\end{aligned} \tag{25.2}
$$

Der oberflächliche Divergenzgrad wird definiert durch

$$\boxed{D \equiv 4L - 2B_i - F_i} \, . \tag{25.3}$$

D wird als „oberflächlich“ bezeichnet, weil er als pauschale Maßzahl für den kompletten Graphen das Divergenzverhalten nicht so eindeutig festlegen kann wie der Schleifenexponent d einer einzelnen Schleife. In jedem Fall ist $4L$ die Potenz von k, die insgesamt in den Zählern der Schleifenintegrale auftaucht. Aber die Anzahl der Potenzen von k, die insgesamt in den Nennern aller Schleifenintegrale vorhanden sind, kann durchaus größer oder kleiner als $2B_i + 1F_i$ sein. Einerseits sind nicht in jedem Graphen sämtliche inneren Linien in Schleifen integriert. Wenn nur ein Teil der inneren Linien in Schleifen integriert ist, wird für diejenige Schleife im Graphen, die den größten Schleifenindex $d_{\max}$ hat, $d_{\max} > D$ gelten. Andererseits können innere Linien zu mehreren Schleifen gehören. Dann ergibt der oberflächliche Divergenzgrad ein zu pessimistisches Bild. Beispielsweise hat die Doppelschleife der ψ^4-Theorie den oberflächlichen Divergenzgrad $D = 8 - 6 = 2$, aber den maximalen Schleifenindex $d_{\max} = 0$. Deshalb divergiert sie tatsächlich nur logarithmisch, nicht quadratisch. Ein anderes Beispiel für ein Divergenzverhalten, das aus dem oberflächlichen Divergenzgrad nicht ersichtlich ist, sind die drei Graphen



$$L = 2 \qquad V = 4 \qquad B_e = 6 \qquad B_i = 5 \tag{25.4}$$

der ψ^4-Theorie, die alle den gleichen oberflächlichen Divergenzgrad (nämlich

$D = -2$) und sogar die gleichen Werte von B_e, B_i, V, L haben. Wir wissen bereits aus Abschnitt 20.3, dass der linke Graph wegen $d_{\max} = -2$ konvergent ist, der mittlere wegen $d_{\max} = 0$ logarithmisch und der rechte wegen $d_{\max} = +2$ quadratisch divergiert. Nur dann ist D ungefähr gleich $d_{\max}$, wenn die Linien so auf die Schleifen verteilt sind, dass $d_{\max}$ bei einer gegebenen Zahl von Linien und Vertizes den kleinstmöglichen Wert hat.

Wenn man genaue Informationen über das Divergenzverhalten eines bestimmten Graphen erhalten will, untersucht man also besser den maximalen Schleifenindex $d_{\max}$. Die Definition von D dient einem anderen Zweck. Wir wollen klären, ob in einer Quantenfeldtheorie in immer höheren Ordnungen der Störungsrechnung immer wieder neuartige divergierende Schleifen auftreten, die immer weitere Renormierungen erforderlich machen, oder ob mit einer endlichen Zahl von Renormierungen die Konvergenz sämtlicher Graphen in sämtlichen Ordnungen der Störungstheorie sichergestellt werden kann. Neuartige Schleifen werden – wenn überhaupt – gerade in Diagrammen mit minimalem $d_{\max}$ auftreten und deshalb durch $D \geq 0$ erkennbar sein.

Dabei ist es zweckmäßig, D als Funktion von B_e, F_e und V formulieren. Ein Graph ist genau dann frei von Schleifen (d.h. ein Baum-Graph), wenn er bei $B_i + F_i$ inneren Linien $V = B_i + F_i + 1$ Vertizes enthält, also $0 = B_i + F_i - V + 1$ gilt. Wenn in diesem Graphen die Anzahl B_i oder F_i erhöht oder die Anzahl V vermindert wird, wird der Graph

$$L = B_i + F_i - V + 1 \tag{25.5}$$

Schleifen enthalten. Einsetzen in (25.3) ergibt

$$D = 2B_i + 3F_i - 4V + 4\ . \tag{25.6}$$

Wir beschränken die weitere Untersuchung zunächst auf die ψ^s-Theorie. V Vertizes enthalten insgesamt $s \cdot V$ Feldoperatoren. Wenn diese allesamt untereinander zu Propagatoren kombiniert werden, entsteht eine Vakuum-Blase mit $B_i = sV/2$ inneren Linien. Wenn jedoch eine gerade Anzahl B_e der Vertex-Operatoren mit externen Operatoren zu Propagatoren kombiniert werden, können nur noch $B_i = (sV - B_e)/2$ innere Linien gebildet werden,

und es gilt

$$2B_i = sV - B_e \ . \tag{25.7}$$

Das wird in (25.6) eingesetzt, wobei $F_i = 0$ gesetzt wird, weil wir im Moment nur die ψ^s-Theorie betrachten:

$$\boxed{\psi^s\text{-Theorie:} \quad D = (s-4)V - B_e + 4} \tag{25.8}$$

Im Fall der ψ^3-Theorie ist

$$\psi^3\text{-Theorie:} \quad D = -V - B_e + 4 \ . \tag{25.9}$$

Weil V und B_e negativ in diese Gleichung eingehen, können nur Diagramme mit wenigen externen Linien in niedriger Ordnung der Störungstheorie neuartige Divergenzen aufweisen. Es sind genau zwei:

$V = 2 \quad B_e = 0 \quad D = 2$ $d_{\max} = 2$

$V = 2 \quad B_e = 2 \quad D = 0$ $d_{\max} = 0$ (25.10)

Die Vakuumblase haben wir in Abschnitt 20.3 ignoriert, weil wir dort nur verbundene Diagramme berechnet und sämtliche Vakuumblasen aus der LSZ-Formel gekürzt haben. In höherer Ordnung der Störungstheorie können zwar noch divergente Graphen auftauchen, aber nur bei ungleichmäßig verteilten Schleifenindizes. Beispielsweise treten bei zwei externen Linien in vierter Ordnung der Störungsrechnung die beiden Graphen

$V = 4 \quad B_e = 2 \quad D = -2$ $d_{\max} = -2$

$V = 4 \quad B_e = 2 \quad D = -2$ $d_{\max} = 0$

auf. Trotz $D < 0$ ist nur der erste Graph konvergent, der zweite divergiert logarithmisch. Das liegt aber nur daran, dass im zweiten Graphen nicht alle 5 inneren Linien in die beiden Schleifen integriert sind. Die Divergenz der Schleifen des zweiten Graphen ist bereits aus der Störungsrechnung

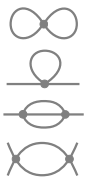
zweiter Ordnung bekannt, und wurde dort bereits durch Renormierung der Masse behoben. In keiner höheren Ordnung der Störungsrechnung können in der ψ^3-Theorie neuartige Divergenzen auftreten, die noch nicht aus (25.10) bekannt sind.

In der ψ^4-Theorie ist der oberflächliche Divergenzgrad

$$\psi^4\text{-Theorie:} \quad D = -B_e + 4 \tag{25.11}$$

interessanterweise unabhängig von der Anzahl V der Vertizes, und damit auch unabhängig von der Ordnung $n = V$ der Störungsrechnung. Nur in Graphen mit weniger als 5 externen Linien können neuartige Divergenzen auftreten. Es gibt insgesamt vier:

$$\begin{array}{llll} V=1 & B_e=0 & D=4 & d_{\max}=2 \\ V=1 & B_e=2 & D=2 & d_{\max}=2 \\ V=2 & B_e=2 & D=2 & d_{\max}=0 \\ V=2 & B_e=4 & D=0 & d_{\max}=0 \end{array} \tag{25.12}$$



Wieder erkennt man, dass der oberflächliche Divergenzgrad das tatsächliche Divergenzverhalten eines Graphen nur ungenau wiedergibt: Die Vakuumblase in der ersten Zeile besteht aus zwei Tadpoles, die jeweils quadratisch divergieren. Und die Doppelschleife in der dritten Zeile divergiert tatsächlich logarithmisch, nicht quadratisch. Entscheidend ist aber, dass es in der ψ^4-Theorie nur 3 unterschiedliche Arten von Schleifen gibt (die Vakuum-Blase ist ja nur eine Verdoppelung des Tadpoles). In keinem Graphen können weitere neuartige Schleifen auftreten. Nachdem die divergierenden Graphen in den drei unteren Zeilen von (25.12) durch die in Abschnitt 22 beschriebenen Renormierungen behoben wurden, ist die ψ^4-Theorie in sämtlichen Ordnungen der Störungstheorie konvergent.

$$\psi^5\text{-Theorie:} \quad D = V - B_e + 4 \tag{25.13}$$

In der ψ^5-Theorie, und in jeder ψ^s-Theorie mit $s \geq 5$, enthält D die Anzahl V der Vertizes mit positivem Faktor. Das bedeutet, dass in jeder der unendlich vielen Ordnungen der Störungsrechnung mit immer neuartigen

divergierenden Schleifen zu rechnen ist, die durch die Renormierung von unendlich vielen Parametern behandelt werden müssen.

Solche Theorien werden aus historischen Gründen als „nicht renormierbar“ bezeichnet. Der Begriff ist ungenau. Auch „nicht renormierbare“ Theorien sind durchaus renormierbar, nur sind dazu in jeder weiteren Ordnung der Störungsrechnung immer neue Renormierungen erforderlich. Dagegen sind bei „renormierbaren“ Theorien nur in den niedrigsten Ordnungen der Störungstheorie Renormierungen erforderlich, in den höheren Ordnungen aber nicht mehr.

Solange die Forscher noch hofften Quantenfeldtheorien konstruieren zu können, die für beliebig große Wellenzahlen korrekt sind, erschien der Unterschied zwischen „renormierbaren“ und „nicht renormierbaren“ Theorien sehr bedeutsam. Das hat sich geändert, seit man sämtliche renormierten Quantenfeldtheorien als effektive Theorien betrachtet, die nur für einen begrenzten Bereich von Wellenzahlen gültig bleiben (siehe Abschnitt 21.3). Um Ergebnisse für einen begrenzten Bereich von Wellenzahlen zu berechnen, braucht man auch in einer „nicht renormierbaren“ Theorie nur eine endliche Anzahl von renormierten Parametern. Deshalb gelten heute auch „nicht renormierbare“ Theorien als durchaus akzeptabel.

In der Quantenelektrodynamik enthält jeder Vertex zwei fermionische Operatoren und einen Photonenoperator. Um einen Graphen mit B_i inneren und B_e äußeren Photonenlinien zu konstruieren, braucht man

$$V = 2B_i + B_e \tag{25.14a}$$

Vertizes. Um einen Graphen mit F_i inneren und F_e äußeren Fermionenlinien zu konstruieren, braucht man

$$V = \frac{2F_i + F_e}{2} \tag{25.14b}$$

Vertizes. Addition dieser Gleichungen ergibt

$$(25.14a) + 3 \cdot (25.14b) = 4V = 2B_i + 3F_i + B_e + \frac{3}{2}F_e \; . \tag{25.15}$$

Das wird in (25.6) eingesetzt:

$$\boxed{\text{QED:} \quad D = 4 - B_e - \frac{3}{2}F_e} \tag{25.16}$$

Wie in der ψ^4-Theorie, ist auch in der Quantenelektrodynamik der oberflächliche Divergenzgrad unabhängig von der Ordnung $n = V$ der Störungsrechnung, und hängt nur von der Anzahl der externen Linien ab. Weil diese negative Vorzeichen haben, können nur in Diagrammen mit wenigen externen Linien neuartige Divergenzen auftreten.

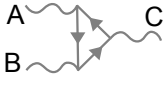
Wenn der Schleifenindex

$$d \overset{(25.1)}{=} 4 - f_i - 2b_i \geq 0 \tag{25.17}$$

$f_i \equiv$ Zahl fermionischer Linien in der Schleife

$b_i \equiv$ Zahl bosonischer Linien in der Schleife

ist, kann eine Schleife divergieren. In der QED gibt es genau 5 Schleifen, die diese Voraussetzung erfüllen. In Tabelle 25.1 sind sie aufgelistet. In Abschnitt 26.5 werden wir klären, dass der Graph in der vorletzten Zeile der Tabelle gestrichen werden kann, weil er durch einen anderen Graphen

(b_i, f_i)	Graph	D	d	Name
$(0,2)$		2	2	Vakuumpolarisation
$(1,1)$		1	1	Selbstenergie des Fermions
$(1,2)$		0	0	Vertexkorrektur
$(0,3)$		1	1	—
$(0,4)$		0	0	Photon-Photon-Streuung

Tab. 25.1 : Die 5 möglicherweise divergenten Schleifen der QED

genau kompensiert wird. Und die Photon-Photon-Streuung ergibt einen endlichen Wert, siehe Abschnitt 26.6. In der QED gibt es nur drei divergente Graphen, nämlich die ersten drei in Tabelle 25.1. Die beiden ersten Diagramme treten sowohl als Propagator-Korrekturen als auch als Bestandteile größerer Graphen auf. Die Vertexkorrektur gibt es überhaupt nur als Teil größerer Diagramme, nicht als eigenständigen Graphen. Denn alle ein- oder auslaufenden Teilchen eines Diagramms müssen die Relation (7.18) erfüllen („auf der Masseschale liegen“). Das ist in einem Diagramm mit zwei externen Fermionenlinien und einer externen Photonenlinie nicht möglich.

Bei der Berechnung von Feynman-Graphen der ψ^s-Theorie mit divergierenden Schleifen sind wir in Kapitel 20 auf Integrale gestoßen, für die wir die allgemeine Formel (20.64) abgeleitet haben. Mithilfe von (20.63) kann sie in der Form

$$\frac{1}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{k}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}k^0}{2\pi}\,\frac{J}{\left(k^2-K^2+i\epsilon'\right)^r}\overset{(20.64)}{=}i(-1)^r\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}R}{(2\pi)^4}\,\frac{2\pi^2R^3J_E}{\left(R^2+K^2\right)^r}$$

$$\text{mit}\quad\begin{cases}1\le r\in\mathbb{N}\quad,\quad 0\le K^2\in\mathbb{R}\\ \begin{array}{lccccc} J= & 1 & k^\mu & k^2 & k^\mu k^\nu & (k^2)^2\\ J_E= & 1 & 0 & -R^2 & -g^{\mu\nu}R^2/4 & R^4\\ r= & \ge 1 & — & \ge 2 & \begin{cases}\ge 2 \text{ if } \mu=0\\ \ge 0 \text{ falls } \mu\ne 0\end{cases} & \ge 3\end{array}\end{cases}\qquad(25.18)$$

geschrieben werden. Auf der linken Seite ist k ein Vierervektor mit Minkowski-Metrik. Dagegen ist auf der rechten Seite R die Radialkomponente von vierdimensionalen euklidischen Kugelkoordinaten. Der Faktor i stammt aus der Umwandlung der Komponente k^0 in Minkowski-Metrik in die Komponente ik^0_{E} in Euklidischer Metrik. Wir werden in Kapitel 26 feststellen, dass die divergierenden Schleifendiagramme der QED ebenfalls auf Integrale dieser Form führen. Wenn der in (25.1) definierte Schleifenindex d größer als Null ist, divergieren diese Integrale.

Zur Behandlung der Divergenzen geht man in zwei Schritten vor:

$$\underbrace{\int \mathrm{d}x\, A(x)\, B(x)}_{\pm\infty} = \lim_{Y\to\infty} \underbrace{\int \mathrm{d}x\, C(x)\, D(x,Y)}_{\text{endlich bei } Y<\infty} = \\ = \underbrace{\lim_{Y\to\infty} \int \mathrm{d}x\, C(x)\, D_{\text{gemessen}}(x)}_{\text{endlich}} \tag{25.19a}$$

Im ersten Schritt wird das Integral dadurch *regularisiert*, dass ein geeigneter Parameter D als Grenzwert $\lim_{Y\to\infty} D(Y)$ eines Ausdrucks $D(Y)$ geschrieben wird, der bei endlichem Y endlich ist. Im zweiten Schritt wird D *renormiert*, indem $D(Y)$ durch den experimentell bestimmten Wert D_{gemessen} ersetzt wird.

Alternativ zur Renormierung nimmt man in vielen Berechungen die Existenz einer fundamentalen Länge gemäß (21.29) an. Dann wird nach der Regularisierung $Y \to \infty$ durch $Y_{\max}$ ersetzt:

$$\underbrace{\int \mathrm{d}x\, A(x)\, B(x)}_{\pm\infty} = \lim_{Y\to\infty} \underbrace{\int \mathrm{d}x\, C(x)\, D(x,Y)}_{\text{endlich bei } Y<\infty} = \\ = \underbrace{\int \mathrm{d}x\, C(x)\, D(x,Y_{\max})}_{\text{endlich}} \tag{25.19b}$$

Egal ob die Methode (25.19a) oder (25.19b) angewendet wird, in jedem Fall ist als erster Schritt eine Regularisierung erforderlich, damit man vernünftige Ergebnisse erhält. In den folgenden Abschnitten besprechen wir die wichtigsten Verfahren, die zur Regularisierung divergierender Schleifenintegrale entwickelt wurden.

25.2 Abschneide-Regularisierung

Die Regularisierung mithilfe der Abschneide-Methode haben wir in den vorangegangen Kapiteln bereits verwendet. Divergente Integrale werden bei dieser Methode dadurch regularisiert, dass die Integration bei einer maximalen Wellenzahl Λ abgeschnitten wird:

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{d}R \, \frac{R^3 J_E}{\left(R^2+K^2\right)^r} = \lim_{\Lambda\to\infty} \int_0^{\Lambda} \mathrm{d}R \, \frac{R^3 J_E}{\left(R^2+K^2\right)^r} \tag{25.20}$$

Falls man entsprechend (21.29) die Existenz einer fundamentalen Länge annimmt, dann muss man konsequenterweise auch die Abschneide-Wellenzahl $\Lambda_{\max} =$ (21.29b) einführen. Der Grenzübergang $\Lambda \to \infty$ entfällt in diesem Fall.

Für die Quantenelektrodynamik eignet sich die Abschneide-Regularisierung nicht, weil sie die Eichinvarianz der Theorie beschädigt. Verlust der Eichinvarianz würde eine gewaltige Menge neuer Probleme mit sich bringen. Deshalb wurden alternative Verfahren zur Regularisierung divergenter Integrale erfunden. Mit den zwei wichtigsten werden wir uns jetzt beschäftigen.

25.3 Pauli-Villars Regularisierung

Das von Pauli[1] und Villars[2] entwickelte Verfahren der Regularisierung mithilfe von Gegentermen erhält sowohl die Eichinvarianz als auch die Lorentzinvarianz der Theorie.

Wir benutzen die Stufenfunktion

$$\Theta(R-\Lambda_a) = \begin{cases} 1 & \text{if } R > \Lambda_a \\ \frac{1}{2} & \text{if } R = \Lambda_a \\ 0 & \text{if } R < \Lambda_a \end{cases},$$

um die Abschneide-Regularisierung in der Form

[1] Wolfgang Ernst Pauli (1900 – 1958)
[2] Felix Villars (1921 – 2002)

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{d}R\, \frac{R^3 J_E}{\left(R^2+K^2\right)^r} \overset{(25.20)}{=} \lim_{\Lambda_a\to\infty} \int_0^{\Lambda_a} \mathrm{d}R\, \frac{R^3 J_E}{\left(R^2+K^2\right)^r} =$$

$$= \lim_{\Lambda_a\to\infty} \int_0^{\infty} \mathrm{d}R\, R^3 J_E \Big(\frac{1}{\left(R^2+K^2\right)^r} - \frac{\Theta(R-\Lambda_a)}{\left(R^2+K^2\right)^r} \Big) \tag{25.21}$$

zu schreiben. Jetzt definieren wir anstelle der harten Stufe den weichen Übergang

$$\int_0^{\infty} \mathrm{d}R\, R^3 J_E\, \frac{\Theta(R-\Lambda_a)}{(R^2+K^2)^r} = \int_0^{\infty} \mathrm{d}R\, R^3 J_E\, \frac{1}{(R^2+\Lambda^2)^r}\ . \tag{25.22}$$

Für jedes beliebige $0 < \Lambda_a < \infty$ kann ein $0 < \Lambda < \infty$ gefunden werden, das diese Gleichung erfüllt. Damit folgt aus (25.21):

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{d}R\, \frac{R^3 J_E}{(R^2+K^2)^r} = \lim_{\Lambda\to\infty} \int_0^{\infty} \mathrm{d}R\, R^3 J_E \left(\frac{1}{(R^2+K^2)^r} - \frac{1}{(R^2+\Lambda^2)^r} \right)$$

Dies ist die einfachste Form der Pauli-Villars-Regularisierung. Man kann sie flexibler gestalten, indem man anstelle von nur einem Summanden eine beliebige Zahl N von Summanden zum Integranden hinzufügt:

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{d}R\, \frac{R^3 J_E}{(R^2+K^2)^r} = \lim_{\Lambda_j\to\infty} \int_0^{+\infty} \mathrm{d}R \Big(\frac{R^3 J_E}{(R^2+K^2)^r} + \sum_{j=1}^{N} C_j\, \frac{R^3 J_E}{(R^2+\Lambda_j^2)^r} \Big) \tag{25.23a}$$

Wenn man die Konstanten C_j so wählt, dass

$$\sum_{j=1}^{N} C_j = -1 \tag{25.23b}$$

ist, wird die Divergenz des Integrals durch die zusätzlich eingefügten Ge-

genterme unterdrückt. Wir merken an, dass die Methode von Pauli und Villars nur dann anwendbar ist, wenn die Gegenterme bei endlichem R für $\Lambda_j \to \infty$ verschwinden, d. h. Λ im Nenner aber nicht im Zähler steht.

Weil der Grenzübergang $\Lambda_j \to \infty$ erst nach der Integration ausgeführt wird (falls er überhaupt ausgeführt wird), sind für $R \to \infty$ sowohl K^2 als auch sämtliche Λ_j^2 vernachlässigbar klein, so dass das Integral (25.23a) konvergiert.

25.4 Dimensionale Regularisierung

Bei dieser Methode, die von 't Hooft[3] und Veltman[4] entwickelt wurde[5], bleiben sowohl die Eichinvarianz als auch die Lorentzinvarianz der Theorie erhalten. Ihre besondere Stärke besteht darin, dass sie – anders als das Verfahren von Pauli und Villars – auch in den nicht-abelschen Eichtheorien der elektroschwachen und der starken Wechselwirkung verwendet werden kann.

Die grundlegende Idee der dimensionalen Regularisierung besteht darin, divergierende Integrale als analytische Funktionen ihrer Raum-Zeit-Dimension zu betrachten. Dazu wird die ganzzahlige Dimension $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ durch

$$D \equiv n - \epsilon \quad , \quad 0 < \epsilon \in \mathbb{C} \tag{25.24}$$

mit beliebigem komplexen ϵ ersetzt. Bei hinreichend kleinem Realteil von D wird fast jedes Integral konvergieren. Damit erhält man z. B. im Fall des allgemeinen vierdimensionalen Schleifenintegrals

[3] Gerardus (Gerard) 't Hooft (∗ 1946)

[4] Martinus Justinus Godefriedus Veltman (∗ 1931)

[5] Dies war bis Anfang November 2012 die allgemein verbreitete und akzeptierte Kenntnis über die Entstehungsgeschichte der Dimensionalen Regularisierung. Eine davon abweichende und möglicherweise richtigere Darstellung [54] behauptet dagegen, dass diese Methode bereits ein Jahr früher von Carlos Guido Bollini (1926 - 2009) und Juan José Giambiagi (1924 - 1996) entwickelt und publiziert wurde.

$$(25.18) = i(-1)^r \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}R}{(2\pi)^4} \frac{2\pi^2 R^3 J_E}{\left(R^2+K^2\right)^r} \tag{25.25a}$$

$$= \lim_{D\to 4} i(-1)^r \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}R}{(2\pi)^D} \frac{S_D J_E}{\left(R^2+K^2\right)^r} \quad . \tag{25.25b}$$

Das Integral über die radiale Wellenzahl R ist ein einfaches, eindimensionales Integral. Alle Probleme der D-dimensionalen Integration sind absorbiert worden vom Faktor S_D, der die Oberfläche einer D-dimensionalen euklidischen Kugel mit Radius R darstellt, und die Oberfläche $S_4 \overset{(20.62)}{=} 2\pi^2 R^3$ der vierdimensionalen Kugel mit Radius R ersetzt. Wie können wir S_D bei nicht-ganzzahliger Dimension D finden?

Aus den Rekursionsformeln (20.62) kann man folgende Formel für die Oberfläche S_n einer n-dimensionalen Euklidischen Kugel mit Radius R ableiten:

$$2 \le n \in \mathbb{N}:$$

$$S_n = \left(\frac{2\pi}{n}\right)^{(n-2)/2} \pi n R^{n-1} \quad \text{für gerades } n \tag{25.26a}$$

$$S_n = \left(\frac{2\pi}{n}\right)^{(n-3)/2} \frac{4\pi}{3} n R^{n-1} \quad \text{für ungerades } n \tag{25.26b}$$

Das Volumen einer eindimensionalen Kugel mit Radius R ist die Länge $V_1 = 2R$, und folglich ist

$$S_1 = \frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}R} = 2 \tag{25.26c}$$

ihre Oberfläche. Nun benutzen wir die Gamma-Funktion

$$\Gamma(z) \equiv \lim_{\nu\to\infty} \frac{\nu!\,\nu^z}{z(z+1)(z+2)\dots(z+\nu)} \quad , \quad \nu \in \mathbb{N} \ , \ z \in \mathbb{C} \ , \tag{25.27}$$

die für beliebiges $z \in \mathbb{C}$ definiert ist, mit Ausnahme der Pole bei $z = 0, -1, -2, \dots$. Der Graph der Gammafunktion mit reellem Argument ist in Abb. 25.1 auf Seite 589 dargestellt. Die grundlegende Eigenschaft der

Gamma-Funktion ist

$$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z) \quad , \quad z \in \mathbb{C} \; . \tag{25.28}$$

Besonders wichtig ist für unseren Zweck die Gamma-Funktion mit halb- und ganzzahligen reellen Argumenten:

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad , \quad 1 \leq n \in \mathbb{N} \tag{25.29a}$$

$$\Gamma(n+1/2) = \frac{(2n)!}{n!\,4^n}\,\sqrt{\pi} \quad , \quad 0 \leq n \in \mathbb{N} \tag{25.29b}$$

$$\Gamma(-n+1/2) = \frac{n!\,(-4)^n}{(2n)!}\,\sqrt{\pi} \quad , \quad 1 \leq n \in \mathbb{N} \tag{25.29c}$$

Durch explizites Nachrechnen überprüft man leicht

$$S_n \overset{(25.26)}{=} \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} R^{n-1} \quad \text{für } n = 1,2,3,4,5 \; . \tag{25.30}$$

Man beachte, dass diese Relation nicht für $n \geq 6$ gilt. Das ist keine schwerwiegende Einschränkung, weil wir praktisch ausschließlich Integrale der Dimensionen $n = 1,2,3,4$ zu lösen haben. Also ist die

$$\text{Definition:} \quad S_D \equiv \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)}\,R^{D-1} \equiv \text{Oberfläche einer}$$
$$D\text{-dimensionalen Kugel mit Radius } R \; , \; 0.5 < \mathrm{Re}(D) < 5.5 \tag{25.31}$$

sicherlich vernünftig, und wird konsistente Resultate ergeben, da wir ja am Ende stets den Grenzwert $\lim_{D\to n}$ mit $n = 1,2,3,4,5$ betrachten müssen. Mit diesem Oberflächenfaktor erhält unser Standard-Schleifenintegral folgende Form:

$$(25.25) = \lim_{D\to 4} \frac{i(-1)^r}{2^{D-1}\pi^{D/2}\Gamma(D/2)} \int_0^\infty \mathrm{d}R\, \frac{R^{D-1} J_E}{\left(R^2+K^2\right)^r} \tag{25.32}$$

Wir berechnen das einfachste Integral mit $J_E \equiv 1$:

$$I_D \equiv \int_0^\infty \mathrm{d}R \, \frac{R^{D-1}}{\left(R^2+K^2\right)^r} \overset{(20.63)}{=} \frac{1}{2} \int_0^\infty \mathrm{d}R^2 \, \frac{(R^2)^{D/2-1}}{\left(R^2+K^2\right)^r} \tag{25.33}$$

Unter der Voraussetzung

$$K^2 > 0 \tag{25.34a}$$

kann man die Substitution

$$X \equiv \frac{K^2}{R^2+K^2} \quad , \quad \mathrm{d}R^2 = -\frac{K^2}{X^2}\,\mathrm{d}X \quad , \quad R^2 = K^2\,\frac{1-X}{X} \tag{25.34b}$$

durchführen. Dadurch wird (25.33) zu

$$I_D = -\frac{1}{2(K^2)^{r-D/2}} \int_1^0 \mathrm{d}X \, X^{r-D/2-1}(1-X)^{D/2-1} \, . \tag{25.35}$$

Mithilfe der Beta-Funktion

$$\mathrm{Beta}(\alpha,\beta) \equiv \int_0^1 \mathrm{d}x \, x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \tag{25.36}$$

erhält man

$$I_D = \int_0^\infty \mathrm{d}R \, \frac{R^{D-1}}{\left(R^2+K^2\right)^r} = +\frac{1}{2(K^2)^{r-D/2}} \, \frac{\Gamma(r-D/2)\,\Gamma(D/2)}{\Gamma(r)} \, ,$$

und durch Einsetzen in (25.32)

$$\lim_{D\to 4} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}^D k}{(2\pi)^D} \, \frac{1}{\left(k^2-K^2+i\epsilon'\right)^r} = \lim_{D\to 4} \frac{i(-1)^r\,\Gamma(r-D/2)}{2^D \pi^{D/2}\,\Gamma(r)\,(K^2)^{r-D/2}} \, . \tag{25.37}$$

Wir werden die Integrale mit $J \neq 1$ nicht selbst berechnen, sondern entneh-

men sie der Literatur[6]:

$$\frac{1}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{k}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}k^0}{2\pi}\,\frac{J}{\left(k^2-K^2+i\epsilon'\right)^r}\overset{(25.18)}{=}i(-1)^r\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}R}{(2\pi)^4}\,\frac{2\pi^2R^3J_E}{\left(R^2+K^2\right)^r}= \tag{25.38a}$$

$$=\lim_{D\to4}\frac{i(-1)^\eta}{(4\pi)^{D/2}}\frac{J_D\,\Gamma(\eta-\frac{D}{2})}{\Gamma(r)}\Big(\frac{1}{K^2}\Big)^{\eta-\frac{D}{2}} \tag{25.38b}$$

$$\text{mit}\begin{cases} 1\le r\in\mathbb{N}\quad,\quad 0\le K^2\in\mathbb{R} & & & & & \\ J= & 1 & k^\mu & k^2 & k^\mu k^\nu & (k^2)^2 \\ J_E= & 1 & 0 & -R^2 & -g^{\mu\nu}R^2/4 & R^4 \\ r= & \ge1 & — & \ge2 & \begin{cases}\ge2 \text{ falls } \mu=0\\ \ge0 \text{ falls } \mu\neq0\end{cases} & \ge3 \\ J_D= & 1 & — & D/2 & g^{\mu\nu}/2 & D(D+2)/4 \\ \eta= & r & — & r-1 & r-1 & r-1 \end{cases}$$

Diese Funktionen haben bei $(\eta-2)=0,-1,-2,\ldots$ Pole aufgrund des Faktors $\Gamma(\eta-D/2)\overset{(25.24)}{=}\Gamma(\eta-2+\epsilon/2)$. Siehe den Graph der Gammafunktion auf Seite 589. Mithilfe der Reihenentwicklung

$$\Gamma(z)=\Big[z\cdot e^{\gamma z}\cdot\prod_{\nu=1}^{\infty}\Big(1+\frac{z}{\nu}\Big)\,e^{-z/\nu}\Big]^{-1} \tag{25.39}$$

$$\gamma=\text{Euler-Mascheroni constant}=\lim_{\nu\to\infty}\Big(-\ln\nu+\sum_{j=1}^{\nu}\frac{1}{j}\Big)\approx0.5772$$

kann die Gammafunktion nahe des Pols $\Gamma(0)$ approximiert werden:

$$\Gamma(\epsilon/2)=\Big[\frac{\epsilon}{2}\cdot\Big(1+\frac{\gamma\epsilon}{2}+\mathcal{O}(\epsilon^2)\Big)\cdot\Big(1+\mathcal{O}(\epsilon^2)\Big)\Big]^{-1}=$$
$$=\frac{2}{\epsilon}\cdot\Big(1-\frac{\gamma\epsilon}{2}+\mathcal{O}(\epsilon^2)\Big)=\frac{2}{\epsilon}-\gamma+\mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{25.40a}$$

[6] Diese und viele weitere nützliche Formeln zur dimensionalen Regularisierung findet man im Lehrbuch von Peskin und Schroeder [3, section 7.5 and appendix A.4].

$\Gamma(\epsilon/2-n)$ mit $n=1,2,3,\ldots$ kann man durch Iteration der grundlegenden Eigenschaft (25.28) der Gammafunktion

$$\begin{aligned}\Gamma(\epsilon/2) &= (\epsilon/2-1)\,\Gamma(\epsilon/2-1) = (\epsilon/2-1)(\epsilon/2-2)\,\Gamma(\epsilon/2-2) \;= \\ &= (\epsilon/2-1)(\epsilon/2-2)(\epsilon/2-3)\,\Gamma(\epsilon/2-3) = \ldots \\ \Gamma(\epsilon/2-n) &= \Gamma(\epsilon/2)\cdot\prod_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\epsilon/2-\nu} \quad , \quad n=1,2,3,\ldots \end{aligned} \tag{25.40b}$$

auf $\Gamma(\epsilon/2)$ zurückführen. Man beachte dass

$$\lim_{\epsilon\to 0}\Gamma(\epsilon/2) = \begin{cases} +\infty & \text{falls } \mathrm{Re}(\epsilon)>0 \\ -\infty & \text{falls } \mathrm{Re}(\epsilon)<0 \\ \text{undefiniert} & \text{falls } \mathrm{Re}(\epsilon)=0 \end{cases} \tag{25.41}$$

ist, siehe den Graph der Gammafunktion in Abb. 25.1 auf der nächsten Seite. Außerdem müssen die unphysikalischen Minuszeichen, die beim Grenzübergang mit $\mathrm{Re}(\epsilon)<0$ und bei Anwendung von (25.40b) mit ungeradem n auftreten, vermieden werden. Diese Überlegungen motivieren die folgenden Regeln:

* Wähle für den Grenzübergang $\lim_{\epsilon\to 0}\Gamma(\epsilon/2)$ einen Pfad in der komplexen Ebene mit $\mathrm{Re}(\epsilon)\neq 0$. (25.42a)
* Setze beim Grenzübergang $\lim_{\epsilon\to 0}\Gamma(\epsilon/2)$ einen Faktor $1\cdot\mathrm{sign}\Big(\mathrm{Re}(\epsilon)\Big)$ ein . (25.42b)
* Setze bei Anwendung von (25.40b) einen Faktor $(-1)^n$ ein . (25.42c)

Im Folgenden berechnen wir das regularisierte Integral (25.38b) einfachheitshalber mit $J_D=1$ und folglich $\eta=r$. Im Hinblick auf (25.42) legen wir uns auf $0<\epsilon\in\mathbb{R}$ fest. Außerdem wird (25.24) eingesetzt:

$$(25.38b) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{i(-1)^r}{(4\pi)^{2-\epsilon/2}}\,\frac{\Gamma(r-2+\epsilon/2)}{\Gamma(r)}\Big(\frac{1}{K^2}\Big)^{r-2+\epsilon/2} \tag{25.43}$$

Mit $r \geq 3$ gibt es keine Divergenz, und deshalb schon von Anfang an keinen Grund eine Regularisierung zu versuchen. Also betrachten wir nur die Fälle $r = 1$ und $r = 2$. Wir beginnen mit $r = 1$.

Mit $\Gamma(1) = 1$ und

$$\Gamma(\epsilon/2 - 1) \overset{(25.40b)}{=} -\frac{2}{\epsilon} + \gamma - 1 + \mathcal{O}(\epsilon) \tag{25.44}$$

und dem Faktor (-1) gemäß (25.42c) erhält man

$$(25.38b) \overset{r=1}{=} -i \lim_{\epsilon \to 0} \Big(\frac{K}{4\pi}\Big)^2 \Big(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + 1\Big) \Big(\frac{4\pi}{K^2}\Big)^{\epsilon/2} + \mathcal{O}(\epsilon) \ . \tag{25.45}$$

Jetzt nutzen wir

$$a^\epsilon = \exp\{\epsilon \ln a\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\epsilon \ln a)^n = 1 + \epsilon \ln a + \mathcal{O}(\epsilon^2) \ , \tag{25.46}$$

und definieren eine unbestimmte Konstante κ mit der Dimension $[\kappa] =$ Wellenzahl, damit der Logarithmus dimensionslos wird:

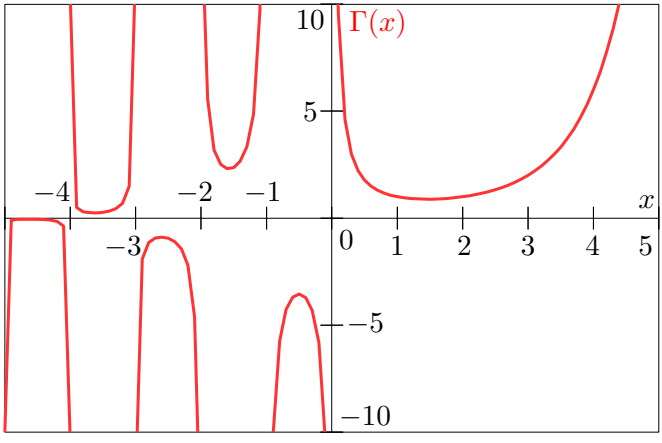


Abb. 25.1 : Die Gammafunktion mit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}(25.38b) &\overset{r=1}{=} -i \lim_{\epsilon\to 0} \Big(\frac{K}{4\pi}\Big)^2 \Big(\frac{1}{\kappa^2}\Big)^{\epsilon/2} \Big(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + 1\Big)\Big[1 + \frac{\epsilon}{2} \ln\Big(\frac{4\pi\kappa^2}{K^2}\Big)\Big] \\ &= -i \lim_{\epsilon\to 0} \Big(\frac{K}{4\pi}\Big)^2 \Big[\frac{2}{\epsilon} - \gamma + 1 + \ln\Big(\frac{4\pi\kappa^2}{K^2}\Big)\Big] \end{aligned} \tag{25.47}$$

In der letzten Zeile wurden mit Hinblick auf $\lim_{\epsilon\to 0}$ alle Terme $\mathcal{O}(\epsilon)$ unterdrückt.

Nun wenden wir uns dem Fall $r = 2$ zu. Mit $\Gamma(\epsilon/2) \overset{(25.40a)}{=} 2/\epsilon - \gamma$ and $\Gamma(2) = 1$ und $\Gamma(2) = 1$ ergibt sich

$$\begin{aligned}(25.38b) &\overset{r=2}{=} \lim_{\epsilon\to 0} \frac{i}{(4\pi)^2} \Big(\frac{2}{\epsilon} - \gamma\Big) \Big(\frac{4\pi}{K^2}\Big)^{\epsilon/2} \\ &\overset{(25.46)}{=} \lim_{\epsilon\to 0} \frac{i}{(4\pi)^2} \Big(\frac{1}{\kappa^2}\Big)^{\epsilon/2} \Big(\frac{2}{\epsilon} - \gamma\Big)\Big[1 + \frac{\epsilon}{2} \ln\Big(\frac{4\pi\kappa^2}{K^2}\Big)\Big] \\ &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{i}{(4\pi)^2} \Big[\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln\Big(\frac{4\pi\kappa^2}{K^2}\Big)\Big] \,. \end{aligned} \tag{25.48}$$

Es ist zweckmäßig, mit einer

$$\text{MS} \equiv \text{Minimale Subtraktion}$$

genannten Methode den divergierenden Term $\lim_{\epsilon\to 0} 2/\epsilon$ und den völlig unbestimmten Faktor κ in einer neuen Variablen w zu kondensieren:

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{2}{\epsilon} + \ln\Big(\frac{4\pi\kappa^2}{K^2}\Big) \xrightarrow{\text{MS}} \lim_{w\to\infty} \ln\Big(\frac{4\pi w^2}{K^2}\Big) \tag{25.49a}$$

Bei einer alternativen Methode, die als

$$\overline{\text{MS}} \equiv \text{modifizierte Minimale Subtraktion}$$

bezeichnet wird, werden außerdem γ und 4π in w absorbiert:

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln\Big(\frac{4\pi\kappa^2}{K^2}\Big) \xrightarrow{\overline{\text{MS}}} \lim_{w\to\infty} \ln\Big(\frac{w^2}{K^2}\Big) \tag{25.49b}$$

Mit $\overline{\text{MS}}$ lautet das regularisierte Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\Big(k^2 - K^2 + i\epsilon'\Big)^r} \begin{cases} \overset{r=1}{=} -i\left(\frac{K}{4\pi}\right)^2 \Big[1 + \lim_{w\to\infty} \ln\left(\frac{w^2}{K^2}\right)\Big] & (25.50a) \\ \overset{r=2}{=} +\lim_{w\to\infty} \frac{i}{(4\pi)^2} \ln\left(\frac{w^2}{K^2}\right) \,. & (25.50b) \end{cases}$$

Egal in welchen Potenzen k in (25.38) vorkommt, ist die Divergenz bei dimensionaler Regularisierung wegen (25.40b) in jedem Fall

$$\lim_{\epsilon\to 0} 2/\epsilon \overset{(25.49)}{\sim} \lim_{w\to\infty} \ln(w^2/K^2) \ .$$

Bei Abschneide-Regularisierung und bei Pauli-Villars-Regularisierung haben wir Divergenzen $\sim \lim_{\Lambda\to\infty} \ln(\Lambda/K)$ harmloser eingeschätzt als Divergenzen $\sim \lim_{\Lambda\to\infty} \Lambda/K$, und diese wiederum harmloser als Divergenzen $\sim \lim_{\Lambda\to\infty} \Lambda^2/K^2$. Zwar divergieren natürlich alle diese Ausdrücke, aber wir hatten die Möglichkeit im Hinterkopf, dass eine (noch unbekannte) sehr kleine fundamentale Länge – und folglich eine maximale Wellenzahl $\Lambda_{\max}$ – existieren könnte, mit der die divergierenden Grenzwerte durch $(\Lambda_{\max}/K)^2 \gg (\Lambda_{\max}/K) \gg \ln(\Lambda_{\max}/K)$ zu ersetzen wären. Es ist kein vergleichbares physikalisches Argument bekannt, den Grenzübergang $\epsilon \to 0$ bzw. $w \to \infty$ bei einem endlichen $\epsilon_{\min} > 0$ bzw. $w_{\max} < \infty$ zu stoppen. Divergierende Integrale sind auch nach dimensionaler Regularisierung streng unendlich, und die Regularisierung bewirkt nichts anderes als sie in geeigneter Weise zur Renormierung irgendeines Parameters vorzubereiten. Deshalb wäre es sinnlos, den Divergenzgrad von dimensional regularisierten Integralen zu diskutieren.

Um die Divergenz aus der Theorie zu entfernen, muss in einem folgenden Schritt einer der Parameter Kopplungskonstante, oder Masse, oder Feldamplitude in der Weise renormiert werden, dass er den divergierenden Faktor $\lim_{w\to\infty} \ln(w^2/K^2)$ absorbiert.

26 Renormierung der QED

In Tabelle 25.1 auf Seite 578 sind die fünf Schleifendiagramme aufgezählt, die möglicherweise divergieren können. In diesem Kapitel werden wir die fünf Diagramme genauer untersuchen und – soweit erforderlich – durch Renormierung bearbeiten.

26.1 Vakuum-Polarisation

Am Beginn von Abschnitt 20.3 wurde begründet, warum die LSZ-Formel zur Berechnung von Propagator-Korrekturen nicht verwendet werden kann. Das gilt natürlich auch für die Propagator-Korrekturen der QED. Man muss stattdessen auf die allgemeine Formel für Matrixelemente

$$\begin{aligned}
&\langle 0|\, T\psi_{(W)}(x_r)\dots\overline{\psi}_{(W)}(x_1)\,|0\rangle \overset{(23.11)}{=} \\
&= \frac{\langle 0|\, T\psi(x_r)\dots\overline{\psi}(x_1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\Big(-\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\tau\, H(\tau)\Big)^n|0\rangle}{\langle 0|\, T\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\Big(-\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\tau\, H(\tau)\Big)^m|0\rangle}
\end{aligned} \tag{26.1}$$

zurückgreifen. Wie in (19.21) vereinbart, sind Operatoren mit Index $_{(W)}$ die vollständigen Operatoren der Theorie mit Wechselwirkung. Operatoren ohne diesen Index sind Operatoren im Wechselwirkungs-Bild. Die im Zähler auftretenden Vakuumblasen werden wir wie gewohnt gegen den Nenner kürzen, so dass nur der Zähler für verbundene Graphen berechnet werden muss. Weil wir die Nomenklatur

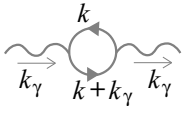
$$S^{(0)}(x_2-x_1) \equiv S(x_2-x_1) \overset{(16.31)}{=} \langle 0|\, T\psi(x_2)\psi(x_1)\,|0\rangle$$

$$D^{(0)}_{\mu\nu}(x_2 - x_1) \equiv D_{\mu\nu}(x_2 - x_1) \overset{(17.85)}{=} \langle 0|\, T A_\mu(x_2) A_\nu(x_1)\, |0\rangle$$

der Feynman-Propagatoren nicht ändern wollen, nennen wir die Propagatoren mit Selbstwechselwirkung

$$\begin{aligned} S^{(W)}(x_2 - x_1) &= \sum_{n=0}^{\infty} S^{(n)}(x_2 - x_1) \;= \\ &= \langle 0|\, T \psi_{(W)}(x_1)\, \psi_{(W)}(x_2)\, |0\rangle \\ D^{(W)}_{\mu\nu}(x_2 - x_1) &= \sum_{n=0}^{\infty} D^{(n)}_{\mu\nu}(x_2 - x_1) \;= \\ &= \langle 0|\, T A_{(W)\mu}(x_1)\, A_{(W)\nu}(x_2)\, |0\rangle \;. \end{aligned}$$

Aus dem Vergleich der Kästen 20.4 und 20.2 der ψ^s-Theorie erkennt man, dass die Feynman-Regeln für die Berechnung von Propagator-Korrekturen lediglich einige Modifikationen der Regeln für die Berechnung der S-Matrix enthalten. Um auch die Regeln für die Berechnung der Propagator-Korrekturen der QED übersichtlich zur Hand zu haben, wurden die entsprechend modifizierten Regeln aus Kasten 24.1 extrahiert und in Kasten 26.1 auf der nächsten Seite eingetragen. Nach diesen Regeln bekommt der erste Graph in (25.1)

$$\widetilde{D}^{(2)}_{\mu\nu}(k_\gamma) \mathrel{\widehat{=}} 2 \cdot$$ 

$$, \tag{26.2}$$

der oft auch Selbstenergie des Photons genannt wird, ein negatives Vorzeichen und den Symmetriefaktor 2. Denn die beiden inneren Fermionenlinien müssen gemäß Regel K als Teilchen (nicht Antiteilchen) interpretiert werden:

$$\langle 0|\, T A(x_1)\, A(x_2)\, \overline{\psi}(y)\, \gamma^\mu A_\mu(y)\, \psi(y)\, \overline{\psi}(z)\, \gamma^\nu A_\nu(z)\, \psi(z)\, |0\rangle \tag{26.3a}$$

Deshalb muss das Operatorpaar $\overline{\psi}(y)\, \psi(z)$ umgedreht werden, damit der Erzeugungsoperator rechts und der Vernichtungsoperator links steht, was zum Faktor (-1) führt. Am Ende von Abschnitt 23.1.4 hatten wir erklärt,

Kasten 26.1 : **Feynman-Regeln im Energie-Impuls-Raum** für die Berechnung von Propagatorkorrekturen n-ter Ordnung in der Quantenelektrodynamik

A Die Propagatorkorrektur entspricht der Summe sämtlicher verbundener Graphen mit der Struktur

$$\text{Propagator}^{(n)} = \text{Propagator}^{(0)} \cdot F^{(n)} \cdot \text{Propagator}^{(0)} \ .$$

B Der Symmetriefaktor ist die Anzahl der Möglichkeiten, die Operatoren, aus denen der Graph aufgebaut ist, paarweise zu den Propagatoren des Graphen zusammenzufassen. Nur einer der gleichwertigen Graphen wird als Summand in $F^{(n)}$ eingetragen, und mit dem Symmetriefaktor multipliziert.

B′ Jede Vertauschung zweier fermionischer Operatoren bei der Kombination zu Propagatoren ergibt einen Faktor (-1).

C Jeder Vertex hat die Struktur .

D Für die n Vertizes gibt es einen Faktor

$$\frac{1}{n!}\Big(\frac{-iq\gamma^\nu}{\hbar}\Big)^n \ .$$

G Für jede innere Photonen-Linie mit Wellenzahl k gibt es einen Faktor

$$\widetilde{D}_{\nu\mu}(k) \overset{(17.86)}{=} \frac{-ig_{\nu\mu}\,\mu_0\hbar c}{k^2 + i\epsilon'} \ ,$$

für jede innere Fermionen-Linie mit Wellenzahl k einen Faktor

$$\widetilde{S}(k) \overset{(12.24)}{=} \frac{i(\gamma^\nu k_\nu + m\frac{c}{\hbar})}{k^2 - m^2\frac{c^2}{\hbar^2} + i\epsilon'} \ .$$

H Über die Wellenzahl k einer inneren Linie wird mit

$$\frac{1}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{k}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}k^0}{2\pi}$$

summiert und integriert, falls k nicht durch Energie- und Impulserhaltung festgelegt ist.

J Es ist der Umordnungs-Operator $\mathcal{U}_\mathrm{S} = (23.21)$ anzuwenden.

K Innere Fermionen-Linien müssen *immer* als Teilchen (nicht als Antiteilchen) interpretiert werden.

dass dies negative Vorzeichen bei reinen Fermionenschleifen immer auftritt, egal wie viele Linien die Schleife enthält.

Der Symmetriefaktor $n!$ (in diesem Fall 2!) ergibt sich – wie in allen Diagrammen der QED (und der Yukawa-Theorie) – aus der Permutation der Vertizes, die zu folgender zweiten möglichen Kontraktion führt:

$$\langle 0|\, T A(x_1)\, A(x_2)\, \overline{\psi}(y)\, \gamma^\mu A_\mu(y)\, \psi(y)\, \overline{\psi}(z)\, \gamma^\nu A_\nu(z)\, \psi(z)\, |0\rangle \tag{26.3b}$$

Damit wird die Korrektur des Photonenpropagators in Störungsrechnung zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned}
\widetilde{D}^{(2)}_{\mu\nu}(k_\gamma) &= \widetilde{D}_{\mu\alpha}(k_\gamma) \cdot F_{\mathrm{P}}^{\alpha\beta} \cdot \widetilde{D}_{\beta\nu}(k_\gamma) \\
F_{\mathrm{P}}^{\alpha\beta} &= -2 \cdot \mathcal{U}_{\mathrm{S}}\, \frac{1}{2!}\, \frac{(-iq\gamma^\alpha)}{\hbar}\, \frac{1}{\Omega} \sum_{\boldsymbol{k}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}k^0}{2\pi} \\
&\quad \cdot \frac{i\Big(\gamma^\sigma (k_\gamma + k)_\sigma + m\tfrac{c}{\hbar}\Big)}{\Big((k_\gamma + k)^2 - m^2 \tfrac{c^2}{\hbar^2} + i\epsilon'\Big)}\, \frac{(-iq\gamma^\beta)}{\hbar}\, \frac{i\Big(\gamma^\tau k_\tau + m\tfrac{c}{\hbar}\Big)}{\Big(k^2 - m^2 \tfrac{c^2}{\hbar^2} + i\epsilon'\Big)} \\
&= -\frac{q^2}{\hbar^2}\, \frac{1}{\Omega} \sum_{\boldsymbol{k}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}k^0}{2\pi} \\
&\quad \cdot \frac{\mathrm{Sp}\Big\{\gamma^\alpha \Big(\gamma^\sigma (k_\gamma + k)_\sigma + m\tfrac{c}{\hbar}\Big) \gamma^\beta \Big(\gamma^\tau k_\tau + m\tfrac{c}{\hbar}\Big)\Big\}}{\Big((k_\gamma + k)^2 - m^2 \tfrac{c^2}{\hbar^2} + i\epsilon'\Big)\Big(k^2 - m^2 \tfrac{c^2}{\hbar^2} + i\epsilon'\Big)}
\end{aligned} \tag{26.4}$$

Im Zähler der letzten Zeile wurden die Spinorfaktoren der Fermionenschleife gemäß der Definition (23.21) des Umordnungsoperators $\mathcal{U}_{\mathrm{S}}$ zur Spur verknüpft. Abzählen der Potenzen von k ergibt den Schleifenindex

$$k^d \overset{(25.1)}{\sim} \mathrm{d}^4 k\, \frac{k^2}{k^4} \sim k^2 \implies d = 2\ .$$

Man erwartet demnach eine quadratische Divergenz dieses Graphen. Die genauere Untersuchung wird zeigen, dass die Divergenz tatsächlich „nur“ lo-

garithmisch ist. Um die Eichinvarianz der QED zu erhalten, wählen wir zur Regularisierung des Integrals nicht die Abschneide-Methode, sondern das in Abschnitt 25.3 beschriebene Verfahren von Pauli und Villars. Wir fügen also N weitere Summanden zum Integranden hinzu, welche die Konstanten M_j und C_j enthalten:

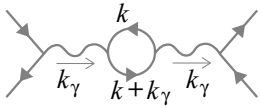
$$F_{\mathrm{P}}^{\alpha\beta} = -\lim_{M_j\to\infty} \frac{q^2}{\hbar^2}\,\frac{1}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{k}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}k^0}{2\pi}\Bigg(\frac{\mathrm{Sp}\Big\{\gamma^\alpha\Big(\gamma^\sigma(k_\gamma+k)_\sigma + m\tfrac{c}{\hbar}\Big)\gamma^\beta\Big(\gamma^\tau k_\tau + m\tfrac{c}{\hbar}\Big)\Big\}}{\Big((k_\gamma+k)^2 - m^2\tfrac{c^2}{\hbar^2} + i\epsilon'\Big)\Big(k^2 - m^2\tfrac{c^2}{\hbar^2} + i\epsilon'\Big)} + \\ + \sum_{j=1}^{N} C_j\,\frac{\mathrm{Sp}\Big\{\gamma^\alpha\Big(\gamma^\sigma(k_\gamma+k)_\sigma + M_j\tfrac{c}{\hbar}\Big)\gamma^\beta\Big(\gamma^\tau k_\tau + M_j\tfrac{c}{\hbar}\Big)\Big\}}{\Big((k_\gamma+k)^2 - M_j^2\tfrac{c^2}{\hbar^2} + i\epsilon'\Big)\Big(k^2 - M_j^2\tfrac{c^2}{\hbar^2} + i\epsilon'\Big)}\Bigg) \tag{26.5}$$

Für $|k| \to \infty$ sind sämtliche Massen m und M_j vernachlässigbar klein. Wenn man die Konstanten so wählt, dass

$$\sum_{j=1}^{N} C_j = -1 \tag{26.6}$$

ist, wird die Divergenz des Integrals durch die zusätzlich eingefügten Gegenterme unterdrückt.

Bei der Berechnung von (26.5) wird vielfach das invariante Wellenzahlquadrat k_γ^2 des einlaufenden Photons auftreten. Für ein beobachtetes Photon ist $k_\gamma^2 = 0$, so dass man alle Terme, die den Faktor k_γ^2 enthalten, streichen könnte. Das werden wir jedoch nicht tun. Denn wir wollen die Berechnung der Vakuumpolarisation von vornherein so anlegen, dass sie auch den Fall berücksichtigt, dass diese Propagatorkorrektur im Inneren eines größeren Graphen auftritt. Beispielsweise findet man bei der Streuung eines Fermions an seinem Antiteilchen in vierter Ordnung der Störungsrechnung unter anderem diesen Graphen:



(26.7)

Aus der Untersuchung in Abschnitt 24.3.7 wissen wir, dass das virtuelle Photon in diesem Graphen ein invariantes Wellenzahlquadrat $k_\gamma^2 < 0$ (t-Kanal-Streuung) oder $k_\gamma^2 > 4m^2c^2/\hbar^2$ (s-Kanal-Streuung, wobei m die Masse des einlaufenden Fermions ist) hat. Darüber hinaus werden wir auch noch die Möglichkeit $0 < k_\gamma^2 \leq 4m^2c^2/\hbar^2$ zulassen, die nur auftreten kann, wenn auch die äußeren Fermionenlinien des Graphen (26.7) tatsächlich innere Linien eines nochmals größeren Graphen sind.

Die Berechnung von $F_{\mathrm{P}}^{\alpha\beta} =$ (26.5) wird in Anhang A.24 in allen Details vorgeführt. Dabei stellt sich folgendes heraus:

* Entgegen dem ersten Anschein würde $F_{\mathrm{P}}^{\alpha\beta}$ ohne Regularisierung durch die Gegenterme „nur“ logarithmisch, jedoch nicht quadratisch divergieren.
* Für die Regularisierung des Integrals (26.5) mit dem Pauli-Villars-Verfahren genügt ein einziger Gegenterm. Es wird deshalb

$$N = 1 \qquad C_1 = -1 \qquad M \equiv M_1 \tag{26.8}$$

festgelegt.

Die Rechnungen in Anhang A.24 ergeben folgendes Resultat:

$$F_{\mathrm{P}}^{\alpha\beta} \overset{(A.182)}{=} (k_\gamma^\alpha k_\gamma^\beta - k_\gamma^2 g^{\alpha\beta}) \cdot \Pi \tag{26.9a}$$

$$\Pi \equiv \lim_{M\to\infty} \int_0^1 \mathrm{d}\xi \, \frac{-q^2(\xi-\xi^2)}{2\pi^2\hbar^2} \cdot V \cdot \cdot \left(-\ln\left(1 - \frac{(\xi-\xi^2)k_\gamma^2\hbar^2}{m^2c^2}\right) + \ln\left(\frac{M^2}{m^2}\right)\right) \tag{26.9b}$$

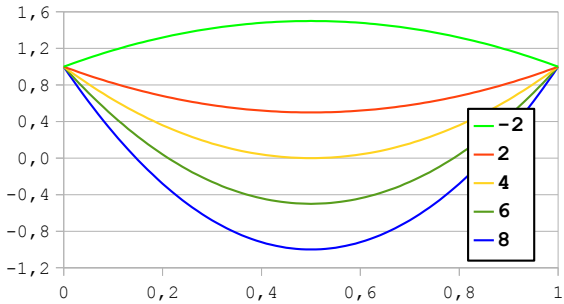
$$V \equiv \begin{cases} 1 & \text{falls } (\xi-\xi^2)k_\gamma^2 < m^2c^2/\hbar^2 \\ 0 & \text{falls } (\xi-\xi^2)k_\gamma^2 \geq m^2c^2/\hbar^2 \end{cases} \tag{26.9c}$$

$F_{\mathrm{P}}^{\alpha\beta}$ wird als Polarisationstensor bezeichnet, Π als Polarisationsfunktion. m ist die Masse der Fermionen, die die Blase (26.2) bilden, M ist die Masse

im Pauli-Villars-Gegenterm. In (26.9b) erkennt man, dass das Elektron als leichtestes elektrisch geladenes Fermion den dominierenden Beitrag zu Π leistet. Deshalb wird im Folgenden $m = m_e$ als Masse und $q = -e$ als Ladung des Elektrons betrachtet. Das ist eine relativ grobe Näherung, weil insbesondere die Beiträge der leichteren Quarks (siehe Tabelle 28.1 auf Seite 655) eigentlich nicht vernachlässigbar klein sind.

Der dimensionslose Integrationsparameter ξ nimmt Werte im Intervall $0 \ldots 1$ an. Der Faktor $(\xi - \xi^2)$ variiert demnach zwischen 0 bei $\xi = 0$ und $\xi = 1$, sowie 0.25 bei $\xi = 0.5$. Also wird das Argument des ersten Logarithmus in (26.9b) bei $\xi = 0.5$ Null oder negativ, falls $k_\gamma^2 \geq 4m^2c^2/\hbar^2$ ist. Das ist genau die Schwelle, bei der die Energie des virtuellen Photons ausreicht, um zwei reelle Fermionen zu erzeugen. Diese konkurrierende Möglichkeit saugt Wahrscheinlichkeitsamplitude aus dem Graphen (26.2) ab. Die Funktion $V =$ (26.9c) blendet diesen Teil des Integrals aus, weil er nichts zu $F_{\mathrm{P}}^{\alpha\beta}$ beiträgt. Zugleich verhindert V, dass die Polarisationsfunktion Π wegen des mathematisch unsinnigen Logarithmus mit negativem Argument explodiert.

Die Wahrscheinlichkeitsamplitude des Diagramms (26.2) wird aber auch bei beliebig großem k_γ^2 nicht Null. Denn in jedem Fall ist $(\xi - \xi^2)k_\gamma^2$ in der Nachbarschaft von $\xi = 0$ und $\xi = 1$ kleiner als $m^2c^2/\hbar^2$, beziehungsweise $1 - (\xi - \xi^2)k_\gamma^2\hbar^2/(mc)^2$ größer als Null, und deshalb die Funktion V gleich 1. Siehe Abbildung 26.2. Wir bezeichnen die ξ-Werte, bei denen $1 - (\xi - \xi^2)k_\gamma^2\hbar^2/(mc)^2$ gleich Null ist, als η und $1 - \eta$, und unterteilen (26.9b) in



Die Parameter in der Legende geben das Verhältnis $k_\gamma^2\hbar^2/(mc)^2$ an.

Abb. 26.2: $1 - (\xi - \xi^2)k_\gamma^2\hbar^2/(mc)^2$ als Funktion von ξ

drei Bereiche:

$$\underbrace{\int_0^1 \mathrm{d}\xi \ldots}_{\Pi} = \underbrace{\int_0^\eta \mathrm{d}\xi \ldots}_{\Pi_a} + \underbrace{\int_\eta^{1-\eta} \mathrm{d}\xi \ldots}_{\Pi_b} + \underbrace{\int_{1-\eta}^1 \mathrm{d}\xi \ldots}_{\Pi_c} \tag{26.10}$$

Die Funktion V setzt Π_b auf Null, während Π_a und Π_c von Null verschieden sind.

Um übersichtliche Formeln zu erhalten, beschränken wir uns für den Rest dieses Abschnitts auf den Fall $k_\gamma^2 < 4m^2c^2/\hbar^2$, bei dem V stets Eins ist, egal welchen Wert ξ hat. Wir betonen aber, dass alles im Folgenden gesagte sinngemäß auch für $k_\gamma^2 \geq 4m^2c^2/\hbar^2$ gilt, wobei dann das Integral über ξ entsprechend (26.10) unterteilt werden muss, und nur die Randintegrale Π_a und Π_c zum Ergebnis beitragen.

Außerdem wird die Feinstrukturkonstante

$$\alpha_q = \frac{q^2\mu_0 c}{4\pi\hbar} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \tag{26.11a}$$

$$\alpha \equiv \alpha_e = \frac{e^2\mu_0 c}{4\pi\hbar} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx \frac{1}{137} \tag{26.11b}$$

in die Formeln eingeführt. Damit vereinfacht (26.9) sich zu

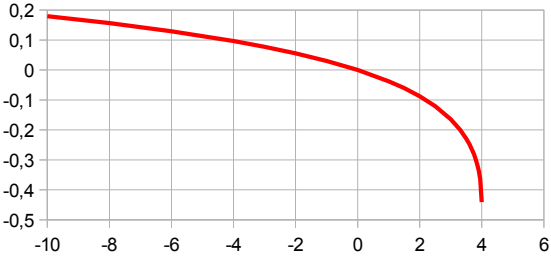
$$F_{\mathrm{P}}^{\alpha\beta} \overset{(26.9)}{=} (k_\gamma^\alpha k_\gamma^\beta - k_\gamma^2 g^{\alpha\beta})\,\Pi \tag{26.12a}$$

$$\Pi = \lim_{M\to\infty} \frac{2\alpha}{\pi\hbar\mu_0 c}\left(I - \frac{1}{6}\,\ln\left(\frac{M^2}{m^2}\right)\right) \tag{26.12b}$$

$$I \equiv \int_0^1 \mathrm{d}\xi\,(\xi - \xi^2)\,\ln\left(1 - \frac{(\xi-\xi^2)k_\gamma^2\hbar^2}{m^2c^2}\right) \tag{26.12c}$$

$$\text{falls } k_\gamma^2 < 4m^2c^2/\hbar^2$$

Die mühsame analytische Berechnung des Integrals I ersparen wir uns, und lassen stattdessen den PC arbeiten. In Abbildung 26.3 wird das Ergebnis der numerischen Integration dargestellt. Wegen $\lim_{\xi\to 0} \xi\ln(\xi) = 0$



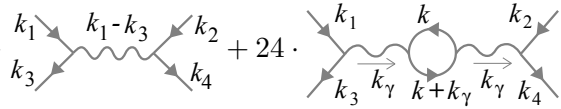
Weitere Werte:
$I(-1E12) = 4.33$
$I(-1E9) = 3.18$
$I(-1E6) = 2.02$
$I(-1E3) = 0.87$
$I(-1E1) = 0.18$

Abb. 26.3: $I =$ (26.12c) als Funktion von $k_\gamma^2\hbar^2/(mc)^2$

divergiert es bei $k_\gamma^2 = 4m^2c^2/\hbar^2$ nicht, sondern hat den endlichen Wert -0.44. Der Wert des Integrals steigt über 0 beim invarianten Wellenzahlquadrat $k_\gamma^2 = 0$ eines freien Photons kontinuierlich langsam an auf etwa 4 bei $k_\gamma^2 = -10^{12}m^2c^2/\hbar^2$ eines raumartigen virtuellen Photons. Mit der Elektronenmasse $m \approx 0.5\,\mathrm{MeV}$ entspricht $k_\gamma^2 = -10^{12}m^2c^2/\hbar^2$ einer invarianten Masse des virtuellen Photons von $\hbar c|k_\gamma| \approx 500\,\mathrm{GeV}/c^2$. I ist endlich, weil k_γ^2 endlich ist, und liegt unter allen praktisch relevanten Umständen im Bereich $-0.44 < \ldots < 5$.

Jetzt betrachten wir, wie die Streumatrix $\mathcal{M} =$ (24.47b), die wir in Abschnitt 24.3.1 in Störungsrechnung zweiter Ordnung für die t-Kanal-Streuung eines Elektrons an einem Myon berechnet haben, durch die Vakuumpolarisation, die hier als Effekt 4. Ordnung auftaucht, modifiziert wird.

$$\mathcal{M}^{(2)} + \mathcal{M}_a^{(4)} \mathrel{\widehat{=}} 2 \cdot \quad + 24 \cdot \qquad (26.13)$$



Die Symmetriefaktoren sind – wie immer in der QED – identisch mit der Fakultät der Anzahl der Vertizes. Das bedeutet zugleich aber, dass sie immer gegen den Faktor $1/n!$ zu kürzen sind, der aus der Taylorentwicklung des Wechselwirkungsterms im Matrixelement stammt. In (26.4) haben wir $2/2! = 1$ eingesetzt, weil dort die Propagatorkorrektur zweiter Ordnung berechnet wurde. Diesen Faktor müssen wir im Graphen vierter Ordnung durch $24/4! = 1$ ersetzten, d.h. die Änderung der Symmetriefaktoren wird in den folgenden Formeln überhaupt nicht sichtbar. Der Index a wurde

eingefügt, weil es in vierter Ordnung der Störungsrechnung mehrere weitere Korrekturterme zur t-Kanal-Streumatrix zweiter Ordnung gibt, die wir erst später diskutieren werden. Wir setzen die Streumatrizen aus den Gleichungen (24.47b), (26.4), und (26.12) zusammen. Weil die einlaufenden Fermionen unterschiedlichen Flavor haben, sind die grün eingefärbten Faktoren in (24.47b), die zur u-Kanal-Streuung gehören, gleich Null zu setzen. Außerdem ist $k_\gamma^2 = (k_1 - k_3)^2 < 0$, weil die vier äußeren Fermionenlinien wirklich äußere Linien sind.

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^{(2)} + \mathcal{M}_a^{(4)} &= -\left(\frac{+ie}{\hbar}\right)^2 ({}^{r_3}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_3}\,\gamma^\mu\,{}^{r_1}u^{\boldsymbol{k}_1})\,\frac{(-ig_{\mu\alpha}\,\mu_0\hbar c)}{(k_1-k_3)^2+i\epsilon'}\cdot \\
&\quad\cdot\left(g^\alpha{}_\nu + (-iF_{\mathrm{P}}^{\alpha\beta})\frac{(-ig_{\beta\nu}\,\mu_0\hbar c)}{(k_1-k_3)^2+i\epsilon'}\right)({}^{r_4}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_4}\,\gamma^\nu\,{}^{r_2}u^{\boldsymbol{k}_2}) \\
&= \lim_{M\to\infty}\frac{e^2}{\hbar^2}({}^{r_3}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_3}\,\gamma^\mu\,{}^{r_1}u^{\boldsymbol{k}_1})\,\frac{(-ig_{\mu\alpha}\,\mu_0\hbar c)}{(k_1-k_3)^2+i\epsilon'}\cdot \\
&\quad\cdot\left(g^\alpha{}_\nu - i\left((k_1-k_3)^\alpha(k_1-k_3)^\beta - (k_1-k_3)^2 g^{\alpha\beta}\right)\frac{2\alpha}{\pi\hbar\mu_0 c}\cdot\right. \\
&\quad\cdot\left.\left(I - \frac{1}{6}\,\ln\!\left(\frac{M^2}{m^2}\right)\right)\frac{(-ig_{\beta\nu}\,\mu_0\hbar c)}{(k_1-k_3)^2+i\epsilon'}\right)({}^{r_4}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_4}\,\gamma^\nu\,{}^{r_2}u^{\boldsymbol{k}_2})
\end{aligned} \tag{26.14}$$

In diesem Ausdruck kann ein Summand gestrichen werden, weil die Spinoren Lösungen der freien Diracgleichung sind:

$$\begin{aligned}
&{}^{r_3}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_3}\,\gamma^\mu\,{}^{r_1}u^{\boldsymbol{k}_1} g_{\mu\alpha}(k_1-k_3)^\alpha = {}^{r_3}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_3}\,(\not{k}_1 - \not{k}_3)^{r_1}u^{\boldsymbol{k}_1} = \\
&= \underbrace{{}^{r_3}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_3}\,(-\not{k}_3 + mc/\hbar)}_{0} + \underbrace{\not{k}_1 - mc/\hbar)^{r_1}u^{\boldsymbol{k}_1}}_{0} = 0
\end{aligned}$$

Anschließend kann man

$$g_{\mu\alpha}(X g^\alpha{}_\nu + Y g^{\alpha\beta} g_{\beta\nu}) = g_{\mu\nu}(X+Y)$$

vereinfachen, und einen Faktor $(k_1 - k_3)^2$ kürzen. (Dabei wird ein Summand $i\epsilon'$ überflüssig.)

$$\mathcal{M}^{(2)} + \mathcal{M}_a^{(4)} = \frac{e^2}{\hbar^2}({}^{r_3}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_3}\,\gamma^{\mu\,r_1}u^{\boldsymbol{k}_1})\,\frac{(-ig_{\mu\nu}\,\mu_0\hbar c)}{(k_1-k_3)^2+i\epsilon'}\cdot$$
$$\cdot\left(1+\frac{2\alpha}{\pi}\Big(I-\frac{1}{6}\lim_{M\to\infty}\ln\Big\{\frac{M^2}{m^2}\Big\}\Big)\right)({}^{r_4}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_4}\,\gamma^{\nu\,r_2}u^{\boldsymbol{k}_2}) \tag{26.15}$$

Wegen $e^2 \sim \alpha$ kann man $e^2 \cdot (\ )$ in der Form

$$e^2\Big(\ \Big) = e^2\Big(1+\frac{2\alpha}{\pi}\,I\Big)\cdot Z_3 + \mathcal{O}(\alpha^3)$$
$$Z_3 \equiv 1 - \frac{\alpha}{3\pi}\lim_{M\to\infty}\ln\Big\{\frac{M^2}{m^2}\Big\} \tag{26.16}$$

schreiben. Es genügt uns, wenn alle Ergebnisse korrekt sind bis zur Ordnung $\mathcal{O}(\alpha^2)$. Deshalb durfte die quadratische Ergänzung $\mathcal{O}(\alpha^3)$ eingefügt werden.

Der Faktor Z_3 wird durch die Renormierung der Elektronenladung eliminiert. Das bedeutet: Die Ladung e, die in den vorangegangenen Formeln vorkam, wird zur „nackten“, nicht messbaren Ladung erklärt, die wir mit dem Index Null als e_0 kennzeichnen. Dagegen wird die in Experimenten gemessene Ladung als e bezeichnet. Auch die Feinstrukturkonstante kennzeichnen wir als α_0, wenn sie das Produkt e_0^2 enthält, dagegen als α, wenn sie das Produkt e^2 enthält. Folgende Relation zwischen e_0 und e wird postuliert:

$$e_0^2\cdot Z_3 = e_0^2\Big(1-\frac{\alpha_0}{3\pi}\lim_{M\to\infty}\ln\Big\{\frac{M^2}{m^2}\Big\}\Big) \xrightarrow[\text{Messung bei } k_\gamma^2\to 0]{\text{Renormierung}} e^2 \tag{26.17}$$

Der renormierte Wert von e^2, der hier einzusetzen ist, wird experimentell ermittelt, beispielsweise durch Streuung von Elektronen an Myonen. Die Messung soll bei möglichst kleinem Impulsübertrag k_γ^2 durchgeführt werden (das bezeichnet man als Vorwärts-Streuung), damit die komplizierte nichtlineare Korrektur durch den Faktor I vermieden wird. Für $k_\gamma^2 \approx 0$ ist $I \approx 0$, siehe Abbildung 26.3.

Für t-Kanal-Streuung mit beliebig großem Impulsübertrag ist die renormierte Streumatrix

$$\mathcal{M}^{(2)} + \mathcal{M}_a^{(4)} = \frac{e^2}{\hbar^2}\Big(1 + \frac{2}{\pi}\,\alpha\, I\Big)\cdot$$
$$\cdot\ ({}^{r_3}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_3}\,\gamma^{\mu}\,{}^{r_1}u^{\boldsymbol{k}_1})\,\frac{(-ig_{\mu\nu}\,\mu_0\hbar c)}{(k_1-k_3)^2+i\epsilon'}\,({}^{r_4}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_4}\,\gamma^{\nu}\,{}^{r_2}u^{\boldsymbol{k}_2}) =$$
$$\overset{(24.47b)}{=} \mathcal{M}^{(2)}_{\text{nicht renormiert}}\cdot\frac{e^2}{e_0^2}\Big(1+\frac{2}{\pi}\,\alpha\, I\Big)\,. \tag{26.18}$$

Bei t-Kanal-Streuung ist wegen $k_\gamma^2 = (k_3-k_1)^2 < 0$ der Faktor I positiv. Deshalb nimmt die experimentell beobachtete wirksame Ladung $e^2(1+2\alpha I/\pi)$ mit zunehmendem Impulsübertrag zu. Dagegen nimmt sie bei s-Kanal-Streuung wegen $k_\gamma^2 > 0$ mit zunehmendem Impulsübertrag ab. Eine anschauliche Interpretation des Faktors I ist nicht offensichtlich. Die Wirkung von I darf nicht mit der „laufenden Kopplungskonstanten“ verwechselt werden, die wir in (26.21)ff diskutieren werden.

Für ein freies (nicht virtuelles) Photon ist $(k_\gamma)^2 = 0$ und $I = 0$. Mit der nicht renormierten Feinstrukturkonstanten α_0 und

$$\frac{\alpha_0}{3\pi}\lim_{M\to\infty}\ln\Big(\frac{M^2}{m^2}\Big)\overset{(26.17)}{=}1-Z_3$$

ergibt sich als Propagatorkorrektur in zweiter Ordnung der Störungstheorie

$$\widetilde{D}^{(2)}_{\mu\nu'}(k_\gamma)\overset{(26.4)}{=}\widetilde{D}_{\mu\alpha}(k_\gamma)\cdot F_{\mathrm{P}}^{\alpha\beta}\cdot\widetilde{D}_{\beta\nu}(k_\gamma)$$
$$\overset{(26.14)}{=}\frac{(-ig_{\mu\alpha}\,\mu_0\hbar c)}{(k_\gamma)^2+i\epsilon'}\,\frac{k_\gamma^\alpha k_\gamma^\beta\,\alpha_0}{3\pi\hbar\mu_0 c}\lim_{M\to\infty}\ln\Big(\frac{M^2}{m^2}\Big)\,\frac{(-ig_{\beta\nu}\,\mu_0\hbar c)}{(k_\gamma)^2+i\epsilon'}$$
$$\overset{?}{=}\frac{-g_{\mu\alpha}k_\gamma^\alpha k_\gamma^\beta g_{\beta\nu}\,\mu_0\hbar c(1-Z_3)}{(k_\gamma)^4+i\epsilon'}\qquad\text{nur vorläufig!}$$

Dieser Ausdruck ist unbrauchbar, weil er das unbekannte Z_3 enthält. Es fehlt der Faktor e_0^2, mit dem Z_3 das bekannte Produkt $Z_3e_0^2 = e^2$ bilden würde. Das Problem beruht darauf, dass die Vorstellung eines freien Photons physikalisch fragwürdig ist. Wir können von der Existenz eines Photons nur dadurch etwas erfahren, dass es einmal von einem geladenen Fermion emittiert wurde, oder dass es von einem Fermion absorbiert werden wird. Im Grunde sollte also jede Photonenlinie als innere Linie betrachtet werden. Aus

(26.18) liest man für das Produkt (e_0^2·Propagator mit Selbstwechselwirkung) ab:

$$\text{innere Photonenlinie:} \qquad e_0^2 \widetilde{D}^{(W)}_{\mu\nu}(k_\gamma) = e_0^2 \widetilde{D}^{(0)}_{\mu\nu}(k_\gamma) + e_0^2 \widetilde{D}^{(2)}_{\mu\nu}(k_\gamma) =$$
$$= \underbrace{\frac{(-ig_{\mu\nu}\,\mu_0\hbar c)}{(k_\gamma)^2 + i\epsilon'} \left(1 + \frac{2}{\pi}\,\alpha_0 I\right) Z_3 e_0^2}_{\text{nicht renormiert}} = \underbrace{\frac{(-ig_{\mu\nu}\,\mu_0\hbar c)}{(k_\gamma)^2 + i\epsilon'} \left(1 + \frac{2}{\pi}\,\alpha I\right) e^2}_{\text{renormiert}} \tag{26.19}$$

Zurückübersetzt auf das Matrixelement (24.45) im Zeit-Orts-Raum bedeutet das

$$\langle 0|\, T \ldots A^\mu_{(W)}(y)\, A^\nu_{(W)}(z) \ldots |0\rangle_c \;=$$
$$= \langle 0|\, T \ldots \sqrt{Z_3} A^\mu(y)\; \sqrt{Z_3} A^\nu(z) \ldots |0\rangle_c \,. \tag{26.20}$$

Der Feldoperator des Eichfeldes erhält durch die Selbstwechselwirkung einen zusätzlichen Normierungsfaktor $\sqrt{Z_3}$. Wann immer das Feld an einen Vertex mit Ladungsfaktor q_0 andockt, wird das Produkt $q_0\sqrt{Z_3} = q$ gebildet. Der Selbstwechselwirkungsgraph (26.2) verschwindet aus der Theorie (besser gesagt: er wird unsichtbar), wenn erstens die Ladungsparameter q_0 durch experimentell ermittelte Ladungsparameter q ersetzt werden, und wenn zweitens für jede innere Photonenlinie ein zusätzlicher Faktor $(1 + 2\alpha I\pi)$ mit $I =$ (26.12c) eingefügt wird.

Wenn man (26.17) mit $1/(4\pi\epsilon_0\hbar c)$ multipliziert, erhält man eine Gleichung für die Kopplungskonstante:

$$\alpha_0 - \frac{\alpha_0^2}{3\pi} \lim_{M\to\infty} \ln\left\{\frac{M^2}{m^2}\right\} = \alpha \tag{26.21}$$

Es ist klar, dass α_0 in genau abgestimmter Weise divergieren muss, damit sich die gemessene Kopplungskonstante $\alpha \approx 1/137$ ergibt. Interessanter ist diese Gleichung, wenn man gemäß (21.29) eine fundamentale Länge r annimmt, und deshalb Integrale über Wellenzahlen bei $\Lambda \approx \pi/r$ abschneiden muss. Bei Pauli-Villars-Regularisierung bedeutet das, dass man als Masse des Gegenterms den endlichen Wert

$$\frac{Mc}{\hbar} = \Lambda = \frac{\pi}{r} \implies M = \frac{\pi\hbar}{rc} \tag{26.22a}$$

einsetzen muss. Dadurch wird die Kopplungskonstante α_0 in (26.21) zu α_r:

$$\alpha_r\Big[1 - \frac{\alpha_r}{3\pi}\,\ln\Big\{\frac{\pi^2\hbar^2}{r^2c^2m^2}\Big\}\Big] = \alpha$$

$$\alpha_r \approx \frac{\alpha}{1 - \dfrac{\alpha}{3\pi}\,\ln\Big\{\dfrac{\pi^2\hbar^2}{r^2c^2m^2}\Big\}} = \frac{\alpha}{1 - \dfrac{\alpha}{3\pi}\,\ln\Big\{\dfrac{\Lambda^2\hbar^2}{m^2c^2}\Big\}} \approx \alpha_\Lambda \tag{26.22b}$$

Das ist offensichtlich nur dann eine brauchbare Näherung, wenn der Betrag des zweiten Terms im Nenner klein gegen 1 ist. Die gemessene Kopplungskonstante $\alpha = 1/137$ für $r \to \infty$ (d. h. sehr kleinen Impulsübertrag zwischen den streuenden Fermionen bzw. $|k_\gamma|$ des virtuellen Photons sehr klein) ist bekannt, ebenso die Compton-Wellenlänge $2\pi\hbar/(mc) = 2.4 \cdot 10^{-12}\text{m}$ des Elektrons. Damit findet man

$$\begin{aligned}
&\alpha_r \approx 1/126 \quad \text{für} \quad r = 1,6 \cdot 10^{-35}\text{m} = l_{\text{Planck}} \\
&\alpha_r \approx 1/128 \quad \text{für} \quad r = 10^{-30}\text{m} \\
&\alpha_r \approx 1/134 \quad \text{für} \quad r = 10^{-18}\text{m} \\
&\alpha_r \approx 1/137 \quad \text{für} \quad r = 10^{-12}\text{m} \approx l_{\text{Compton}}\ .
\end{aligned} \tag{26.22c}$$

Das stimmt qualitativ, aber nicht quantitativ mit den gemessenen Werten (21.20a) überein. Um genauere Werte der laufenden Kopplungskonstanten zu erhalten, muss man offenbar noch Terme $\mathcal{O}(\alpha^3)$ hinzufügen, vor allem aber auch den Beitrag virtueller Quarks zur Vakuum-Polarisation berücksichtigen, siehe die Anmerkung unter (26.9). Man kann aber grob abschätzend feststellen, dass die relative Änderung α_0/α der Kopplungskonstanten der QED bei der Renormierung weit weniger als einen Faktor 2 betragen dürfte, wenn die fundamentale Länge r (so es sie denn gibt) nicht wesentlich kleiner als die Planck-Länge ist. In (26.17) divergiert die relative Änderung der Kopplungskonstanten, weil als fundamentale Länge $r = 0$ angenommen wird.

Zur anschaulichen Deutung der laufenden Kopplungskonstanten findet man in der Literatur zuweilen suggestive Bilder, in denen die dielektri-

sche Wirkung der Elektronenblase als Verschiebung virtueller Elektronen gegen virtuelle Positronen dargestellt wird. Solche Bilder sind zumindest missverständlich. Nach Satz (23.39) sind virtuelle Fermionen in der Quantenelektrodynamik formal niemals als virtuelle Antiteilchen, sondern immer als virtuelle Teilchen zu behandeln. Beide inneren Fermionenlinien im rechten Graphen von (26.13) müssen als Elektronen mit der Ladung $-e$ interpretiert werden. Die dielektrische Abschirm-Wirkung kommt durch den Faktor (-1) zustande, der aus der Antisymmetrie der Matrixelemente (26.3) bei Vertauschung zweier fermionischer Operatoren resultiert. Wieder stellen wir fest, dass die Quantenfeldtheorie hinsichtlich der Anziehung und Abstoßung zwischen geladenen Teilchen wesentlich unanschaulicher ist als die Klassische Theorie.

26.2 Selbstenergie des Fermions

Der Propagator eines Fermions mit Selbstwechselwirkung

$$\widetilde{S}^{(W)}(k_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{S}^{(n)}(k_1) \tag{26.23a}$$

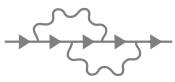
ist in nullter Ordnung der Störungsrechnung gleich dem Propagator

$$\widetilde{S}^{(0)}(k_1) \equiv \widetilde{S}(k_1) \mathrel{\widehat{=}}$$ (26.23b)

des Fermions in der Theorie ohne Wechselwirkung. Das Diagramm zweiter Ordnung

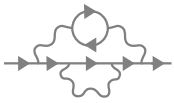
$$\widetilde{S}^{(2)}(k_1) \mathrel{\widehat{=}} 2! \cdot$$ (26.23c)

ist das zweite Diagramm in der Tabelle (25.1) der möglicherweise divergierenden Schleifendiagramme der QED. Wir werden es gleich explizit berechnen. In vierter Ordnung gibt es unter anderem die folgenden Diagramme:

$$\widetilde{S}^{(4)}(k_1) \mathrel{\widehat{=}} 4! \cdot$$  $+ 4! \cdot$ $+$

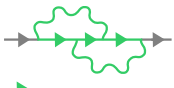
$+ 4! \cdot$ $+ 4! \cdot \ldots$ (26.23d)

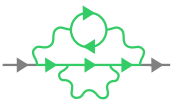
Das dritte Diagramm ist one-particle-reducibel, siehe Definition im Anschluss an (20.82) auf Seite 453. Die beiden anderen Diagramme sind 1PI = one-particle-irreducibel, denn man kann sie nicht durch Auftrennen einer einzigen Linie in zwei Diagramme zerlegen. In sechster Ordnung findet man unter anderem die Diagramme

$\widetilde{S}^{(6)}(k_1) \mathrel{\widehat{=}} 6! \cdot$  $+\, 6! \cdot$ $+$

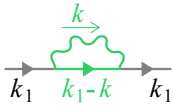
$+\, 6! \cdot$ $+ \ldots$ (26.23e)

Das erste Diagramm ist 1PI, die beiden anderen sind es nicht. Man definiert die Summe aller 1PI Diagramme mit Ausnahme von $\widetilde{S}^{(0)}(k_1)$ als

$\widetilde{S}(k_1)\,\Sigma(k_1)\,\widetilde{S}(k_1) \mathrel{\widehat{=}} 2! \cdot$ $+\, 4! \cdot$  $+$

$+\, 4! \cdot$ $+\, 4! \cdot \ldots + 6! \cdot$  $+ \ldots$. (26.24)

Achtung: Σ ist hier nicht das Summen-Zeichen, sondern eine unendliche Reihe mit dem Namen Sigma. Nach dieser Definition gehören also die ein- und auslaufenden Propagatoren in den Diagrammen nicht zu Σ, sondern nur das, was dazwischen grün gezeichnet ist. Insbesondere ist der Term $\mathcal{O}(q^2)$ in dieser Reihe gleich



$\mathrel{\widehat{=}} \widetilde{S}^{(2)}(k_1) = \widetilde{S}(k_1) \cdot \Sigma^{(2)}(k_1) \cdot \widetilde{S}(k_1)$. (26.25)

Mit der Definition (26.24) kann man den Propagator eines Fermions mit Selbstwechselwirkung auch in Form einer Geometrischen Reihe schreiben, wobei wir wieder die Schreibweise mit dem Feynman-Dagger $\not{k} \equiv \gamma^\nu k_\nu$ verwenden:

$$\begin{aligned}\widetilde{S}^{(W)} &= \widetilde{S} + \widetilde{S}\Sigma\widetilde{S} + \widetilde{S}\Sigma\widetilde{S}\Sigma\widetilde{S} + \ldots \overset{(12.23),(12.24)}{=} \\ &= \frac{\dfrac{i}{\not{k}_1 - m_0 c/\hbar}}{1 - \dfrac{i\Sigma}{\not{k}_1 - m_0 c/\hbar}} = \frac{i}{\not{k}_1 - m_0 c/\hbar - i\Sigma}\end{aligned} \tag{26.26}$$

Vereinfachend wird oft auch das Diagramm zweiter Ordnung (26.25) als Selbstenergie des Fermions bezeichnet, obwohl es sich bei ihm lediglich um den Term niedrigster Ordnung in der vollständigen Propagatorkorrektur (26.26) handelt. Die nackte Masse m_0 des Fermions existiert nur als Parameter in der Theorie, dieser Parameter ist nicht direkt messbar. Was man messen kann ist die effektive Masse m, die den Pol im renormierten Propagator

$$\widetilde{S}^{(W)} = \frac{i}{\not{k}_1 - mc/\hbar}$$

bewirkt. Allerdings kann man nicht einfach $i\Sigma\hbar/c$ als Massekorrektur betrachten. Denn $\Sigma(k_1)$ ist keine Konstante, sondern hängt in komplizierter Weise von k_1 ab. Wir entwickeln $\Sigma(k_1)$ in einer Taylorreihe um $\not{k}_1 = m_0 c/\hbar$:

$$\begin{aligned}\Sigma(k_1) &= \sum_{n=0}^{\infty} (\not{k}_1 - m_0 c/\hbar)^n W_n \; = \\ &= \underbrace{A + (\not{k}_1 - m_0 c/\hbar)B}_{\mathcal{O}(q^2)} + \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} (\not{k}_1 - m_0 c/\hbar)^n W_n}_{\mathcal{O}(q^4)}\end{aligned} \tag{26.27}$$

Um zu verstehen warum alle Summanden mit $(\not{k}_1 - m_0 c/\hbar)^n, n \geq 2$ der Störungsrechnung höherer als zweiter Ordnung zuzurechnen sind, betrachten wir die Diagramme (24.106), (24.107), und (24.108), sowie die dort abgeschätzten Massen der virtuellen Fermionen. Man erkennt, dass diese Massen unter realistischen Annahmen über die Impulse der ein- und auslaufenden Teilchen nur geringfügig von den Massen der freien Fermionen abweichen. Das liegt daran, dass die ein- und auslaufenden Photonen in

diesen Streuprozessen die Ruhemasse Null haben, weil sie freie Teilchen sind. Erst in Diagrammen höherer Ordnung, die sowohl virtuelle Photonen als auch virtuelle Fermionen enthalten, ist mit größeren Abweichungen der Masse virtueller Fermionen von der Masse freier Fermionen zu rechnen.

Deshalb können Terme $(\not{k}_1 - m_0c/\hbar)^n, n \geq 2$ in der Taylorentwicklung (26.27) vernachlässigt werden, wenn man sich mit einer Genauigkeit $\mathcal{O}(q^2)$ der Korrektur des Fermionenpropagators zufrieden gibt. Diese Genauigkeit des Propagators entspricht einer Genauigkeit $\mathcal{O}(q^4)$ von Streudiagrammen mit zwei einlaufenden und zwei auslaufenden Teilchen. Denn wir können die Berechnung der Graphen (24.106), (24.107), und (24.108) bis zur vierten Ordnung der Störungsrechnung, d.h. $\mathcal{O}(q^4)$, ausdehnen, indem wir der virtuellen Fermionenlinie die Korrektur zweiter Ordnung (26.25), die wir im Folgenden berechnen werden, aufpfropfen. Man erhält ein einschließlich $\mathcal{O}(q^2)$ korrektes Ergebnis, wenn die Koeffizienten A und B der Taylorreihe (26.27) berücksichtigt und die restlichen Koeffizienten W_n mit $n \geq 2$ ignoriert werden.

Die beiden Koeffizienten $A, B \in \mathbb{R}$ sind von der Größenordnung $\mathcal{O}(q^2)$. Deshalb kann man den Nenner des Propagators (26.26) schreiben als

$$\begin{aligned}\frac{\not{k}_1 - m_0c/\hbar - iA}{1+iB} &= \frac{\not{k}_1 - m_0c/\hbar - iA - \not{k}_1 iB + iBm_0c/\hbar - AB}{(1+iB)(1-iB)} = \\ &= \not{k}_1 - m_0c/\hbar \underbrace{-iA - (\not{k}_1 - m_0c/\hbar)iB}_{-i\Sigma^{(2)}} + \mathcal{O}(q^4)\ , \end{aligned} \tag{26.28}$$

und der Propagator mit Selbstwechselwirkung erhält folgende Form:

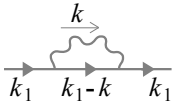
$$\widetilde{S}^{(W)} \overset{(26.26)}{=} \frac{i\,(1+iB)}{\not{k}_1 - m_0c/\hbar - iA} + \mathcal{O}(q^4) = \frac{i\,Z_2}{\not{k}_1 - mc/\hbar} + \mathcal{O}(q^4)$$
$$\text{mit } Z_2 \equiv 1 + iB \quad \text{und} \quad m \equiv m_0 + iA\hbar/c \tag{26.29}$$

Da wir uns mit einer Genauigkeit $\mathcal{O}(q^2)$ zufrieden geben, kann man die Koeffizienten

$$A \overset{(26.27)}{=} \Sigma^{(2)}\Big|_{\not{k}_1 = m_0c/\hbar} \quad \text{und} \quad B \overset{(26.27)}{=} \frac{\partial \Sigma^{(2)}}{\partial \not{k}_1}\Big|_{\not{k}_1 = m_0c/\hbar} \tag{26.30}$$

berechnen, sobald man die algebraische Form von $\Sigma^{(2)}$ kennt. Diese müssen wir als Nächstes berechnen.

Es wird sich herausstellen, dass das Diagramm (26.25) logarithmisch divergiert. Die Divergenz werden wir durch die Renormierung der Masse des Fermions sowie durch eine weitere Renormierung der Ladung beheben. Allerdings wird nur die Renormierung der Masse Bestand haben. Die zweite Renormierung der Ladung (eine erste Renormierung der Ladung haben wir ja gerade aufgrund der Vakuum-Polarisation vorgenommen) wird durch eine dritte Renormierung der Ladung, die im nächsten Abschnitt bei der Vertexkorrektur auftreten wird, genau kompensiert. Deshalb unterscheiden wir im Folgenden zwischen der nicht messbaren „nackten“ Masse m_0 des Fermions, und der renormierten Masse m. Die Berechnung des Diagramms wird mit der nicht renormierten Masse m_0, jedoch mit der im vorigen Abschnitt renormierten Ladung durchgeführt. Nach den Regeln von Kasten 26.1 hat das Diagramm (26.25) folgenden Wert:



$$\widehat{=}\ \widetilde{S}^{(2)}(k_1) = \widetilde{S}(k_1)\cdot\Sigma^{(2)}(k_1)\cdot\widetilde{S}(k_1) \tag{26.31}$$

$$\begin{aligned}\Sigma^{(2)} &= -2\cdot\mathcal{U}_{\mathrm{S}}\,\frac{1}{2!}\,\frac{(-iq\gamma^{\alpha})}{\hbar}\,\frac{1}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{k}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}k^0}{2\pi}\\ &\quad\cdot\frac{i(\gamma^{\nu}(k_1-k)_{\nu}+m_0c/\hbar)}{(k_1-k)^2-(m_0c/\hbar)^2+i\epsilon'}\,\frac{(-i)g_{\alpha\beta}\,\mu_0\hbar c}{k^2+i\epsilon'}\,\frac{(-iq\gamma^{\beta})}{\hbar}\\ &= \frac{q^2\mu_0 c}{\hbar}\,\frac{1}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{k}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}k^0}{2\pi}\,\frac{\gamma^{\alpha}\Big(\gamma^{\nu}(k_1-k)_{\nu}+m_0c/\hbar\Big)\gamma_{\alpha}}{\Big((k_1-k)^2-m_0^2c^2/\hbar^2\Big)k^2+i\epsilon}\end{aligned} \tag{26.32}$$

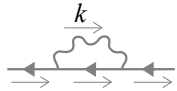
Hier wurde der Symmetriefaktor 2 eingesetzt, der wie immer in der QED identisch ist mit der Fakultät der Anzahl der Vertizes, und sich deshalb gegen den Faktor 1/2! aus der Taylorentwicklung des Wechselwirkungsterms kürzt. Denn das Matrixelement der Selbstenergie eines fermionischen Teilchens (nicht Antiteilchens), das sich von x_1 nach y bewegt, dort ein Photon mit Wellenzahl k emittiert, bei z dieses Photon wieder absorbiert, und sich schließlich weiter nach x_2 bewegt, hat die Kontraktion

$$\langle 0|\, T\overline{\psi}(x_1)\,\psi(x_2)\,\overline{\psi}(y)\,\gamma^\mu A_\mu(y)\,\psi(y)\,\overline{\psi}(z)\,\gamma^\nu A_\nu(z)\,\psi(z)\,|0\rangle\ .$$

Um die Propagatoren zu bilden, sind 5 Vertauschungen fermionischer Operatoren erforderlich, also gibt es einen Faktor (-1). Wenn sich das einlaufende Teilchen stattdessen von x_1 nach z bewegt, und schließlich von y nach x_2 ausläuft, hat das Matrixelement die Kontraktion

$$\langle 0|\, T\overline{\psi}(x_1)\,\psi(x_2)\,\overline{\psi}(y)\,\gamma^\mu A_\mu(y)\,\psi(y)\,\overline{\psi}(z)\,\gamma^\nu A_\nu(z)\,\psi(z)\,|0\rangle\ .$$

Zur Bildung der Propagatoren ist 1 Vertauschung fermionischer Operatoren erforderlich, was wieder einen Faktor (-1) ergibt.



Betrachtet man stattdessen den Graph eines Antiteilchens, das sich von x_1 nach y oder nach z bewegt, dort ein Photon mit Wellenzahl k emittiert, dieses Photon bei z oder bei y wieder absorbiert, und schließlich nach x_2 ausläuft, dann erhält man ein Matrixelement mit den beiden folgenden Kontraktionen:

$$\langle 0|\, T\psi(x_1)\,\overline{\psi}(x_2)\,\overline{\psi}(y)\,\gamma^\mu A_\mu(y)\,\psi(y)\,\overline{\psi}(z)\,\gamma^\nu A_\nu(z)\,\psi(z)\,|0\rangle$$

$$\langle 0|\, T\psi(x_1)\,\overline{\psi}(x_2)\,\overline{\psi}(y)\,\gamma^\mu A_\mu(y)\,\psi(y)\,\overline{\psi}(z)\,\gamma^\nu A_\nu(z)\,\psi(z)\,|0\rangle$$

Auch in diesem Fall ist der Symmetriefaktor 2, und es gibt ein negatives Vorzeichen, weil die Bildung der Propagatoren in beiden Fällen 3 Vertauschungen fermionischer Operatoren erfordert. Also ist die Korrektur der Selbstenergie des Antiteilchens identisch mit der Korrektur (26.32) des Teilchens, so dass keine separate Berechnung nötig ist.

Ohne den kleinen Summanden $i\epsilon$ hätte das Integral (26.32) Pole bei $(k_1 - k)^2 = m_0^2 c^2/\hbar^2$ und bei $k^2 = 0$. Außer der logarithmischen UV-Divergenz bei $|k| \to \infty$ werden wir auch eine logarithmische IR-Divergenz bei $|k| \to 0$ finden, die allerdings erst in (26.44) deutlich sichtbar wird.

Um die IR-Divergenz in Schach zu halten, ordnen wir dem Photon formal eine kleine aber endliche Ruhemasse m_γ zu, verschieben den Pol des Photonenpropagators also nach $k^2 = m_\gamma^2 c^2/\hbar^2$. Diese formale Maßnahme ist zulässig, weil – wie in Abschnitt 24.3.6 festgestellt – die IR-Divergenz letztlich durch Graphen mit Bremsstrahlungsphotonen unmessbar kleiner Energie kompensiert wird, also überhaupt nur deshalb auftaucht, weil wir hier nur einen unvollständigen Teil der relevanten Graphen betrachten.

Nun fasst man die beiden Faktoren des Nenners mit der Methode (20.72) zusammen:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Big((k_1-k)^2 - m_0^2\frac{c^2}{\hbar^2}\Big)\Big(k^2 - m_\gamma^2\frac{c^2}{\hbar^2}\Big)} = \\
&= \int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}\xi}{\Big(\xi\Big((k_1-k)^2 - m_0^2\frac{c^2}{\hbar^2}\Big) + (1-\xi)\Big(k^2 - m_\gamma^2\frac{c^2}{\hbar^2}\Big)\Big)^2} = \\
&= \int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}\xi}{\Big((k-\xi k_1)^2 + \xi(1-\xi)k_1^2 - (1-\xi)m_\gamma^2\frac{c^2}{\hbar^2} - \xi m_0^2\frac{c^2}{\hbar^2}\Big)^2}
\end{aligned} \tag{26.33}$$

Mithilfe der definierenden Relation (8.9) berechnen wir einige Kontraktionen von γ-Matrizen:

$$\gamma^\alpha\gamma_\alpha = 4 \tag{26.34a}$$

$$\gamma^\alpha\gamma^\tau\gamma_\alpha = (2g^{\alpha\tau} - \gamma^\tau\gamma^\alpha)\gamma_\alpha = 2\gamma^\tau - \gamma^\tau\cdot 4 = -2\gamma^\tau \tag{26.34b}$$

$$\begin{aligned}
\gamma^\alpha\gamma^\sigma\gamma^\tau\gamma_\alpha &= (2g^{\alpha\sigma} - \gamma^\sigma\gamma^\alpha)\gamma^\tau\gamma_\alpha = \\
&= 2\gamma^\tau\gamma^\sigma + 2\gamma^\sigma\gamma^\tau = 4g^{\sigma\tau}
\end{aligned} \tag{26.34c}$$

$$\begin{aligned}
\gamma^\alpha\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\tau\gamma_\alpha &= (2g^{\alpha\rho} - \gamma^\rho\gamma^\alpha)\gamma^\sigma\gamma^\tau\gamma_\alpha = 2\gamma^\sigma\gamma^\tau\gamma^\rho - 4g^{\sigma\tau}\gamma^\rho = \\
&= 4g^{\sigma\tau}\gamma^\rho - 2\gamma^\tau\gamma^\sigma\gamma^\rho - 4g^{\sigma\tau}\gamma^\rho = -2\gamma^\tau\gamma^\sigma\gamma^\rho
\end{aligned} \tag{26.34d}$$

Man verwendet (26.34a) und (26.34b), substituiert die Summations- und Integrationsvariable k durch $k \to \kappa = k - \xi k_1$ und benennt anschließend κ um in k. Damit lautet das Integral

$$\Sigma^{(2)} \overset{(26.32)}{=} -\int_0^1 \mathrm{d}\xi\, \frac{2q^2\mu_0 c}{\hbar}\, \frac{1}{\Omega} \sum_{\boldsymbol{k}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}k^0}{2\pi} \cdot$$
$$\cdot\, \frac{(1-\xi)\not{k}_1 - \not{k} - 2m_0 c/\hbar}{\Big(k^2 + \xi(1-\xi)k_1^2 - (1-\xi)m_\gamma^2 c^2/\hbar^2 - \xi m_0^2 c^2 \hbar^2 + i\epsilon\Big)^2} \,. \quad (26.35)$$

Hier wurde wieder der Feynman-Dagger $\not{k} \equiv \gamma^\nu k_\nu$ verwendet. Der Summand $\not{k}$ im Zähler kann gestrichen werden. Denn er ist antisymmetrisch für $\pm k$, während der Rest des Integranden symmetrisch ist für $\pm k$, so dass das Integral über diesen Summanden Null ergibt. Das verbleibende Integral hat den Schleifenindex

$$k^d \sim \mathrm{d}^4 k\, k^{-4} \implies d = 0 \,,$$

so dass man für $|k| \to \infty$ eine logarithmische Divergenz erwartet.

Wir schreiben $\Sigma^{(2)}$ in der Form

$$\Sigma^{(2)} = \frac{2q^2\mu_0 c}{\hbar} \int_0^1 \mathrm{d}\xi\, V \left(2\,\frac{m_0 c}{\hbar} - (1-\xi)\not{k}_1\right) \cdot$$
$$\cdot\, \frac{1}{\Omega} \sum_{\boldsymbol{k}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}k^0}{2\pi}\, \frac{1}{\Big(k^2 - K^2 + i\epsilon\Big)^2} \quad (26.36a)$$

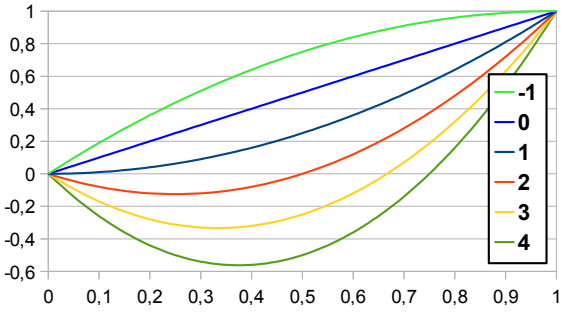
$$K^2 \equiv -(\xi - \xi^2)k_1^2 + (1-\xi)m_\gamma^2 c^2/\hbar^2 + \xi m_0^2 c^2/\hbar^2 \quad (26.36b)$$

$$V \equiv \begin{cases} 1 & \text{falls } K^2 \geq 0 \\ 0 & \text{falls } K^2 < 0 \,. \end{cases} \quad (26.36c)$$

$K\hbar/c$ spielt die Rolle einer effektiven Masse. Denn bei $k = \pm K$ hat $\Sigma^{(2)}$ Pole. Unter Vernachlässigung des sehr kleinen m_γ^2 ist

$$\frac{K^2\hbar^2}{m_0^2 c^2} = \xi - (\xi - \xi^2)\frac{k_1^2 \hbar^2}{m_0^2 c^2} \,.$$

Diese Funktion wird in Abbildung 26.4 dargestellt. Für ein freies Teilchen



Die Parameter in der Legende geben das Verhältnis $k_1^2\hbar^2/(m_0c)^2$ an.

Abb. 26.4: $K^2\hbar^2/(m_0c)^2$ als Funktion von ξ

mit $k_1^2 = m_0^2c^2/\hbar^2$ ist K^2 bei beliebigem ξ immer ≥ 0, ebenso für ein virtuelles Teilchen mit $k_1^2 < m_0^2c^2/\hbar^2$. Dagegen gibt es bei einem virtuellen Teilchen mit $k_1^2 > m_0^2c^2/\hbar^2$ einen Bereich kleiner ξ-Werte, bei denen $K^2 < 0$ wird, die effektive Masse also imaginär ist. Die imaginäre effektive Masse ist das formale Kennzeichen eines dissipativen Prozesses, in dem Energie dadurch aus dem untersuchten System verschwindet, dass sie in Wärme umgewandelt wird. In diesem Fall besteht die Dissipation darin, dass ein Kanal zugänglich wird, der in Konkurrenz zum Diagramm (26.32) steht: Bei $k_1^2 > m_0^2\frac{c^2}{\hbar^2}$ reicht die Energie im System dafür aus, dass aus dem virtuellen Photon mit Wellenzahl k ein reales Photon mit Wellenzahl k und aus dem virtuellen Fermion mit Wellenzahl $k_1 - k$ ein reales Fermion mit Wellenzahl $k_1 - k$ wird. An die Stelle von (26.32) tritt also ein Bremsstrahlungsprozess der Art (24.91).

Die Funktion V bewirkt, dass bei der Integration über ξ der dissipative Bereich mit $K^2 < 0$ ausgeblendet wird. Deshalb kann die allgemeine Integralformel

$$\frac{1}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{k}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}k^0}{2\pi}\,\frac{1}{\left(k^2-K^2+i\epsilon'\right)^r}\overset{(20.64)}{=}\frac{i(-1)^r}{16\pi^2}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}R^2\,\frac{R^2}{\left(R^2+K^2\right)^r}$$
$$r\in\mathbb{R}, r>\frac{1}{2}\ ,\ K^2\in\mathbb{R}, K^2\geq 0 \tag{26.37}$$

angewendet werden. Mit ihr erhält man

$$\Sigma^{(2)} = \int_0^1 \mathrm{d}\xi\, V \frac{iq^2\mu_0 c\Big(2m_0c/\hbar - (1-\xi)\not{k}_1\Big)}{8\pi^2\hbar} \int_0^{+\infty} \mathrm{d}R^2 \frac{R^2}{(R^2+K^2)^2} \,. \quad (26.38)$$

Das Integral über R divergiert logarithmisch bei $R \to \infty$. In der ψ^s-Theorie haben wir es mithilfe eines Abschneide-Parameters Λ regularisiert. Diese Methode wollen wir hier nicht wiederholen, um nicht die Eichinvarianz der QED zu gefährden. Stattdessen regularisieren wir das Integral nach der Methode von Pauli und Villars durch Einführung eines Gegenterms:

$$\Sigma^{(2)} = \lim_{M\to\infty} \int_0^1 \mathrm{d}\xi\, V \frac{iq^2\mu_0 c\Big(2m_0c/\hbar - (1-\xi)\not{k}_1\Big)}{8\pi^2\hbar} \cdot$$
$$\cdot \int_0^{+\infty} \mathrm{d}R^2 \left(\frac{R^2}{(R^2+K^2)^2} - \frac{R^2}{(R^2+K_M^2)^2}\right) \quad (26.39a)$$

$$K^2 \overset{(26.36b)}{=} -(\xi-\xi^2)k_1^2 + (1-\xi)m_\gamma^2c^2/\hbar^2 + \xi m_0^2c^2/\hbar^2 \quad (26.39b)$$

$$K_M^2 \equiv -(\xi-\xi^2)k_1^2 + (1-\xi)m_\gamma^2c^2/\hbar^2 + \xi M^2c^2/\hbar^2 \approx$$
$$\approx \xi M^2c^2/\hbar^2 \quad \text{because of } M^2 \gg m_0^2 \quad (26.39c)$$

M, und demzufolge auch K_M, werden groß aber endlich gewählt. Deshalb werden bei $R \to \infty$ sowohl K^2 als auch K_M^2 vernachlässigbar klein gegen R^2, und die beiden Terme in (26.39a) kompensieren sich zu Null.

$$\Sigma^{(2)} \overset{(26.39a)}{=} \lim_{M\to\infty} \int_0^1 \mathrm{d}\xi\, V \frac{iq^2\mu_0 c\Big(2m_0c/\hbar - (1-\xi)\not{k}_1\Big)}{8\pi^2\hbar} \cdot$$
$$\cdot \left(\frac{K^2}{R^2+K^2} + \ln\left(\frac{R^2+K^2}{R^2+K_M^2}\right) - \frac{K_M^2}{R^2+K_M^2}\right)\Bigg|_0^\infty$$
$$= \frac{i\alpha_q}{2\pi} \int_0^1 \mathrm{d}\xi\, V \left(2\,\frac{m_0c}{\hbar} - (1-\xi)\not{k}_1\right) \lim_{M\to\infty} \ln\left(\frac{K_M^2}{K^2}\right) . \quad (26.40)$$

Die Feinstrukturkonstante α_q wurde in (26.11) definiert.

Unter Beachtung von

$$(\not{k}_1)^2 = \tfrac{1}{2}k_\alpha(\gamma^\alpha\gamma^\beta + \gamma^\beta\gamma^\alpha)k_\beta \overset{(8.9)}{=} \tfrac{1}{2}k_\alpha 2g^{\alpha\beta}k_\beta = (k)^2 \tag{26.41}$$

berechnen wir nun die Koeffizienten A und B:

$$A = \Sigma^{(2)}\Big|_{\not{k}_1 = m_0 c/\hbar} \overset{(26.40)}{=} \frac{i\alpha_q m_0 c}{2\pi\hbar}\int_0^1 \mathrm{d}\xi\, V(1+\xi)\lim_{M\to\infty}\ln\Big(\frac{k_M^2}{K^2}\Big)$$

Die Funktion $V = (26.36c)$ verhindert eine allgemeine Lösung des Integrals über ξ. Wir schränken uns deshalb für den Rest dieses Abschnitts auf den Fall $k_1^2 \le m_0^2c^2/\hbar^2$, also auf freie und auf raumartige virtuelle Fermionen ein. Unter dieser Voraussetzung ist K^2 bei beliebigem ξ stets ≥ 0 und deshalb stets $V = 1$. Dann kann man A mit

$$\ln\Big(\frac{k_M^2}{K^2}\Big)\Big|_{\not{k}_1 = m_0 c/\hbar} = \ln\Big(\frac{\xi M^2}{(\xi^2-\xi)m_0^2 + (1-\xi)m_\gamma^2 + \xi m_0^2}\Big) =$$

$$= \ln(\xi) + \ln\Big(\frac{M^2}{m_0^2}\Big) - \underbrace{\ln\Big(\xi^2 + (1-\xi)\frac{m_\gamma^2}{m_0^2}\Big)}_{\approx 2\ln(\xi)}$$

$$\int_0^1 \mathrm{d}\xi\,(1+\xi)\ln(\xi) = -\frac{5}{4} \quad , \quad \int_0^1 \mathrm{d}\xi\,(1+\xi) = \frac{3}{2}$$

berechnen:

$$A = \frac{i\alpha_q m_0 c}{2\pi\hbar}\Big(\frac{3}{2}\lim_{M\to\infty}\ln\Big(\frac{M^2}{m_0^2}\Big) + \frac{5}{4}\Big) \tag{26.42}$$

Nun wird M dadurch eliminiert, dass die nackte Masse m_0 des Fermions auf die experimentell festgestellte Fermionenmasse m renormiert wird:

$$\boxed{m \overset{(26.29)}{=} m_0 + i\frac{A\hbar}{c} \overset{(26.42)}{=} m_0 - \frac{\alpha_q m_0}{2\pi}\Big(\frac{3}{2}\lim_{M\to\infty}\ln\Big(\frac{M^2}{m_0^2}\Big) + \frac{5}{4}\Big)} \tag{26.43}$$

Es ist interessant, diese Renormierung der Masse mit der im vorigen Abschnitt berechneten Renormierung

$$\alpha \overset{(26.17)}{=} \alpha_0 - \frac{\alpha_0^2}{3\pi} \lim_{M\to\infty} \ln\left\{\frac{M^2}{m^2}\right\}$$

der Kopplungskonstanten zu vergleichen. Die Struktur der beiden Renormierungs-Gleichungen ist identisch. Also ist auch die renormierte Masse eine „laufende Konstante“, deren Wert entsprechend (26.22) davon abhängt, wie fein die Längenskala r ist, auf der die Theorie geprüft wird. Und genau wie bei der Kopplungskonstanten können wir grob abschätzend feststellen, dass die relative Änderung m_0/m der Masse bei der Renormierung weniger als einen Faktor 2 betragen dürfte, wenn die fundamentale Länge, so sie existieren sollte, nicht wesentlich kleiner als die Planck-Länge ist. In (26.43) divergiert die relative Änderung der Masse, weil als fundamentale Länge $r = 0$ angenommen wird.

Als Nächstes berechnen wir den Normierungsfaktor Z_2 im Propagator (26.29), wobei wir uns wieder auf den Fall $k_1^2 \le m_0^2c^2/\hbar^2$ einschränken, in dem V bei beliebigem ξ gleich Eins ist:

$$\begin{aligned} B = i(1-Z_2) = \frac{\partial\Sigma^{(2)}}{\partial \not{k}_1}\Big|_{\not{k}_1 = m_0c/\hbar} &\overset{(26.40)}{=} \frac{i\alpha_q}{2\pi} \lim_{m_\gamma\to 0} \int_0^1 \mathrm{d}\xi \Big((-1+\xi) \\ &\cdot \lim_{M\to\infty} \ln\Big(\frac{\xi M^2c^2/\hbar^2}{(\xi^2-\xi)k_1^2 + (1-\xi)m_\gamma^2c^2/\hbar^2 + \xi m_0^2c^2/\hbar^2}\Big) + \\ &+ \Big(2\frac{m_0c}{\hbar} - (1-\xi)\not{k}_1\Big)\cdot \\ &\cdot \frac{(-2)(\xi^2-\xi)\not{k}_1}{(\xi^2-\xi)k_1^2 + (1-\xi)m_\gamma^2c^2/\hbar^2 + \xi m_0^2c^2/\hbar^2}\Big)\Big|_{\not{k}_1 = m_0c/\hbar} \\ &= \frac{i\alpha_q}{2\pi}\Big(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\lim_{M\to\infty}\ln\Big(\frac{M^2}{m_0^2}\Big) - C\Big) \end{aligned} \tag{26.44}$$

$$C \equiv \int_0^1 \mathrm{d}\xi \Big(\frac{2(\xi^3-\xi)}{\xi^2 + (1-\xi)\frac{m_\gamma^2}{m_0^2}} + (\xi-1)\underbrace{\ln\Big(\xi^2 + (1-\xi)\frac{m_\gamma^2}{m_0^2}\Big)}_{\approx 2\ln(\xi)}\Big)$$

Bevor wir weiterarbeiten, ersetzen wir in B überall m_0 durch den gerade renormierten Wert m. Wegen des linearen Terms (nicht wegen des logarithmischen Terms) in C ist $m_\gamma \neq 0$ zur Vermeidung der IR-Divergenz erforderlich. Man kann C dadurch annähern, dass man den Summanden $(1-\xi)m_\gamma^2/m^2$ durch eine Verschiebung der unteren Integrationsgrenze ersetzt:

$$\begin{aligned} C &\approx \int\limits_{m_\gamma/m}^{1} \mathrm{d}\xi \left(\frac{2(\xi^3-\xi)}{\xi^2} + (\xi-1)\,\ln(\xi^2) \right) = 1 - \frac{m_\gamma^2}{m^2} + \ln\left(\frac{m_\gamma^2}{m^2}\right) - \\ &\quad - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{m_\gamma^2}{m^2}\ln\left(\frac{m_\gamma^2}{m^2}\right) + \frac{1}{2}\frac{m_\gamma}{m} + 2 + \frac{m_\gamma}{m}\ln\left(\frac{m_\gamma^2}{m^2}\right) - 2\frac{m_\gamma}{m} \\ &\approx -\ln\left(\frac{m^2}{m_\gamma^2}\right) + \frac{5}{2} \qquad \text{wegen } m_\gamma \ll m \end{aligned}$$

Damit erhält man

$$Z_2 \overset{(26.29)}{=} 1 + iB = 1 + \frac{\alpha_q}{2\pi}\left(\frac{1}{2}\lim_{M\to\infty} \ln\left(\frac{M^2}{m^2}\right) + \frac{7}{4} - \ln\left(\frac{m^2}{m_\gamma^2}\right)\right). \quad (26.45)$$

Der Term mit m_γ, bei dem für $m_\gamma \to 0$ eine IR-Divergenz auftritt, wird bei Berücksichtigung von Diagrammen mit unmessbar niederenergetischer Bremsstrahlung verschwinden, wie in Abschnitt 24.3.6 festgestellt. Wir brauchen uns also nicht um diesen Term zu kümmern. Der Faktor M wird durch Renormierung behandelt: Der Term Z_2 ist im Zähler des Propagators (26.29) enthalten. Man kann ihn also als zusätzlichen Normierungsfaktor der Feldoperatoren im Propagator

$$\langle 0|\, T\psi^{(W)}(x_2)\,\overline{\psi}^{(W)}(x_1)\,|0\rangle = \langle 0|\, T\,\sqrt{Z_2}\psi_0(x_2)\;\sqrt{Z_2}\,\overline{\psi}_0(x_1)\,|0\rangle$$

betrachten. Zum Vertex z eines Graphen gehört das Operatorprodukt $\sqrt{Z_2}\psi_0(z)\;\sqrt{Z_2}\,\overline{\psi}_0(z)\,A(z)$. Also wird der Vertexfaktor – der nach Regel D von Kasten 24.1 gleich $-iq\gamma^\mu/\hbar$ ist – mit $\sqrt{Z_2}\,\sqrt{Z_2} = Z_2$ multipliziert. Demnach erfordert die Selbstwechselwirkung des Fermions eine weitere Renormierung der nackten Ladung q_0 des Fermions:

$$\boxed{Z_2 \cdot q_0 \xrightarrow{\text{Renormierung}} q} \tag{26.46}$$

Eine erste Renormierung der Fermionenladung mit der Renormierungskonstanten Z_3 haben wir bereits aufgrund der Vakuumpolarisation vorgenommen, siehe (26.17). Und bei der Untersuchung der Vertexkorrektur im nächsten Abschnitt wird sich herausstellen, dass eine dritte Renormierung der Fermionenladung mit einer Renormierungskonstanten $1/Z_1$ erforderlich ist. Insgesamt gilt

$$\sqrt{Z_3}\,\frac{Z_2}{Z_1} \cdot q_0 \xrightarrow{\text{Renormierung}} q\ . \tag{26.47}$$

Wir werden aber auch feststellen, dass $Z_2 = Z_1$ ist, so dass insgesamt die Ladung schließlich doch den Wert behält, der durch Z_3 in (26.17) festgelegt wurde.

Die Renormierungen (26.43) und (26.46) bedeuten, dass alle in (26.24) angedeuteten Selbstenergie-Korrekturen in sämtlichen Graphen durch die einfache Propagatorlinie ⟶ zu ersetzen sind. Dadurch entstehen Graphen, die bereits in niedrigerer Ordnung der Störungstheorie berücksichtigt wurden. Daraus folgt im Effekt, dass jeder Graph, der eine der Selbstenergie-Korrekturen (26.24) enthält, zu streichen ist. Diese Graphen werden damit „unsichtbar“. Aber sie verschwinden nicht wirklich aus der Theorie, sondern stecken implizit in der renormierten Fermionenmasse m und in der renormierten Ladung q.

26.3 Vertexkorrektur

Nach Regel D von Kasten 24.1 auf Seite 520 ist für jeden Vertex ein Faktor

$$\widehat{=}\ -\frac{iq\gamma^\nu}{\hbar} \tag{26.48a}$$

einzutragen. Zusätzlich erhält ein Graph mit n Vertizes einen Faktor $1/n!$, so dass insgesamt die Regel

$$n \cdot \quad \widehat{=} \frac{1}{n!}\left(\frac{-iq\gamma^\nu}{\hbar}\right)^n \tag{26.48b}$$

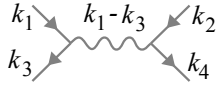
gilt. Hier wurden die Vertizes durch grüne Punkte markiert um deutlich herauszustellen, dass sich die Faktoren nur auf die Kontaktstelle der ein- und auslaufenden Propagatoren beziehen, aber nicht auf die Propagatoren selbst. Wir definieren eine korrigierte Vertexfunktion $\Gamma(k_1, k_3)$ durch

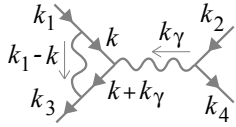
$$-\frac{iq\Gamma^\nu(k_1,k_3)}{\hbar} \widehat{=} \quad \equiv \quad + 3!\cdot \quad + \quad + 5!\cdot \quad + 5!\cdot \quad + 5!\cdot \ldots + \ldots \,. \tag{26.48c}$$

Wie immer in der QED sind die Symmetriefaktoren identisch mit der Fakultät der Anzahl der Vertizes. Dagegen gibt der Index (n) von $\Gamma^{(n)\nu}$ die Anzahl der Vertizes an, die zusätzlich zu (26.48a) im Graphen vorhanden sind. Achtung: Nur 1PI-Diagramme werden zu Γ^ν gerechnet. Diagramme wie z. B. gehören nicht dazu, weil dies Diagramm durch das Auftrennen einer einzigen Linie (wie rot gestrichelt angedeutet) in zwei Diagramme zerlegt werden kann. Weil Energie und Impuls der ein- und auslaufenden Teilchen erhalten bleiben müssen, ist k_γ durch k_1 und k_3 eindeutig festgelegt und braucht in der Definition von $\Gamma^\nu(k_1, k_3)$ nicht extra spezifiziert zu werden.

Klarerweise ist $\Gamma^{(0)\nu} = \gamma^\nu$. Wir werden im Folgenden Γ^ν nur bis zur Ordnung $\Gamma^{(2)\nu}$ berechnen, also nur die Vertexkorrektur in niedrigster Ordnung. Das tun wir anhand der der t-Kanal-Streuung eines Elektrons an einem Myon. Diesen Vorgang haben wir in Abschnitt 24.3.1 in zweiter Ordnung der Störungsrechnung berechnet. Als einen Beitrag vierter Ordnung haben

wir in Abschnitt 26.1 bereits die Vakuumpolarisation des virtuellen Photons untersucht, siehe Graph (26.13). Als weiteren Beitrag vierter Ordnung betrachten wir nun die Vertexkorrektur in niedrigster Ordnung, die in Tabelle (25.1) als drittes möglicherweise divergierendes Diagramm der QED aufgelistet wurde.

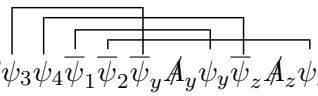
$$\mathcal{M}^{(2)} + \mathcal{M}_b^{(4)} \mathrel{\widehat{=}} 2 \cdot$$ 

$$+ 24 \cdot$$ 

(26.49)

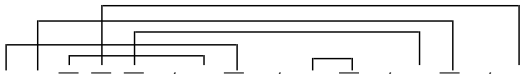
k_1 symbolisiert das einlaufende Elektron, k_2 das einlaufende Myon, und es ist $k_\gamma = k_2 - k_4 = k_3 - k_1$. Wir werden gleich sehen, dass die Vertexkorrektur proportional zu m^{-4} ist. Dabei ist m die Masse des Fermions. Weil das Myon etwa 207 mal schwerer als das Elektron ist, ist die Vertexkorrektur am Myonenstrom um mehr als den Faktor 10^{-9} schwächer als die Vertexkorrektur des Elektronenstroms, und kann vernachlässigt werden.

Aus dem Matrixelement zweiter Ordnung der t-Kanal-Streuung

$$(24.45) = \langle 0|\, T\psi_3\psi_4\overline{\psi}_1\overline{\psi}_2\overline{\psi}_y \not{A}_y\psi_y\overline{\psi}_z \not{A}_z\psi_z|0\rangle$$  (26.50)

haben wir erstens abgelesen, dass es einen Faktor (-1) gibt, weil die Kontraktion des Matrixelements zu den Propagatoren des Graphen eine ungerade Anzahl von Vertauschungen der Fermionen-Operatoren erfordert. Zweitens haben wir abgelesen, dass die zweite mögliche Kontraktion, bei der die Vertizes y und z vertauscht sind, ebenfalls den Faktor (-1) bekommt, weil sie eine geradzahlige weitere Anzahl von Vertauschungen fermionischer Operatoren erfordert. Das ist in der QED offenbar immer so: Weil zu jedem Vertex eine gerade Zahl (nämlich zwei) fermionischer Operatoren gehört, ergibt die Permutation der Vertizes keinen Vorzeichenwechsel. Alle Kontraktionen, die zum gleichen Graphen führen, haben das gleiche Vorzeichen.

Das Matrixelement $\mathcal{M}_b^{(4)}$ wird aus

$$\langle 0|\, T\psi_3\psi_4\overline{\psi}_1\overline{\psi}_2\overline{\psi}_v \not{A}_v\psi_v\overline{\psi}_w \not{A}_w\psi_w\overline{\psi}_y \not{A}_y\psi_y\overline{\psi}_z \not{A}_z\psi_z|0\rangle$$  (26.51)

gebildet. Wieder wurde nur eine der $4! = 24$ möglichen Kontraktionen in den Graphen (26.49) eingetragen. Alle haben das gleiche, nämlich negative, Vorzeichen. Denn es gibt 6 Kreuzungen der Kontraktionsklammern, und zusätzlich müssen 3 fermionische Operatorpaare umgedreht werden, damit stets rechts der Erzeugungs- und links der Vernichtungsoperator steht.

Der Symmetriefaktor der Vertexkorrektur ist – wie immer in der QED – identisch mit der Fakultät der Anzahl der Vertizes. Das bedeutet zugleich aber, dass diese Faktoren immer gegen den Faktor $1/n!$ zu kürzen sind, der aus der Taylorentwicklung des Wechselwirkungsterms im Matrixelement stammt. Mithilfe der Regeln von Kasten 24.1 wird der Term mit der Vertexkorrektur in der Streumatrix berechnet:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_b^{(4)} = -\Big(\frac{ie}{\hbar}\Big)^4 \frac{1}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{k}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}k^0}{2\pi}\,\frac{{}^{r_3}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_3}\,\gamma^\sigma\,i(\not{k}+\not{k}_\gamma+mc/\hbar)}{(k+k_\gamma)^2-m^2c^2/\hbar^2+i\epsilon'}\\ \cdot\,\frac{\gamma^\mu\,i(\not{k}+mc/\hbar)\,\gamma^\tau\,{}^{r_1}u^{\boldsymbol{k}_1}}{k^2-m^2c^2/\hbar^2+i\epsilon'}\cdot\frac{(-ig_{\sigma\tau}\,\mu_0\hbar c)}{(k_1-k)^2-m_\varphi^2c^2/\hbar^2+i\epsilon'}\\ \cdot\,\frac{(-ig_{\mu\nu}\,\mu_0\hbar c)}{k_\gamma^2-m_\gamma^2c^2/\hbar^2+i\epsilon'}\,({}^{r_4}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_4}\,\gamma^\nu\,{}^{r_2}u^{\boldsymbol{k}_2})\end{aligned}\tag{26.52}$$

Hier wurden wieder kleine Massen für die virtuellen Photonen eingefügt, um Infrarotdivergenzen vorzubeugen. m_γ ist die Masse des Photons mit Wellenzahl k_γ. m_φ ist die Masse des Photons mit Wellenzahl (k_1-k). Bei den Spinorprodukten wurde sorgfältig auf die korrekte Reihenfolge der Faktoren gemäß (23.21) geachtet. Mit Blick auf (24.47b) (wo die grünen Faktoren gleich Null zu setzen sind, weil wir jetzt t-Kanal-Streuung untersuchen) kann man die Streumatrix in folgender Form schreiben:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^{(2)}+\mathcal{M}_b^{(4)} = -\Big(\frac{ie}{\hbar}\Big)^2\Big({}^{r_3}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_3}\,(\underbrace{\Gamma^{(0)\mu}}_{\gamma^\mu}+\Gamma^{(2)\mu})\,{}^{r_1}u^{\boldsymbol{k}_1}\Big)\cdot\\ \cdot\,\frac{(-ig_{\mu\nu}\,\mu_0\hbar c)}{k_\gamma^2-m_\gamma^2c^2/\hbar^2+i\epsilon'}\,({}^{r_4}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_4}\,\gamma^\nu\,{}^{r_2}u^{\boldsymbol{k}_2})\end{aligned}\tag{26.53a}$$

$$\Gamma^{(2)\mu} = \Big(\frac{ie}{\hbar}\Big)^2 \frac{1}{\Omega} \sum_{\boldsymbol{k}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}k^0}{2\pi} \, \frac{\gamma^\sigma \, i(\not{k} + \not{k}_\gamma + mc/\hbar)}{(k+k_\gamma)^2 - m^2c^2/\hbar^2 + i\epsilon'} \cdot$$
$$\cdot \, \frac{\gamma^\mu \, i(\not{k} + mc/\hbar) \, \gamma^\tau}{k^2 - m^2c^2/\hbar^2 + i\epsilon'} \cdot \frac{(-ig_{\sigma\tau} \, \mu_0 \hbar c)}{(k_1 - k)^2 - m_\varphi^2 c^2/\hbar^2 + i\epsilon'} \tag{26.53b}$$

$$\Gamma^\mu = \Gamma^{(0)\mu} + \Gamma^{(2)\mu} + \ldots = \gamma^\mu F_1 + [\gamma^\nu, \gamma^\mu] \, \frac{(k_\gamma)_\nu \hbar}{4mc} \, F_2 \tag{26.53c}$$

Die Zerlegung von Γ^μ in zwei Summanden mit den sogenannten Formfaktoren F_1 und F_2 ist nicht offensichtlich. Ebenfalls nicht offensichtlich ist, dass F_1 und F_2 nur von $k_\gamma^2 = (k_3 - k_1)^2$, also dem Quadrat des Vierer-Impulsübertrags zwischen Elektron und Myon beim Streuexperiment, abhängen, jedoch nicht vom Absolutwert von k_1 und k_3. Wir werden $\Gamma^{(2)\mu}$ im Folgenden so umformen, dass diese Struktur klar erkennbar wird.

In zweiter Ordnung der Störungsrechnung (d. h. $\Gamma^\mu = \gamma^\mu$) ist $F_1 = 1$ und $F_2 = 0$. Den Wert der beiden Formfaktoren in Störungstheorie vierter Ordnung (d. h. $\Gamma^\mu = \gamma^\mu + \Gamma^{(2)\mu}$) werden wir gleich berechnen. Zur physikalischen Bedeutung der Formfaktoren merken wir ohne Beweis (man kann die Herleitung beispielsweise in [3, Abschnitt 6.2] nachlesen) folgendes an: Bei sehr geringem Impulsübertrag (sogenannter Vorwärtsstreuung mit $k_\gamma^2 \to 0$) ist die wirksame Ladung des Elektrons

$$e_{\text{effektiv}} = e \cdot F_1(k_\gamma^2 \approx 0) \; , \tag{26.54a}$$

und sein magnetisches Moment ist

$$\boldsymbol{\mu}_{\text{effektiv}} = g \, \frac{e}{2m} \boldsymbol{S} = 2\Big(F_1(k_\gamma^2 \approx 0) + F_2(k_\gamma^2 \approx 0)\Big) \frac{e}{2m} \boldsymbol{S} \; , \tag{26.54b}$$

wobei $\boldsymbol{S}$ der Spin des Elektrons und g der Landé-Faktor ist. Die Berechnung der Formfaktoren in vierter Ordnung (und in noch höherer Ordnung) wird also Strahlungskorrekturen von e und g ergeben, die mit den Ergebnissen von Präzisionsexperimenten verglichen werden können.

Der Zähler von $\Gamma^{(2)\mu}$ enthält das Spinorprodukt

$$Y \equiv \gamma^\sigma\,(\not k + \not k_\gamma + mc/\hbar)\,\gamma^\mu\,(\not k + mc/\hbar)\,\gamma^\tau g_{\sigma\tau} \;= \\ = \gamma^\sigma\left((\not k + \not k_\gamma)\gamma^\mu \not k + (\not k + \not k_\gamma)\gamma^\mu mc/\hbar + \gamma^\mu \not k mc/\hbar + \gamma^\mu m^2c^2/\hbar^2\right)\gamma_\sigma\ .$$

Zwischen den zu kontrahierenden Matrizen $\gamma^\sigma\gamma_\sigma$ stehen in den vier Summanden 3, 2, 2, und 1 andere γ-Matrizen. Denn auch in jedem Produkt $\not k \equiv \gamma^\alpha k_\alpha$ mit dem Feynman-Dagger steckt eine γ-Matrix. Wir führen die Kontraktion mithilfe von (26.34) aus:

$$Y = 2\Big(-\not k\gamma^\mu(\not k + \not k_\gamma) + 2(2k + k_\gamma)^\mu mc/\hbar - \gamma^\mu m^2c^2/\hbar^2\Big) \tag{26.55}$$

Die drei Nenner, die k enthalten, können mithilfe der Formel

$$\frac{1}{A_1A_2A_3} \overset{(20.73b)}{=} \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^1 \mathrm{d}z\, \frac{2\,\delta(x+y+z-1)}{(X)^3} \tag{26.56a}$$

$$X \equiv xA_1 + yA_2 + zA_3 \tag{26.56b}$$

zusammengefasst werden:

$$X = x\Big((k+k_\gamma)^2 - m^2c^2/\hbar^2\Big) + y(k^2 - m^2c^2/\hbar^2) + \\ + z\Big((k_1-k)^2 - m_\varphi^2c^2/\hbar^2\Big) + (x+y+z)i\epsilon' \;= \\ = (k + xk_\gamma - zk_1)^2 - (xk_\gamma - zk_1)^2 + xk_\gamma^2 + zk_1^2 - \\ - (1-z)m^2c^2/\hbar^2 - zm_\varphi^2c^2/\hbar^2 + i\epsilon' \tag{26.57}$$

Hier haben wir von $x + y + z = 1$ Gebrauch gemacht, und werden das in den nächsten Schritten mehrfach wiederholen. Jetzt schränken wir die Untersuchung auf den Fall ein, dass es sich bei den ein- und auslaufenden Elektronen um freie Teilchen handelt, welche die Relation

$$k_1^2 = k_3^2 = m^2c^2/\hbar^2 = (k_3 - k_1 + k_1)^2 = (k_\gamma + k_1)^2 \;= \\ = m^2c^2/\hbar^2 + 2k_1k_\gamma + k_\gamma^2 \quad\Longrightarrow\quad 2k_1k_\gamma = -k_\gamma^2$$

erfüllen. Damit kann der Nenner weiter vereinfacht werden zu

$$X = (k + xk_\gamma - zk_1)^2 - (-xyk_\gamma^2 + (1-z)^2 m^2 c^2/\hbar^2 + zm_\varphi^2 c^2/\hbar^2 + i\epsilon' \; .$$

Wir setzen X in $\Gamma^{(2)\mu} =$ (26.53b) ein, führen anschließend die Substitution $k \to \kappa = k + xk_\gamma - zk_1$ durch, und benennen schließlich κ um in k:

$$\Gamma^{(2)\mu} = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^1 \mathrm{d}z \, 2\,\delta(x+y+z-1) \left(\frac{ie}{\hbar}\right)^2 i\,\mu_0 \hbar c \cdot \\ \cdot \frac{1}{\Omega} \sum_{\boldsymbol{k}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}k^0}{2\pi} \frac{Y}{(k^2 - K^2 + i\epsilon')^3} \tag{26.58a}$$

$$K^2 \equiv -xyk_\gamma^2 + (1-z)^2 m^2 c^2/\hbar^2 + zm_\varphi^2 c^2/\hbar^2 \tag{26.58b}$$

$$Y \overset{(26.55)}{=} 2\Big(-(\not{k} - x\not{k}_\gamma + z\not{k}_1)\gamma^\mu \Big(\not{k} + (1-x)\not{k}_\gamma + z\not{k}_1\Big) + \\ + \Big(4k + 4zk_1 + 2(1-2x)k_\gamma\Big)^\mu mc/\hbar - \gamma^\mu m^2 c^2/\hbar^2\Big) \tag{26.58c}$$

Wir vereinfachen im Folgenden die Summanden in Y, die $\not{k}$, $\not{k}_\gamma$, oder $\not{k}_1$ enthalten, und beginnen mit $\not{k}$. Aus (26.58a) wissen wir, dass der Nenner des Integrals über k symmetrisch in $\pm k$ ist. Deshalb werden bei der Integration alle Summanden in Y, die linear in k sind, Null ergeben, und können von vornherein gestrichen werden. Insbesondere besteht der Summand $-\not{k}\gamma^\mu\not{k}$ aus 16 unter-Summanden, von denen nur 4 quadratisch in k^α sind und deshalb bei der Integration einen von Null verschiedenen Beitrag leisten:

$$-\int \mathrm{d}^4k \, \frac{\not{k}\gamma^\mu\not{k}}{X^3} = -\int \mathrm{d}^4k \, \frac{k_\alpha \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma_\beta k^\beta}{X^3} = \\ = -\frac{1}{4}\int \mathrm{d}^4k \, \frac{k_\sigma \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma_\alpha k^\sigma}{X^3} \overset{(26.34)}{=} \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4k \, \frac{k^2\gamma^\mu}{X^3}$$

Also kann man Y folgendermaßen vereinfachen:

$$Y = 2\Big(\tfrac{1}{2}k^2\gamma^\mu + (x\not{k}_\gamma - z\not{k}_1)\gamma^\mu\Big((1-x)\not{k}_\gamma + z\not{k}_1\Big) + \\ + \Big(4zk_1 + 2(1-2x)k_\gamma\Big)^\mu c/\hbar - \gamma^\mu m^2 c^2/\hbar^2\Big) \tag{26.59}$$

Im Folgenden wird $k_\gamma = k_3 - k_1 \implies \not{k}_\gamma = \not{k}_3 - \not{k}_1$ genutzt. Diesen Zusammenhang liest man aus dem rechten Diagramm (26.49) ab. Denn die Vertexkorrektur ändert nichts daran, dass letztlich die Bilanz von Energie und Impuls stimmen muss. Außerdem werden mithilfe der Kommutator-Relationen

$$\begin{aligned}\not{k}_j\gamma^\mu &= \gamma^\alpha\gamma^\mu(k_j)_\alpha = (2g^{\alpha\mu} - \gamma^\mu\gamma^\alpha)(k_j)_\alpha = 2(k_j)^\mu - \gamma^\mu\not{k}_j \\ \not{k}_i\not{k}_j &= (k_j)_\beta(2g^{\alpha\beta} - \gamma^\beta\gamma^\alpha)(k_i)_\alpha = 2k_ik_j - \not{k}_j\not{k}_i\end{aligned}$$

alle Produkte, in denen der Feynman-Dagger auftaucht, so geordnet, dass $\not{k}_3$ ganz links steht und $\not{k}_1$ ganz rechts:

$$\begin{aligned}Y = 2\Big(&\tfrac{1}{2}k^2\gamma^\mu + 2x(1-x)\not{k}_3k_3^\mu - x(1-x)\not{k}_3\not{k}_3\gamma^\mu + \\ &+ z\not{k}_3\gamma^\mu\not{k}_1 - (2x+2z)(1-x)\not{k}_3k_1^\mu + 2(x-x^2+z-xz)k_1k_3\gamma^\mu - \\ &- 2(x-x^2+z-xz)k_3^\mu\not{k}_1 + (2x-2x^2+2z-4xz-2z^2)k_1^\mu\not{k}_1 + \\ &+ (-x+x^2+2xz-z+z^2)\gamma^\mu\not{k}_1\not{k}_1 + \\ &+ (4z-2+4x)k_1^\mu mc/\hbar + (2-4x)k_3^\mu mc/\hbar - \gamma^\mu m^2c^2/\hbar^2\Big)\end{aligned} \tag{26.60}$$

Weil das einlaufende und das auslaufende Elektron beobachtet werden, sind die Spinoren ${}^{r_1}u^{\boldsymbol{k}_1}$ und ${}^{r_3}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_3}$ Lösungen der Dirac-Gleichung

$$\begin{aligned}(\not{k}_1 - mc/\hbar)\,{}^{r_1}u^{\boldsymbol{k}_1} &= (\gamma^\nu k_\nu - mc/\hbar)\,{}^{r_1}u^{\boldsymbol{k}_1} = 0 \\ \not{k}_1\not{k}_1\,{}^{r_1}u^{\boldsymbol{k}_1} &= {}^{r_1}u^{\boldsymbol{k}_1}\,m^2c^2/\hbar^2 \\ {}^{r_3}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_3}\,(\not{k}_3 - mc/\hbar) &= 0 \\ {}^{r_3}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_3}\,\not{k}_3\not{k}_3 &= {}^{r_3}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_3}\,m^2c^2/\hbar^2\ .\end{aligned}$$

Weil $\Gamma^{(2)\mu}$, und demzufolge auch Y, in (26.53a) links vom Faktor ${}^{r_3}\bar{u}^{\boldsymbol{k}_3}$ und rechts vom Faktor ${}^{r_1}u^{\boldsymbol{k}_1}$ eingerahmt wird, folgt

$$
\begin{aligned}
Y &= 2\Big(k^2\gamma^\mu/2 + (2x^2 - 2x + 2xz + z^2 - 1)\gamma^\mu m^2c^2/\hbar^2 + \\
&\quad + (2x - 2x^2 + 2z - 2xz)k_1k_3\gamma^\mu + 2(-z + xz + 1 - 2x)k_3^\mu mc/\hbar + \\
&\quad + 2(2x - xz - z^2 + 2z - 1)k_1^\mu mc/\hbar\Big) \\
&= 2\Big(k^2\gamma^\mu/2 + (-1 + 2z + z^2)\gamma^\mu m^2c^2/\hbar^2 + \\
&\quad + (-2xy - 2z)\gamma^\mu m^2c^2/\hbar^2 + (2xy + 2z)k_1k_3\gamma^\mu + 2xzk_3^\mu mc/\hbar + \\
&\quad + 2yzk_1^\mu mc/\hbar + (xz - yz - 2x + 2y)k_\gamma^\mu mc/\hbar\Big)\ . \qquad (26.61)
\end{aligned}
$$

Vielfach wurde von $x+y+z=1$ Gebrauch gemacht. Der Nenner von (26.58a) ist wegen $1-z=x+y$ symmetrisch unter dem Austausch $x \leftrightarrow y$. Aus diesem Grund darf man in den Summanden des Zählers x und y vertauschen, und dies in jedem einzelnen Summanden, unabhängig von den anderen Summanden. Deshalb ergibt der letzte Summand Null. Außerdem wird wieder $k_\gamma = k_3 - k_1$ eingesetzt. Dann findet man aufgrund der Vertauschbarkeit von x und y

$$
\begin{aligned}
&(-yz - 2x + 2y + 3xz)k_3^\mu mc/\hbar + (-xz - 2y + 2x + 3yz)k_1^\mu mc/\hbar = \\
&= 2xz(k_3^\mu + k_1^\mu)mc/\hbar = (x+y)z(k_3^\mu + k_1^\mu)mc/\hbar = \\
&= (1-z)z(k_3^\mu + k_1^\mu)mc/\hbar\ .
\end{aligned}
$$

Mithilfe von $m^2c^2/\hbar^2 = k_1^2 = k_3^2$ bildet man die quadratischen Ergänzungen für k_γ^2:

$$
\begin{aligned}
Y &= 2\Big(k^2\gamma^\mu/2 + (-1 + 2z + z^2)\gamma^\mu m^2c^2/\hbar^2 + \\
&\quad - (xy + z)k_\gamma^2\gamma^\mu + (1-z)z(k_3^\mu + k_1^\mu)mc/\hbar\Big) \qquad (26.62)
\end{aligned}
$$

Der letzte Summand wird umgeformt mithilfe der

Gordon-Identität:

$$
\bar{u}^{\boldsymbol{k}}\gamma^\mu\, u^{\boldsymbol{q}} = \bar{u}^{\boldsymbol{k}}\Big(\frac{(k+q)^\mu}{2mc/\hbar} + \frac{(k-q)_\nu}{4mc/\hbar}\cdot[\gamma^\nu, \gamma^\mu]\Big)\, u^{\boldsymbol{q}}\ , \qquad (26.63)
$$

die wir ohne Beweis verwenden. Nach diesen Umformungen ist

$$\Gamma^{(2)\mu} \overset{(26.58a)}{=} \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^1 \mathrm{d}z\, 2\,\delta(x+y+z-1) \left(\frac{ie}{\hbar}\right)^2 i\,\mu_0 \hbar c \cdot$$
$$\cdot\, \frac{1}{\Omega} \sum_{\boldsymbol{k}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}k^0}{2\pi} \frac{Y}{(k^2 - K^2 + i\epsilon')^3} \tag{26.64a}$$

$$Y = 2\Big(k^2/2 + (-1+4z-z^2)m^2c^2/\hbar^2 - (xy+z)k_\gamma^2\Big)\gamma^\mu -$$
$$- 4(1-z)z\,\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\,\frac{(k_\gamma)_\nu}{4mc/\hbar}\,[\gamma^\nu, \gamma^\mu] \tag{26.64b}$$

$$K^2 \overset{(26.58b)}{=} -xyk_\gamma^2 + (1-z)^2 m^2c^2/\hbar^2 + zm_\varphi^2 c^2/\hbar^2\ . \tag{26.64c}$$

Jetzt haben wir die Struktur (26.53c) erreicht, in der $(\gamma^\mu + \Gamma^{(2)\mu})$ zerlegt ist in einen Formfaktor F_1, der proportional zu γ^μ ist, und einen Formfaktor F_2, der proportional zu $[\gamma^\nu, \gamma^\mu](k_\gamma)_\nu/(4mc/\hbar)$ ist.

Als nächstes müssen wir die Summation und Integration über k ausführen. Abzählen der Potenzen von k ergibt $\mathrm{d}^4k\, k^2/k^6$, so dass für $|k| \to \infty$ eine logarithmische Divergenz zu erwarten ist. In Abschnitt 24.3.7 haben wir festgestellt, dass bei t-Kanal-Streuung, die wir hier untersuchen, $k_\gamma^2 < 0$ ist. Also ist $K^2 \geq 0$ und K reell. Deshalb ist die allgemeine Schleifenintegral-Formel (20.64) anwendbar, und man erhält

$$\Gamma^{(2)\mu} = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^1 \mathrm{d}z\, 2\,\delta(x+y+z-1) \left(\frac{ie}{\hbar}\right)^2 \mu_0 \hbar c \cdot$$
$$\cdot \int_0^{+\infty} \mathrm{d}R^2\, \frac{R^2}{16\pi^2}\, \frac{(R^2\gamma^\mu + J^\mu)}{(R^2+K^2)^3} \tag{26.65a}$$

$$J^\mu \equiv 2\Big((-1+4z-z^2)m^2c^2/\hbar^2 - (xy+z)k_\gamma^2\Big)\gamma^\mu -$$
$$- 4(1-z)z\,\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\,\frac{(k_\gamma)_\nu \hbar}{4mc}\,[\gamma^\nu, \gamma^\mu] \tag{26.65b}$$

$$K^2 \overset{(26.58b)}{=} -xyk_\gamma^2 + (1-z)^2 m^2 c^2/\hbar^2 + z m_\varphi^2 c^2/\hbar^2 \ . \tag{26.65c}$$

Das Integral

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{d}R^2 \, \frac{R^2}{(R^2+K^2)^3} = \left(-\frac{1}{R^2+K^2} + \frac{K^2}{2(R^2+K^2)^2} \right)\Big|_0^\infty$$
$$= \frac{1}{K^2} - \frac{K^2}{2K^4} = \frac{1}{2K^2}$$

ist konvergent. Dagegen gibt es beim Integral

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{d}R^2 \, \frac{R^4}{(R^2+K^2)^3} = \left(\ln(R^2+K^2) + \frac{2K^2}{R^2+K^2} - \frac{K^4}{2(R^2+K^2)^2} \right)\Big|_0^\infty$$

wie erwartet eine logarithmische Divergenz. Um sie zu vermeiden, regularisiert man das Integral nach dem Verfahren von Pauli und Villars, indem man einen Gegenterm einfügt:

$$L^2 \equiv (1-z)^2 M^2 c^2/\hbar^2 \qquad , \qquad \int_0^{+\infty} \mathrm{d}R^2 \, \frac{R^4}{(R^2+K^2)^3} \ =$$
$$= \lim_{M\to\infty} \int_0^{+\infty} \mathrm{d}R^2 \left(\frac{R^4}{(R^2+K^2)^3} - \frac{R^4}{(R^2+L^2)^3} \right) =$$
$$= \lim_{M\to\infty} \left(-\ln\left(\frac{K^2}{L^2}\right) - \frac{2K^2}{K^2} + \frac{K^4}{2K^4} + \frac{2L^2}{L^2} - \frac{L^4}{2L^4} \right) = \lim_{M\to\infty} \ln\left(\frac{L^2}{K^2}\right)$$

M ist, bevor der Grenzübergang durchgeführt wird, eine große, aber endliche Masse. K^2 und L^2 werden bei $R \to \infty$ vernachlässigbar, so dass die Konvergenz des Integrals erzwungen wird. Mit dem Gegenterm ergibt sich

$$\Gamma^{(2)\mu} = -\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^1 \mathrm{d}z\, \delta(x+y+z-1)\, \frac{\alpha}{2\pi} \left(\gamma^\mu \lim_{M\to\infty} \ln\Big(\frac{L^2}{K^2}\Big) + \frac{J^\mu}{2K^2} \right) . \tag{26.66}$$

Hier wurde die Feinstrukturkonstante $\alpha = e^2\mu_0 c/(4\pi\hbar) \approx 1/137$ eingefügt. In (26.53c) haben wir die beiden Formfaktoren

$$\Gamma^\mu \overset{(26.53c)}{=} \gamma^\mu F_1 + [\gamma^\nu, \gamma^\mu]\, \frac{(k_\gamma)_\nu \hbar}{4mc}\, F_2 \, .$$

definiert. Mithilfe von

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^1 \mathrm{d}z\, \delta(x+y+z-1)\, f(x,y,z) = \int_0^1 \mathrm{d}z \int_0^{1-z} \mathrm{d}y\, f(1-y-z,y,z)$$

können wir sie jetzt in der Näherung $\Gamma^\mu \approx \gamma^\mu + \Gamma^{(2)\mu}$ explizit angeben:

$$\begin{aligned} F_1 = 1 - \int_0^1 \mathrm{d}z \int_0^{1-z} \mathrm{d}y\, \frac{\alpha}{2\pi} \Bigg(& \ln\Big((1-z)^2\Big) + \lim_{M\to\infty} \ln\Big(\frac{M^2}{m^2}\Big) - \\ & - \ln\Big(-(1-y-z)y\, \frac{k_\gamma^2\hbar^2}{m^2c^2} + (1-z)^2 + z\frac{m_\varphi^2}{m^2}\Big) + \\ & + \frac{(-1+4z-z^2)m^2c^2/\hbar^2 - ((1-y-z)y+z)k_\gamma^2}{-(1-y-z)yk_\gamma^2 + (1-z)^2m^2c^2/\hbar^2 + zm_\varphi^2c^2/\hbar^2} \Bigg) \end{aligned} \tag{26.67a}$$

$$F_2 = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 \mathrm{d}z \int_0^{1-z} \mathrm{d}y\, \left(\frac{2(1-z)zm^2c^2/\hbar^2}{-(1-y-z)yk_\gamma^2 + (1-z)^2m^2c^2/\hbar^2 + zm_\varphi^2c^2/\hbar^2} \right) \tag{26.67b}$$

Der Formfaktor F_1 hätte bei Vorwärtsstreuung, also sehr schwacher Streuung mit $k_\gamma^2 \approx 0$, eine IR-Divergenz bei $z \to 1$, wenn wir nicht mit der kleinen Photonenmasse m_φ dieser Divergenz vorgebeugt hätten. Obwohl wir unsere Untersuchung weiterhin auf die Vertexkorrektur bei t-Kanal-Streuung konzentrieren, bei der für das virtuelle Photon $k_\gamma^2 = (k_3 - k_1)^2 < 0$

gilt, dürfen wir die Möglichkeit $k_\gamma^2 \approx 0$ nicht einfach ignorieren. Denn kein Detektor kann beliebig genau messen. Deshalb ist es sinnvoll, auch bei t-Kanal-Streuung den Grenzfall $k_\gamma^2 \approx 0$ im Sinne eines unmessbar kleinen k_γ^2 ins Auge zu fassen. Man beachte: Die IR-Divergenz wird nicht verhindert durch die fiktive Masse m_γ des Photons, das Impuls $-\boldsymbol{k}_\gamma$ auf das Myon überträgt, sondern durch die fiktive Masse m_φ des Photons mit Impuls $\boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}$ im Graph (26.49):

$$\begin{aligned} F_1(k_\gamma^2 \approx 0) &\overset{(26.67)}{=} 1 - \int_0^1 \mathrm{d}z \int_0^{1-z} \mathrm{d}y \, \frac{\alpha}{2\pi} \left(\ln\Big((1-z)^2\Big) + \right. \\ &\quad \left. + \lim_{M\to\infty} \ln\Big(\frac{M^2}{m^2}\Big) - \ln\Big((1-z)^2\Big) + \frac{(-1+4z-z^2)m^2}{(1-z)^2 m^2 + z m_\varphi^2} \right) = \\ &= 1 - \frac{\alpha}{2\pi} \left(\frac{1}{2} \ln\Big(\frac{M^2}{m^2}\Big) + \int_0^1 \mathrm{d}z \, (1-z) \frac{(-1+4z-z^2)}{(1-z)^2 + z m_\varphi^2/m^2} \right) \end{aligned}$$

Im Logarithmus wurde der kleine Summand mit m_φ^2/m^2 vernachlässigt. Man kann das Integral in guter Näherung dadurch abschätzen, dass man den divergenzverhindernden Summanden im Nenner durch eine Modifikation der oberen Grenze des Integrals über z ersetzt. Weil z im Nenner des Integranden ebenso wie m_φ^2/m^2 quadratisch vorkommt, ersetzen wir die Integrationsgrenze 1 durch $1 - m_\varphi/m$ mit linearem m_φ/m:

$$\begin{aligned} &\int_0^{1-\frac{m_\varphi}{m}} \mathrm{d}z \, \frac{(1-z)(-1+4z-z^2)}{(1-z)^2} = \int_0^{1-\frac{m_\varphi}{m}} \mathrm{d}z \Big(-1 + z + \frac{2z}{1-z} \Big) \\ &= -\Big(1 - \frac{m_\varphi}{m}\Big) + \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{m_\varphi}{m}\Big)^2 - 2\Big(1 - \frac{m_\varphi}{m}\Big) - 2\ln\Big(\frac{m_\varphi}{m}\Big) \end{aligned}$$

Also ist wegen $m_\varphi/m \ll 1$

$$\frac{1}{Z_1} \equiv F_1(k_\gamma^2 \approx 0) \overset{(26.67)}{=} 1 - \frac{\alpha}{2\pi} \left(\frac{1}{2} \lim_{M\to\infty} \ln\Big(\frac{M^2}{m^2}\Big) - \frac{5}{2} + \ln\Big(\frac{m^2}{m_\varphi^2}\Big) \right) . \tag{26.68}$$

Die IR-Divergenz bei $m_\varphi \to 0$ können wir ignorieren, denn sie wird – wie in Abschnitt 24.3.6 festgestellt – durch Graphen mit Bremsstrahlung unmessbar niedriger Frequenz kompensiert. Der Parameter $\lim_{M\to\infty} \ln(M^2/m^2)$ wird durch eine weitere Renormierung der Ladung eliminiert. Nach Regel D von Kasten 24.1 ist für jeden Vertex der Faktor $-iq\gamma^\mu/\hbar$ einzusetzen. Jetzt haben wir in vierter Ordnung

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu + \Gamma^{(2)\mu} + \mathcal{O}(q^5) \overset{(26.53c)}{=} \gamma^\mu F_1 + [\gamma^\nu, \gamma^\mu] \frac{(k_\gamma)_\nu \hbar}{4mc} F_2 \tag{26.69}$$

berechnet. $F_1(k_\gamma^2 \approx 0) = 1/Z_1$ ist ein Multiplikator von γ^μ. Also kann der Faktor $\lim_{M\to\infty} \ln(M^2/m^2)$ durch

$$\boxed{\frac{q_0}{Z_1} \xrightarrow{\text{Renormierung}} q} \tag{26.70}$$

aus den Formeln entfernt werden, wobei q_0 den Wert der Ladung vor der Renormierung, und q den Wert der Ladung nach der Renormierung bedeutet. Im vorigen Abschnitt haben wir in (26.46) die Renormierung

$$\begin{aligned} Z_2 \cdot q_0 &\xrightarrow{\text{Renormierung}} q \\ Z_2 &\overset{(26.45)}{=} 1 + \frac{\alpha_q}{2\pi}\left(\frac{1}{2} \lim_{U\to\infty} \ln\left(\frac{U^2}{m^2}\right) + \frac{7}{4} - \ln\left(\frac{m^2}{m_\gamma^2}\right)\right) \end{aligned}$$

der Ladung durchgeführt, um den großen Parameter U, der bei der Berechnung des Selbstenergiegraphen des Fermions auftritt, zu eliminieren. (Damit wir die Parameter, die zur Regularisierung eingefügt wurden, auseinander halten können, wurde hier das M von (26.45) nach U umbenannt.) Wir bilden das Produkt von Z_2 mit (26.68):

$$\begin{aligned}\frac{Z_2}{Z_1} &= \left[1+\frac{\alpha_q}{2\pi}\left(\frac{1}{2}\lim_{U\to\infty}\ln\left(\frac{U^2}{m^2}\right)+\frac{7}{4}-\ln\left(\frac{m^2}{m_\gamma^2}\right)\right)\right]\cdot \\ &\quad\cdot\left[1-\frac{\alpha}{2\pi}\left(\frac{1}{2}\lim_{M\to\infty}\ln\left(\frac{M^2}{m^2}\right)-\frac{5}{2}+\ln\left(\frac{m^2}{m_\varphi^2}\right)\right)\right] = \\ &= 1+\mathcal{O}(\alpha^3) \quad \text{wegen} \quad \frac{\lim_{U\to\infty}\ln(U/m)+7/4}{\lim_{M\to\infty}\ln(M/m)-5/2}=1 \end{aligned} \tag{26.71}$$

Der vernachlässigte Summand ist $\mathcal{O}(\alpha^3)$, weil unsere Berechnung von Z_2 und Z_1 ja bereits $\mathcal{O}(\alpha^2)$ ist. Die beiden IR-divergierenden Terme wurden wegen (24.101) ignoriert. Also kompensieren sich die beiden Renormierungen der Ladung, die wir aufgrund der Selbstenergie der Fermionen, und aufgrund der Vertexkorrektur vorgenommen haben, und das Verhältnis zwischen renormierter und nackter Ladung wird allein durch die Vakuumpolarisation bestimmt:

$$\sqrt{Z_3}\cdot\frac{Z_2}{Z_1}\cdot q_0 = \sqrt{Z_3}\cdot q_0 \xrightarrow{\text{Renormierung}} q \tag{26.72}$$

Die Renormierung (26.70) (und die Vernachlässigung des IR-divergenten Terms) bewirkt, dass $F_1(k_\gamma^2\approx 0)$ den einfachen Wert

$$F_1(k_\gamma^2\approx 0) = 1+\mathcal{O}(\alpha^3) \tag{26.73a}$$

erhält. Anders als F_1 enthält der Formfaktor F_2 weder den unbestimmten Regularisierungsparameter M, noch einen IR-divergenten Term. Wir berechnen auch F_2 für den Fall der Vorwärts-Streuung:

$$F_2(k_\gamma^2\approx 0) = \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 \mathrm{d}z \int_0^{1-z}\mathrm{d}y\,\frac{2z}{(1-z)} = \frac{\alpha}{2\pi}+\mathcal{O}(\alpha^3) \tag{26.73b}$$

Damit können wir den Landé-Faktor des Elektrons berechnen:

$$\begin{aligned} g &\overset{(26.54b)}{=} 2\Big(F_1(k_\gamma^2\approx 0)+F_2(k_\gamma^2\approx 0)\Big) = \\ &= 2\Big(1+\frac{\alpha}{2\pi}\Big) = 2\cdot 1.001\,161\,4+\mathcal{O}(\alpha^3) \end{aligned} \tag{26.74}$$

Der experimentell ermittelte Wert [55] liegt bei

$$g = 2 \cdot 1.001\,159\,652\,180\,73(28) \ ,$$

wobei die beiden letzten Stellen als 73 ± 28 zu lesen sind. Offenbar ist unsere Berechnung ziemlich gut, aber noch nicht gut genug. Berechnungen in höherer Ordnung der Störungstheorie sind erforderlich, um die Korrektheit der Theorie durch Vergleich mit den Messdaten überprüfen zu können.

Nachdem $F_1(k_\gamma^2 \approx 0)$ renormiert wurde, gibt es in $\Gamma^{(2)\mu}$ keinen divergierenden $\ln(M/m)$ und keine IR-Divergenzen mehr. Denn für k_γ^2-Werte messbarer Größe kann man $\Gamma^{(2)\mu}$ in einer Taylorreihe um $k_\gamma^2 \approx 0$ entwickeln:

$$\Gamma^{(2)\mu} = \sum_{n=0}^{\infty} (k_\gamma^2)^n W_n = \Gamma_0^{(2)\mu} + \sum_{n=1}^{\infty} (k_\gamma^2)^n W_n = \Gamma_0^{(2)\mu} + \Gamma_{\text{Rest}}^{(2)\mu} \tag{26.75}$$

Der Term mit M ist durch die Subtraktion aus $\Gamma_{\text{Rest}}^{(2)\mu}$ verschwunden und steckt allein in $\Gamma_0^{(2)\mu}$. Und k_γ^2 ist in $\Gamma_{\text{Rest}}^{(2)\mu}$ messbar von Null verschieden, so dass keine IR-Divergenz auftritt. Sämtliche „problematischen“ Terme wurden in $\Gamma_0^{(2)\mu}$ – genauer gesagt in $F_1(k_\gamma^2 \approx 0)$ – konzentriert, und entweder durch Renormierung beseitigt oder unter Verweis auf (24.101) ignoriert.

26.4 Ward-Takahashi-Identität

In den vorangegangenen Abschnitten haben wir die beiden Normierungsfaktoren

$$Z_2 = (26.45) \qquad \text{und} \qquad 1/Z_1 = (26.68) \tag{26.76a}$$

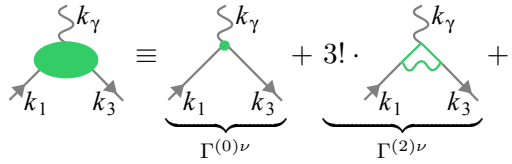
hergeleitet und den Zusammenhang

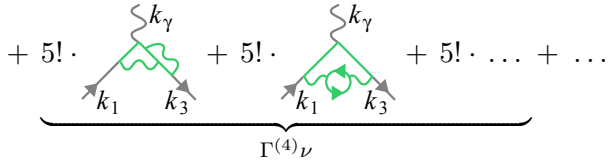
$$\frac{Z_2}{Z_1} \overset{(26.71)}{=} 1 + \mathcal{O}(\alpha^2) \tag{26.76b}$$

entdeckt. In (26.71) hatten wir $\mathcal{O}(\alpha^3)$ angegeben, weil dort auch noch der Vertex des Myonenstroms mitgerechnet wurde. In diesem Abschnitt konzentrieren wir uns aber auf die Vertexkorrektur und die Selbstenergie der Fermionen, die in den vorangegangenen Abschnitten beide bis zur

Ordnung $\mathcal{O}(q^2) = \mathcal{O}(\alpha)$ einschließlich berechnet wurden. Tatsächlich ist der Zusammenhang (26.76b) nur ein Spezialfall einer von Ward[1] entdeckten und von Takahashi[2] verallgemeinerten Relation zwischen der durch

$$-\frac{iq\Gamma^\nu(k_1,k_3)}{\hbar} \overset{(26.48c)}{\widehat{=}}$$





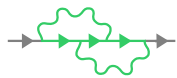
(26.77)

definierten Vertexfunktion $\Gamma(k_1, k_3)$ und der durch

$$\widetilde{S}^{(W)}(k) \overset{(26.26)}{=} \frac{i}{\not{k} - m_0\frac{c}{\hbar} - i\Sigma}\,, \tag{26.78}$$

$$\widetilde{S}(k)\,\Sigma(k)\,\widetilde{S}(k) \overset{(26.24)}{\widehat{=}} 2! \cdot$$

$+ 4! \cdot$



$+$

$+ 4! \cdot$

$+ 4! \cdot \ldots + 6! \cdot$

$+ \ldots$

definierten Fermionen-Selbstenergie-Funktion Σ. Deutlichkeitshalber wurden hier die Teile der Graphen, die $-iq\Gamma^\nu/\hbar$ bzw. Σ repräsentieren, grün hervorgehoben. Der grüne Teil des ersten Diagramms in der letzten Gleichung ist $\Sigma^{(2)}(k)$, die grünen Teile der beiden nächsten Diagramme gehören zu $\Sigma^{(4)}(k)$, und der grüne Teil des letzten Diagramms gehört zu $\Sigma^{(6)}(k)$.

Takahashi [56] bewies 1957 die Relation

$$\boxed{(k_3 - k_1)_\mu \Gamma^\mu(k_3, k_1) = \frac{i}{\widetilde{S}^{(W)}(k_3)} - \frac{i}{\widetilde{S}^{(W)}(k_1)}}\,, \tag{26.79a}$$

[1] John Clive Ward (1924 – 2000)
[2] Takahashi Yasushi (1924 - 2013)

die auch (aber nicht nur) gültig ist, wenn die mit k_1 und k_3 am Vertex ein- und auslaufenden Fermionen nicht auf der Masseschale liegen, sondern wenn es sich um innere Linien eines umfangreicheren Graphen handelt.

Wenn man den Fermionenpropagator $\widetilde{S}^{(W)}(k) =$ (26.78) in die Relation (26.79a) einsetzt

$$(k_3 - k_1)_\mu \Gamma^\mu(k_3, k_1) = \not{k}_3 - \not{k}_1 - i\Sigma(k_3) + i\Sigma(k_1) \ ,$$

kann man die Relation wegen $(k_3 - k_1)_\mu \Gamma^{(0)\mu}(k_3, k_1) \overset{(26.77)}{=} (k_3 - k_1)_\mu \gamma^\mu = \not{k}_3 - \not{k}_1$ auch in der Form

$$\sum_n (k_3 - k_1)_\mu \Gamma^{(n)\mu}(k_3, k_1) = -i \sum_n \left(\Sigma^{(n)}(k_3) - \Sigma^{(n)}(k_1) \right)$$
$$\text{mit } n = 2, 4, 6, \ldots, \infty \tag{26.79b}$$

schreiben. Im Grenzfall

$$k_3 \to k_1 \quad \Longleftrightarrow \quad k_\gamma^2 = (k_3 - k_1)^2 \approx 0$$

kann (26.79a) als Differentialquotient betrachtet werden:

$$\lim_{k_3 \to k_1} \Gamma^\mu(k_3, k_1) = \lim_{k_3 \to k_1} \frac{i/\widetilde{S}^{(W)}(k_3) - i/\widetilde{S}^{(W)}(k_1)}{(k_3 - k_1)_\mu}$$
$$\Gamma^\mu(k_\gamma \approx 0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, k_\mu} \frac{i}{\widetilde{S}^{(W)}(k)} \tag{26.80a}$$

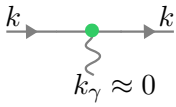
Wegen $\Gamma^{(0)\mu}(k_\gamma \approx 0) \overset{(26.77)}{=} \gamma^\mu = \mathrm{d}\not{k}/\mathrm{d}k_\mu$ kann man dies auch als

$$\sum_n \Gamma^{(n)\mu}(k_\gamma \approx 0) \overset{(26.26)}{=} -i \sum_n \frac{\mathrm{d}\,\Sigma^{(n)}(k)}{\mathrm{d}\, k_\mu}$$
$$\text{mit } n = 2, 4, 6, \ldots, \infty \tag{26.80b}$$

schreiben. (26.80) ist die Form, in der Ward 1950 den Zusammenhang zwischen der Vertexfunktion Γ und dem Fermionenpropagator bzw. der Funktion Σ der Fermionen-Selbstenergie veröffentlichte [57]. Man kann

(26.80) mithilfe von Feynman-Graphen veranschaulichen. In nullter Ordnung gilt

$$-\frac{iq\Gamma^{(0)\mu}}{\hbar} = -\frac{iq\gamma^\mu}{\hbar} \overset{(26.80a)}{=} \frac{q}{\hbar}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k_\mu}\frac{1}{\widetilde{S}^{(0)}(k)} = \frac{q}{\hbar}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k_\mu}\frac{1}{\widetilde{S}(k)} \mathrel{\widehat{=}}$$

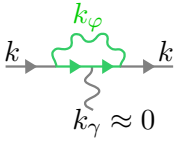
$\mathrel{\widehat{=}}$ 

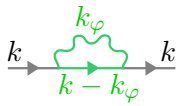
$= \frac{q}{\hbar}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k_\mu}\Big($

$\Big)^{-1}$.

In zweiter Ordnung findet man

$$-\frac{iq\Gamma^{(2)\mu}(k_\gamma \approx 0)}{\hbar} \overset{(26.80b)}{=} \frac{q}{\hbar}\frac{\mathrm{d}\Sigma^{(2)}(k)}{\mathrm{d}k_\mu} \mathrel{\widehat{=}}$$

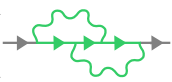
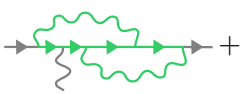
$\mathrel{\widehat{=}}$ 

$= \frac{q}{\hbar}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k_\mu}$ 

.

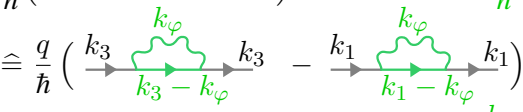
In vierter Ordnung betrachten wir nur einen von mehreren Graphen, die zu $\Sigma^{(4)}$ gehören:

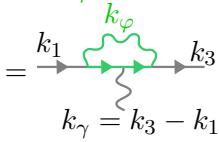
$$\frac{q}{\hbar}\frac{\mathrm{d}\Sigma^{(4)}(k)}{\mathrm{d}k_\mu} \overset{(26.80b)}{=} -\frac{iq\Gamma^{(4)\mu}(k_\gamma \approx 0)}{\hbar} \mathrel{\widehat{=}}$$

$\mathrel{\widehat{=}} \frac{q}{\hbar}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k_\mu}\Big($  $+\ldots\Big) =$  $+$

Die Ableitung von Σ nach k_μ bedeutet also, dass in jeweils einen Fermionen-Propagator von Σ ein Vertex mit einer Photonenlinie $k_\gamma \approx 0$ eingeschoben und dann über alle Graphen summiert wird. In entsprechender Weise lässt sich auch die Relation (26.79) von Takahashi durch Graphen darstellen. Beispielsweise erhält man in zweiter Ordnung

$$\frac{q}{\hbar}\Big(\Sigma^{(2)}(k_3)-\Sigma^{(2)}(k_1)\Big) \overset{(26.79b)}{=} -\frac{iq\Gamma^{(2)\mu}(k_3,k_1)}{\hbar}\cdot(k_3-k_1)_\mu \mathrel{\widehat{=}}$$

$\mathrel{\widehat{=}}$ 



Wir werden die Relation (26.79) nicht beweisen, sondern als Werkzeug zum Beweis von (26.76b) verwenden. Wir setzen die Taylorentwicklung

$$\Sigma(k) \overset{(26.27)}{=} \underbrace{\Sigma^{(2)}\Big|_{\not k=m_0c/\hbar}}_{A} + (\not k - m_0c/\hbar)\underbrace{\frac{\partial\Sigma^{(2)}}{\partial \not k}\Big|_{\not k=m_0c/\hbar}}_{B} + \mathcal{O}(q^4)$$

ein in

$$\Gamma^\mu(k_\gamma\approx 0)-\gamma^\mu \overset{(26.80b)}{=} -i\,\frac{\mathrm{d}\Sigma^{(2)}(k)}{\mathrm{d}\,k_\mu}+\mathcal{O}(q^4)$$
$$\Gamma^\mu(k_\gamma\approx 0)=\gamma^\mu(1-iB)+\mathcal{O}(q^4)\,.$$

Mithilfe von

$$\Gamma^\mu(k_\gamma\approx 0) \overset{(26.53c)}{=} \gamma^\mu F_1(k_\gamma^2\approx 0) \overset{(26.68)}{=} \frac{\gamma^\mu}{Z_1}$$
$$Z_2 \overset{(26.29)}{=} 1+iB \overset{(26.28)}{=} \frac{1}{1-iB}+\mathcal{O}(q^4)$$

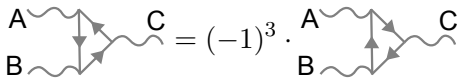
folgt daraus das gleiche Ergebnis wie in (26.76b):

$$\Gamma^\mu(k_\gamma^2\approx 0)=\frac{\gamma^\mu}{Z_1}=\frac{\gamma^\mu}{Z_2}+\mathcal{O}(q^4) \tag{26.81}$$

26.5 Fermionenschleifen

Die Auflistung (25.1) der fünf möglicherweise divergenten Graphen der QED enthält als vierten Eintrag eine Schleife von drei fermionischen Linien. Wir

werden jetzt zeigen, dass jedes Diagramm, das diese Struktur enthält, von vornherein aus sämtlichen Berechnungen gestrichen werden kann.



(26.82)

Wenn man ein Matrixelement zum links gezeichneten Graphen kontrahieren kann, dann kann man es auch zum rechts gezeichneten Graphen kontrahieren. Dabei ist es belanglos, ob A,B,C (teilweise) weitere Teile des Graphen symbolisieren, oder ob die drei Photonenlinien (teilweise) externe Linien sind. Der rechte Graph unterscheidet sich vom linken nur dadurch, dass die Pfeile der Fermionenlinien umgedreht wurden. Diese beiden Graphen müssen (zusätzlich zu weiteren möglichen Kontraktionen) kohärent zum Gesamtergebnis addiert werden. Wir werden im Folgenden zeigen, dass der rechte Graph sich vom linken durch den Faktor $(-1)^3$ unterscheidet, so dass die Summe dieser beiden Graphen Null ist. Allgemein gilt der (auch als „Theorem von Furry“ bekannte)

Satz: Der Wert eines Graphen, der eine Schleife mit n fermionischen und Null bosonischen Linien enthält, ändert sich um den Faktor $(-1)^n$, wenn die Fermionenpfeile der Schleife umgedreht werden. (26.83)

Deshalb kann man sämtliche Graphen, die eine reine Fermionenschleife mit einer ungeraden Anzahl von Linien enthalten, von vornherein aus allen Berechnungen streichen. Zum Beweis des Satzes bemerken wir, dass bei der Berechnung einer aus n Fermionenlinien und Null Bosonenlinien bestehenden Schleife nach den Regeln der Kästen 24.1 und 26.1 unter anderem die Faktoren

$$\underbrace{\cdots \frac{ie\gamma^\alpha}{\hbar} \cdot \frac{i(\gamma^\sigma k_{1\sigma} + mc/\hbar)}{k_1^2 - m^2c^2/\hbar^2 + i\epsilon'} \cdots \frac{ie\gamma^\nu}{\hbar} \cdot \frac{i(\gamma^\tau k_{n\tau} + mc/\hbar)}{k_n^2 - m^2c^2/\hbar^2 + i\epsilon'} \cdots}_{n \text{ Vertexfaktoren} \cdot n \text{ Propagatoren}}$$

auftauchen. Die Faktoren im Nenner kommutieren, nicht jedoch die Faktoren im Zähler. Die Zähler haben – abgesehen von uninteressanten Konstanten – die Form

$$\gamma^{\alpha}_{ab}(\gamma^{\sigma}_{bc}k_{1\sigma} + \mathbb{1}_{bc}mc/\hbar)\dots\gamma^{\nu}_{vw}(\gamma^{\tau}_{wa}k_{n\tau} + \mathbb{1}_{wa}mc/\hbar) = \\ = \mathrm{Sp}\Big\{\gamma^{\alpha}(\gamma^{\sigma}k_{1\sigma} + mc/\hbar)\dots\gamma^{\nu}(\gamma^{\tau}k_{n\tau} + mc/\hbar)\Big\}\,. \tag{26.84a}$$

In der ersten Zeile wurden die Spinor-Indizes explizit ausgeschrieben. Die Reihenfolge der Faktoren wird durch den Umordnungs-Operator $\mathcal{U}_{\mathrm{S}} = (23.21)$ festgelegt. Weil wir eine geschlossene Schleife fermionischer Linien betrachten, die keinen definierten Anfangspunkt hat, muss der letzte Spinorindex des Produktes mit dem ersten Spinorindex identisch sein. Deshalb erhält man die Spur des Produktes.

Wenn die Pfeile auf den Fermionenlinien umgedreht werden, ergibt sich stattdessen die Spur

$$\mathrm{Sp}\Big\{(\gamma^{\tau}k_{n\tau} + mc/\hbar)\gamma^{\nu}\dots(\gamma^{\sigma}k_{1\sigma} + mc/\hbar)\gamma^{\alpha}\Big\}\,, \tag{26.84b}$$

in der die Faktoren in umgekehrter Reihenfolge erscheinen. Um diesen Ausdruck mit (26.84a) zu vergleichen, wird hinter jeden Faktor in (26.84b) ein Faktor

$$1 = D_C^{-1}D_C \equiv (\gamma^0\gamma^2)^{-1}\gamma^0\gamma^2$$

eingeschoben. Anmerkung: D_C ist die Darstellung der Ladungskonjugation auf der Basis von Spinoren, die wir in Abschnitt 11.2.3 untersucht haben. Für den folgenden Beweis ist es belanglos, ob die Ladungskonjunktion eine Symmetrie der untersuchten Theorie ist, oder nicht. Denn selbstverständlich darf man in jedes beliebige Produkt jeder beliebigen Theorie die Faktoren $1 = (\gamma^0\gamma^2)^{-1}\gamma^0\gamma^2$ einfügen.

D_C ändert weder die Lorentzvektoren k_j noch die Konstanten $mc/\hbar$. Dagegen werden die γ-Matrizen durch D_C gemäß

$$-D_C^{-1}\gamma^{\nu\sim}D_C \overset{(11.23)}{=} \gamma^{\nu} \quad\Longrightarrow\quad D_C^{-1}\gamma^{\nu}D_C = -\gamma^{\nu\sim}$$

transformiert. Dabei bezeichnet $\sim$ die transponierte Matrix. Unter der Spur dürfen die Faktoren zyklisch vertauscht werden. Deshalb gilt:

$$
\begin{aligned}
(26.84b) &= \mathrm{Sp}\Big\{(\gamma^\tau k_{n\tau} + mc/\hbar) D_C^{-1} D_C \gamma^\nu D_C^{-1} D_C \dots \\
&\qquad \dots (\gamma^\sigma k_{1\sigma} + mc/\hbar) D_C^{-1} D_C \gamma^\alpha D_C^{-1} D_C \Big\} = \\
&= \mathrm{Sp}\Big\{(D_C \gamma^\tau D_C^{-1} k_{n\tau} + mc/\hbar) D_C \gamma^\nu D_C^{-1} \dots \\
&\qquad \dots (D_C \gamma^\sigma D_C^{-1} k_{1\sigma} + mc/\hbar) D_C \gamma^\alpha D_C^{-1} \Big\} = \\
&= \Big((-1)^4\Big)^n (-1)^n \,\mathrm{Sp}\Big\{(\gamma^{\tau\sim} k_{n\tau} + mc/\hbar)\gamma^{\nu\sim} \dots (\gamma^{\sigma\sim} k_{1\sigma} + mc/\hbar)\gamma^{\alpha\sim}\Big\} = \\
&= (-1)^n \,\mathrm{Sp}\Big\{\Big(\gamma^\alpha (\gamma^\sigma k_{1\sigma} + mc/\hbar) \dots \gamma^\nu (\gamma^\tau k_{n\tau} + mc/\hbar)\Big)^\sim\Big\} = \\
&= (-1)^n \cdot (26.84a) \quad \text{wegen } \mathrm{Sp}\{A^\sim\} = \mathrm{Sp}\{A\}
\end{aligned}
\tag{26.85}
$$

Damit ist Satz (26.83) bewiesen.

26.6 Photon-Photon-Streuung

Dies Diagramm wurde als letztes der möglicherweise divergenten Diagramme der QED in Tabelle (25.1) aufgelistet. Die oberflächliche Abzählung der Wellenzahl-Potenzen lässt eine logarithmische Divergenz erwarten. Tatsächlich ergibt die Berechnung, die man in [58] nachlesen kann, dass die Streuamplitude der Photon-Photon-Streuung konvergent ist. Das ist typisch für Diagramme mit mehreren externen Photonenlinien. Schon bei der Berechnung der Vakuumpolarisation haben wir statt der befürchteten quadratischen Divergenz nur eine logarithmische Divergenz gefunden. Das liegt daran, dass die oberflächliche Abschätzung des Divergenzgrades auf der Annahme beruht, dass jedes Feld vier voneinander unabhängige Komponenten habe. Das ist aber beim Photonenfeld aufgrund der Eichinvarianz nicht der Fall, so dass der tatsächliche Divergenzgrad oft geringer als erwartet ist. Weil wir uns in diesem Kapitel auf divergierende Diagramme und ihre Renormierung konzentrieren, werden wir die Photon-Photon-Streuung nicht berechnen, sondern verweisen auf die zitierte Literatur.

Teil 4: Nichtabelsche Eichtheorien

27 Flavor-Isospin

27.1 Der Isospin der Nukleonen

Sowohl das Proton als auch das Neutron können durch ein Diracfeld beschrieben werden. Bei hinreichend grober Betrachtung unterscheiden sich diese Felder nur durch einen kleinen Unterschied ihrer Massen und ihre elektromagnetischen Eigenschaften, verhalten sich aber hinsichtlich der Kernkraft identisch. Im Isospin-Modell stellt man sich deshalb vor, dass die beiden Nukleonen identische Teilchen wären, wenn man die elektromagnetische Wechselwirkung abschalten könnte. So, wie manche Energieniveaus von Atomen, die sich nur durch die Projektion ihres Spins auf eine bestimmte Achse des Ortsraums unterscheiden, durch ein von außen in Richtung dieser Achse angelegtes magnetisches Feld aufgespaltet werden können (Zeeman-Effekt), aber ohne das äußere Magnetfeld entartet sind, so wird das Doublett der Nukleonen durch die elektromagnetische Wechselwirkung aufgespaltet, und die beiden Nukleonen hätten ohne diese Wechselwirkung nach dem Isospin-Modell die gleiche Masse.

Ein Zeeman-Doublett beruht auf einem Elektronenzustand mit Spin $S = \hbar/2$, der auf die Achse des äußeren Magnetfeldes (die man meist als x^3-Achse wählt) die Projektion $S_3 = +\hbar/2$ oder $S_3 = -\hbar/2$ haben kann. In Analogie dazu ordnet man dem Nukleon einen Isospin $I = 1/2$ zu. Man beachte, dass der Isospin üblicherweise als dimensionslose Zahl definiert wird, während der Spin die Dimension eines Drehimpulses hat. Per Definition beschreibt der Zustand mit $I^3 = +1/2$ das Proton, der Zustand mit $I^3 = -1/2$ das Neutron. Der Isospin-Raum ist ein abstrakter Raum, der nichts mit dem Zeit-Orts-Raum zu tun hat. Deshalb wird im Isospin-Raum auch nicht zwischen ko- und kontravarianten Vektoren unterschieden, sondern es gilt die euklidische Metrik. Damit kann man die Zustandsfunktionen von Nukleonen schreiben als Produkt eines zweikomponentigen Iso-Spinors, und eines vom Isospin

unabhängigen Rests, der für Proton und Neutron identisch ist:

$$\psi_{\text{Proton}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \text{Rest}_{\text{Nukleon}} \qquad \psi_{\text{Neutron}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \text{Rest}_{\text{Nukleon}} \tag{27.1}$$

Diese Schreibweise der Zustandsfunktion der Nukleonen wurde 1932 von Heisenberg eingeführt [59]. Die Faktoren „Rest“ werden wir im Folgenden nicht mehr explizit ausschreiben.

Die dritte der Pauli-Matrizen

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{27.2}$$

ist – bis auf den Faktor $1/2$ – gleich dem I^3-Operator der Nukleonen. Wir schreiben die Pauli-Matrizen, wenn sie als Operatoren im Isospin-Raum wirken, als $\tau^j \equiv \sigma^j$, um Verwechslungen des Isospins mit dem Spin zu vermeiden. Die Eigenwert-Gleichungen des Operators I^3 sind

$$I^3\,\psi_{\text{Proton}} \equiv \frac{\tau^3}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = +\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = +\frac{1}{2}\,\psi_{\text{Proton}} \tag{27.3a}$$

$$I^3\,\psi_{\text{Neutron}} \equiv \frac{\tau^3}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\,\psi_{\text{Neutron}}\ . \tag{27.3b}$$

Wie üblich benutzen wir identische Bezeichnungen für Operatoren und ihre Eigenwerte. Z. B. ist $I^3 = \tau^3/2$ ein Operator, und $I^3 = \pm 1/2$ sind seine Eigenwerte. Die Leiteroperatoren $I^1 \pm iI^2 = \frac{1}{2}(\tau^1 \pm i\tau^2)$ wandeln Protonen und Neutronen ineinander um:

$$\frac{1}{2}(\tau^1 + i\tau^2)\,\psi_{\text{Neutron}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \psi_{\text{Proton}} \tag{27.3c}$$

$$\frac{1}{2}(\tau^1 - i\tau^2)\,\psi_{\text{Proton}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \psi_{\text{Neutron}} \tag{27.3d}$$

27.2 Globale Phasentransformationen

In Abschnitt 4.4 haben wir in Gleichung (4.77) die globale Phasentransformation

$$\left.\begin{aligned}\psi'(x) &= U\,\psi(x) = e^{+\frac{i}{\hbar}Kq}\,\psi(x)\\ \overline{\psi}'(x) &= \overline{\psi}(x)\,U^\dagger = e^{-\frac{i}{\hbar}Kq}\,\overline{\psi}(x)\end{aligned}\right\} \quad \text{mit } K,q\in\mathbb{R} \tag{27.4}$$

auf das Diracfeld angewandt. Diese Transformation dreht die Phase des Feldes $\psi(x)$ in allen Raumzeitpunkten x um den gleichen Winkel $Kq/\hbar$. Der Generator q dieser Transformation hat die Dimension Ladung, der Parameter K hat die Dimension Wirkung/Ladung.

Als bilineare Funktion von ψ und $\overline{\psi}$ ist die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}(i\hbar c\gamma^\rho \mathrm{d}_\rho - mc^2)\psi = \overline{\psi}U^\dagger(i\hbar c\gamma^\rho \mathrm{d}_\rho - mc^2)U\psi = \mathcal{L}' \tag{27.5}$$

– und demzufolge auch die Feldgleichung – des freien Dirac-Feldes invariant unter der globalen Phasentransformation. Nach dem Noether'schen Theorem korreliert diese Invarianz mit einer erhaltenen Stromdichte, deren Komponenten wir als

$$j^\rho \overset{(4.16)}{=} C\sum_r \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\rho\phi_r)}\,kq\,\phi_r \quad \text{mit} \quad \begin{cases}\phi_r = \psi \text{ oder } \overline{\psi}\\ k \equiv \lim\limits_{n\to\infty} K/n\,,\ n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

berechnet haben. Mit $C \equiv 1/(i\hbar k)$ fanden wir schließlich als Komponenten der erhaltenen Stromdichte

$$j^\rho = \frac{1}{i\hbar k}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\rho\psi)}kq\psi - \overline{\psi}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\rho\overline{\psi})}kq\right) \overset{(4.87)}{=} q\overline{\psi}c\gamma^\rho\psi\ . \tag{27.6}$$

Bei festgehaltenem Generator q bildet die Menge der Transformationen

$$U \overset{(27.4)}{=} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}Kq\right\} \quad \text{mit } K,q\in\mathbb{R} \tag{27.7}$$

mit beliebigem K die eindimensionale Fundamental-Darstellung der abstrakten Gruppe U(1), siehe die Übersicht der systematischen Nomenklatur von

Matrixgruppen auf Seite 125 .

Jetzt wollen wir globale Phasentransformationen der Nukleonen-Zustandsfunktionen (27.1) untersuchen. In Abschnitt 6.1 haben wir bewiesen, dass jedes Element der Matrixgruppe SU(2) – die zugleich die Fundamentaldarstellung der abstrakten Gruppe SU(2) ist – in der Form

$$U(\boldsymbol{\Theta}) \overset{(6.17)}{=} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\Theta_k \frac{\hbar\sigma^k}{2}\right\} \tag{27.8}$$

geschrieben werden kann. Wie in Abschnitt 4.1 erläutert, sind die drei Faktoren $\hbar\sigma^k/2$ die Generatoren dieser Darstellung, während die drei reellen Parameter Θ_k das jeweilige Element der Gruppe spezifizieren. Der Vergleich zwischen dieser Gleichung und der globalen U(1)-Phasentransformation (27.7) legt es nahe, den Vektoroperator

$$g\boldsymbol{I} = g\left(\frac{\tau^1}{2}, \frac{\tau^2}{2}, \frac{\tau^3}{2}\right) \tag{27.9}$$

als dreidimensionalen Isospin-Ladungsoperator zu definieren, in dem der reelle, eindimensionale Faktor g eine Kopplungskonstante mit der Dimension Isospinladung ist. Der Isospin-Ladungsoperator ist Generator der globalen Phasentransformation

$$\psi' = U\psi = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\tilde{K}g\right\}\psi \equiv \exp\left\{\frac{i}{\hbar}K_j g I^j\right\}\psi \tag{27.10a}$$

$$\text{mit} \quad \tilde{K} \equiv K_j I^j = K_j \frac{\tau^j}{2} \quad , \quad K_j \in \mathbb{R} \, , \tag{27.10b}$$

bei der über j von 1 bis 3 summiert wird. $\psi =$ (27.1) ist die Zustandsfunktion der Nukleonen, die zwei Isospin-Komponenten hat. Der reelle Parameter-Vektor $\boldsymbol{K}$ hat die Dimension Wirkung/Isospinladung. Die Bedeutung der 2×2-Matrizen im Exponenten wird durch die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion definiert:

$$U\psi(x) = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}K_j g I^j\right\}\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{i}{\hbar}gK_j I^j\right)^n \psi \tag{27.11}$$

In jedem Summanden wird ψ mit der 2×2-Matrix $(K_j I^j)^n = \tilde{K}^n$ multipliziert. Die infinitesimale Phasentransformation ergibt sich aus

$$U = \exp\left\{\frac{i}{\hbar} K_j g I^j\right\} \psi = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{i}{\hbar}\, g \underbrace{\frac{K_j}{n}}_{\equiv k_j} I^j\right)^n \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}$$

als

$$U_{\text{INF}} = 1 + \frac{i}{\hbar}\, g k_j I^j \ . \tag{27.12}$$

Weil die Phasentransformation unitär ist, $U^\dagger = U^{-1}$, ist die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}(i\hbar c \gamma^\rho \mathrm{d}_\rho - mc^2)\psi \tag{27.13}$$

der Nukleonen offensichtlich invariant unter der globalen Phasentransformation

$$\mathcal{L}' = \overline{\psi} U^\dagger (i\hbar c \gamma^\rho \mathrm{d}_\rho - mc^2) U \psi = \mathcal{L} \ . \tag{27.14}$$

Deshalb gibt es nach dem Noether'schen Theorem eine erhaltene Stromdichte mit den vier Raum-Zeit-Komponenten

$$j^\rho \overset{(27.6)}{=} C\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\rho \psi)}\, g K_l I^l \psi - \overline{\psi} g K_l I^l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\rho \overline{\psi})}\right) . \tag{27.15}$$

Weil die drei Komponenten K_l voneinander unabhängig sind, kann die Konstante als $CK_l \equiv \delta_{jl}/(i\hbar)$ mit $j = 1, 2, 3$ gewählt werden, und es gibt drei erhaltene Stromdichten mit den Raum-Zeit-Komponenten

$$j^{(j)\rho} = g \overline{\psi} c \gamma^\rho I^j \psi \quad \text{mit } j = 1, 2, 3 \ . \tag{27.16}$$

γ^ρ ist eine 4×4-Matrix im Spinorraum. ψ ist ein vierkomponentiger Spaltenspinor, $\overline{\psi}$ ist ein vierkomponentiger Zeilenspinor. I^j ist eine 2×2-Matrix im Isospin-Raum. ψ ist ein zweikomponentiger Spalten-Isospinor, $\overline{\psi}$ ist ein zweikomponentiger Zeilen-Isospinor. Die Faktoren wurden so angeordnet, dass in j^ρ sowohl sämtliche Spinor-Indizes als auch sämtliche Isospin-Indizes kontrahiert sind.

27.3 Lokale Phasentransformationen

Ist das System der Nukleonen auch invariant unter lokalen SU(2)-Phasentransformationen? Diese Frage wurde 1954 von Yang und Mills [60] untersucht. Bei der lokalen Phasentransformation

$$\begin{aligned}\psi'(x) = U(x)\,\psi(x) &= \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\,\tilde{K}(x)\,g\right\}\psi(x)\\ &= \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\,K_j(x)\,gI^j\right\}\psi(x)\end{aligned} \tag{27.17}$$

kann K_j an jedem Raum-Zeit-Punkt x unterschiedlich gewählt werden. Wir verlangen lediglich, dass die drei Felder $K_j(x)$ an jedem Raum-Zeit-Punkt stetig und differenzierbar sind. Auf die Lagrangedichte wirkt die lokale Phasentransformation folgendermaßen:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}' &= \overline{\psi}U^\dagger(i\hbar c\gamma^\rho \mathrm{d}_\rho - mc^2)U\psi\\ &= \overline{\psi}U^\dagger i\hbar c\gamma^\rho U\mathrm{d}_\rho\psi - \overline{\psi}U^\dagger mc^2U\psi + \overline{\psi}U^\dagger i\hbar c\gamma^\rho(\mathrm{d}_\rho U)\psi\\ &= \mathcal{L} + \overline{\psi}U^\dagger i\hbar c\gamma^\rho(\mathrm{d}_\rho U)\psi = \mathcal{L} - \overline{\psi}c\gamma^\rho g(\mathrm{d}_\rho K_j)I^j\psi\end{aligned} \tag{27.18}$$

Die Lagrangedichte ist nicht invariant unter lokalen Phasentransformationen. Dies Ergebnis entspricht dem Resultat (4.96) der lokalen U(1)-Phasentransformation.

Im Fall der U(1)-Symmetrie konnten wir die Invarianz unter lokalen Phasentransformationen dadurch erzwingen, dass wir den normalen Differentialoperator d_ρ durch den kovarianten Differentialoperator

$$\mathrm{D}_\rho(x) \overset{(4.102)}{\equiv} \mathrm{d}_\rho + \frac{i}{\hbar}qA_\rho(x) \tag{27.19}$$

ersetzten, und die Phasentransformation zur U(1)-Eichtransformation erweiterten, siehe (4.109):

$$\psi(x) \xrightarrow{U(x)} \psi'(x) = U(x)\,\psi(x) = \psi(x)\,\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\,K(x)\,q\right\} \tag{27.20a}$$

$$A_\rho(x) \xrightarrow{U(x)} A'_\rho(x) = A_\rho(x) + \frac{i\hbar}{q}(\mathrm{d}_\rho U)U^\dagger = A_\rho(x) - \mathrm{d}_\rho K(x) \tag{27.20b}$$

Diese Methode zur Sicherstellung der Invarianz unter lokalen Phasentransformationen wollen wir jetzt auf die Gruppe SU(2) übertragen. Dazu definieren wir den kovarianten Differentialoperator

$$\mathrm{D}_\rho(x) \equiv \mathrm{d}_\rho + \frac{i}{\hbar} g \tilde{W}_\rho(x) \tag{27.21a}$$

$$\tilde{W}_\rho(x) \equiv W_{j\rho}(x)\, I^j = W_{j\rho}(x)\, \frac{\tau^j}{2}\ . \tag{27.21b}$$

Die drei Ladungen gI^j treten an die Stelle der Ladung q von (27.19), und die drei Eichfelder $W_j(x)$ treten in der Eichgruppe SU(2) an die Stelle des Eichfeldes $A(x)$ der Eichgruppe U(1). $\tilde{W}(x)$ ist ein Vektorfeld mit vier Raum-Zeit-Komponenten. Weil die Nukleonen-Zustandsfunktion ψ, auf die $\tilde{W}(x)$ wirkt, zwei Isospin-Komponenten hat, definieren wir jede einzelne Raum-Zeit-Komponente $\tilde{W}_\rho(x)$ als 2×2-Isospin-Matrix. Dadurch wird die größtmögliche Allgemeinheit des Ansatzes erreicht. Die je vier Raum-Zeit-Komponenten $W_{j\rho}(x)$ der drei Eichfelder $W_j(x)$ sind ein-komponentige Zahlen mit der Dimension Impuls/Isospinladung. Es ist üblich, auch $\tilde{W}(x)$ als Eichfeld zu bezeichnen.

Wir definieren folgendes Verhalten von $\tilde{W}(x)$ bei einer Eichtransformation:

$$\tilde{W}'_\rho = \underbrace{U \tilde{W}_\rho U^\dagger}_{W_{j\rho} U \frac{\tau^j}{2} U^\dagger} + \frac{i\hbar}{g} (\mathrm{d}_\rho U) U^\dagger \tag{27.22}$$

Das unterscheidet sich von der einfachen Form (27.20b) im Fall der U(1)-Eichsymmetrie dadurch, dass die Phasentransformationen U nicht mit ihren Generatoren $\tau^j/2$ kommutieren. Deshalb können wir die Ableitung von U nach x^ρ nicht explizit ausführen. Denn dazu müsste man U als Reihenentwicklung (27.11) schreiben, und aus der Ableitung dieser Reihe ließe sich keine Exponentialfunktion ausklammern.

Die Definition von $\tilde{W}'_\rho$ wurde in dieser Weise gewählt, damit der kovariante Differentialoperator sich unter einer Eichtransformation folgendermaßen transformiert:

$$\begin{aligned}\mathrm{D}'_\rho\,\psi' = \mathrm{D}'_\rho\,U\psi &= \mathrm{d}_\rho U\psi + \frac{i}{\hbar}\,g\Big(\underbrace{U\tilde{W}_\rho U^\dagger + \frac{i\hbar}{g}(\mathrm{d}_\rho U)U^\dagger}_{\tilde{W}'_\rho}\Big)\,U\psi \\ &= (\mathrm{d}_\rho U)\psi + U\mathrm{d}_\rho\psi + \frac{i}{\hbar}\,gU\tilde{W}_\rho\psi - (\mathrm{d}_\rho U)\psi \\ &= U\,\mathrm{D}_\rho\,\psi \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{D}'_\rho = U\,\mathrm{D}_\rho\,U^\dagger \end{aligned} \tag{27.23}$$

Das entspricht der Transformation (4.100) des kovarianten Differentialoperators der U(1)-Eichgruppe. Dies Transformationsverhalten bewirkt, dass die Lagrangedichte invariant unter der Eichtransformation ist, wenn der normale Differentialoperator d_ρ durch den kovarianten Differentialoperator D_ρ ersetzt wird:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}' &= \overline{\psi}U^\dagger(i\hbar c\gamma^\rho\,\mathrm{D}'_\rho - mc^2)U\psi = \overline{\psi}(i\hbar c\gamma^\rho U^\dagger\,\mathrm{D}'_\rho\,U - mc^2)\psi = \\ &= \overline{\psi}(i\hbar c\gamma^\rho\,\mathrm{D}_\rho - mc^2)\psi = \mathcal{L}\end{aligned} \tag{27.24}$$

Wir können die Ableitung $\mathrm{d}_\rho U$ in (27.22) zwar nicht für eine allgemeine Phasentransformation U explizit ausführen, wohl aber für die infinitesimale Transformation $U_{\text{INF}} = (27.12)$:

$$\tilde{W}'_\rho \overset{(27.22)}{=} (1 + \frac{i}{\hbar}\,gk_kI^k)\tilde{W}_\rho(1 - \frac{i}{\hbar}\,gk_lI^{l\dagger}) + \frac{i\hbar}{g}(\mathrm{d}_\rho\frac{i}{\hbar}\,gk_kI^k)(1 - \frac{i}{\hbar}\,gk_lI^{l\dagger}) \tag{27.25}$$

Die Pauli-Matrizen (27.2) sind selbstadjungiert, d. h. es ist $I^{l\dagger} = I^l = \tau^l/2$. Bei Vernachlässigung von Termen $\mathcal{O}(k^2)$, zu denen auch $k_l\mathrm{d}_\rho k_k$ gehört, erhält man

$$\tilde{W}'_\rho = \tilde{W}_\rho + \frac{i}{\hbar}\,g\left[k_k\frac{\tau^k}{2}, \tilde{W}_\rho\right] - \mathrm{d}_\rho k_j\frac{\tau^j}{2}\ . \tag{27.26}$$

Mit (27.21b) gilt demnach für die Komponenten $W_{j\rho}$ der drei Eichfelder

$$W'_{j\rho}\frac{\tau^j}{2} = W_{j\rho}\frac{\tau^j}{2} - \mathrm{d}_\rho k_j \frac{\tau^j}{2} + \frac{i}{\hbar}\, g k_k W_{l\rho}\left[\frac{\tau^k}{2}, \frac{\tau^l}{2}\right]$$
$$= W_{j\rho}\frac{\tau^j}{2} - \mathrm{d}_\rho k_j \frac{\tau^j}{2} - \frac{1}{\hbar}\, g\, \epsilon^{klj} k_k W_{l\rho}\, \frac{\tau^j}{2}\ . \tag{27.27}$$

Im letzten Schritt wurde der bekannte Kommutator

$$\left[\frac{\sigma^j}{2}, \frac{\sigma^k}{2}\right] \overset{(6.24)}{=} i\epsilon^{jkl}\frac{\sigma^l}{2} \tag{27.28}$$

verwendet, in dem ϵ^{jkl} der total antisymmetrische Levi-Cività-Tensor ist. In der Sprache der Gruppentheorie sind die Faktoren ϵ^{jkl} die Strukturkonstanten der Gruppe SU(2). Der gemeinsame Faktor $\tau^j/2$ in (27.27) kann gekürzt werden:

$$W'_{j\rho} = W_{j\rho} - \mathrm{d}_\rho k_j - \frac{g}{\hbar}\,\epsilon^{klj} k_k W_{l\rho} \tag{27.29a}$$

Die Kombination dieser infinitesimalen Transformation bzw. der endlichen Transformation in der Isospin-Matrix-Form

$$\tilde{W}'_\rho \overset{(27.22)}{=} U\tilde{W}_\rho U^\dagger + \frac{i\hbar}{g}(\mathrm{d}_\rho U)U^\dagger \tag{27.29b}$$

mit der lokalen Phasentransformation

$$\psi'(x) = U(x)\,\psi(x) \overset{(27.17)}{=} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\, g K_j(x)\frac{\tau^j}{2}\right\}\psi(x) \tag{27.29c}$$

des Feldes ψ ist die SU(2)-Eichtransformation, die mit der U(1)-Eichtransformation (27.20) verglichen werden sollte. In (27.29a) bzw. in (27.29b) tritt ein zusätzlicher Summand auf, weil die Generatoren der Phasentransformation nicht kommutieren, und deshalb die Strukturkonstanten der Gruppe SU(2) – anders als die Strukturkonstanten der Gruppe U(1) – von Null verschieden sind. Außerdem haben wir es bei der lokalen Phasentransformation der Nukleonen mit drei Parameterfeldern $K_j(x)$ und drei Eichfeldern $W_j(x)$ zu tun, weil die Gruppe dieser Transformationen identisch ist mit der Matrixgruppe SU(2), die drei Generatoren (sprich Ladungen) $gI^j = g\tau^j/2$ hat. Allgemein

gilt (ohne Beweis): Die Matrixgruppe SU(n) mit beliebigem $n \geq 2$ hat $n^2 - 1$ Generatoren, so dass die Forderung nach lokaler Eichinvarianz n-dimensionaler geladener Felder zu $n^2 - 1$ Eichfeldern führt.

Bei der Untersuchung der U(1)-Eichtransformationen in Abschnitt 4.5 stellte sich heraus, dass die Feldgleichung des Eichfeldes $A(x)$ durch die Forderung nach Eichinvarianz weitestgehend festgelegt ist. Als kombinierte Lagrangedichte des Diracfeldes und des U(1)-Eichfeldes ergab sich

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\overset{(4.120)}{=} \overline{\psi}\Big(i\hbar c\gamma^\rho(\mathrm{d}_\rho + \frac{i}{\hbar}qA_\rho) - mc^2\Big)\psi - \frac{1}{4\mu_0}F_{\sigma\tau}F^{\sigma\tau} \\ F_{\sigma\tau} &\equiv \mathrm{d}_\sigma A_\tau - \mathrm{d}_\tau A_\sigma \ . \end{aligned} \tag{27.30}$$

Jetzt wollen wir die Lagrangedichte (27.24) des Nukleonenfeldes so erweitern, dass sich auch für die drei Eichfelder W_j dynamische Feldgleichungen ergeben. Selbstverständlich muss die Erweiterung so vorgenommen werden, dass die Eichinvarianz nicht beschädigt wird. Wir behaupten, dass die folgende Lagrangedichte die eichinvariante Verallgemeinerung von (27.30) auf die Eichgruppe SU(2) darstellt:

$$\mathcal{L} \equiv \overline{\psi}(i\hbar c\gamma^\rho \,\mathrm{D}_\rho - mc^2)\psi - \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\{\tilde{F}_{\sigma\tau}\tilde{F}^{\sigma\tau}\} \tag{27.31a}$$

$$\tilde{F}_{\sigma\tau} \equiv \mathrm{D}_\sigma \tilde{W}_\tau - \mathrm{D}_\tau \tilde{W}_\sigma \equiv F_{j\sigma\tau}\frac{\tau^j}{2} \equiv (\mathrm{D}_\sigma W_{j\tau} - \mathrm{D}_\tau W_{j\sigma})\frac{\tau^j}{2} \tag{27.31b}$$

Der Feldstärketensor wird jetzt mit den kovarianten Ableitungen definiert. Im Fall der Eichgruppe U(1) ist es wegen

$$F_{\sigma\tau} = \mathrm{D}_\sigma A_\tau - \mathrm{D}_\tau A_\sigma \overset{(27.19)}{=} \mathrm{d}_\sigma A_\tau - \mathrm{d}_\tau A_\sigma + \frac{i}{\hbar}q\underbrace{[A_\sigma, A_\tau]}_{0} \tag{27.32}$$

egal, ob man die normale oder die kovariante Ableitung verwendet. Dagegen ist im Fall der Eichgruppe SU(2) die Verwendung der kovarianten Ableitung zwingend erforderlich, damit die Lagrangedichte $\mathcal{L}$ eichinvariant ist. In Anhang A.25 wird gezeigt, dass

$$\tilde{F}'_{\sigma\tau} \overset{(A.183)}{=} U\tilde{F}_{\sigma\tau}U^\dagger \tag{27.33}$$

gilt. Daraus folgt zusammen mit (27.24) sofort die Eichinvarianz von $\mathcal{L}$. Denn wegen der zyklischen Vertauschbarkeit der Faktoren unter der Spur ist

$$\begin{aligned}\mathrm{Sp}\{\tilde{F}'_{\sigma\tau}\tilde{F}'^{\sigma\tau}\} &= \mathrm{Sp}\{U\tilde{F}_{\sigma\tau}U^\dagger U\tilde{F}^{\sigma\tau}U^\dagger\} = \\ &= \mathrm{Sp}\{U^\dagger U\tilde{F}_{\sigma\tau}U^\dagger U\tilde{F}^{\sigma\tau}\} = \mathrm{Sp}\{\tilde{F}_{\sigma\tau}\tilde{F}^{\sigma\tau}\}\ .\end{aligned}$$

Die Spur kann auch in der Form

$$\begin{aligned}\mathrm{Sp}\{\tilde{F}_{\sigma\tau}\tilde{F}^{\sigma\tau}\} &= F_{j\sigma\tau}F_k^{\sigma\tau}\mathrm{Sp}\Big\{\frac{\tau^j}{2}\frac{\tau^k}{2}\Big\} = \\ &= \frac{1}{4}F_{j\sigma\tau}F_k^{\sigma\tau}\mathrm{Sp}\Big\{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\delta_{jk} + i\epsilon^{jkl}\tau^l\Big\} = \frac{1}{4}F_{j\sigma\tau}F_j^{\sigma\tau}\cdot 2\end{aligned} \tag{27.34}$$

geschrieben werden. Die Terme mit unterschiedlichem j und k haben sich hier zu Null summiert. Damit erhält die Lagrangedichte (27.31) die Form

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}(i\hbar c\gamma^\rho \mathrm{D}_\rho - mc^2)\psi - \frac{1}{4}F_{j\sigma\tau}F_j^{\sigma\tau}\ , \tag{27.35}$$

in der die Ähnlichkeit mit der U(1)-Lagrangedichte (27.30) noch deutlicher zutage tritt. In beiden Fällen wird das Produkt der Feldstärketensoren mit $-1/4$ multipliziert. Nur der Faktor μ_0 ist jetzt entfallen, und es wird über $j = 1, 2, 3$ summiert.

Die drei Eichfelder $W_j(x)$ werden in Experimenten nicht beobachtet. Anders als die elektrischen Ladungen sind also die den Nukleonen zugeschriebenen Isospin-Ladungen *nicht* die Quellen von Eichfeldern, die Wechselwirkungen zwischen den Teilchen bewirken. Trotzdem war die Arbeit, die wir (bzw. Yang und Mills) auf die Erforschung der SU(2)-Eichwechselwirkung verwendet haben, nicht vergebens. Denn erstens können alle Ergebnisse mit geringfügigen Modifikationen in der Quantenchromodynamik, die eine SU(3)-Eichwechselwirkung ist, weiter genutzt werden, und zweitens werden wir die Gruppe SU(2) bei der Beschreibung der schwachen Wechselwirkung benutzen.

Im „Standard-Modell“ der Elementarteilchen werden die Isospin-Ladungen nicht den Nukleonen oder anderen Hadronen zugeordnet, sondern den Quarks, die als ihre Konstituenten betrachtet werden. Während das up-Quark (etwa $4\,\mathrm{MeV}/c^2$) und das down-Quark (etwa $7\,\mathrm{MeV}/c^2$) näherungsweise gleich schwer sind, ist die Isospin-Symmetrie (oft auch als flavour-Symmetrie bezeichnet) bei den weiteren Quarks (strange etwa $150\,\mathrm{MeV}/c^2$, charm etwa $1\,\mathrm{GeV}/c^2$, bottom etwa $4\,\mathrm{GeV}/c^2$, top etwa $175\,\mathrm{GeV}/c^2$) deutlich gebrochen. Deshalb hat die auf Isospin-Ladungen beruhende flavour-Symmetrie bei den Hadronen, die aus den leichteren Quarks aufgebaut werden, als Ordnungsschema immerhin noch einen gewissen Nutzen, aber kaum mehr bei den Hadronen, die schwere Quarks enthalten.

Dagegen stellte sich die auf Farb-Ladungen beruhende Symmetrie der Quarks als streng erhaltene Symmetrie heraus. Damit werden wir uns im folgenden Kapitel beschäftigen.

28 Quantenchromodynamik

28.1 Quarks und Gluonen

Die Quantenchromodynamik beruht auf der Annahme, dass alle Hadronen aus Quarks und Gluonen bestehen. Quarks sind Fermionen, die eine elektrische Ladung, eine Farbladung, und eine schwache Ladung tragen. Gluonen sind die bosonischen Eichfelder, deren Quellen die Farbladungen sind. Einige wichtige Eigenschaften von Quarks und Gluonen sind in Tabelle 28.1 zusammengestellt. Die durch Kommata getrennten Farbladungen sind alternativ zu verstehen, d. h. es gibt jeden Quark-flavor mit 3 verschiedenen Farbladungen, und acht Gluonen mit unterschiedlichen Farbladungen. Die Farbladungen werden als r = rot, g = grün, b = blau, $\bar{r}$ = anti-rot, $\bar{g}$ = anti-grün, $\bar{b}$ = anti-blau gelesen und haben selbstverständlich nichts mit den Farben der Alltagssprache zu tun. Die anti-Farbladungen sind die Ladungen der Antiquarks, und e ist die elektrische Ladung des Positrons.

Genau so wie wir in (27.1) das Proton und das Neutron als Isospin-

Flavor	Spin	elektr. Lad.	Farbladung	Ruhmasse
down	1/2	$-e/3$	$r\,,\ g\,,\ b$	$\approx 7.5\,\mathrm{MeV}/c^2$
up	1/2	$+2e/3$	$r\,,\ g\,,\ b$	$\approx 4.2\,\mathrm{MeV}/c^2$
strange	1/2	$-e/3$	$r\,,\ g\,,\ b$	$\approx 150\,\mathrm{MeV}/c^2$
charme	1/2	$+2e/3$	$r\,,\ g\,,\ b$	$\approx 1.1\,\mathrm{GeV}/c^2$
bottom	1/2	$-e/3$	$r\,,\ g\,,\ b$	$\approx 4.2\,\mathrm{GeV}/c^2$
top	1/2	$+2e/3$	$r\,,\ g\,,\ b$	$\approx 175\,\mathrm{GeV}/c^2$
Gluon	1	0	$r\bar{g}\,,\ r\bar{b}\,,\ g\bar{r}\,,$ $g\bar{b}\,,\ b\bar{r}\,,\ b\bar{g}\,,$ $(g\bar{g}-r\bar{r})/\sqrt{2}\,,$ $(g\bar{g}+r\bar{r}-2b\bar{b})/\sqrt{6}$	0

Tab. 28.1 : Eigenschaften von Quarks und Gluonen

Dublet beschrieben haben, können beispielsweise die drei up-Quarks mit verschiedenen Farbladungen als Farb-Triplet dargestellt werden:

$$\psi_{\text{up,rot}} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \cdot \text{Rest}_{\text{up}} \qquad \psi_{\text{up,grün}} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \cdot \text{Rest}_{\text{up}}$$
$$\psi_{\text{up,blau}} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \cdot \text{Rest}_{\text{up}} \tag{28.1}$$

Dadurch bildet jedes einzelne der sechs Quarks eine Basis für eine dreidimensionale Fundamentaldarstellung der Gruppe SU(3). Mesonen (die aus einem Quark und einem Antiquark bestehen) und Baryonen (die aus drei Quarks bestehen), werden in der QCD durch

$$\psi_{\text{Meson}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\psi_{A,\alpha}\psi_{\bar{B},\bar{\alpha}} \tag{28.2a}$$

$$\psi_{\text{Baryon}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\,\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\,\psi_{A,\alpha}\psi_{B,\beta}\psi_{C,\gamma} \tag{28.2b}$$

repräsentiert. Bei mehrfach auftretenden Farbindizes α, β, γ ist über rot, grün, blau zu summieren. Das gilt auch dann, wenn ein Farbindex als Farbe und der andere als Antifarbe auftritt:

$$(28.2a) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\psi_{A,\text{rot}}\psi_{\bar{B},\bar{\text{rot}}} + \psi_{A,\text{grün}}\psi_{\bar{B},\bar{\text{grün}}} + \psi_{A,\text{blau}}\psi_{\bar{B},\bar{\text{blau}}})$$

Der total antisymmetrische Levi-Cività-Tensor $\epsilon^{\alpha\beta\gamma}$ bewirkt, dass die Zustandsfunktion der Baryonen auch dann antisymmetrisch (d. h. mit dem Pauli-Prinzip verträglich) ist, wenn die drei Quark-Flavors A, B, C gleich sind und auch der hier nicht explizit angegebene Rest der Funktion symmetrisch ist, wie z. B. bei der Δ^{++}-Resonanz

$$\psi_{\Delta^{++}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\,\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\,\psi_{\text{up},\alpha}\psi_{\text{up},\beta}\psi_{\text{up},\gamma}\ .$$

Die Zustandsfunktionen (28.2) sind Farb-Singlets, d. h. sie sind invariant unter beliebigen Koordinatentransformationen des dreidimensionalen Farbraums. Es stellt sich als ein sehr wichtiges Prinzip der QCD heraus, dass die Zustandsfunktionen aller isoliert beobachtbarer Felder Farb-Singlets sein

müssen.

Alle Elemente einer Fundamentaldarstellung der Gruppe SU(n) mit $n \geq 2$ können in der Form

$$U = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\, K_j\, g \frac{\lambda^j}{2}\right\} = \lim_{r\to\infty}\left(1 + \frac{i}{\hbar}\, g \underbrace{\frac{K_j}{r}}_{\equiv k_j} \frac{\lambda^j}{2}\right)^r \tag{28.3a}$$

$$\Longrightarrow \quad U_{\text{INF}} = 1 + \frac{i}{\hbar}\, g k_j \frac{\lambda^j}{2} \tag{28.3b}$$

geschrieben werden, wobei über den doppelt vorkommenden Index j von 1 bis $n^2 - 1$ summiert wird und $r \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl ist. Die $n^2 - 1$ Faktoren $g\lambda^j/2$ sind die Generatoren der Darstellung. g ist eine reelle Kopplungskonstante mit der Dimension Farbladung. Die λ^j sind dimensionslose hermitesche $n \times n$-Matrizen. Die Faktoren K_j (bzw. k_j bei der infinitesimalen Transformation) haben die Dimension Wirkung/Farbladung.

Die Generatoren der SU(2) haben wir mit den 2×2-dimensionalen Pauli-Matrizen (27.2) konstruiert. Zur Konstruktion der Generatoren der SU(3) hat Gell-Mann [61] die 3×3-dimensionalen Matrizen

$$\lambda^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda^8 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & -2/\sqrt{3} \end{pmatrix} \tag{28.4}$$

vorgeschlagen. Der Kommutator der Generatoren ist

$$\left[\frac{\lambda^i}{2}, \frac{\lambda^j}{2}\right] = i f^{ijk} \frac{\lambda^k}{2}\ . \tag{28.5}$$

Wie bei allen Gruppen SU(n) sind die Strukturkonstanten f^{ijk} reell und total antisymmetrisch, d. h. sie wechseln bei jeder Permutation zweier Indizes das Vorzeichen. Die Strukturkonstanten der SU(3) kann man aus (28.4) und (28.5) berechnen oder dem Artikel von Gell-Mann [61] entnehmen:

ijk	123	147	156	246	257	345	367	458	678
f^{ijk}	1	1/2	−1/2	1/2	1/2	1/2	−1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/2$

Alle Strukturkonstanten, die hier nicht aufgelistet sind und nicht durch Permutation der Indizes aus diesen f^{ijk} hervorgehen, sind Null.

Wie für die Generator-Matrizen jeder SU(n) gilt auch für die Generator-Matrizen der SU(3)

$$\mathrm{Sp}\{\lambda^j\} = 0 \qquad\qquad \mathrm{Sp}\{\lambda^j\lambda^k\} = 2\delta_{jk} \ . \tag{28.6}$$

Um diese Relationen zu erfüllen, hat Gell-Mann die Matrix λ^8 in der eigenartigen Form gewählt, während die sieben anderen Matrizen den Pauli-Matrizen nachgebildet sind.

Die Lagrangedichte des freien (nicht wechselwirkenden) Quark-Flavors A ist

$$\mathcal{L}_A = \overline{\psi}_A(i\hbar c\gamma^\rho \mathrm{d}_\rho - m_A c^2)\psi_A \ . \tag{28.7}$$

Die Zustandsfunktion ψ_A ist entsprechend der Definition (28.1) ein Farbladungs-Triplet. Weil die Phasentransformation (28.3) unitär ist, $U^\dagger = U^{-1}$, ist diese Lagrangedichte offensichtlich invariant unter der globalen Phasentransformation

$$\mathcal{L}'_A = \overline{\psi}_{A,\alpha}U^\dagger_{\alpha\beta}(i\hbar c\gamma^\rho \mathrm{d}_\rho - m_A c^2)U_{\beta\gamma}\psi_{A,\gamma} = \mathcal{L}_A \ . \tag{28.8}$$

Hier wurden die Farb-Indizes $\alpha\ldots$ explizit ausgeschrieben. In den meisten Formeln, wie z. B. (28.7) unterdrücken wir diese Indizes. Es wird bei doppelt vorkommendem Farb-Index α automatisch über die drei Farben summiert, über doppelt vorkommende Raum-Zeit-Indizes ρ wird von Null bis Drei summiert, und über doppelt vorkommende Generator-Indizes j wird von Eins bis Acht summiert. Nach dem Noether'schen Theorem ist die Stromdichte mit den vier Raum-Zeit-Komponenten

$$j_j^\rho \overset{(27.16)}{=} g\overline{\psi}_{A,\alpha} c\gamma^\rho \frac{\lambda^j_{\alpha\beta}}{2}\,\psi_{A,\beta} \quad \text{mit } j = 1\ldots 8 \tag{28.9}$$

erhalten. Für jede der acht Farbladungen $g\lambda^j/2$ gilt also ein Erhaltungssatz.

Nun betrachten wir die lokale Phasentransformation

$$\begin{aligned}\psi'_A(x) = U(x)\,\psi_A(x) &= \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\,\tilde{K}(x)\,g\right\}\psi_A(x)\\ &= \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\,K_j(x)\,g\frac{\lambda^j}{2}\right\}\psi_A(x)\ ,\end{aligned} \tag{28.10}$$

bei der die acht Parameter K_j an jedem Raum-Zeit-Punkt x unterschiedlich gewählt werden können. Wir verlangen lediglich, dass die acht Felder $K_j(x)$ an jedem Raum-Zeit-Punkt stetig und differenzierbar sind. Auf die Lagrangedichte (28.7) wirkt die lokale Phasentransformation folgendermaßen:

$$\mathcal{L}'_A \overset{(27.18)}{=} \mathcal{L}_A - \overline{\psi}_A c\gamma^\rho g(\mathrm{d}_\rho K_j)\frac{\lambda^j}{2}\,\psi_A \tag{28.11}$$

Die Lagrangedichte ist nicht invariant unter lokalen Phasentransformationen. Wie gewohnt erzwingen wir die Invarianz dadurch, dass wir den normalen Differentialoperator d_ρ gemäß (27.21) durch den kovarianten Differentialoperator

$$\mathrm{D}_\rho(x) \equiv \mathrm{d}_\rho + \frac{i}{\hbar} g\tilde{G}_\rho(x) \tag{28.12a}$$

$$\tilde{G}_\rho(x) \equiv G_{j\rho}(x)\,\frac{\lambda^j}{2} \tag{28.12b}$$

ersetzen. In der Quantenchromodynamik treten die acht Ladungen $g\lambda^j/2$ an die Stelle der Ladung q in der entsprechenden Gleichung (27.19) der Quantenelektrodynamik, und die acht Eichfelder $G_j(x)$ treten in der Eichgruppe SU(3) an die Stelle des Eichfeldes $A(x)$ der Eichgruppe U(1). Die Dimension der Gluon-Felder ist

$$[G_j] = \frac{\text{Impuls}}{\text{Farbladung}} \quad . \tag{28.12c}$$

D_ρ, $\tilde{G}_\rho$, und λ^j sind Matrizen mit 3×3 Farbkomponenten. Eine einzelne

Komponente des kovarianten Differentialoperators ist

$$\mathrm{D}_{\rho,\alpha\beta}(x) = \mathbb{1}_{\alpha\beta}\mathrm{d}_\rho + \frac{i}{\hbar}g\tilde{G}_{\rho,\alpha\beta}(x) = \mathbb{1}_{\alpha\beta}\mathrm{d}_\rho + \frac{i}{\hbar}gG_{j\rho}(x)\,\frac{\lambda^j_{\alpha\beta}}{2}\ . \tag{28.12d}$$

Wir definieren folgendes Verhalten von $\tilde{G}(x)$ bei einer Eichtransformation:

$$\tilde{G}'_\rho \overset{(27.22)}{=} U\tilde{G}_\rho U^\dagger + \frac{i\hbar}{g}(\mathrm{d}_\rho U)U^\dagger = G_{j\rho}U\frac{\lambda^j}{2}U^\dagger + \frac{i\hbar}{g}(\mathrm{d}_\rho U)U^\dagger \tag{28.13}$$

Damit transformieren sich der kovariante Differentialoperator bzw. seine einzelnen Farbkomponenten unter einer Eichtransformation folgendermaßen:

$$\mathrm{D}'_\rho \overset{(27.23)}{=} U\,\mathrm{D}_\rho\,U^\dagger \tag{28.14a}$$

$$\mathrm{D}'_{\rho,\alpha\delta} = U_{\alpha\beta}\,\mathrm{D}_{\rho,\beta\gamma}\,U^\dagger_{\gamma\delta} \tag{28.14b}$$

Dies Transformationsverhalten bewirkt, dass die Lagrangedichte invariant unter der Eichtransformation ist, wenn der normale Differentialoperator d_ρ durch den kovarianten Differentialoperator D_ρ ersetzt wird:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'_A &= \overline{\psi}_{A,\alpha}U^\dagger_{\alpha\beta}(i\hbar c\gamma^\rho\,\mathrm{D}'_{\rho,\beta\gamma} - \mathbb{1}_{\beta\gamma}m_Ac^2)U_{\gamma\delta}\psi_{A,\delta} = \\ &= \overline{\psi}_{A,\alpha}(i\hbar c\gamma^\rho\,\mathrm{D}_{\rho,\alpha\delta} - \mathbb{1}_{\alpha\delta}m_Ac^2)\psi_{A,\delta} = \mathcal{L}_A\end{aligned} \tag{28.15}$$

Für die infinitesimale lokale Phasentransformation (28.3b) kann man die Transformation des Eichfeldes explizit angeben:

$$\boxed{G'_{j\rho} \overset{(27.29a)}{=} G_{j\rho} - \mathrm{d}_\rho k_j - \frac{g}{\hbar}\,f^{klj}k_kG_{l\rho}} \tag{28.16a}$$

Die Kombination dieser infinitesimalen Transformation bzw. der endlichen Transformation in der Matrix-Form

$$\boxed{\tilde{G}'_\rho \overset{(28.13)}{=} U\tilde{G}_\rho U^\dagger + \frac{i\hbar}{g}(\mathrm{d}_\rho U)U^\dagger} \tag{28.16b}$$

mit der lokalen Phasentransformation

$$\boxed{\psi'_A(x) = U(x)\,\psi_A(x) \overset{(28.10)}{=} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\,gK_j(x)\frac{\lambda^j}{2}\right\}\psi_A(x)} \tag{28.16c}$$

ist die SU(3)-Eichtransformation. Die Invarianz der Lagrangedichte unter dieser Eichtransformation bildet das Fundament der Quantenchromodynamik.

Die kombinierte Lagrangedichte des Quarkfeldes und der Eichfelder kann unmittelbar aus (27.31b) abgelesen werden:

$$\boxed{\mathcal{L}_A \equiv \overline{\psi}_A(i\hbar c\gamma^\rho \mathrm{D}_\rho - m_A c^2)\psi_A - \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\{\tilde{F}_{\sigma\tau}\tilde{F}^{\sigma\tau}\}} \tag{28.17a}$$

$$\tilde{F}_{\sigma\tau} \equiv \mathrm{D}_\sigma \tilde{G}_\tau - \mathrm{D}_\tau \tilde{G}_\sigma \equiv F_{j\sigma\tau}\frac{\lambda^j}{2} \equiv (\mathrm{D}_\sigma G_{j\tau} - \mathrm{D}_\tau G_{j\sigma})\frac{\lambda^j}{2} \tag{28.17b}$$

Indem man den kovarianten Differentialoperator (28.12) einsetzt, kann man den Feldstärketensor folgendermaßen schreiben:

$$F_{j\sigma\tau}\frac{\lambda^j}{2} = \mathrm{d}_\sigma G_{j\tau}\frac{\lambda^j}{2} - \mathrm{d}_\tau G_{j\sigma}\frac{\lambda^j}{2} + \frac{i}{\hbar}g\Big(G_{k\sigma}G_{j\tau}\frac{\lambda^k}{2}\frac{\lambda^j}{2} - G_{k\tau}G_{j\sigma}\frac{\lambda^k}{2}\frac{\lambda^j}{2}\Big)$$

Im ersten Term der zweiten Zeile werden die kontrahierten Indizes j umbenannt in l, und im zweiten Term der zweiten Zeile werden die kontrahierten Indizes k in l und j in k umbenannt:

$$\begin{aligned} F_{j\sigma\tau}\frac{\lambda^j}{2} &= \mathrm{d}_\sigma G_{j\tau}\frac{\lambda^j}{2} - \mathrm{d}_\tau G_{j\sigma}\frac{\lambda^j}{2} + \frac{i}{\hbar}\,gG_{k\sigma}G_{l\tau}\Big(\frac{\lambda^k}{2}\frac{\lambda^l}{2} - \frac{\lambda^l}{2}\frac{\lambda^k}{2}\Big) \\ F_{j\sigma\tau} &\overset{(28.5)}{=} \mathrm{d}_\sigma G_{j\tau} - \mathrm{d}_\tau G_{j\sigma} - \frac{1}{\hbar}\,gf^{jkl}G_{k\sigma}G_{l\tau} \end{aligned} \tag{28.18}$$

Die in Anhang A.25 bewiesene Relation

$$\tilde{F}'_{\sigma\tau} \overset{(A.183)}{=} U\tilde{F}_{\sigma\tau}U^\dagger \tag{28.19}$$

gilt auch im Fall der SU(3), so dass wegen der zyklischen Vertauschbarkeit der Faktoren unter der Spur

$$\begin{aligned}\mathrm{Sp}\{\tilde{F}'_{\sigma\tau}\tilde{F}'^{\sigma\tau}\} &= \mathrm{Sp}\{U\tilde{F}_{\sigma\tau}U^\dagger U\tilde{F}^{\sigma\tau}U^\dagger\} = \\ &= \mathrm{Sp}\{U^\dagger U\tilde{F}_{\sigma\tau}U^\dagger U\tilde{F}^{\sigma\tau}\} = \mathrm{Sp}\{\tilde{F}_{\sigma\tau}\tilde{F}^{\sigma\tau}\}\end{aligned}$$

zusammen mit (28.15) die Eichinvarianz von $\mathcal{L}_A =$ (28.17) sichergestellt ist.

Die Spur kann auch in der Form

$$\mathrm{Sp}\{\tilde{F}_{\sigma\tau}\tilde{F}^{\sigma\tau}\} = F_{j\sigma\tau}F_k^{\sigma\tau}\mathrm{Sp}\Big\{\frac{\lambda^j}{2}\frac{\lambda^k}{2}\Big\} \overset{(28.6)}{=} \frac{1}{4}F_{j\sigma\tau}F_j^{\sigma\tau}\cdot 2 \tag{28.20}$$

geschrieben werden. Damit erhält die Lagrangedichte (28.17) die Form

$$\mathcal{L}_A = \overline{\psi}_A(i\hbar c\gamma^\rho \mathrm{D}_\rho - m_A c^2)\psi_A - \frac{1}{4}F_{j\sigma\tau}F_j^{\sigma\tau}\ , \tag{28.21}$$

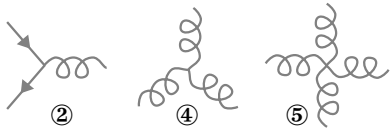
in der die Ähnlichkeit mit der U(1)-Lagrangedichte (27.30) noch deutlicher zutage tritt. In beiden Fällen wird das Produkt der Feldstärketensoren mit $-1/4$ multipliziert. Nur der Faktor μ_0 ist jetzt entfallen, und es wird über die Generator-Indizes $j = 1 \ldots 8$ summiert.

28.2 Confinement und asymptotische Freiheit

Die QCD ist also formal ganz ähnlich gebaut wie die QED. Insbesondere sind Gluonen genau wie Photonen masselos, so dass man eine unendliche Reichweite der Wechselwirkung zwischen den Quarks erwarten würde. Das ist aber bekanntlich nicht der Fall. Die starke Wechselwirkung hat eine Reichweite von etwa 10^{-15}m. Ursache dieses fundamentalen Unterschieds zwischen elektromagnetischer und starker Wechselwirkung ist die Tatsache, dass die U(1) eine abelsche Gruppe ist, die SU(3) aber eine nicht-abelsche Gruppe. Man erkennt die Folgen dieses Unterschieds, sobald man die kovariante Ableitung (28.12) und die Feldstärketensoren (28.18) explizit in die Lagrangedichte der QCD einsetzt:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_A = \overline{\psi}_A\Big(i\hbar c\gamma^\rho(\mathrm{d}_\rho + \frac{i}{\hbar}\, gG_{j\rho}\,\frac{\lambda^j}{2}\,) - m_A c^2\Big)\psi_A - \\
- \frac{1}{4}\Big(\mathrm{d}_\sigma G_{j\tau} - \mathrm{d}_\tau G_{j\sigma} - \frac{1}{\hbar}\, g f^{jkl} G_{k\sigma} G_{l\tau}\Big)\cdot \\
\cdot \Big(\mathrm{d}^\sigma G_j^\tau - \mathrm{d}^\tau G_j^\sigma - \frac{1}{\hbar}\, g f^{jkl} G_k^\sigma G_l^\tau\Big) = \\
= \underbrace{\overline{\psi}_A(i\hbar c\gamma^\rho \mathrm{d}_\rho - m_A c^2)\psi_A}_{①} - \underbrace{\overline{\psi}_A c\gamma^\rho g G_{j\rho}\,\frac{\lambda^j}{2}\,\psi_A}_{②} - \\
- \underbrace{\frac{1}{4}(\mathrm{d}_\sigma G_{j\tau} - \mathrm{d}_\tau G_{j\sigma})(\mathrm{d}^\sigma G_j^\tau - \mathrm{d}^\tau G_j^\sigma)}_{③} + \\
+ \underbrace{\frac{1}{2\hbar}\, g f^{jkl} G_{k\sigma} G_{l\tau}(\mathrm{d}^\sigma G_j^\tau - \mathrm{d}^\tau G_j^\sigma)}_{④} - \underbrace{\frac{1}{4\hbar^2}\, g^2 f^{jkl} f^{jmn} G_{k\sigma} G_{l\tau} G_m^\sigma G_n^\tau}_{⑤}
\end{aligned}
\tag{28.22}
$$

Anders als in der QED gibt es in der QCD nicht nur eine Kopplung zwischen dem Diracfeld und seinem Eichfeld, sondern auch Selbstwechselwirkungen der Eichfelder:



Der Term ① beschreibt die freien (nicht wechselwirkenden) Quarkfelder, und der Term ③ beschreibt die acht freien, nicht wechselwirkenden Gluon-Felder. Der Term ②, der proportional zur Kopplungskonstante g ist, beschreibt die Kopplung zwischen den Quarkfeldern und den Gluonfeldern. Weil die Strukturkonstanten f^{jkl} der SU(3) – anders als die Strukturkonstanten der U(1) – von Null verschieden sind, kommen in der QCD gegenüber der QED die Terme ④ und ⑤ neu hinzu. Sie beschreiben Selbstwechselwirkungen der Gluon-Felder. ④ wird als $3G$-Kopplung bezeichnet, weil jeder Summand das Produkt von 3 Feldamplituden enthält. Dementsprechend bezeichnet man ⑤ als $4G$-Kopplung. Die $3G$-Kopplung ist wie die Kopplung zwischen den Quarkfeldern und den Gluonfeldern proportional zu g, während die $4G$-

Kopplung proportional zu g^2 ist.

Die Selbstwechselwirkung der Gluonen verändert den Charakter der starken Wechselwirkung völlig. Wenn man in der QED beispielsweise den Wirkungsquerschnitt für die Streuung eines Elektrons an einem Myon berechnet, dann tritt in Störungsrechnung $\sim e^4$ unter anderem der Graph

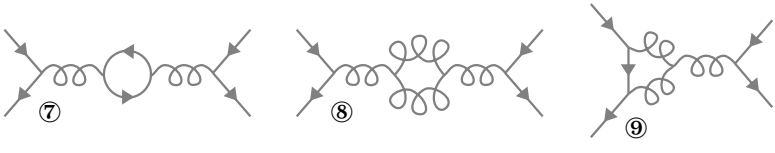
⑥

auf. Die als Vakuum-Polarisation bezeichnete virtuelle Fermionenschleife haben wir in Abschnitt 26.1 untersucht. Sie bewirkt eine Abschirmung, und damit eine laufende Kopplungskonstante, die wir als

$$\alpha(k_\gamma^2) \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \overset{(26.22b)}{\approx} \frac{\alpha(0)}{1 - \dfrac{\alpha(0)}{3\pi}\,\ln\left\{\dfrac{-k_\gamma^2\hbar^2}{m^2c^2}\right\}} \tag{28.23}$$

abgeschätzt haben. k_γ^2 ist das Wellenzahlquadrat des virtuellen Photons. Aus der Untersuchung in Abschnitt 24.3.7 wissen wir, dass bei t-Kanal-Streuung $k_\gamma^2 < 0$ ist. $\alpha(0) \approx 1/137$ ist die Kopplungskonstante bei sehr schwacher Streuung. Die Näherung (28.23) gilt nur, wenn der Betrag des zweiten Terms im Nenner klein gegen 1 ist.

In der QCD findet man bei der Berechnung der Streuung eines Quarks an einem anderen Quark in Störungsrechnung $\sim g^4$ unter anderem diese Graphen:



⑦ ⑧ ⑨

Der Graph ⑦ der QCD entspricht offenbar dem Graphen ⑥ der QED. Allerdings muss die virtuelle Fermionenschleife in ⑦ von Quarks gebildet werden, weil Leptonen nicht an Gluonen koppeln. Das (28.23) entsprechende Ergebnis für die Graphen ⑦, ⑧, und ⑨ entnehmen wir der Literatur [29, Abschnitt 2.5.2]:

$$\alpha_s(k^2) \equiv \frac{g^2}{4\pi\hbar c} \approx \frac{\alpha_s(\Lambda^2)}{1 - \dfrac{\alpha_s(\Lambda^2)}{12\pi}\,(2n_A - 33)\,\ln\left\{\dfrac{-k^2}{\Lambda^2}\right\}} \tag{28.24}$$

Diese Näherung gilt nur, wenn der Betrag des zweiten Terms im Nenner klein gegen 1 ist. α_s ist die Kopplungskonstante der starken Wechselwirkung. $-k^2 > 0$ ist das bei der Streuung übertragene Wellenzahlquadrat. Λ^2 ist ein Referenzwert, der experimentell ermittelt werden muss. Er beträgt $\Lambda \approx 0.2\,\mathrm{GeV}/(\hbar c)$. Und n_A ist die Anzahl der Quark-Flavors, aus denen die virtuelle Quarkschleife in ⑦ gebildet werden kann. Der im Nenner neu auftretende Faktor -33 ergibt sich aus den Graphen ⑧ und ⑨. Er hat das umgekehrte Vorzeichen wie n_A, und er überwiegt, denn es gibt nur sechs Quark-Flavors. Deshalb nimmt $\alpha_s(k^2)$ mit steigendem $|k^2|$ ab, während $\alpha(k_\gamma^2)$ mit steigendem $|k_\gamma^2|$ zunimmt. Experimentell ermittelte Zahlenwerte der elektromagnetischen und der starken laufenden Kopplungskonstanten wurden in (21.20) angegeben.

Der Abstand r zwischen den streuenden Quarks ist größenordnungsmäßig $\approx 1/\sqrt{-k^2}$. Bei kleinem Abstand r sind auch α_s bzw. g klein. Dann führt eine Störungsrechnung, in der nur eine oder wenige Ordnungen von g berücksichtigt werden, zu brauchbaren Ergebnissen. In diesem Bereich sind die aus der QED bekannten störungstheoretischen Methoden anwendbar. Das Verhalten $g(|k^2|) \to 0$ bei $|k^2| \to \infty$ wird als asymptotische Freiheit bezeichnet.

Das umgekehrte gilt bei $|k^2| \to 0$. Wenn der Abstand r zwischen den Quarks, die in einem Hadron gebunden sind, größer wird als

$$r \gtrsim 10^{-15}\mathrm{m} \,\widehat{\approx}\, 0.2\,\mathrm{GeV}/(\hbar c) \approx \Lambda \gtrsim \sqrt{|k^2|}\,, \tag{28.25}$$

dann wird die Anziehung zwischen den Quarks so groß dass der Energieinhalt der Gluonfelder zur Paarbildung weiterer Quarks ausreicht. Deshalb erhält man bei hochenergetischen Stößen zweier Protonen nicht einzelne Quarks, sondern mehrere Farb-Singulets der Art (28.2). Der unüberwindbare Einschluss der Quarks in Farb-Singulets wird als Confinement bezeichnet. Da α_s im Bereich (28.25) nicht mehr klein gegen 1 ist, sind die gewohnten Methoden der Störungsrechnung nicht mehr anwendbar. Das macht alle Berechnungen überaus schwierig.

29 Elektroschwache Wechselwirkung

Die Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung ist neben der QCD das zweite Standbein des „Standardmodells der Elementarteilchen“. Die elektroschwache Theorie ist vor allem aus zwei Gründen weitaus komplizierter als die QCD: Erstens liegt ihr die zusammengesetzte Symmetriegruppe $\mathrm{SU}(2) \otimes \mathrm{U}(1)$ zugrunde, während die QCD auf der einfachen Symmetriegruppe $\mathrm{SU}(3)$ beruht. Und zweitens sind die Eichbosonen der $\mathrm{SU}(2) \otimes \mathrm{U}(1)$ auch noch an ein Higgsfeld mit spontan gebrochener Symmetrie gekoppelt. Was das bedeutet, werden wir in Abschnitt 29.3 klären.

Die elektroschwache Theorie musste so kompliziert konstruiert werden, weil sie mehreren scheinbar unvereinbaren Randbedingungen gerecht werden soll:

(1) Sie soll eine Eichtheorie sein, d. h. ihre Lagrangedichte soll invariant unter lokalen Phasentransformationen sein, und die zwischen den fermionischen Feldern wirkenden Kräfte sollen als Eichfelder beschrieben werden.

(2) Die relative Stärke S der Wechselwirkungen muss korrekt wiedergegeben werden:
$S_{\text{schwach}} \ : \ S_{\text{em}} \ : \ S_{\text{stark}} \approx 10^{-5} \ : \ 10^{-2} \ : \ 1$

(3) Die Reichweite R der Wechselwirkungen muss korrekt wiedergegeben werden:
$R_{\text{schwach}} \approx 10^{-18}\text{m} \ ; \ R_{\text{em}} = \infty \ ; \ R_{\text{stark}} \approx 10^{-15}\text{m}$

Es versteht sich von selbst, dass eine Theorie mit den in (2) und (3) genannten experimentellen Beobachtungen übereinstimmen muss. Dagegen ist (1) eher als eine erratene Leitlinie zu betrachten, welche die Forscher schließlich zum Ziel führte. Das war eine Überraschung, denn zunächst musste (1) als ein zusätzliches, fast unüberwindliches Problem erscheinen, und zwar aus folgendem Grund:

QED und QCD sind Eichtheorien mit masselosen Eichfeldern (den Photonen und den Gluonen). Weil Photonen masselos sind, ist die Reichweite

$R_{\text{em}} = \infty$ der elektromagnetischen Wechselwirkung unendlich. Obwohl die Gluonen ebenfalls masselos sind, ist die Reichweite $R_{\text{stark}} \approx 10^{-15}\text{m}$ der starken Wechselwirkung endlich. Das liegt an der Selbstwechselwirkung der Gluonfelder, deren Stärke im 3-Gluon-Vertex proportional zur starken Kopplungskonstante g und im 4-Gluon-Vertex proportional zum Quadrat g^2 der starken Kopplungskonstante ist, siehe die starke Lagrangedichte $\mathcal{L} =$ (28.22) auf Seite 663.

Wenn man die schwache Wechselwirkung ebenfalls durch eine Eichtheorie beschreiben möchte, dann sollte es sich also um eine nicht-abelsche Eichtheorie handeln, damit ihre Reichweite endlich ist. Und ihre Kopplungskonstante sollte etwa tausend mal größer als die starke Kopplungskonstante sein, damit die Reichweite entsprechend (3) einjustiert wird. Das widerspricht aber (2): Die schwache Wechselwirkung soll nicht 10^{+3} mal stärker sondern um den Faktor 10^{-5} schwächer als die starke Wechselwirkung sein.

Offenbar müssen Reichweite und Stärke der schwachen Wechselwirkung in der Theorie voneinander entkoppelt werden. Wie das möglich ist, haben wir bereits anhand der Yukawa-Theorie in Kapitel 23 geklärt: Eine Wechselwirkung hat dann die Reichweite R, wenn sie durch massive Bosonen mit der Ruhenergie

$$Mc^2 \overset{(23.7)}{\approx} \frac{\hbar c}{R} \approx \frac{\hbar c}{10^{-18}\text{m}} \approx 200\,\text{GeV} \tag{29.1}$$

übertragen wird. Tatsächlich haben die Bosonen, die schließlich als Träger der schwachen Wechselwirkung gefunden wurden, Ruhemassen von etwa $80\,\text{GeV}/c^2$ und $91\,\text{GeV}/c^2$. Das Problem bei dieser Lösung: Die Yukawa-Theorie ist keine Eichtheorie. Man überzeugt sich nämlich leicht, dass die Eichfelder einer Eichtheorie masselos sein müssen.

Die Masse eines Feldes erscheint in der Lagrangedichte dieses Feldes stets als Multiplikator des Produkts der Feldamplitude und der adjungierten Feldamplitude. Siehe zum Beispiel die Lagrangedichte $\mathcal{L} =$ (28.22) der QCD, die im Term $m_A c^2 \overline{\psi}_A \psi_A$ die Massen der verschiedenen Quarkflavors A enthält, oder die Lagrangedichte $\mathcal{L} =$ (10.10) des Klein-Gordon-Feldes mit dem Masse-Term $m^2c^4\psi^+\psi$.

Für massive Eichfelder wären dementsprechend z. B. in die Lagrangedich-

te $\mathcal{L} =$ (28.22) der QCD Terme der Art $m_{W_j} c^2 W_{j\mu} W_j^\mu$ einzusetzen. Bei einer Eichtransformation müssten diese Terme gemäß (28.13) transformiert werden. Die dabei auftauchenden Summanden $ig(\mathrm{d}_\rho U)U^\dagger/\hbar$ könnten aber nicht mehr durch entsprechende Transformationsprodukte der Quarkfelder kompensiert werden, denn die wurden ja bereits durch die zuvor vorhandenen Eichfeld-Terme komplett kompensiert. Eine von Null verschiedene Ruhemasse der Eichfelder würde also die Eichinvarianz der Theorie zerstören.

Schließlich wurde eine (oft nach ihren Entdeckern Glashow[1], Salam[2], und Weinberg[3] GSW-Modell genannte) Konstruktion gefunden, in der sich die genannten Forderungen (1),(2),(3) miteinander vereinbaren lassen: Das Modell geht aus von einer nicht-abelschen Eichtheorie mit masselosen Eichbosonen. Dann postuliert es die Existenz eines zusätzlichen skalaren Feldes, dessen Symmetrie spontan gebrochen ist. Die Eichbosonen koppeln an das zusätzliche skalare Feld, und erhalten dadurch eine effektive Masse. Im Folgenden werden wir diese Konstruktion Schritt für Schritt erläutern.

29.1 Die Basis der Darstellung

Es sind 12 Fermionen (plus deren 12 Antiteilchen) bekannt, die schwach wechselwirken können, nämlich die 6 Leptonen und die 6 Quarks

$$\nu_e, e^-, \nu_\mu, \mu^-, \nu_\tau, \tau^- \;;\; d', u, s', c, b', t \;. \tag{29.2}$$

Die Striche$'$ an drei der Quarks deuten an, dass sie nicht identisch sind mit den drei Quarks d, s, b, die in der QCD auftreten. Vielmehr besteht das Quark d' hauptsächlich aus d, enthält aber auch kleine Zumischungen von s und b. Für s' und b' gilt entsprechendes. Die Mischungswinkel werden in der Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-Matrix zusammengefasst, die experimentell bestimmt werden muss.

Im GSW-Modell wird sorgfältig zwischen links- und rechtshändigen Feldern unterschieden. In den frühen Jahren des GSW-Modells nahm man an,

[1] Sheldon Lee Glashow, ∗1932
[2] Abdus Salam, 1926 - 1996
[3] Steven Weinberg, ∗1933

dass ausschließlich linkshändige Neutrinos (Spin und Bewegungsrichtung sind antiparallel) und rechtshändige Antineutrinos (Spin and Bewegungsrichtung sind parallel) existieren. Folglich nahm man an dass Neutrinos masselos sind. Denn wenn sie eine endliche Masse hätten, dann könnten wir uns selbst in ein Bezugssystem transformieren, das das Neutrino überholt, und dadurch aus einem linkshändigen Neutrino ein rechtshändiges macht, und umgekehrt. Heute ist experimentell sichergestellt (durch die Beobachtung von „Neutrinooszillationen“), dass Neutrinos eine endlich Masse haben müssen. Die Masse ist allerdings so klein, dass sie bisher nicht direkt gemessen werden konnte. Dennoch werden wir das GSW-Modell mit der zusätzlichen Annahme präsentieren, dass Neutrinos eine endliche Masse haben, und dass deshalb auch rechtshändige Neutrinos und linkshändige Antineutrinos existieren.

Genau so wie in (27.1) die Zustandsfunktionen von Protonen und Neutronen zu Isospin-Dublets zusammengefasst wurden, werden die linkshändigen Komponenten der 12 Fermionen zu sechs linkshändigen „schwachen Isospin-Dublets“ kombiniert. Beispielsweise bildet man die linkshändigen Zustandsfunktionen des Elektron-Neutrinos und des Elektrons in der Form

$$\psi_{\nu_e,L} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{Rest}_{\nu_e e^-,L} \tag{29.3a}$$

$$\psi_{e^-,L} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{Rest}_{\nu_e e^-,L} \tag{29.3b}$$

$$\text{Kurzschreibweise:} \quad \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L \equiv \psi_{\nu_e e^-,L} \ . \tag{29.3c}$$

Auf diese Weise bildet man die sechs linkshändigen schwachen Isospin-Dublets

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix}_L \ ; \ \begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} t \\ b' \end{pmatrix}_L \ , \tag{29.4}$$

und die entsprechenden sechs rechtshändigen schwachen Isospin-Dublets ihrer Antiteilchen. Es ist klar, dass der schwache Isospin etwas anderes ist als der Flavor-Isospin, mit dem wir uns in Kapitel 27 befasst haben.

Formal ist die Konstruktion aber in beiden Fällen identisch. Jedes der Doublets (29.4) ist die Basis einer Fundamentaldarstellung der Gruppe SU(2), genauso wie das Proton-Neutron-Doublet (27.1). Wir nennen den Operator des schwachen Isospins $\boldsymbol{T}$. Seine drei Komponenten werden wie gewohnt mithilfe der Pauli-Matrizen gebildet:

$$T^j \equiv \frac{\tau^j}{2} \ , \ j = 1,2,3 \ , \ \tau^j \equiv \sigma^j = (27.2) \tag{29.5}$$

Alle sechs Doublets haben den schwachen Isospin $T = 1/2$. Sie tragen die drei schwachen Isospin-Ladungen

$$g_2 \frac{\tau^j}{2} \ , \ j = 1,2,3 \ . \tag{29.6}$$

Genau wie beim Flavor-Isospin sind die sechs Funktionen

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ 0 \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ 0 \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ 0 \end{pmatrix}_L \ ; \ \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}_L$$

Eigenfunktionen des T^3-Operators mit Eigenwert $+1/2$, während die sechs Funktionen

$$\begin{pmatrix} 0 \\ e^- \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} 0 \\ \mu^- \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} 0 \\ \tau^- \end{pmatrix}_L \ ; \ \begin{pmatrix} 0 \\ d' \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} 0 \\ s' \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} 0 \\ b' \end{pmatrix}_L$$

Eigenfunktionen des T^3-Operators mit Eigenwert $-1/2$ sind. Wie üblich benutzen wir identische Bezeichnungen für Operatoren und ihre Eigenwerte. Z. B. ist $T^3 = \tau^3/2$ ein Operator, und $T^3 = \pm 1/2$ sind seine Eigenwerte.

Die rechtshändigen Zustandsfunktionen der Fermionen (29.2) bilden 12 Singlets:

$$e^-_R, \nu_{eR}, \mu^-_R, \nu_{\mu R}, \tau^-_R, \nu_{\tau R} \ ; \ d'_R, u_R, s'_R, c_R, b'_R, t_R \tag{29.7}$$

Jedes dieser Singlets und jedes ihrer Antifelder wird im GSW-Modell als Basis einer Fundamentaldarstellung der Gruppe U(1) betrachtet, deren Generator die schwache Hyperladung $g_1 Y/2$ ist. Per Definition haben alle diese Singlets den schwachen Isospin $T = 0$, und demzufolge auch $T_3 = 0$.

Die schwache Hyperladung $g_1 Y/2$ ist definiert durch die Relation

$$Y \equiv \frac{2q}{e} - \tau^3 \quad \text{bzw.} \quad Y \equiv \frac{2q}{e} - 2T^3 \ . \tag{29.8}$$

Links steht die Operator-Form der Relation, rechts ihre Eigenwert-Form. q ist die elektrische Ladung, e ist die elektrische Ladung des Positrons. Demnach haben die drei rechtshändigen Neutrinos die schwache Hyperladung $Y = 0$, und die drei rechtshändigen elektrisch geladenen Leptonen haben die schwache Hyperladung $Y = -2$. u_R, c_R, und t_R haben die schwache Hyperladung $Y = +4/3$, und d'_R, s'_R, und b'_R haben die schwache Hyperladung $Y = -2/3$.

Auch die schwachen Doublets tragen schwache Hyperladung. Die beiden Gleichungen (29.8) sind bei Bedarf als Matrixgleichungen zu lesen. Beispielsweise ergibt die Anwendung der Operatoren auf das Elektron-Doublet

$$Y \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L \equiv \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L \equiv \begin{pmatrix} \frac{2q}{e} - 1 & 0 \\ 0 & \frac{2q}{e} + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L = \\ = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L = -1 \cdot \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L \ .$$

Die drei Leptonen-Doublets in (29.4) haben die schwache Hyperladung $Y = -1$, und die drei Quark-Doublets haben die schwache Hyperladung $Y = +1/3$. Wir werden für Matrixgleichungen weiterhin meistens eine abkürzende Schreibweise wie in (29.8) verwenden. Die korrekte Interpretation derartiger Gleichungen ist der Aufmerksamkeit des Lesers anvertraut.

29.2 Elektroschwache Eichfelder

Es ist eine grundlegende Annahme des GSW-Modells, dass die Lagrangedichte der 6 schwach wechselwirkenden Doublets (29.4) und der 12 schwach wechselwirkenden Singulets (29.7) invariant unter lokalen Phasentransformationen sein muss. Das ist nur möglich, wenn der normale Differentialoperator d_μ ersetzt wird durch den kovarianten Differentialoperator

$$\mathrm{D}_\mu(x) \equiv \mathrm{d}_\mu + \frac{i}{\hbar}\,\frac{g_1}{2}\,Y B^0_\mu(x) + \frac{i}{\hbar}\,g_2 W^j_\mu(x)\,\frac{\tau^j}{2}\ . \tag{29.9}$$

Es sind die jeweiligen Ladungen $g_1 Y/2$ und $g_2\tau^j/2$ des Objekts einzusetzen, auf das dieser Operator wirkt. Beispielsweise ist

$$\mathrm{D}_\mu\, e^-_R = \mathrm{d}_\mu e^-_R + \frac{i}{\hbar}\,\frac{g_1}{2}\,(-2)\,B^0_\mu(x)\,e^-_R \tag{29.10a}$$

$$\mathrm{D}_\mu \begin{pmatrix}\nu_e\\ e^-\end{pmatrix}_L = \mathrm{d}_\mu \begin{pmatrix}\nu_e\\ e^-\end{pmatrix}_L + \frac{i}{\hbar}\,\frac{g_1}{2}\,(-1)\,B^0_\mu(x) \begin{pmatrix}\nu_e\\ e^-\end{pmatrix}_L + \frac{i}{\hbar}\,g_2 W^j_\mu(x)\,\frac{\tau^j}{2} \begin{pmatrix}\nu_e\\ e^-\end{pmatrix}_L . \tag{29.10b}$$

Die schwache Hyperladung $g_1 Y/2$ tritt an die Stelle der elektrischen Ladung q, und ihr Eichfeld $B^0(x)$ tritt an die Stelle des Eichfelds $A(x)$ in der entsprechenden Definition (27.19) der QED. Und die schwachen Isospin-Ladungen $g_2\tau^j/2$ und ihre Eichfelder $W^j(x)$ treten an die Stelle der Ladungen $g\tau^j/2$ und Eichfelder $W^j(x)$ in der entsprechenden Definition (27.21) der Flavor-Isospin-Eichtheorie. Die Flavor-Isospin-Eichtheorie ist niemals „in Kraft getreten“, weil ihre Eichbosonen nicht beobachtet werden. Deshalb sollte es nicht zu Verwirrung führen, wenn wir – in Übereinstimmung mit weiten Teilen der Literatur – in der GSW-Theorie teilweise die gleichen Bezeichnungen verwenden wie in der Flavor-Isospin-Eichtheorie von Yang und Mills.

So wie das GSW-Modell postuliert, dass die Basen der elektroschwachen Theorie nicht mit den drei Quarks d, s, b (die bei der starken Wechselwirkung auftreten) sondern mit ihre Mischungen d', s', b' gebildet werden, so postuliert es, dass die in elektroschwachen Reaktionen wirksamen Eichfelder durch Mischungen der Felder B^0 und W^j gebildet werden müssen. Zunächst mischen wir die Felder W^j untereinander (beim Feld W^3 handelt es sich lediglich um eine Umbenennung):

$$\begin{pmatrix}W^+_\mu\\ W^0_\mu\\ W^-_\mu\end{pmatrix} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix}1 & +i & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{2}\\ 1 & -i & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}W^1_\mu\\ W^2_\mu\\ W^3_\mu\end{pmatrix} \tag{29.11}$$

Das Triplet der Eichfelder (W^+, W^0, W^-) wird als Basis einer dreidimensio-

nalen Darstellung der Gruppe SU(2) mit schwachem Isospin $T = 1$ betrachtet, und das Eichfeld B^0 wird als Basis einer eindimensionalen Darstellung der Gruppe U(1) betrachtet, deren Generator die schwache Hyperladung $g_1 Y/2$ ist. Anders als die Eichfelder W, die schwachen Isospin haben und deshalb untereinander schwach wechselwirken können, trägt das Eichfeld B^0 keine schwache Hyperladung und auch keinen schwachen Isospin. Um die Eichinvarianz nicht zu stören, sind alle vier Eichfelder masselos.

Feld	T	T^3	Y	$q/e = Y/2 + T^3$	Ruhemasse
W^+	1	+1	0	+1	0
W^0	1	0	0	0	0
W^-	1	−1	0	−1	0
B^0	0	0	0	0	0

(29.12)

Um die QED in das GSW-Modell einzubauen, werden die beiden nicht elektrisch geladenen Eichfelder miteinander gemischt:

$$\begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu^0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \cos\theta_W & \sin\theta_W \\ -\sin\theta_W & \cos\theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_\mu^0 \\ W_\mu^0 \end{pmatrix} \tag{29.13}$$

$A(x)$ ist das elektromagnetische Eichfeld der QED. Der Winkel θ_W der orthogonalen Drehung (29.13) wird als Weinberg-Winkel bezeichnet. Nach dem GSW-Modell sind nicht die Felder W^1, W^2, W^3, B^0, sondern die Felder W^+, W^-, Z^0, A die physikalisch beobachtbaren Eichfelder der elektroschwachen Wechselwirkung.

Mit der Definition der Leiteroperatoren

$$\tau^+ \equiv \frac{1}{2}\left(\tau^1 + i\tau^2\right) \qquad \tau^- \equiv \frac{1}{2}\left(\tau^1 - i\tau^2\right) \tag{29.14}$$

ist

$$\begin{aligned} &\sqrt{2}(W_\mu^+ \tau^- + W_\mu^- \tau^+) = \\ &= \frac{1}{2}\Big(W_\mu^1 \tau^1 + i(-W_\mu^1 \tau^2 + W_\mu^2 \tau^1) + W_\mu^2 \tau^2 + \\ &\quad + W_\mu^1 \tau^1 + i(+W_\mu^1 \tau^2 - W_\mu^2 \tau^1) + W_\mu^2 \tau^2\Big) = \end{aligned}$$

$$= W_\mu^1 \tau^1 + W_\mu^2 \tau^2 \ . \tag{29.15}$$

Damit, und mit $Y \overset{(29.8)}{=} 2q/e - \tau^3$, wird der kovariante Differentialoperator des GSW-Modells

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_\mu &\overset{(29.9)}{=} \mathrm{d}_\mu + \frac{i}{\hbar}\frac{g_1}{2}(2q/e - \tau^3)(A_\mu \cos\theta_W - Z_\mu^0 \sin\theta_W) + \\
&+ \frac{i}{\hbar}\Big(\frac{g_2}{\sqrt{2}}(W_\mu^+ \tau^- + W_\mu^- \tau^+) + g_2(A_\mu \sin\theta_W + Z_\mu^0 \cos\theta_W)\,\frac{\tau^3}{2}\Big) \\
&= \mathrm{d}_\mu + \frac{i}{\hbar\sqrt{g_1^2+g_2^2}}\Big(\frac{g_1 g_2}{2}\,\frac{2q}{e}\,\underbrace{-\frac{g_1 g_2}{2}\,\tau^3 + \frac{g_1 g_2}{2}\,\tau^3}_{0}\Big) A_\mu + \\
&+ \frac{i}{\hbar\sqrt{g_1^2+g_2^2}}\Big(-\frac{g_1^2}{2}\,\frac{2q}{e} + \frac{g_1^2}{2}\,\tau^3 + \frac{g_2^2}{2}\,\tau^3\Big) Z_\mu^0 - \\
&+ \frac{i}{\hbar}\,\frac{g_2}{\sqrt{2}}(W_\mu^+ \tau^- + W_\mu^- \tau^+) \ .
\end{aligned} \tag{29.16}$$

Damit das Modell kompatibel zur QED wird, darf das Eichfeld $A(x)$ nur als Summand $iqA/\hbar$ im kovarianten Differentialoperator vorkommen. Daraus ergibt sich für die elektrische Ladung e des Positrons und die schwachen Kopplungskonstanten g_1 und g_2 bzw. den Weinberg-Winkel θ_W folgende Bedingung:

$$\boxed{e = \frac{g_1 g_2}{\sqrt{g_1^2+g_2^2}} = g_1 \cos\theta_W = g_2 \sin\theta_W} \tag{29.17}$$

Weil der Wert der beiden Kopplungskonstanten nicht von vornherein bestimmt ist, kann auch der Wert des Weinbergwinkels nicht aus dieser Relation berechnet werden. Er ist vielmehr einer der experimentell zu bestimmenden Parameter des Modells. Man findet $\sin^2\theta_W \approx 0.22$.

Der kovariante Differentialoperator wird durch Einsetzen der Bedingung (29.17) zu

$$\mathrm{D}_\mu = \mathrm{d}_\mu + \frac{i}{\hbar}\, qA_\mu + \frac{i}{\hbar}\frac{g_2}{\sqrt{2}}(W_\mu^+\tau^- + W_\mu^-\tau^+) + \\ + \frac{i}{\hbar\sqrt{g_1^2+g_2^2}}\Big(-\frac{g_1^2 q}{e} + \frac{g_1^2+g_2^2}{2}\,\tau^3\Big)Z_\mu^0\,. \tag{29.18}$$

Der Term mit A_μ und die Feynman-Diagramme der QED, die sich aus ihm ergeben, sind uns aus den Kapiteln 24 und 26 wohlbekannt.

Aus (29.17) und (29.18) wird offensichtlich, dass elektrische und schwache Ladungen die gleiche Dimension haben, und dass die elektrischen und die schwachen Eichfelder die gleiche Dimension haben:

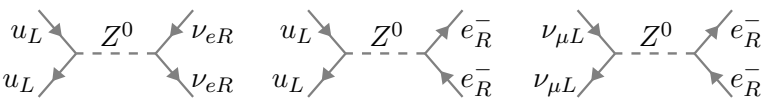
$$[q] = [e] = [g_1] = [g_2] = \text{elektroschwache Ladung} \tag{29.19a}$$

$$[A_\mu] = [W_\mu^+] = [W_\mu^-] = [Z_\mu^0] = \frac{\text{Impuls}}{\text{elektroschwache Ladung}} \tag{29.19b}$$

Die Summanden mit den Eichfeldern W^+ und W^- wirken ausschließlich auf diejenigen Fermionen, die in den schwachen linkshändigen Doublets (29.4) (bzw. in den rechtshändigen Doublets ihrer Antiteilchen) enthalten sind, weil nur diese eine schwache Isospin-Ladung tragen. Daraus ergeben sich beispielsweise Diagramme der Art

wie sie beim β^-- oder β^+-Zerfall von Atomkernen auftreten. Solche Diagramme werden als „geladene Ströme“ bezeichnet, weil die schwachen Eichfelder W^+ und W^- elektrisch geladen sind.

Aus dem letzten Summanden des kovarianten Differentialoperators ergeben sich ungeladene Ströme der Art



Weil die Eichbosonen W^+, W^-, Z^0 schwache Isospin-Ladung tragen, können sie auch untereinander wechselwirken.

Das Modell, soweit wir es bisher beschrieben haben, gibt alle Phänomene der elektromagnetischen und der schwachen Wechselwirkung qualitativ korrekt wieder. Quantitativ stellt es aber nur die elektromagnetische Wechselwirkung richtig dar. Um auch die schwache Wechselwirkung quantitativ korrekt beschreiben zu können, müssen die drei Eichfelder W^+, W^-, Z^0 Massen bekommen. Wie das ohne Beschädigung der Eichinvarianz möglich ist, werden wir im folgenden Abschnitt diskutieren.

29.3 Der Higgs-Mechanismus

Der Vakuum-Zustand $|0\rangle$ wird *definiert* durch die Bedingung

$$|0\rangle \quad \Longleftrightarrow \quad a_{\boldsymbol{k}}\,|0\rangle = \langle 0|\,b^\dagger_{\boldsymbol{k}} = 0 \quad \forall\,\boldsymbol{k}\ . \tag{29.20a}$$

Also ist der Vakuumzustand zugleich der Zustand, in dem die Energie des Feldes minimal ist. In der Regel ist der Erwartungswert eines Feldes im Vakuumzustand Null. Das gilt zum Beispiel für den Vakuum-Erwartungswert eines quantisierten freien Klein-Gordon-Feldes:

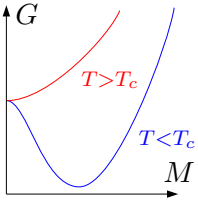
$$\begin{aligned}\langle 0|\,\phi(x)\,|0\rangle \overset{(15.15a)}{=} \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}\Omega}}\Big(&\langle 0|\,a_{\boldsymbol{k}}\,|0\rangle \exp\{-ikx\} + \\ &+ \langle 0|\,b^\dagger_{\boldsymbol{k}}\,|0\rangle \exp\{+ikx\}\Big) = 0\end{aligned} \tag{29.20b}$$

Das braucht aber nicht unbedingt so zu sein. In diesem Abschnitt werden wir ein Feld mit

$$|\langle 0|\,\phi(x)\,|0\rangle| = f \neq 0 \tag{29.20c}$$

kennenlernen. Dieser Fall kann auftreten, wenn der Zustand $|0\rangle$ niedrigster Energie nicht die vollständige Symmetrie der Lagrangedichte aufweist. Man spricht in diesem Fall von spontan gebrochener Symmetrie.

Das klassische Beispiel einer spontan gebrochenen Symmetrie ist ein Ferromagnet: Unterhalb der Curie-Temperatur T_c nimmt seine makroskopische Magnetisierung $\boldsymbol{M}$ spontan eine bestimmte Richtung an, obwohl seine Lagrangedichte isotrop ist. Die freie Energie G des Ferromagneten kann durch



$$G = \alpha M^2 + \beta M^4 \quad \begin{cases} \alpha > 0 \text{ für } T > T_c \\ \alpha < 0 \text{ für } T < T_c \\ \beta > 0 \text{ immer} \end{cases} \tag{29.21}$$

beschrieben werden.

Die Lagrangedichte des Klein-Gordon-Feldes ist

$$\mathcal{L} \overset{(10.10)}{=} \underbrace{c^2\hbar^2(\mathrm{d}_\mu\phi^\dagger)\mathrm{d}^\mu\phi}_{\mathcal{T}} - \underbrace{m^2c^4\phi^\dagger\phi}_{\mathcal{U}} \ . \tag{29.22}$$

In diesem Ausdruck ist $\mathcal{T}$ die Dichte der kinetischen Energie und $\mathcal{U}$ die Dichte der potentiellen Energie, vergleiche (3.24). Jetzt definieren wir die Lagrangedichte eines skalaren Feldes mit spontan gebrochener Symmetrie, indem wir (29.21) nachbilden:

$$\mathcal{L} \equiv c^2\hbar^2(\mathrm{D}_\mu\,\phi)^\dagger\,\mathrm{D}^\mu\,\phi - \Big(\alpha\phi^\dagger\phi + \beta(\phi^\dagger\phi)^2\Big) \tag{29.23}$$

$$\alpha \equiv -\frac{m^2c^4}{2} < 0 \qquad \beta \equiv +\frac{m^2c^4}{4f^2} > 0$$

$$[m] = \text{Masse} \qquad [f] = \sqrt{\frac{1}{\text{Energie}\cdot\text{Volumen}}}$$

Weil diese Lagrangedichte eichinvariant sein soll, wurde anstelle von d_μ der kovariante Differentialoperator D_μ = (29.18) eingesetzt. $\phi(x)$ soll ein komplexes skalares Feld sein:

$$\phi = \sqrt{\frac{1}{2}}\,(\phi_1 + i\phi_2) = |\phi|\,e^{i\rho} \ , \ \ \phi_1, \phi_2, \rho \in \mathbb{R}$$

$$\phi^\dagger\phi = |\phi|^2 = \frac{1}{2}\,(\phi_1^2 + \phi_2^2)$$

$$[\phi] \overset{(10.12)}{=} \sqrt{\frac{1}{\text{Energie}\cdot\text{Volumen}}} \tag{29.24}$$

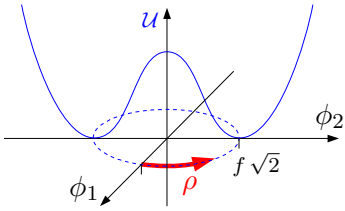


Abb. 29.1 : Das Potential $\mathcal{U}$ als Funktion der Felder ϕ_1 und ϕ_2 .

Der Faktor $\sqrt{1/2}$ wurde in diese Definition eingefügt, weil wir später die reellen Komponenten ϕ_j als elementare Felder interpretieren werden, und sie deshalb von Anfang an korrekt normalisieren wollen. Wir berechnen das Minimum der potentiellen Energie:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,|\phi|}\Big(\phi^\dagger\phi + \frac{\beta}{\alpha}(\phi^\dagger\phi)^2\Big) = 2|\phi| - \frac{4}{2f^2}\,|\phi|^3 = 0$$
$$\Longrightarrow \quad \mathcal{U} \text{ hat Extremwerte bei } |\phi| = 0 \text{ und } |\phi| = f \ . \tag{29.25}$$

Das Potential, das in Abbildung 29.1 nur für $\phi_1 = 0$ bzw. für die Polarwinkel $\rho = \pi/2$ und $\rho = 3\pi/2$ eingezeichnet ist, hat bei beliebigen Werten von ρ eine ähnliche Form wie der Boden einer Weinflasche. Manchmal wird die Form auch mit einem Sombrero verglichen. Alle Punkte $|\phi|\exp\{i\rho\}$ mit $|\phi| = f$ und beliebigem ρ, die durch den gestrichelten Kreis angedeutet werden, sind gleichberechtigte Minima, die Zustände $|0\rangle$ niedrigster Energie gemäß der Bedingung (29.20c) definieren. Für das Feld ϕ gilt also $\langle 0|\,\phi(x)\,|0\rangle = f\exp\{i\rho\} \neq 0$. So wie der Ferromagnet bei $T < T_c$ spontan eine bestimmte Richtung seiner Magnetisierung annimmt, so wird das Feld ϕ im Zustand niedrigster Energie spontan einen bestimmten Polarwinkel ρ annehmen und damit die Symmetrie der Lagrangedichte (29.23), die von ρ unabhängig ist, brechen.

Im GSW-Modell wird $\phi = (\phi_1 + i\phi_2)/\sqrt{2}$ durch das schwache Isospin-Doublet

$$\phi(x) \equiv \sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}\phi_3(x) + i\phi_4(x)\\ \phi_1(x) + i\phi_2(x)\end{pmatrix} \qquad \text{mit } \phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4 \in \mathbb{R} \tag{29.26}$$

ersetzt. Dem Doublet wird der schwache Isospin $T = 1/2$ zugeordnet, mit

$$T^3 \begin{pmatrix} \phi_3(x) + i\phi_4(x) \\ 0 \end{pmatrix} = +\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \phi_3(x) + i\phi_4(x) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{29.27a}$$

$$T^3 \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_1(x) + i\phi_2(x) \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_1(x) + i\phi_2(x) \end{pmatrix} . \tag{29.27b}$$

Es erhält jedoch keine elektrische Ladung. Seine schwache Hyperladung ist deshalb

$$Y \begin{pmatrix} \phi_3(x) + i\phi_4(x) \\ \phi_1(x) + i\phi_2(x) \end{pmatrix} \overset{(29.8)}{=} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_3(x) + i\phi_4(x) \\ \phi_1(x) + i\phi_2(x) \end{pmatrix} , \tag{29.28}$$

also (genau wie T^3) nur dann wohldefiniert (d. h. ϕ ist nur dann ein Eigenvektor des Operators Y), wenn die obere oder die untere Komponente des Isospinors Null ist.

In Abbildung 29.1 wäre $\mathcal{U}$ nun als Funktion in einem von den vier reellen Felder $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ aufgespannten vierdimensionalen Raum darzustellen. Das Minimum ist ein Kreis mit der Gleichung

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2 = 2f^2 , \tag{29.29}$$

und das Feld $\phi(x)$ wird im Zustand $\phi_0(x)$ niedrigster Energie spontan einen bestimmten Punkt auf diesem vierdimensionalen Kreis einnehmen. Wir können diesen Punkt ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf die ϕ_1-Achse legen, so dass

$$\phi_0(x) \overset{(29.26)}{=} \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 0 + i0 \\ f\sqrt{2} + i0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} \tag{29.30}$$

gilt. Denn es ist in jedem Fall möglich, das Koordinatensystem der vierdimensionalen Ebene so zu drehen (d. h. solche Linearkombinationen der vier Felder $\phi_1 \ldots \phi_4$ zu bilden), dass man (29.30) erhält.

Wir definieren vier Felder $\tilde{\phi}_i(x)$ als Auslenkungen von $\phi(x)$ aus dem Zustand niedrigster Energie $\phi_0(x)$:

$$\phi(x) \equiv \phi_0(x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \tilde{\phi}_3(x) + i\tilde{\phi}_4(x) \\ \tilde{\phi}_1(x) + i\tilde{\phi}_2(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \tilde{\phi}_3(x) + i\tilde{\phi}_4(x) \\ f\sqrt{2} + \tilde{\phi}_1(x) + i\tilde{\phi}_2(x) \end{pmatrix}$$
$$\text{mit } \tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2, \tilde{\phi}_3, \tilde{\phi}_4, f \in \mathbb{R} \tag{29.31}$$

Diese werden in die Lagrangedichte (29.23) eingesetzt:

$$\mathcal{L} \overset{(29.23)}{=} c^2\hbar^2 (\mathrm{D}_\mu \phi^\dagger)\, \mathrm{D}^\mu \phi + \frac{m^2c^4}{2}\, \phi^\dagger\phi - \frac{m^2c^4}{4f^2}\, (\phi^\dagger\phi)^2 \tag{29.32a}$$

$$\overset{(29.26)}{=} \sum_{i=1}^{4} \frac{c^2\hbar^2}{2} (\mathrm{D}_\mu \phi_i)^\dagger\, \mathrm{D}^\mu \phi_i + \frac{m^2c^4}{4} \sum_{i=1}^{4} \phi_i\phi_i - \frac{m^2c^4}{16f^2} \Big(\sum_{i=1}^{4} \phi_i\phi_i \Big)^2 \tag{29.32b}$$

$$\begin{aligned} \overset{(29.31)}{=} & \sum_{i=1}^{4} \frac{c^2\hbar^2}{2} (\mathrm{D}_\mu \tilde{\phi}_i)^\dagger\, \mathrm{D}^\mu \tilde{\phi}_i + \frac{m^2c^4}{4} \Big(\sum_{i=1}^{4} \tilde{\phi}_i\tilde{\phi}_i + \sqrt{8} f \tilde{\phi}_1 + 2f^2 \Big) - \\ & - \frac{m^2c^4}{16f^2} \Big(\sum_{i=1}^{4} \tilde{\phi}_i\tilde{\phi}_i + \sqrt{8} f \tilde{\phi}_1 + 2f^2 \Big)^2 \\ = & \sum_{i=1}^{4} \frac{c^2\hbar^2}{2} (\mathrm{D}_\mu \tilde{\phi}_i)^\dagger\, \mathrm{D}^\mu \tilde{\phi}_i - \frac{m^2c^4}{2} (\tilde{\phi}_1)^2 - \frac{m^2c^4}{16f^2} \Big(\sum_{i=1}^{4} \tilde{\phi}_i\tilde{\phi}_i \Big)^2 - \\ & - \frac{m^2c^4}{f\sqrt{8}}\, \tilde{\phi}_1 \sum_{i=1}^{4} \tilde{\phi}_i\tilde{\phi}_i + \frac{m^2c^4 f^2}{4} \end{aligned} \tag{29.32c}$$

Es ist plausibel, die ϕ_i bzw. $\tilde{\phi}_i$ in (29.32) als die eigentlichen elementaren Felder zu betrachten, und den schwachen Isospinor $\phi(x)$ lediglich als Kombination elementarer Felder, genau so wie z. B. $\binom{\nu_e}{e^-}_L$ lediglich ein aus den elementaren Feldern $\nu_{e,L}$ und e^-_L zusammengesetzter schwacher Isospinor ist.

Das Erkennungsmerkmal von Massetermen in Lagrangedichten ist die bilineare Feldabhängigkeit mit negativem Koeffizienten. Der einzige Term dieses Typs ist $-m^2c^4(\tilde{\phi}_1)^2/2$. Folglich ist $\tilde{\phi}_1$ das einzige massive Feld in (29.32). Seine Masse ist m, wie man aus dem Vergleich mit der Lagrangedichte (10.33) des reellen Klein-Gordon-Feldes erkennt. Die beiden folgenden Terme können nicht als Masseterme interpretiert werden, weil sie nicht

quadratisch in den Feldamplituden sind. Sie beschreiben Selbstwechselwirkungen der Felder. Zur Erinnerung: Wir haben in Kapitel 20 ähnliche Selbst-Wechselwirkungsterme in der ψ^3- und ψ^4-Theorie kennengelernt. Die Lagrangedichte (29.32c) beschreibt also ein massives reelles bosonisches Feld $\tilde{\phi}_1$ und drei masselose reelle bosonische Felder $\tilde{\phi}_2, \tilde{\phi}_3, \tilde{\phi}_4$. Die drei masselosen Bosonen werden „Goldstone-Bosonen“ genannt.

Man beachte dass das Zeichen † zur Markierung der Adjungierten an den Faktoren $(\mathrm{D}_\mu \tilde{\phi}_i)^\dagger$ belassen wurde, weil nur die Felder ϕ_i bzw. $\tilde{\phi}_i$ reell sind, die Eichfelder jedoch komplex sind.

Das schwache Isospinor $\phi(x) =$ (29.31) kann in zwei Formen geschrieben werden:

$$\begin{aligned}\phi(x) &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \tilde{\phi}_3(x) + i\tilde{\phi}_4(x) \\ f\sqrt{2} + \tilde{\phi}_1(x) + i\tilde{\phi}_2(x) \end{pmatrix} \equiv \\ &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left\{ i\rho_j(x) \frac{\tau^j}{2} \right\} \begin{pmatrix} 0 \\ f\sqrt{2} + \chi(x) \end{pmatrix} \\ &\tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2, \tilde{\phi}_3, \tilde{\phi}_4, \rho_j, f, \chi \in \mathbb{R} \ , \ j = 1, 2, 3\end{aligned} \tag{29.33}$$

Denn ein beliebiges Dublet $\phi(x)$ kann am Raum-Zeit-Punkt x dadurch erzeugt werden, dass der in negative T^3-Richtung orientierte schwache Isospinor mit Länge $f\sqrt{2}+\chi(x)$ durch den Rotationsoperator $\exp\{i\rho_j(x)\,\tau^j/2\}$ in die gewünschte Richtung des schwachen Isospin-Raums gedreht wird. Der schwache Isospinor $\phi(x)$ hat in beiden Schreibweisen vier Freiheitsgrade, die durch $\tilde{\phi}^1, \tilde{\phi}^2, \tilde{\phi}^3, \tilde{\phi}^4$ oder durch $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \chi$ parametrisiert werden.

Dreh- und Angelpunkt des Higgs-Mechanismus ist das Postulat, dass die Lagrangedichte (29.32) erstens invariant sein soll unter lokalen U(1)-Phasentransformationen $\exp\{iK(x)\,g_1 Y/2\}$, deren Generator die schwache Hyperladung $g_1 Y/2$ ist, und zweitens invariant sein soll unter lokalen Rotationen $\exp\{iK_j(x)\,g_2\tau^j/2\}$ im schwachen Isospin-Raum, deren Generatoren die drei schwachen Isospin-Ladungen $g_2\tau^j/2$ sind. Aus diesem Grund wurden die einfachen Ableitungen d_μ durch die kovarianten Ableitungen $D_\mu =$ (29.9) bzw. $D_\mu =$ (29.18) ersetzt.

So, wie man in der Elektrodynamik die Eichfreiheit beispielsweise durch die Wahl der Coulomb-Eichung nutzen kann, um die unphysikalischen

Freiheitsgrade der longitudinalen und zeitartigen Polarisation des Photonen-Feldes zu eliminieren, so nutzen wir die Invarianz des Feldes $\phi(x)$ unter lokalen Rotationen im schwachen Isospin-Raum zur Wahl der Eichung

$$\exp\{iK_j(x)\, g_2\tau^j/2\} \equiv \exp\{-i\rho_j(x)\,\tau^j/2\}\ . \tag{29.34}$$

Diese Eichung wird in der englischsprachigen Literatur als „unitarity gauge“, oder manchmal auch als „unitary gauge“ bezeichnet. In dieser Eichung hat das Feld die Form

$$\phi(x) \overset{(29.33)}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ f\sqrt{2} + \chi(x) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad f, \chi \in \mathbb{R}\ . \tag{29.35}$$

Da nur noch die untere Komponente des Dublets von Null verschieden ist, ist der Spinor in der Eichung (29.34) ein Eigenvektor des Hyperladungs-Operators mit dem Eigenwert $Y \overset{(29.28)}{=} +1$, und folglich wegen $q/e = Y/2 + T^3 = 0$ auch ein Eigenvektor von $\tau^3/2$ mit dem Eigenwert $T^3 = -1/2$.

Der Vergleich von (29.33) und (29.35) zeigt, dass die drei masselosen Goldstone-Bosonen $\tilde\phi_2, \tilde\phi_3, \tilde\phi_4$ verschwunden sind. Das bedeutet: So wie durch die Coulomb-Eichung aufgedeckt wurde, dass der Freiheitsgrad longitudinaler Polarisation im Fall von Photonen unphysikalisch ist, so hat jetzt die Eichtransformation (29.34) aufgedeckt dass die drei Goldstone-Bosonen unphysikalische Freiheitsgrade sind. Aber Freiheitsgrade können nicht einfach verschwinden. Wir werden die drei fehlenden Freiheitsgrade später als zusätzliche Freiheitsgrade der Eichfelder wiederfinden, d. h. durch die spontane Symmetriebrechung wurden drei Freiheitsgrade von den Goldstone-Bosonen auf die Eich-Bosonen übertragen.

Durch die Wahl der Eichung (29.34) nimmt die Lagrangedichte (29.32c) die einfache Form

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{Higgs}} + \mathcal{L}_{\text{HGB}} \tag{29.36a}$$

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = \frac{c^2\hbar^2}{2}\,(\mathrm{d}_\mu\chi)^\dagger \mathrm{d}^\mu\chi - \frac{m^2c^4}{2}\,\chi^2 - \frac{m^2c^4}{f\sqrt{8}}\,\chi^3 - \frac{m^2c^4}{16f^2}\,\chi^4 + \\ + \frac{m^2c^4 f^2}{4} \tag{29.36b}$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{HGB}} \equiv \frac{c^2\hbar^2}{2}\left((\mathrm{D}_\mu\,\phi)^\dagger\,\mathrm{D}^\mu\,\phi - (\mathrm{d}_\mu\phi)^\dagger \mathrm{d}^\mu\phi\right) \tag{29.36c}$$

an. $\mathcal{L}_{\mathrm{Higgs}}$ ist die Lagrangedichte des „nackten“ Higgs-Feldes, das nicht mit anderen Feldern wechselwirkt. Durch die Terme mit χ^3 und χ^4 wechselwirkt es allerdings mit sich selbst. Das Higgs-Feld $\chi(x)$ ist ein reelles Boson-Feld mit Masse m.

Der Teil $\mathcal{L}_{\mathrm{HGB}}$ der Lagrangedichte beschreibt die Wechselwirkung des Higgs-Feldes mit den schwachen Eichbosonen W^+, W^-, Z^0. Das Higgs-Feld kann mit diesen Bosonen aufgrund seiner schwachen Isospin-Ladung und seiner schwachen Hyperladung wechselwirken. Da das Higgs-Feld keine elektrische Ladung trägt, koppelt es nicht an das Eichboson A.

Damit die Lagrangedichte unter lokalen Phasentransformationen invariant ist, wurde der normale Differentialoperator d_μ ersetzt durch den kovarianten Differentialoperator

$$\mathrm{D}_\mu(x) \overset{(29.9)}{=} \mathrm{d}_\mu + \frac{i}{\hbar}\,\frac{g_1}{2}\,Y B^0_\mu(x) + \frac{i}{\hbar}\,g_2 W^j_\mu(x)\,\frac{\tau^j}{2}\;. \tag{29.37}$$

Wir greifen hier auf den kovarianten Differentialoperator in seiner ursprünglichen Schreibweise statt auf die umgewandelte Form (29.18) zurück, weil die folgenden Berechnungen übersichtlicher werden wenn die Pauli-Matrizen τ^j explizit sichtbar sind. Das Ergebnis ist natürlich letztlich unabhängig von der verwendeten Schreibweise. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
2(\mathrm{D}_\mu\,\phi)^\dagger\,\mathrm{D}^\mu\,\phi &= (\mathrm{d}_\mu\chi)\mathrm{d}^\mu\chi + \begin{pmatrix}0 & \mathrm{d}_\mu\chi\end{pmatrix}\frac{i}{\hbar}\Big(\frac{g_1}{2}\,Y(B^{0\mu} - B^{0\mu}) + \\
&+ g_2(W^{j\mu} - W^{j\mu})\,\frac{\tau^j}{2}\Big)\begin{pmatrix}0\\ f\sqrt{2}+\chi\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & f\sqrt{2}+\chi\end{pmatrix}\frac{1}{\hbar^2}\Big(\\
&\frac{g_1^2}{4}\,Y^2 B^0_\mu B^{0\mu} + \frac{g_1 g_2}{4}\,Y(B^0_\mu W^{j\mu} + B^{0\mu}W^j_\mu)\tau^j + \\
&+ \frac{g_2^2}{4}W^j_\mu W^{k\mu}\tau^j\tau^k\Big)\begin{pmatrix}0\\ f\sqrt{2}+\chi\end{pmatrix}\;.
\end{aligned} \tag{29.38}$$

Hier wurde $\tau^{j\dagger} = \tau^j$, $W^{j\dagger}_\mu = W^j_\mu$, und $B^{0\dagger}_\mu = B^0_\mu$ beachtet. Der Faktor $\sim (0\;\mathrm{d}_\mu\chi)$ verschwindet also. Im letzten Faktor kann man in guter Näherung

$\binom{0}{f\sqrt{2}+\chi} \approx \binom{0}{f\sqrt{2}}$ setzen, wenn das Feld nur wenig von ϕ_0 abweicht. Mit dem Antikommutator der Pauli-Matrizen $\{\tau^j,\tau^k\}/2 = \delta_{kj}$, mit $(0\ f)\tau^1\binom{0}{f} = (0\ f)\tau^2\binom{0}{f} = 0$, sowie mit $2(0\ f)\tau^3\binom{0}{f} = -2f^2$ und $Y=1$ folgt

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{HGB}} &= \frac{f^2c^2}{4}\Big(+ g_1^2 B_\mu^0 B^{0\mu} - g_1g_2 B_\mu^0 W^{3\mu} - g_1g_2 W_\mu^3 B^{0\mu} + g_2^2 W_\mu^j W^{j\mu}\Big) \\ &= \frac{f^2c^2}{4}\Big(- g_1 B_\mu^0 + g_2 W_\mu^3\Big)\Big(- g_1 B^{0\mu} + g_2 W^{3\mu}\Big) + \\ &\quad + \frac{f^2c^2g_2^2}{4}\left(W_\mu^1 W^{1\mu} + W_\mu^2 W^{2\mu}\right) . \end{aligned} \tag{29.39}$$

Nun setzen wir

$$\begin{aligned} &2(W_\mu^+)^\dagger W^{+\mu} + 2(W_\mu^-)^\dagger W^{-\mu} \overset{(29.11)}{=} \\ &= (W_\mu^1 + iW_\mu^2)^\dagger (W^{1\mu} + iW^{2\mu}) + (W_\mu^1 - iW_\mu^2)^\dagger (W^{1\mu} - iW^{2\mu}) \\ &= W_\mu^1 W^{1\mu} + iW_\mu^1 W^{2\mu} - iW_\mu^2 W^{1\mu} + W_\mu^2 W^{2\mu} + \\ &\quad + W_\mu^1 W^{1\mu} - iW_\mu^1 W^{2\mu} + iW_\mu^2 W^{1\mu} + W_\mu^2 W^{2\mu} \\ &= 2(W_\mu^1 W^{1\mu} + W_\mu^2 W^{2\mu}) \end{aligned} \tag{29.40}$$

und

$$Z_\mu^0 \overset{(29.13)}{=} -B_\mu^0 \sin\theta_W + W_\mu^0 \cos\theta_W \overset{(29.17),(29.11)}{=} \frac{-g_1 B_\mu^0 + g_2 W_\mu^3}{\sqrt{g_1^2+g_2^2}} \tag{29.41}$$

und Faktoren

$$1 = \zeta_+^2/\zeta_+^2 = \zeta_-^2/\zeta_-^2 = \zeta_0^2/\zeta_0^2 = \zeta_{\text{H}}^2/\zeta_{\text{H}}^2$$

in $\mathcal{L}_{\text{HGB}}$ ein:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{HGB}} = \frac{g_2^2 f^2 \zeta_+^2}{4c^2\zeta_{\text{H}}^2}\, c^4\, \frac{\zeta_{\text{H}}^2}{\zeta_+^2} W_\mu^+ W^{+\mu} + \frac{g_2^2 f^2 \zeta_-^2}{4c^2\zeta_{\text{H}}^2}\, c^4\, \frac{\zeta_{\text{H}}^2}{\zeta_-^2} W_\mu^- W^{-\mu} + \\ + \frac{(g_1^2+g_2^2) f^2 \zeta_0^2}{4c^2\zeta_{\text{H}}^2}\, c^4\, \frac{\zeta_{\text{H}}^2}{\zeta_0^2} Z_\mu^0 Z^{0\mu} \end{aligned} \tag{29.42}$$

Die Faktoren ζ_+, ζ_-, ζ_0, und ζ_H sind Normierungsfaktoren, die durch die Integrale über das Normierungsvolumen Ω festgelegt werden:

$$1 = \frac{1}{\zeta_+^2}\int_\Omega \mathrm{d}^3x\, W_\mu^+ W^{+\mu} = \frac{1}{\zeta_-^2}\int_\Omega \mathrm{d}^3x\, W_\mu^- W^{-\mu} = \\ = \frac{1}{\zeta_0^2}\int_\Omega \mathrm{d}^3x\, Z_\mu^0 Z^{0\mu} = \frac{1}{\zeta_H^2}\int_\Omega \mathrm{d}^3x\, \chi^2 = 1 \tag{29.43}$$

Also müssen die Dimensionen der Normierungsfaktoren die Dimensionen der Felder kompensieren:

$$[\zeta_+] = [\zeta_-] = [\zeta_0] = [W^\pm] = [Z^0] \overset{(29.19)}{=} \frac{\text{Impuls}}{\text{Ladung}} \tag{29.44a}$$

$$[\zeta_H] = [\phi] \overset{(10.12)}{=} [\chi] = [f] \overset{(29.24),(29.23)}{=} \frac{1}{\sqrt{\text{Energie}\cdot\text{Volumen}}} \tag{29.44b}$$

Aus der Dimensionsanalyse wird erkennbar, dass jetzt Massenterme der Eichbosonen in (29.42) aufgetaucht sind:

$$\left[\frac{g_2 f\,\zeta_+}{c\,\zeta_H}\right] = \left[\frac{g_2 f\,\zeta_-}{c\,\zeta_H}\right] = \left[\frac{\sqrt{g_1^2+g_2^2}\, f\,\zeta_0}{c\,\zeta_H}\right] = \text{Masse} \tag{29.44c}$$

Man beachte dass die raumartigen Komponenten der Masseterme in (29.42) tatsächlich das richtige, negative Vorzeichen haben. Zum Beispiel: $Z_\mu^0 Z^{0\mu} = Z_0^0 Z^{00} - Z_j^0 Z^{0j}$ mit $j = 1, 2, 3$. Damit haben die vier Eichbosonen der GSW-Theorie die folgenden Eichenschaften:

Feld	T	T^3	Y	$q/e = Y/2 + T^3$	Masse
W^+	1	+1	0	+1	$g_2 f\zeta_+/(2c\,\zeta_H)$
W^-	1	−1	0	−1	$g_2 f\zeta_-/(2c\,\zeta_H)$
Z^0	n.d.	0	0	0	$\sqrt{g_1^2+g_2^2}\, f\zeta_0/(2c\,\zeta_H)$
A	n.d.	0	0	0	0

(29.45)

n.d. bedeutet „nicht definiert“. Denn Z^0 und A sind Mischungen der Felder B^0 und $W^3 = W^0$, die unterschiedlichen schwachen Isospin T haben,

während die Komponente T^3 beider Felder Null ist, siehe Tabelle (29.12).

Die Masseterme der schwachen Eichbosonen sind durch die Kopplung an das Feld (29.33) zustande gekommen. Dessen ursprünglich 4 Freiheitsgrade wurden durch die spontane Symmetriebrechung auf nur einen Freiheitsgrad in der Form (29.35) reduziert. Die dort verschwundenen 3 Freiheitsgrade tauchen nun als zusätzliche Polarisations-Freiheitsgrade der schwachen Eichbosonen wieder auf. Als masselose Bosonen hatten sie – genau wie das Photon – nur zwei transversale Freiheitsgrade der Polarisation. Dank der Masseterme in (29.42) können sie nun auch longitudinal polarisiert sein.

Obwohl das schwache Isospin-Doublet $\phi(x)$ nicht mit dem Higgs-Feld $\chi(x)$ identisch ist, wie aus (29.35) offensichtlich ist, wird der Name Higgs-Feld in der Literatur häufig synonym für beide Felder $\chi(x)$ und $\phi(x)$ verwendet. Beim experimentell beobachtbaren Higgs-Boson, das laut (29.36b) die Masse m hat, handelt es sich hingegen klar und eindeutig um das Quant des Feldes $\chi(x)$.

Das GSW-Modell der elektroschwachen Wechselwirkung ist eine derartig verzwickte Konstruktion, dass es wohl niemand ernst nehmen würde, wenn es nicht durch die experimentellen Beobachtungen der vergangenen Jahrzehnte eindrucksvoll bestätigt worden wäre. Im Jahr 1973 konnten erstmals die durch das Z^0-Boson vermittelten neutralen schwachen Ströme experimentell nachgewiesen werden. 1983 gelang der direkte experimentelle Nachweis der drei Bosonen W^+, W^- (Ruhemasse etwa $80\,\mathrm{GeV}/c^2$), und Z^0 (Ruhemasse etwa $91\,\mathrm{GeV}/c^2$). Und 2012 gaben die Experimentatoren schließlich den Nachweis des lange gesuchten Higgs-Bosons χ mit der Masse $m \approx 125\,\mathrm{GeV}/c^2$ bekannt. Schuld an der komplizierten Struktur der Theorie sind offenbar nicht die Theoretiker sondern die Natur selbst, die keine Rücksicht auf den Wunsch der Physiker nach einfachen Verhältnissen nimmt.

29.4 Der ES-Tensor des Higgs-Feldes

Das Higgs-Feld $\chi(x)$ mit Lagrangedichte $\mathcal{L}_{\mathrm{Higgs}} =$ (29.36b) ist ein reelles skalares Feld, wie das reelle Klein-Gordon-Feld. Also hat der ES-Tensor des Higgs-Feldes folgende Form:

klassisches Higgs-Feld:

$$\mathcal{T}^{\rho\sigma} \overset{(10.36)}{=} \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{Higgs}}}{\partial(\mathrm{d}_\rho \chi)} \mathrm{d}^\sigma \chi - g^{\rho\sigma} \mathcal{L}_{\text{Higgs}} \tag{29.46a}$$

quantisiertes Higgs-Feld:

$$\mathcal{T}^{\rho\sigma} \overset{(15.18)}{=} \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{Higgs}}}{\partial(\mathrm{d}_\rho \chi)} \mathrm{d}^\sigma \chi - g^{\rho\sigma} \mathcal{L}_{\text{Higgs}} - Y \tag{29.46b}$$

$Y \equiv$ die Summe aller Terme in (29.46a), die nicht von den Teilchenzahl-Operatoren $a_{\boldsymbol{k}}^\dagger a_{\boldsymbol{k}}$ abhängen.

Mit Y werden nicht nur die unphysikalischen Terme entfernt, die durch die Kommutatoren $[a_{\boldsymbol{k}}^\dagger, a_{\boldsymbol{k}}] = 1$ entstehen, sondern auch die unphysikalische Energiedichte des letzen Terms in (29.36b). Durch Messungen des Myonzerfalls konnte die Kopplungskonstante g_2 separat festgestellt werden, und damit der Parameter

$$f = 246\,\mathrm{GeV}(\hbar c)^{-3/2} \tag{29.47}$$

aus Masseterm (29.45) von $W^\pm$ berechnet werden. Mit diesem Wert ergibt sich

$$\frac{m^2 c^4 f^2}{4} = \frac{(125\,\mathrm{GeV})^2 (246\,\mathrm{GeV})^2}{4(\hbar c)^3} \approx 2 \cdot 10^{34}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3}\ . \tag{29.48}$$

Wenn man diesen Wert vergleicht mit der Energiedichte

$$\mathcal{T}_{00}^{\text{Vakuum}} \approx 5.4 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{J/m}^3 \tag{29.49}$$

des intergalaktischen Vakuums, die aus astronomischen Beobachtungen erschlossen werden kann [42], dann findet man das Verhältnis

$$\frac{\text{Theorie}}{\text{Beobachtung}} = \frac{(29.48)}{(29.49)} \approx 3.7 \cdot 10^{43}\ . \tag{29.50}$$

Die katastrophale Missverhältnis bestätigt, dass es eine vernünftige Maßnahme ist, Y aus (29.46b) zu entfernen.

29.5 Die Masse der Fermionen

Bisher haben wir alle freien (d. h. nicht wechselwirkenden) elementaren Felder mit Spin 1/2, d. h. alle Leptonen und alle Quarks, durch eine Lagrangedichte der Form

$$\mathcal{L}_0 \overset{(8.24)}{=} \overline{\psi}\,(i\hbar c\gamma^\nu \mathrm{d}_\nu - mc^2)\,\psi \tag{29.51}$$

beschrieben, aus der die Dirac-Gleichung

$$(i\hbar c\gamma^\mu \mathrm{d}_\mu - mc^2)\,\psi \overset{(8.5)}{=} 0 \tag{29.52}$$

abgeleitet werden kann. $\psi(x)$ ist ein vierkomponentiges Spinorfeld. Indem man die γ-Matrizen (8.15) explizit einsetzt, wird die Diracgleichung zu

$$\begin{aligned}(i\hbar c \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}_0 + i\hbar c \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}_k - mc^2)\psi = \\ = \begin{pmatrix} -mc^2 & i\hbar c(\mathrm{d}_0 + \sigma^k \mathrm{d}_k) \\ i\hbar c(\mathrm{d}_0 - \sigma^k \mathrm{d}_k) & -mc^2 \end{pmatrix} \psi = 0\ ,\end{aligned} \tag{29.53}$$

wobei σ^k die 2×2-komponentigen Pauli Matrizen sind. Wenn die Ruheenergie mc^2 Null oder vernachlässigbar ist, dann entkoppelt die vierkomponentige Dirac-Gleichung in die Weyl-Gleichungen (8.115):

$$i\hbar c(\mathrm{d}_0 - \sigma^k \mathrm{d}_k) \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad , \qquad i\hbar c(\mathrm{d}_0 + \sigma^k \mathrm{d}_k) \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{29.54}$$

$\left(\begin{smallmatrix} L_1 \\ L_2 \end{smallmatrix}\right)$ ist ein zweikomponentiger linkshändiger Weyl-Spinor, und $\left(\begin{smallmatrix} R_1 \\ R_2 \end{smallmatrix}\right)$ ist ein zweikomponentiger rechtshändiger Weyl-Spinor.

Wie in den vorangegangenen Abschnitten beschrieben, unterteilt das GSW-Modell der elektroschwachen Wechselwirkung die Fermionenfelder streng in die linkshändigen schwachen Isospin-Doublets (29.4) und die rechtshändigen Singlets (29.7). Eine Lagrangedichte der freien Felder wie (29.51) ist unvereinbar mit dem GSW-Modell, weil der Masseterm die links- und rechtshändigen Komponenten des Diracspinors $\psi(x)$ mischt.

Wenn wir zu einer Fermionentheorie gelangen wollen, die mit dem GSW-Modell kompatibel ist, dann müssen freie Fermionenfelder masselos sein:

$$\mathcal{L}_0 = \overline{\psi}\, i\hbar c\gamma^\nu \mathrm{d}_\nu\, \psi \tag{29.55}$$

Die Massen der Fermionen können durch Wechselwirkung mit dem Higgsfeld eingeführt werden. Da das Higgsfeld kein Eichfeld ist, kann es nicht durch einen kovarianten Differentialoperator eingeführt werden. Stattdessen kann man einen Wechselwirkungsterm z. B. für das up- und das down-Quark wie folgt postulieren:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{int}} &= -\lambda_d \left[\overline{\begin{pmatrix}\psi_u\\ \psi_d\end{pmatrix}}_L \underbrace{\begin{pmatrix}0\\ f+\frac{\chi}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}}_{(29.35)} \psi_{dR} + \overline{\psi_{dR}} \begin{pmatrix}0\\ f+\frac{\chi}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix}\psi_u\\ \psi_d\end{pmatrix}_L \right] - \\
&\quad - \lambda_u \left[\overline{\begin{pmatrix}\psi_d\\ \psi_u\end{pmatrix}}_L \begin{pmatrix}0\\ f+\frac{\chi}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} \psi_{uR} + \overline{\psi_{uR}} \begin{pmatrix}0\\ f+\frac{\chi}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix}\psi_d\\ \psi_u\end{pmatrix}_L \right] \\
&= -(f+\frac{\chi}{\sqrt{2}}) \Big(\lambda_d\, \overline{\psi_{dL}}\psi_{dR} + \lambda_d\, \overline{\psi_{dR}}\psi_{dL} + \\
&\qquad\qquad + \lambda_u\, \overline{\psi_{uL}}\psi_{uR} + \lambda_u\, \overline{\psi_{uR}}\psi_{uL} \Big) \qquad (29.56a) \\
0 < \lambda_d \in \mathbb{R} \quad &, \quad 0 < \lambda_u \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

λ_d und λ_u sind neue Kopplungskonstanten. Wegen

$$[\mathcal{L}] = \frac{\text{Energie}}{\text{Volumen}}\ ,\ [\overline{\psi}\psi] = \frac{1}{\text{Volumen}}\ ,\ [\chi] = [f] = \frac{1}{\sqrt{\text{Energie}\cdot\text{Volumen}}}$$

müssen diese Kopplungskonstanten die Dimension

$$[\lambda] = \text{Energie}^{3/2}\cdot\text{Volumen}^{1/2} \tag{29.56b}$$

haben. Weil $\lambda_d f > 0$ und $\lambda_u f > 0$ positive Konstanten sind, handelt es sich bei den Termen $\sim f$ in $\mathcal{L}_{\text{int}}$ tatsächlich um Masseterme, die den Quarks die Massen $m_d = \lambda_d f/c^2$ und $m_u = \lambda_u f/c^2$ verleihen. Dagegen sind die Terme

$\sim \chi\overline{\psi}\psi$ in $\mathcal{L}_{\text{int}}$ keine Masseterme sondern Wechselwirkungsterme, da sie nicht bilinear von den Feldern abhängen.

Der entsprechende Ausdruck für das Elektron und das Elektron-Neutrino lautet:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{int}} &= \\
&= -\lambda_e \left[\overline{\begin{pmatrix} \psi_{\nu_e} \\ \psi_e \end{pmatrix}}_L \begin{pmatrix} 0 \\ f + \dfrac{\chi}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \psi_{eR} + \overline{\psi_{eR}} \begin{pmatrix} 0 \\ f + \dfrac{\chi}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} \psi_{\nu_e} \\ \psi_e \end{pmatrix}_L \right] - \\
&\quad - \lambda_{\nu_e} \left[\overline{\begin{pmatrix} \psi_e \\ \psi_{\nu_e} \end{pmatrix}}_L \begin{pmatrix} 0 \\ f + \dfrac{\chi}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \psi_{\nu_e R} + \overline{\psi_{\nu_e R}} \begin{pmatrix} 0 \\ f + \dfrac{\chi}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} \psi_e \\ \psi_{\nu_e} \end{pmatrix}_L \right] \\
&= -(f + \frac{\chi}{\sqrt{2}}) \Big(\lambda_e \, \overline{\psi_{eL}} \psi_{eR} + \lambda_e \, \overline{\psi_{eR}} \psi_{eL} + \\
&\qquad\qquad + \lambda_{\nu_e} \, \overline{\psi_{\nu_e L}} \psi_{\nu_e R} + \lambda_{\nu_e} \, \overline{\psi_{\nu_e R}} \psi_{\nu_e L} \Big) \qquad (29.57)
\end{aligned}$$

Weil die Massen der experimentell beobachteten Fermionen erheblich differieren, braucht man für die verschiedenen Fermionen unterschiedliche Kopplungskonstanten λ. Diese müssen allesamt experimentell bestimmt werden, da das Standardmodell keinerlei Hinweis auf ihren Wert gibt und auch nicht erklärt, warum nicht alle Fermionen gleich stark an das Higgsfeld koppeln.

Anhang

A.1 Herleitung von Gleichung (6.65)

Wir substituieren die Indizes r, r' durch

$$m \equiv r - j - 1 \qquad \text{und} \qquad m' \equiv r' - j - 1\,. \tag{A.1}$$

Außerdem schreiben wir Summen ab sofort bis zur Gleichung (A.6) einschließlich explizit aus, setzen also in diesem begrenzten Rahmen die Summenkonvention außer Kraft.

$$\begin{aligned}\phi^{(j)\prime}_{m'} &\overset{(6.64)}{=} \sum_{m=-j}^{j} D^{(j)}_{m'm}\phi^{(j)}_{m} \overset{(6.56a)}{=} \sum_{m=-j}^{j} D^{(j)}_{m'm}N^{(j)}_{m}u^{j-m}v^{j+m} \\ &\overset{(6.62)}{=} N^{(j)}_{m'}(au+bv)^{j-m'}(-b^*u+a^*v)^{j+m'}\end{aligned} \tag{A.2}$$

Es wird nur über m summiert, nicht über m'. Mit dem Binomischen Lehrsatz finden wir:

$$\begin{aligned}\sum_{m=-j}^{j} D^{(j)}_{m'm}\frac{N^{(j)}_{m}}{N^{(j)}_{m'}}u^{j-m}v^{j+m} &= \\ &= (au+bv)^{j-m'}(-b^*u+a^*v)^{j+m'} = \\ &= \sum_{k=0}^{j-m'}\frac{(j-m')!}{k!(j-m'-k)!}(au)^{j-m'-k}(bv)^{k}\cdot \\ &\quad\cdot\sum_{l=0}^{j+m'}\frac{(j+m')!}{l!(j+m'-l)!}(-b^*u)^{j+m'-l}(a^*v)^{l} =\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{j-m'} \sum_{l=0}^{j+m'} \frac{(j-m')!}{k!(j-m'-k)!} \frac{(j+m')!}{l!(j+m'-l)!} \cdot$$
$$\cdot\, a^{j-m'-k} b^k (-b^*)^{j+m'-l} a^{*l} u^{2j-k-l} v^{k+l} \qquad \text{(A.3)}$$

Die Produkte $u^p v^q$ mit verschiedenen Potenzen p, q sind voneinander linear unabhängig. Deshalb kann man die rechte und linke Seite der Gleichung summandenweise gleichsetzen, wenn $j-m = 2j-k-l$ und $j+m = k+l$ ist. Beide Bedingungen sind erfüllt, wenn $m = -j+k+l$ ist. Deshalb führen wir auf der rechten Seite der Gleichung einen neuen Parameter m durch die Substitution $l \equiv j-k+m$ ein:

$$\sum_{m=-j}^{j} D^{(j)}_{m'm} \frac{N^{(j)}_m}{N^{(j)}_{m'}} u^{j-m} v^{j+m} =$$
$$= \sum_{k=0}^{j-m'} \sum_{m=k-j}^{k+m'} \frac{(j-m')!}{k!(j-m'-k)!} \frac{(j+m')!}{(j-k+m)!(m'+k-m)!} \cdot$$
$$\cdot\, a^{j-m'-k} b^k (-b^*)^{m'+k-m} a^{*j-k+m} u^{j-m} v^{j+m} \qquad \text{(A.4)}$$

Die Definition der Fakultät ganzer Zahlen ist

$$\left.\begin{array}{ll} z! \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (z-1) \cdot z & \text{für } z > 0 \\ z! \equiv 1 & \text{für } z = 0 \\ z! \equiv \pm\infty & \text{für } z < 0 \end{array}\right\} z \in \mathbb{Z}\,. \qquad \text{(A.5)}$$

Mit dieser Definition können wir die Grenzen der Summation über m nach $\pm j$ verschieben, und – weil die Summation über m dann nicht mehr von k abhängt – die Reihenfolge der beiden Summationen tauschen:

$$\sum_{m=-j}^{j} D^{(j)}_{m'm} \frac{N^{(j)}_m}{N^{(j)}_{m'}} u^{j-m} v^{j+m} =$$

$$= \sum_{m=-j}^{j} \sum_{k=0}^{j-m'} \frac{(j-m')!}{k!(j-m'-k)!} \frac{(j+m')!}{(j-k+m)!(m'+k-m)!} \cdot \\ \cdot a^{j-m'-k} b^k (-b^*)^{m'+k-m} a^{*j-k+m} u^{j-m} v^{j+m} \tag{A.6}$$

Denn die hinzu gekommenen Summanden mit $m < k-j$ und mit $m > k+m'$ sind allesamt Null, weil sie im Nenner den Faktor $(j-k+m)! = \pm\infty$ bzw. $(m'+k-m)! = \pm\infty$ haben.

Gleichsetzen gleicher Potenzen von $u^p v^q$ ergibt

$$D^{(j)}_{m'm} = \sum_{k=0}^{j-m'} \frac{(j-m')!}{k!(j-m'-k)!} \frac{(j+m')!}{(j-k+m)!(m'+k-m)!} \cdot \\ \cdot \frac{N^{(j)}_{m'}}{N^{(j)}_{m}} \cdot a^{j-m'-k} b^k (-b^*)^{m'+k-m} a^{*j-k+m} \tag{A.7}$$

Mit den Normierungsfaktoren gemäß (6.56b) findet man schließlich:

$$D^{(j)}_{m'm} = \sum_{k=0}^{j-m'} \frac{\sqrt{(j-m')!(j+m')!(j+m)!(j-m)!}}{k!(j-m'-k)!(j-k+m)!(m'+k-m)!} \cdot \\ \cdot a^{j-m'-k} b^k (-b^*)^{m'+k-m} a^{*j-k+m} \tag{A.8}$$

Jetzt kehren wir wieder zu den ursprünglichen Indizes

$$r = j+1+m \qquad , \qquad r' = j+1+m' \tag{A.9}$$

zurück, und erhalten Gleichung (6.65):

$$D^{(j)}_{r'r} = \sum_{k=0}^{2j+1-r'} \frac{\sqrt{(2j+1-r')!(r'-1)!(r-1)!(2j+1-r)!}}{k!(2j+1-r'-k)!(-k+r-1)!(r'+k-r)!} \cdot \\ \cdot a^{2j+1-r'-k} b^k (-b^*)^{r'+k-r} a^{*-k+r-1}$$

A.2 Nebenrechnung zu Gleichung (6.67)

$$D_{00}^{(0)} = \sum_{k=0}^{0} \frac{\sqrt{0!0!0!0!}}{k!(-k)!(-k)!k!} \cdot a^{-k} b^k (-b^*)^k a^{*-k} = 1 \tag{A.10}$$

$$D_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2})} = \sum_{k=0}^{1} \frac{\sqrt{1!0!0!1!}}{k!(1-k)!(-k)!k!} \cdot a^{1-k} b^k (-b^*)^k a^{*-k} = a \tag{A.11a}$$

$$D_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2})} = \sum_{k=0}^{1} \frac{\sqrt{1!0!1!0!}}{k!(1-k)!(1-k)!(k-1)!} \cdot a^{1-k} b^k (-b^*)^{k-1} a^{*1-k} = b \tag{A.11b}$$

$$D_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2})} = \sum_{k=0}^{0} \frac{\sqrt{0!1!0!1!}}{k!(-k)!(-k)!(1+k)!} \cdot a^{-k} b^k (-b^*)^{1+k} a^{*-k} = -b^* \tag{A.11c}$$

$$D_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2})} = \sum_{k=0}^{0} \frac{\sqrt{0!1!1!0!}}{k!(-k)!(1-k)!k!} \cdot a^{-k} b^k (-b^*)^k a^{*1-k} = a^* \tag{A.11d}$$

$$D_{-1-1}^{(1)} = \sum_{k=0}^{2} \frac{\sqrt{2!0!0!2!}}{k!(2-k)!(-k)!k!} \cdot a^{2-k} b^k (-b^*)^k a^{*-k} = a^2 \tag{A.12a}$$

$$D_{-10}^{(1)} = \sum_{k=0}^{2} \frac{\sqrt{2!0!1!1!}}{k!(2-k)!(1-k)!(-1+k)!} \cdot \cdot a^{2-k} b^k (-b^*)^{-1+k} a^{*1-k} = \sqrt{2}ab \tag{A.12b}$$

$$D_{-11}^{(1)} = \sum_{k=0}^{2} \frac{\sqrt{2!0!2!0!}}{k!(2-k)!(2-k)!(k-2)!} \cdot \cdot a^{2-k} b^k (-b^*)^{k-2} a^{*2-k} = b^2 \tag{A.12c}$$

$$D_{0-1}^{(1)} = \sum_{k=0}^{1} \frac{\sqrt{1!1!0!2!}}{k!(1-k)!(-k)!(k+1)!} \cdot \cdot a^{1-k} b^k (-b^*)^{k+1} a^{*-k} = -\sqrt{2}ab^* \tag{A.12d}$$

$$D_{00}^{(1)} = \sum_{k=0}^{1} \frac{\sqrt{1!1!1!1!}}{k!(1-k)!(1-k)!k!} \cdot \\ \cdot\, a^{1-k} b^k (-b^*)^k a^{*1-k} = aa^* - bb^* \tag{A.12e}$$

$$D_{01}^{(1)} = \sum_{k=0}^{1} \frac{\sqrt{1!1!2!0!}}{k!(1-k)!(2-k)!(k-1)!} \cdot \\ \cdot\, a^{1-k} b^k (-b^*)^{k-1} a^{*2-k} = \sqrt{2} b a^* \tag{A.12f}$$

$$D_{1-1}^{(1)} = \sum_{k=0}^{0} \frac{\sqrt{0!2!0!2!}}{k!(-k)!(-k)!(2+k)!} \cdot \\ \cdot\, a^{-k} b^k (-b^*)^{2+k} a^{*-k} = b^{*2} \tag{A.12g}$$

$$D_{10}^{(1)} = \sum_{k=0}^{0} \frac{\sqrt{0!2!1!1!}}{k!(-k)!(1-k)!(1+k)!} \cdot \\ \cdot\, a^{-k} b^k (-b^*)^{1+k} a^{*1-k} = -\sqrt{2} b^* a^* \tag{A.12h}$$

$$D_{11}^{(1)} = \sum_{k=0}^{0} \frac{\sqrt{0!2!2!0!}}{k!(-k)!(2-k)!k!} \cdot a^{-k} b^k (-b^*)^k a^{*2-k} = a^{*2} \tag{A.12i}$$

$$D_{-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}}^{(\frac{3}{2})} = \sum_{k=0}^{3} \frac{\sqrt{3!0!0!3!}}{k!(3-k)!(-k)!k!} \cdot a^{3-k} b^k (-b^*)^k a^{*-k} = a^3 \tag{A.13a}$$

$$D_{-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}^{(\frac{3}{2})} = \sum_{k=0}^{3} \frac{\sqrt{3!0!1!2!}}{k!(3-k)!(1-k)!(-1+k)!} \cdot \\ \cdot\, a^{3-k} b^k (-b^*)^{-1+k} a^{*1-k} = \sqrt{3} a^2 b \tag{A.13b}$$

$$D_{-\frac{3}{2}\frac{1}{2}}^{(\frac{3}{2})} = \sum_{k=0}^{3} \frac{\sqrt{3!0!2!1!}}{k!(3-k)!(2-k)!(-2+k)!} \cdot \\ \cdot\, a^{3-k} b^k (-b^*)^{-2+k} a^{*2-k} = \sqrt{3} a b^2 \tag{A.13c}$$

$$D_{-\frac{3}{2}\frac{3}{2}}^{(\frac{3}{2})} = \sum_{k=0}^{3} \frac{\sqrt{3!0!3!0!}}{k!(3-k)!(3-k)!(-3+k)!} \cdot \\ \cdot\, a^{3-k} b^k (-b^*)^{-3+k} a^{*3-k} = b^3 \tag{A.13d}$$

$$D^{(\frac{3}{2})}_{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}} = \sum_{k=0}^{2} \frac{\sqrt{2!1!0!3!}}{k!(2-k)!(-k)!(k+1)!} \cdot$$
$$\cdot\ a^{2-k}b^k(-b^*)^{k+1}a^{*-k} = -\sqrt{3}a^2b^* \tag{A.13e}$$

$$D^{(\frac{3}{2})}_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{2} \frac{\sqrt{2!1!1!2!}}{k!(2-k)!(1-k)!k!} \cdot$$
$$\cdot\ a^{2-k}b^k(-b^*)^k a^{*1-k} = a^2a^* - 2abb^* \tag{A.13f}$$

$$D^{(\frac{3}{2})}_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{2} \frac{\sqrt{2!1!2!1!}}{k!(2-k)!(2-k)!(k-1)!} \cdot$$
$$\cdot\ a^{2-k}b^k(-b^*)^{k-1}a^{*2-k} = 2aba^* - b^2b^* \tag{A.13g}$$

$$D^{(\frac{3}{2})}_{-\frac{1}{2}\frac{3}{2}} = \sum_{k=0}^{2} \frac{\sqrt{2!1!3!0!}}{k!(2-k)!(3-k)!(k-2)!} \cdot$$
$$\cdot\ a^{2-k}b^k(-b^*)^{k-2}a^{*3-k} = \sqrt{3}b^2a^* \tag{A.13h}$$

$$D^{(\frac{3}{2})}_{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}} = \sum_{k=0}^{1} \frac{\sqrt{1!2!0!3!}}{k!(1-k)!(-k)!(2+k)!} \cdot$$
$$\cdot\ a^{1-k}b^k(-b^*)^{2+k}a^{*-k} = \sqrt{3}ab^{*2} \tag{A.13i}$$

$$D^{(\frac{3}{2})}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{1} \frac{\sqrt{1!2!1!2!}}{k!(1-k)!(1-k)!(1+k)!} \cdot$$
$$\cdot\ a^{1-k}b^k(-b^*)^{1+k}a^{*1-k} = -2ab^*a^* + bb^{*2} \tag{A.13j}$$

$$D^{(\frac{3}{2})}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{1} \frac{\sqrt{1!2!2!1!}}{k!(1-k)!(2-k)!k!} \cdot$$
$$\cdot\ a^{1-k}b^k(-b^*)^k a^{*2-k} = aa^{*2} - 2bb^*a^* \tag{A.13k}$$

$$D^{(\frac{3}{2})}_{\frac{1}{2}\frac{3}{2}} = \sum_{k=0}^{1} \frac{\sqrt{1!2!3!0!}}{k!(1-k)!(3-k)!(k-1)!} \cdot$$
$$\cdot\ a^{1-k}b^k(-b^*)^{k-1}a^{*3-k} = \sqrt{3}ba^{*2} \tag{A.13l}$$

$$D^{(\frac{3}{2})}_{\frac{3}{2}-\frac{3}{2}} = \sum_{k=0}^{0} \frac{\sqrt{0!3!0!3!}}{k!(-k)!(-k)!(3+k)!} \cdot \\ \cdot\ a^{-k}b^k(-b^*)^{3+k}a^{*-k} = -b^{*3} \tag{A.13m}$$

$$D^{(\frac{3}{2})}_{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{0} \frac{\sqrt{0!3!1!2!}}{k!(-k)!(1-k)!(2+k)!} \cdot \\ \cdot\ a^{-k}b^k(-b^*)^{2+k}a^{*1-k} = \sqrt{3}b^{*2}a^* \tag{A.13n}$$

$$D^{(\frac{3}{2})}_{\frac{3}{2}\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{0} \frac{\sqrt{0!3!2!1!}}{k!(-k)!(2-k)!(1+k)!} \cdot \\ \cdot\ a^{-k}b^k(-b^*)^{1+k}a^{*2-k} = -\sqrt{3}b^*a^{*2} \tag{A.13o}$$

$$D^{(\frac{3}{2})}_{\frac{3}{2}\frac{3}{2}} = \sum_{k=0}^{0} \frac{\sqrt{0!3!3!0!}}{k!(-k)!(3-k)!k!} \cdot a^{-k}b^k(-b^*)^k a^{*3-k} = a^{*3} \tag{A.13p}$$

A.3 Die Anzahl freier Parameter der SL(2,C)

Die Elemente der Gruppe SL(2,$\mathbb{C}$) sind 2×2-Matrizen mit komplexen Elementen:

$$\begin{pmatrix} ae^{i\alpha} & be^{i\beta} \\ ce^{i\gamma} & de^{i\delta} \end{pmatrix} \quad \text{mit } a,b,c,d,\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R} \tag{A.14}$$

Die 8 reellen Parameter der Matrizen werden durch die Anforderung an die Determinante eingeschränkt:

$$\det \begin{pmatrix} ae^{i\alpha} & be^{i\beta} \\ ce^{i\gamma} & de^{i\delta} \end{pmatrix} = ade^{i(\alpha+\delta)} - bce^{i(\beta+\gamma)} = 1$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} ad\cos(\alpha+\delta) - bc\cos(\beta+\gamma) = 1 \\ ad\sin(\alpha+\delta) - bc\sin(\beta+\gamma) = 0 \end{cases} \tag{A.15}$$

Wir wollen berechnen, durch wie viele reelle Parameter ein allgemeines Element der SL(2,$\mathbb{C}$) eindeutig festgelegt wird. Dazu unterscheiden wir vier Fälle:

1. Fall: $a = 0\,,\ b, c, d \neq 0$
Die Nebenbedingung für die Determinante lautet

$$\begin{aligned} -bce^{i(\beta+\gamma)} &\overset{(A.15)}{=} 1 \\ \Longrightarrow \quad &\begin{cases} c = -b^{-1}e^{-i(\beta+\gamma)} \\ \gamma = -\beta + \pi/2 \pm \pi/2\,. \end{cases} \end{aligned} \tag{A.16}$$

Die allgemeinste Form eines Elements aus SL(2,ℂ) ist in diesem Fall

$$\begin{pmatrix} 0 & be^{i\beta} \\ -b^{-1}e^{i(-\beta+\pi/2\pm\pi/2)} & de^{i\delta} \end{pmatrix} \tag{A.17}$$

Es gibt 4 freie Parameter plus eine zweideutige Phase. Die gleiche Anzahl freier Parameter gibt es offensichtlich immer, wenn genau einer der vier Parameter a, b, c, d Null ist, egal welcher.
2. Fall: $a, b, c, d \neq 0\,,\ \cos(\alpha + \delta) = 0$
Die Nebenbedingung lautet

$$-bc\cos(\beta+\gamma) \overset{(A.15)}{=} 1 \tag{A.18}$$

$$\pm ad - bc\sin(\beta+\gamma) \overset{(A.15)}{=} 0$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} c = \dfrac{1}{-b\cos(\beta+\gamma)} \\ d = \pm a^{-1}b\dfrac{1}{-b\cos(\beta+\gamma)}\sin(\beta+\gamma) \\ \quad = e^{i(\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{2})}a^{-1}\dfrac{\sin(\beta+\gamma)}{\cos(\beta+\gamma)}\,. \end{cases} \tag{A.19}$$

Da $\delta = -\alpha \pm \pi/2$ sein muss, ist die allgemeinste Form eines Elements aus SL(2,ℂ) in diesem Fall

$$\begin{pmatrix} ae^{i\alpha} & be^{i\beta} \\ -b^{-1}\frac{1}{\cos(\beta+\gamma)}e^{i\gamma} & a^{-1}\frac{\sin(\beta+\gamma)}{\cos(\beta+\gamma)}e^{i(-\alpha+\frac{\pi}{2}\pm\pi)} \end{pmatrix}\,. \tag{A.20}$$

Es gibt 5 freie Parameter, plus eine zweideutige Phase. Die gleiche Anzahl freier Parameter gibt es offensichtlich auch im Fall $\cos(\beta + \gamma) = 0$.

3. Fall: $a, b, c, d \neq 0$, $\sin(\alpha + \delta) = 0$
Unter dieser Voraussetzung muss auch $\sin(\beta + \gamma) = 0$ sein. Demnach muss $\delta = -\alpha + \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{2}$ und $\gamma = -\beta + \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{2}$ sein. Es folgt

$$\begin{aligned} ade^{i(\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{2})} - bce^{i(\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{2})} &\overset{(A.15)}{=} 1 \\ \implies \quad d &= (1 + bce^{i(\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{2})})a^{-1}e^{-i(\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{2})} \end{aligned} \tag{A.21}$$

Man beachte, dass die beiden unbestimmten Phasen aus zwei unabhängigen Quellen herrühren: Die eine stammt aus $\gamma = -\beta + \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{2}$, die andere aus $\delta = -\alpha + \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{2}$. Nur Phasenfaktoren die aus der gleichen Quelle stammen dürfen gegeneinander verrechnet werden. Die allgemeinste Form eines Elements aus SL(2,$\mathbb{C}$) ist in diesem Fall

$$\begin{pmatrix} ae^{i\alpha} & be^{i\beta} \\ ce^{i(-\beta+\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{2})} & (1 + bce^{i(\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{2})})a^{-1}e^{i(-\alpha)} \end{pmatrix} . \tag{A.22}$$

Es gibt 5 freie Parameter, und eine zweideutige Phase. Zwar taucht die zweideutige Phase in zwei Elementen auf, es handelt sich aber beides mal um den Phasenfaktor aus $\gamma = -\beta + \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{2}$, so dass dies nur eine einzige Unbestimmtheit ist.

4. Fall: $a, b, c, d \neq 0$, $\cos(\alpha + \delta), \sin(\alpha + \delta), \cos(\beta + \gamma), \sin(\beta + \gamma) \neq 0$
Aus der Bedingung für die Determinante folgt

$$d \overset{(A.15)}{=} \frac{1 + bc\cos(\beta + \gamma)}{a\cos(\alpha + \delta)} \tag{A.23}$$

$$c \overset{(A.15)}{=} \frac{a\frac{1+bc\cos(\beta+\gamma)}{a\cos(\alpha+\delta)}\sin(\alpha + \delta)}{b\sin(\beta + \gamma)} \tag{A.24}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} c &= \frac{1 + bc\cos(\beta + \gamma)\sin(\alpha + \delta)}{\cos(\alpha + \delta)b\sin(\beta + \gamma)} \\ &= \Big(\cos(\alpha + \delta)b\sin(\beta + \gamma) - b\cos(\beta + \gamma)\sin(\alpha + \delta)\Big)^{-1} \end{aligned} \tag{A.25}$$

$$d = \frac{1 + b \cdot (\text{A.25}) \cdot \cos(\beta + \gamma)}{a \cos(\alpha + \delta)} \tag{A.26}$$

Die allgemeinste Form eines Elements aus SL(2,$\mathbb{C}$) ist in diesem Fall

$$\begin{pmatrix} a e^{i\alpha} & b e^{i\beta} \\ (\text{A.25}) e^{i\gamma} & (\text{A.26}) e^{i\delta} \end{pmatrix} . \tag{A.27}$$

Es gibt 6 freie Parameter, also mehr als in den zuvor untersuchten Fällen.

Ein allgemeines Element aus SL(2,$\mathbb{C}$) wird demnach durch genau sechs reelle Parameter eindeutig bestimmt.

A.4 Nebenrechnung zu Gleichung (6.15)

Wir berechnen die allgemeinste Form einer Matrix $U \in \mathrm{SU}(2)$ unter Berücksichtigung der Randbedingungen (6.13) und (6.14). Dabei treffen wir eine Fallunterscheidung für a.

Erster Fall: $a = 0$

$$\det U \overset{(6.13)}{=} -bc = +1 \quad \Longrightarrow \quad b \neq 0\ ,\ c = -\frac{1}{b} \tag{A.28}$$

$$bd^* \overset{(6.14b)}{=} 0 \quad \Longrightarrow \quad d = 0 \tag{A.29}$$

$$bb^* \overset{(6.14a)}{=} 1 \quad \Longrightarrow \quad b = \exp\{i\phi\} \text{ mit } \phi \in \mathbb{R} \tag{A.30}$$

Die allgemeinste Form einer Matrix $U \in \mathrm{SU}(2)$ im Fall $a = 0$ ist also

$$U = \begin{pmatrix} 0 & \exp\{i\phi\} \\ -\exp\{-i\phi\} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \phi \in \mathbb{R} \quad . \tag{A.31}$$

Zweiter Fall: $a \neq 0$

$$
\begin{aligned}
c &\overset{(6.14c)}{=} -\frac{db^*}{a^*} \\
d &\overset{(6.13)}{=} \frac{1+bc}{a} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a}\frac{db^*}{a^*} \\
d\Big(1+\frac{bb^*}{aa^*}\Big) &\overset{(6.14a)}{=} \frac{d}{aa^*} = \frac{1}{a} \\
\Longrightarrow \quad & d = a^* \qquad (A.32) \\
\Longrightarrow \quad & c = -b^* \qquad (A.33)
\end{aligned}
$$

Die allgemeinste Form einer Matrix $U \in \mathrm{SU}(2)$ ist also

$$
U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad aa^* + bb^* \overset{(6.14a)}{=} 1 \quad , \qquad (A.34)
$$

denn diese Form gilt sowohl im Fall $a \neq 0$ als auch im Fall $a = 0$, vergleiche (A.31).

A.5 Nebenrechnungen zur Herleitung von (6.38) und (6.40)

Wir definieren die unitäre Transformation

$$
T \equiv \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{1}{2}} & -\sqrt{\frac{1}{2}} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad . \qquad (A.35)
$$

T ist tatsächlich unitär, denn die adjungierte (= transponierte konjugiert-komplexe) Transformation $T^\dagger$ ist gleich der inversen:

$$
TT^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{1}{2}} & -\sqrt{\frac{1}{2}} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 & \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 \\ -\sqrt{\frac{1}{2}} & 0 & \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$TT^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad T^\dagger = T^{-1} \tag{A.36}$$

Die allgemeine Form der Matrizen $\widetilde{W}$ ergibt sich unter Beachtung von $aa^* + bb^* \overset{(6.15)}{=} 1$ als

$$\widetilde{W} = TWT^{-1} \overset{(6.35)}{=} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{1}{2}} & -\sqrt{\frac{1}{2}} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} aa & ab & ba & bb \\ -ab^* & aa^* & -bb^* & ba^* \\ -b^*a & -b^*b & a^*a & a^*b \\ b^*b^* & -b^*a^* & -a^*b^* & a^*a^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 & \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 \\ -\sqrt{\frac{1}{2}} & 0 & \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{1}{2}} & -\sqrt{\frac{1}{2}} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} ab\sqrt{\frac{1}{2}} - ba\sqrt{\frac{1}{2}} & aa & ab\sqrt{\frac{1}{2}} + ba\sqrt{\frac{1}{2}} & bb \\ aa^*\sqrt{\frac{1}{2}} + bb^*\sqrt{\frac{1}{2}} & -ab^* & aa^*\sqrt{\frac{1}{2}} - bb^*\sqrt{\frac{1}{2}} & ba^* \\ -b^*b\sqrt{\frac{1}{2}} - a^*a\sqrt{\frac{1}{2}} & -b^*a & -b^*b\sqrt{\frac{1}{2}} + a^*a\sqrt{\frac{1}{2}} & a^*b \\ -b^*a^*\sqrt{\frac{1}{2}} + a^*b^*\sqrt{\frac{1}{2}} & b^*b^* & -b^*a^*\sqrt{\frac{1}{2}} - a^*b^*\sqrt{\frac{1}{2}} & a^*a^* \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{1}{2}} & -\sqrt{\frac{1}{2}} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & aa & ab\sqrt{2} & bb \\ \sqrt{\frac{1}{2}} & -ab^* & (aa^* - bb^*)\sqrt{\frac{1}{2}} & ba^* \\ -\sqrt{\frac{1}{2}} & -b^*a & (aa^* - bb^*)\sqrt{\frac{1}{2}} & a^*b \\ 0 & b^*b^* & -a^*b^*\sqrt{2} & a^*a^* \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & aa & ab\sqrt{2} & bb \\ 0 & -ab^*\sqrt{2} & aa^* - bb^* & a^*b\sqrt{2} \\ 0 & b^*b^* & -a^*b^*\sqrt{2} & a^*a^* \end{pmatrix} \quad . \tag{A.37}$$

Die Spinoren $\widetilde{\chi}$, welche die Basis dieser Darstellung bilden, haben die Form

$$\begin{aligned} \widetilde{\chi} &\overset{(6.37)}{=} T\chi \overset{(A.35)}{=} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{1}{2}} & -\sqrt{\frac{1}{2}} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_{11} \\ \chi_{12} \\ \chi_{21} \\ \chi_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}}(\chi_{12} - \chi_{21}) \\ \chi_{11} \\ \sqrt{\frac{1}{2}}(\chi_{12} + \chi_{21}) \\ \chi_{22} \end{pmatrix} \overset{(6.32)}{=} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}}(\phi_1\psi_2 - \phi_2\psi_1) \\ \phi_1\psi_1 \\ \sqrt{\frac{1}{2}}(\phi_1\psi_2 + \phi_2\psi_1) \\ \phi_2\psi_2 \end{pmatrix} \quad . \end{aligned} \tag{A.38}$$

A.6 Herleitung von (8.41) aus (8.40)

$$[\gamma^\nu, S^{\sigma\tau}] \overset{(8.40)}{=} B^{\sigma\tau\nu}{}_\mu \gamma^\mu \tag{A.39}$$

Mit der Definition

$$B^{\sigma\tau\nu}{}_\mu \overset{(5.33)}{\equiv} i\hbar(g^{\sigma\nu} g^\tau{}_\mu - g^{\tau\nu} g^\sigma{}_\mu) \tag{A.40}$$

der Generatoren der Lorentztransformationen wird daraus

$$[\gamma^\nu, S^{\sigma\tau}] = i\hbar\tfrac{1}{4}(4g^{\sigma\nu}\gamma^\tau - 4g^{\tau\nu}\gamma^\sigma) \tag{A.41}$$

Wir zerlegen die beiden Summanden auf der rechten Seite in je zwei gleich große Teile, und addieren die Zahl Null in Form von vier weiteren Summanden:

$$[\gamma^\nu, S^{\sigma\tau}] = i\hbar\tfrac{1}{4}(2g^{\sigma\nu}\gamma^\tau - \gamma^\sigma\gamma^\nu\gamma^\tau - 2g^{\tau\nu}\gamma^\sigma + \gamma^\tau\gamma^\nu\gamma^\sigma \\ - 2g^{\tau\nu}\gamma^\sigma + \gamma^\sigma\gamma^\nu\gamma^\tau + 2g^{\sigma\nu}\gamma^\tau - \gamma^\tau\gamma^\nu\gamma^\sigma)$$

Mit

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu \overset{(8.9)}{=} 2g^{\mu\nu}\mathbb{1} \tag{A.42}$$

können je zwei benachbarte Summanden auf der rechten Seite zusammen gefasst werden:

$$\begin{aligned}[\gamma^\nu, S^{\sigma\tau}] &= i\hbar\tfrac{1}{4}(\gamma^\nu\gamma^\sigma\gamma^\tau - \gamma^\nu\gamma^\tau\gamma^\sigma - \gamma^\sigma\gamma^\tau\gamma^\nu + \gamma^\tau\gamma^\sigma\gamma^\nu) \\ &= i\hbar\tfrac{1}{4}(\gamma^\nu[\gamma^\sigma, \gamma^\tau] - [\gamma^\sigma, \gamma^\tau]\gamma^\nu) \\ &= \Big[\gamma^\nu, \frac{i\hbar}{4}[\gamma^\sigma, \gamma^\tau]\Big]\end{aligned} \tag{A.43}$$

A.7 Beweis von Satz (8.43)

Es wird mehrfach von (8.9) sowie von $g^{\alpha\beta} \overset{(2.5)}{=} g^{\beta\alpha}$ Gebrauch gemacht:

$$\begin{aligned}[S^{\alpha\beta}, S^{\eta\delta}] &= -\frac{\hbar^2}{16}\Big((\gamma^\alpha\gamma^\beta - \gamma^\beta\gamma^\alpha)(\gamma^\eta\gamma^\delta - \gamma^\delta\gamma^\eta) \\ &\quad - (\gamma^\eta\gamma^\delta - \gamma^\delta\gamma^\eta)(\gamma^\alpha\gamma^\beta - \gamma^\beta\gamma^\alpha)\Big) = \\ &= -\frac{\hbar^2}{16}\Big(\gamma^\alpha(2g^{\beta\eta}\mathbb{1} - \gamma^\eta\gamma^\beta)\gamma^\delta - \gamma^\alpha(2g^{\beta\delta}\mathbb{1} - \gamma^\delta\gamma^\beta)\gamma^\eta \\ &\quad - \gamma^\beta(2g^{\alpha\eta}\mathbb{1} - \gamma^\eta\gamma^\alpha)\gamma^\delta + \gamma^\beta(2g^{\alpha\delta}\mathbb{1} - \gamma^\delta\gamma^\alpha)\gamma^\eta \\ &\quad - \gamma^\eta(2g^{\delta\alpha}\mathbb{1} - \gamma^\alpha\gamma^\delta)\gamma^\beta + \gamma^\eta(2g^{\delta\beta}\mathbb{1} - \gamma^\beta\gamma^\delta)\gamma^\alpha \\ &\quad + \gamma^\delta(2g^{\eta\alpha}\mathbb{1} - \gamma^\alpha\gamma^\eta)\gamma^\beta - \gamma^\delta(2g^{\eta\beta}\mathbb{1} - \gamma^\beta\gamma^\eta)\gamma^\alpha\Big) =\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{\hbar^2}{16}\Big(2g^{\beta\eta}\gamma^\alpha\gamma^\delta - \gamma^\alpha\gamma^\eta\gamma^\beta\gamma^\delta - 2g^{\beta\delta}\gamma^\alpha\gamma^\eta + \gamma^\alpha\gamma^\delta\gamma^\beta\gamma^\eta \\
&\quad - 2g^{\alpha\eta}\gamma^\beta\gamma^\delta + \gamma^\beta\gamma^\eta\gamma^\alpha\gamma^\delta + 2g^{\alpha\delta}\gamma^\beta\gamma^\eta - \gamma^\beta\gamma^\delta\gamma^\alpha\gamma^\eta \\
&\quad - 2g^{\delta\alpha}\gamma^\eta\gamma^\beta + (2g^{\eta\alpha}\mathbb{1} - \gamma^\alpha\gamma^\eta)(2g^{\delta\beta}\mathbb{1} - \gamma^\beta\gamma^\delta) \\
&\quad + 2g^{\delta\beta}\gamma^\eta\gamma^\alpha - (2g^{\eta\beta}\mathbb{1} - \gamma^\beta\gamma^\eta)(2g^{\delta\alpha}\mathbb{1} - \gamma^\alpha\gamma^\delta) \\
&\quad + 2g^{\eta\alpha}\gamma^\delta\gamma^\beta - (2g^{\delta\alpha}\mathbb{1} - \gamma^\alpha\gamma^\delta)(2g^{\eta\beta}\mathbb{1} - \gamma^\beta\gamma^\eta) \\
&\quad - 2g^{\eta\beta}\gamma^\delta\gamma^\alpha + (2g^{\delta\beta}\mathbb{1} - \gamma^\beta\gamma^\delta)(2g^{\eta\alpha}\mathbb{1} - \gamma^\alpha\gamma^\eta)\Big) = \\
&= -\frac{\hbar^2}{16}\Big(2g^{\beta\eta}\gamma^\alpha\gamma^\delta - 2g^{\beta\delta}\gamma^\alpha\gamma^\eta - 2g^{\alpha\eta}\gamma^\beta\gamma^\delta + 2g^{\alpha\delta}\gamma^\beta\gamma^\eta \\
&\quad - 2g^{\delta\alpha}\gamma^\eta\gamma^\beta + 4g^{\eta\alpha}g^{\delta\beta}\mathbb{1} - 2g^{\eta\alpha}\gamma^\beta\gamma^\delta - 2g^{\delta\beta}(2g^{\alpha\eta}\mathbb{1} - \gamma^\eta\gamma^\alpha) \\
&\quad + 2g^{\delta\beta}\gamma^\eta\gamma^\alpha - 4g^{\eta\beta}g^{\delta\alpha}\mathbb{1} + 2g^{\eta\beta}\gamma^\alpha\gamma^\delta + 2g^{\delta\alpha}(2g^{\beta\eta}\mathbb{1} - \gamma^\eta\gamma^\beta) \\
&\quad + 2g^{\eta\alpha}\gamma^\delta\gamma^\beta - 4g^{\delta\alpha}g^{\eta\beta}\mathbb{1} + 2g^{\delta\alpha}\gamma^\beta\gamma^\eta + 2g^{\eta\beta}(2g^{\alpha\delta}\mathbb{1} - \gamma^\delta\gamma^\alpha) \\
&\quad - 2g^{\eta\beta}\gamma^\delta\gamma^\alpha + 4g^{\delta\beta}g^{\eta\alpha}\mathbb{1} - 2g^{\delta\beta}\gamma^\alpha\gamma^\eta - 2g^{\eta\alpha}(2g^{\beta\delta}\mathbb{1} - \gamma^\delta\gamma^\beta)\Big) = \\
&= -\frac{\hbar^2}{16}\Big(4g^{\beta\eta}(\gamma^\alpha\gamma^\delta - \gamma^\delta\gamma^\alpha) - 4g^{\beta\delta}(\gamma^\alpha\gamma^\eta - \gamma^\eta\gamma^\alpha) \\
&\quad - 4g^{\alpha\eta}(\gamma^\beta\gamma^\delta - \gamma^\delta\gamma^\beta) + 4g^{\alpha\delta}(\gamma^\beta\gamma^\eta - \gamma^\eta\gamma^\beta)\Big) = \\
&= i\hbar(g^{\beta\eta}S^{\alpha\delta} - g^{\beta\delta}S^{\alpha\eta} - g^{\alpha\eta}S^{\beta\delta} + g^{\alpha\delta}S^{\beta\eta})
\end{aligned}
\tag{A.44}
$$

A.8 Geradzahlige Dimension von Dirac-Matrizen

Die folgende Rechnung gehört zur Herleitung der Dirac-Matrizen in Abschnitt 8.1. Wir zeigen, dass die γ-Matrizen gradzahlige Dimension haben müssen. γ^0 und $i\gamma^j$ sind hermitesch. Man kann jede hermitesche Matrix durch eine geeignete unitäre Transformation U in Diagonalgestalt bringen. In der Diagonale stehen dann ihre Eigenwerte (die bei einer hermiteschen Matrix allesamt reell sind), alle nicht-Diagonalelemente sind Null. Es gilt

$$
\underbrace{U_0\gamma^0U_0^{-1}}_{\text{diagonal}}\,\underbrace{U_0\gamma^0U_0^{-1}}_{\text{diagonal}} \overset{(8.9)}{=} U_0\mathbb{1}U_0^{-1} = \mathbb{1} \tag{A.45}
$$

$$\underbrace{U_j i\gamma^j U_j^{-1}}_{\text{diagonal}}\,\underbrace{U_j i\gamma^j U_j^{-1}}_{\text{diagonal}} \overset{(8.9)}{=} U_j \mathbb{1} U_j^{-1} = \mathbb{1} \quad , \tag{A.46}$$

hier ausnahmsweise keine Summation über j!

also sind sämtliche Eigenwerte der Matrizen γ^0 und $i\gamma^j$ gleich ± 1. Die Spur der γ-Matrizen, also die Summe ihrer Diagonalelemente, ist gleich der Summe ihrer Eigenwerte, weil die Spur sich bei zyklischer Vertauschung ihrer Argumente nicht ändert:

$$\mathrm{Spur}(U_0\gamma^0 U_0^{-1}) = \mathrm{Spur}(U_0^{-1}U_0\gamma^0) = \mathrm{Spur}(\gamma^0) \tag{A.47}$$

$$\mathrm{Spur}(U_j i\gamma^j U_j^{-1}) = \mathrm{Spur}(U_j^{-1}U_j i\gamma^j) = i\mathrm{Spur}(\gamma^j) \tag{A.48}$$

hier ausnahmsweise keine Summation über j!

Die Spur der γ^j ist Null wegen

$$\mathrm{Spur}(\gamma^j) = \mathrm{Spur}(\underbrace{\gamma^0\gamma^0}_{\mathbb{1}}\gamma^j) = \mathrm{Spur}(\gamma^0\gamma^j\gamma^0) =$$

$$\overset{(8.9)}{=} -\mathrm{Spur}(\gamma^0\gamma^0\gamma^j) = -\mathrm{Spur}(\gamma^j) = 0 \quad . \tag{A.49a}$$

Die Spur von γ^0 ist Null wegen

$$\mathrm{Spur}(\gamma^0) = \mathrm{Spur}(\underbrace{-\gamma^j\gamma^j}_{\mathbb{1}}\gamma^0) = \mathrm{Spur}(-\gamma^j\gamma^0\gamma^j) =$$

$$\overset{(8.9)}{=} -\mathrm{Spur}(-\gamma^j\gamma^j\gamma^0) = -\mathrm{Spur}(\gamma^0) = 0\,. \tag{A.49b}$$

hier ausnahmsweise keine Summation über j!

Wir wissen also: Alle Eigenwerte von γ^0 und $i\gamma^j$ sind ± 1, und die Summe der Eigenwerte ist Null. Also muss es genau so viele Eigenwerte $+1$ wie -1 geben, also müssen die γ^ν geradzahlige Dimension $2, 4, 6, \ldots$ haben.

A.9 Nebenrechnungen zu (8.67) und (8.68)

Wir betrachten einen reinen Boost, der durch das Multiplet $(\boldsymbol{\Theta}, \boldsymbol{\eta}) = (\mathbf{0}, \boldsymbol{\eta})$ parametrisiert wird. Wegen $\sigma^1\sigma^1 = \sigma^2\sigma^2 = \sigma^3\sigma^3 = \mathbb{1}$ und $\eta \equiv |\boldsymbol{\eta}|$ gilt

$$
\begin{aligned}
D &= \exp\Big\{ -\frac{\eta_j}{2} \begin{pmatrix} \sigma^j & 0 \\ 0 & -\sigma^j \end{pmatrix} \Big\} = \\
&= \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \sum_{n=0,2,4,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n!} \Big(\frac{\eta}{2}\Big)^n - \frac{\eta_j}{\eta} \begin{pmatrix} \sigma^j & 0 \\ 0 & -\sigma^j \end{pmatrix} \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n!} \Big(\frac{\eta}{2}\Big)^n \\
&= \begin{pmatrix} \mathbb{1} \cosh\left(\frac{\eta}{2}\right) - \frac{\eta_j}{\eta}\sigma^j \sinh\left(\frac{\eta}{2}\right) & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \cosh\left(\frac{\eta}{2}\right) + \frac{\eta_j}{\eta}\sigma^j \sinh\left(\frac{\eta}{2}\right) \end{pmatrix} . \qquad \text{(A.50)}
\end{aligned}
$$

Statt D als Funktion der drei Rapiditätsparameter $\boldsymbol{\eta}$ auszudrücken, kann man die Transformation auch als Funktion der drei Impulskomponenten $\boldsymbol{p}$ des Feldes im bewegten Koordinatensystem beschreiben. Das bewegte Koordinatensystem hat – gemessen im Ruhesystem – die Geschwindigkeit v. Mit dieser Geschwindigkeit hängt die Rapidität η durch die Relation

$$\tanh \eta = \frac{v}{c} \equiv \beta \qquad \text{(A.51)}$$

$$\cosh \eta = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 \eta}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \equiv \gamma \qquad \text{(A.52)}$$

$$\sinh \eta = \cosh \eta \tanh \eta = \gamma\beta \qquad \text{(A.53)}$$

zusammen. Die relativistische Energie E und der relativistische Impuls p des Feldes ψ hängen mit der Ruhemasse m und der relativistischen Masse γm zusammen durch

$$E = \gamma m c^2 \qquad , \qquad p = -\gamma m v = -\gamma\beta m c \, . \qquad \text{(A.54)}$$

Man beachte das Minuszeichen: Wir führen einen passiven Boost aus. Im bewegten Koordinatensystem hat das Feld die Geschwindigkeit $-v$. Aus dem gleichen Grund hat der Einheitsvektor in Richtung der Bewegung des Koordinatensystems – gemessen im Ruhesystem des Feldes – die Komponen-

ten η_j/η, der Einheitsvektor in Richtung des bewegten Feldes – gemessen im bewegten Koordinatensystem – die Komponenten $p_j/p = -\eta_j/\eta$, wobei p der Impuls des Feldes ist, der im bewegten Koordinatensystem gemessen wird. Diese Relationen setzen wir ein in die hyperbolischen Funktionen von $\eta/2$:

$$\cosh\frac{\eta}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(\cosh\eta+1)} = \sqrt{\frac{1}{2}(\gamma+1)} = \sqrt{\frac{1}{2}\,\frac{E+mc^2}{mc^2}} = \\ = \frac{E+mc^2}{\sqrt{2mc^2(E+mc^2)}} \tag{A.55}$$

$$\sinh\frac{\eta}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(\cosh\eta-1)} = \sqrt{\frac{1}{2}(\gamma-1)} = \sqrt{\frac{1}{2}\,\frac{E-mc^2}{mc^2}} = \\ = \frac{\sqrt{E^2-m^2c^4}}{\sqrt{2mc^2(E+mc^2)}} = \frac{cp}{\sqrt{2mc^2(E+mc^2)}} \tag{A.56}$$

Einsetzen in (A.50) ergibt

$$D = \sqrt{\frac{1}{2mc^2(E+mc^2)}}\cdot \\ \cdot\begin{pmatrix}(E+mc^2)\mathbb{1}+cp_j\sigma^j & 0\\ 0 & (E+mc^2)\mathbb{1}-cp_j\sigma^j\end{pmatrix}. \tag{A.57}$$

A.10 Herleitung der Gleichungen (8.76)

Mit den Definitionen

$$N \equiv \sqrt{\frac{1}{2(E+mc^2)}} \tag{A.58a}$$

$$A_+ \equiv E+mc^2+cp_3 \tag{A.58b}$$

$$B \equiv cp_1+icp_2 \tag{A.58c}$$

$$A_- \equiv E+mc^2-cp_3 \tag{A.58d}$$

sind die Spinoren (8.75):

$$
{}^1u^{\boldsymbol{k}} = N\begin{pmatrix} A_+ \\ B \\ A_- \\ -B \end{pmatrix}\ ,\ {}^2u^{\boldsymbol{k}} = N\begin{pmatrix} B^* \\ A_- \\ -B^* \\ A_+ \end{pmatrix}\ ,\ {}^1v^{\boldsymbol{k}} = N\begin{pmatrix} A_+ \\ B \\ -A_- \\ B \end{pmatrix}
$$

$$
{}^2v^{\boldsymbol{k}} = N\begin{pmatrix} B^* \\ A_- \\ B^* \\ -A_+ \end{pmatrix}\ ,\quad \begin{aligned} {}^1u^{\boldsymbol{k}\dagger} &= N\begin{pmatrix} A_+ & B^* & A_- & -B^* \end{pmatrix} \\ {}^2u^{\boldsymbol{k}\dagger} &= N\begin{pmatrix} B & A_- & -B & A_+ \end{pmatrix} \\ {}^1v^{\boldsymbol{k}\dagger} &= N\begin{pmatrix} A_+ & B^* & -A_- & B^* \end{pmatrix} \\ {}^2v^{\boldsymbol{k}\dagger} &= N\begin{pmatrix} B & A_- & B & -A_+ \end{pmatrix} \end{aligned}
$$

$$
{}^1u^{-\boldsymbol{k}} = N\begin{pmatrix} A_- \\ -B \\ A_+ \\ B \end{pmatrix}\ ,\ {}^2u^{-\boldsymbol{k}} = N\begin{pmatrix} -B^* \\ A_+ \\ B^* \\ A_- \end{pmatrix}\ ,\ {}^1v^{-\boldsymbol{k}} = N\begin{pmatrix} A_- \\ -B \\ -A_+ \\ -B \end{pmatrix}
$$

$$
{}^2v^{-\boldsymbol{k}} = N\begin{pmatrix} -B^* \\ A_+ \\ -B^* \\ -A_- \end{pmatrix}\ ,\quad \begin{aligned} {}^1u^{-\boldsymbol{k}\dagger} &= N\begin{pmatrix} A_- & -B^* & A_+ & B^* \end{pmatrix} \\ {}^2u^{-\boldsymbol{k}\dagger} &= N\begin{pmatrix} -B & A_+ & B & A_- \end{pmatrix} \\ {}^1v^{-\boldsymbol{k}\dagger} &= N\begin{pmatrix} A_- & -B^* & -A_+ & -B^* \end{pmatrix} \\ {}^2v^{-\boldsymbol{k}\dagger} &= N\begin{pmatrix} -B & A_+ & -B & -A_- \end{pmatrix} \end{aligned} \qquad \text{(A.59)}
$$

Wir berechnen einige Summen von Produkten von Spinorkomponenten:

$$
\begin{aligned}
&{}^1u_1^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^1u_1^{\boldsymbol{k}} + {}^2u_1^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^2u_1^{\boldsymbol{k}} + {}^1v_1^{-\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^1v_1^{-\boldsymbol{k}} + {}^2v_1^{-\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^2v_1^{-\boldsymbol{k}} = \\
&\qquad = N^2(A_+A_+ + BB^* + A_-A_- + BB^*) = 2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}} \\
&{}^1u_1^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^2u_1^{\boldsymbol{k}} + {}^2u_1^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^1u_1^{\boldsymbol{k}} + {}^1v_1^{-\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^2v_1^{-\boldsymbol{k}} + {}^2v_1^{-\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^1v_1^{-\boldsymbol{k}} = \\
&\qquad = N^2(A_+B^* + BA_+ - A_-B^* - BA_-) \neq 0 \\
&{}^1u_1^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^1u_2^{\boldsymbol{k}} + {}^2u_1^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^2u_2^{\boldsymbol{k}} + {}^1v_1^{-\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^1v_2^{-\boldsymbol{k}} + {}^2v_1^{-\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^2v_2^{-\boldsymbol{k}} = \\
&\qquad = N^2(A_+B + BA_- - A_-B - BA_+) = 0 \\
&{}^1u_1^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^2u_2^{\boldsymbol{k}} + {}^2u_1^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^1u_2^{\boldsymbol{k}} + {}^1v_1^{-\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^2v_2^{-\boldsymbol{k}} + {}^2v_1^{-\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^1v_2^{-\boldsymbol{k}} = \\
&\qquad = N^2(A_+A_- + BB + A_-A_+ + BB) \neq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&{}^1u_1^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^1u_3^{\boldsymbol{k}} + {}^2u_1^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^2u_3^{\boldsymbol{k}} + {}^1v_1^{-\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^1v_3^{-\boldsymbol{k}} + {}^2v_1^{-\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^2v_3^{-\boldsymbol{k}} = \\
&\quad = N^2(A_+A_- - BB^* - A_-A_+ + BB^*) = 0 \\
&{}^1u_1^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^2u_3^{\boldsymbol{k}} + {}^2u_1^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^1u_3^{\boldsymbol{k}} + {}^1v_1^{-\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^2v_3^{-\boldsymbol{k}} + {}^2v_1^{-\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^1v_3^{-\boldsymbol{k}} = \\
&\quad = N^2(-A_+B^* + BA_- - A_-B^* + BA_+) = 0 \\
&{}^1u_1^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^1u_4^{\boldsymbol{k}} + {}^2u_1^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^2u_4^{\boldsymbol{k}} + {}^1v_1^{-\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^1v_4^{-\boldsymbol{k}} + {}^2v_1^{-\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^2v_4^{-\boldsymbol{k}} = \\
&\quad = N^2(-A_+B + BA_+ - A_-B + BA_-) = 0 \\
&{}^1u_1^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^2u_4^{\boldsymbol{k}} + {}^2u_1^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^1u_4^{\boldsymbol{k}} + {}^1v_1^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^2v_4^{\boldsymbol{k}} + {}^2v_1^{-\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^1v_4^{-\boldsymbol{k}} = \\
&\quad = N^2(A_+A_+ - BB - A_+A_+ + BB) = 0 \\
&{}^1u_2^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^1u_1^{\boldsymbol{k}} + {}^2u_2^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^2u_1^{\boldsymbol{k}} + {}^1v_2^{-\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^1v_1^{-\boldsymbol{k}} + {}^2v_2^{-\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^2v_1^{-\boldsymbol{k}} = \\
&\quad = N^2(B^*A_+ + A_-B^* - B^*A_- - A_+B^*) = 0 \\
&{}^1u_2^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^2u_1^{\boldsymbol{k}} + {}^2u_2^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^1u_1^{\boldsymbol{k}} + {}^1v_2^{-\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^2v_1^{-\boldsymbol{k}} + {}^2v_2^{-\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^1v_1^{-\boldsymbol{k}} = \\
&\quad = N^2(B^*B^* + A_-A_+ + BB^* + A_+A_-) \neq 0 \\
&{}^1u_2^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^1u_2^{\boldsymbol{k}} + {}^2u_2^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^2u_2^{\boldsymbol{k}} + {}^1v_2^{-\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^1v_2^{-\boldsymbol{k}} + {}^2v_2^{-\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^2v_2^{-\boldsymbol{k}} = \\
&\quad = N^2(B^*B + A_-A_- + B^*B + A_+A_+) = 2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}} \\
&{}^1u_2^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^2u_2^{\boldsymbol{k}} + {}^2u_2^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^1u_2^{\boldsymbol{k}} + {}^1v_2^{-\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^2v_2^{-\boldsymbol{k}} + {}^2v_2^{-\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^1v_2^{-\boldsymbol{k}} = \\
&\quad = N^2(B^*A_- + A_-B - B^*A_+ - A_+B) \neq 0 \\
&{}^1u_2^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^1u_3^{\boldsymbol{k}} + {}^2u_2^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^2u_3^{\boldsymbol{k}} + {}^1v_2^{-\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^1v_3^{-\boldsymbol{k}} + {}^2v_2^{-\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^2v_3^{-\boldsymbol{k}} = \\
&\quad = N^2(B^*A_- - A_-B^* + B^*A_+ - A_+B^*) = 0 \\
&{}^1u_2^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^2u_3^{\boldsymbol{k}} + {}^2u_2^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^1u_3^{\boldsymbol{k}} + {}^1v_2^{-\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^2v_3^{-\boldsymbol{k}} + {}^2v_2^{-\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^1v_3^{-\boldsymbol{k}} = \\
&\quad = N^2(-B^*B^* + A_-A_- + B^*B^* - A_+A_+) \neq 0 \\
&{}^1u_2^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^1u_4^{\boldsymbol{k}} + {}^2u_2^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^2u_4^{\boldsymbol{k}} + {}^1v_2^{-\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^1v_4^{-\boldsymbol{k}} + {}^2v_2^{-\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^2v_4^{-\boldsymbol{k}} = \\
&\quad = N^2(-B^*B + A_-A_+ + B^*B - A_+A_-) = 0 \\
&{}^1u_2^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^2u_4^{\boldsymbol{k}} + {}^2u_2^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^1u_4^{\boldsymbol{k}} + {}^1v_2^{-\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^2v_4^{-\boldsymbol{k}} + {}^2v_2^{-\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^1v_4^{-\boldsymbol{k}} = \\
&\quad = N^2(B^*A_+ - A_-B + BA_- - A_+B) \neq 0 \\
&{}^1u_3^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^1u_1^{\boldsymbol{k}} + {}^2u_3^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^2u_1^{\boldsymbol{k}} + {}^1v_3^{-\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^1v_1^{-\boldsymbol{k}} + {}^2v_3^{-\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^2v_1^{-\boldsymbol{k}} = \\
&\quad = N^2(A_-A_+ - BB^* - A_+A_- + BB^*) = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&{}^1u_3^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^2u_1^{\boldsymbol{k}} + {}^2u_3^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^1u_1^{\boldsymbol{k}} + {}^1v_3^{-\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^2v_1^{-\boldsymbol{k}} + {}^2v_3^{-\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^1v_1^{-\boldsymbol{k}} = \\
&\qquad = N^2(A_-B^* - BA_+ + A_+B^* - BA_-) = 0 \\
&{}^1u_3^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^1u_2^{\boldsymbol{k}} + {}^2u_3^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^2u_2^{\boldsymbol{k}} + {}^1v_3^{-\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^1v_2^{-\boldsymbol{k}} + {}^2v_3^{-\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^2v_2^{-\boldsymbol{k}} = \\
&\qquad = N^2(A_-B - BA_- + A_+B - BA_+) = 0 \\
&{}^1u_3^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^2u_2^{\boldsymbol{k}} + {}^2u_3^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^1u_2^{\boldsymbol{k}} + {}^1v_3^{-\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^2v_2^{-\boldsymbol{k}} + {}^2v_3^{-\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^1v_2^{-\boldsymbol{k}} = \\
&\qquad = N^2(A_-A_- - BB - A_+A_+ + BB) \neq 0 \\
&{}^1u_3^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^1u_3^{\boldsymbol{k}} + {}^2u_3^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^2u_3^{\boldsymbol{k}} + {}^1v_3^{-\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^1v_3^{-\boldsymbol{k}} + {}^2v_3^{-\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^2v_3^{-\boldsymbol{k}} = \\
&\qquad = N^2(A_-A_- + BB^* + A_+A_+ + BB^*) = 2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}} \\
&{}^1u_3^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^2u_3^{\boldsymbol{k}} + {}^2u_3^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^1u_3^{\boldsymbol{k}} + {}^1v_3^{-\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^2v_3^{-\boldsymbol{k}} + {}^2v_3^{-\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^1v_3^{-\boldsymbol{k}} = \\
&\qquad = N^2(-A_-B^* - BA_- + A_+B^* + BA_+) \neq 0 \\
&{}^1u_3^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^1u_4^{\boldsymbol{k}} + {}^2u_3^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^2u_4^{\boldsymbol{k}} + {}^1v_3^{-\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^1v_4^{-\boldsymbol{k}} + {}^2v_3^{-\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^2v_4^{-\boldsymbol{k}} = \\
&\qquad = N^2(-A_-B - BA_+ + A_+B + BA_-) = 0 \\
&{}^1u_3^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^2u_4^{\boldsymbol{k}} + {}^2u_3^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^1u_4^{\boldsymbol{k}} + {}^1v_3^{-\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^2v_4^{-\boldsymbol{k}} + {}^2v_3^{-\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^1v_4^{-\boldsymbol{k}} = \\
&\qquad = N^2(A_-A_+ + BB + A_+A_- + BB) \neq 0 \\
&{}^1u_4^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^1u_1^{\boldsymbol{k}} + {}^2u_4^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^2u_1^{\boldsymbol{k}} + {}^1v_4^{-\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^1v_1^{-\boldsymbol{k}} + {}^2v_4^{-\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^2v_1^{-\boldsymbol{k}} = \\
&\qquad = N^2(-B^*A_+ + A_+B^* - B^*A_- + A_-B^*) = 0 \\
&{}^1u_4^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^2u_1^{\boldsymbol{k}} + {}^2u_4^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^1u_1^{\boldsymbol{k}} + {}^1v_4^{-\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^2v_1^{-\boldsymbol{k}} + {}^2v_4^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^1v_1^{\boldsymbol{k}} = \\
&\qquad = N^2(-B^*B^* + A_+A_+ + B^*B^* - A_+A_+) = 0 \\
&{}^1u_4^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^1u_2^{\boldsymbol{k}} + {}^2u_4^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^2u_2^{\boldsymbol{k}} + {}^1v_4^{-\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^1v_2^{-\boldsymbol{k}} + {}^2v_4^{-\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^2v_2^{-\boldsymbol{k}} = \\
&\qquad = N^2(-B^*B + A_+A_- + B^*B - A_-A_+) = 0 \\
&{}^1u_4^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^2u_2^{\boldsymbol{k}} + {}^2u_4^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^1u_2^{\boldsymbol{k}} + {}^1v_4^{-\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^2v_2^{-\boldsymbol{k}} + {}^2v_4^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^1v_2^{\boldsymbol{k}} = \\
&\qquad = N^2(-B^*A_- + A_+B - B^*A_-A_+B) \neq 0 \\
&{}^1u_4^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^1u_3^{\boldsymbol{k}} + {}^2u_4^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^2u_3^{\boldsymbol{k}} + {}^1v_4^{-\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^1v_3^{-\boldsymbol{k}} + {}^2v_4^{-\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^2v_3^{-\boldsymbol{k}} = \\
&\qquad = N^2(-B^*A_- - A_+B^* + B^*A_+ + A_-B^*) = 0 \\
&{}^1u_4^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^2u_3^{\boldsymbol{k}} + {}^2u_4^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^1u_3^{\boldsymbol{k}} + {}^1v_4^{-\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^2v_3^{-\boldsymbol{k}} + {}^2v_4^{-\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^1v_3^{-\boldsymbol{k}} = \\
&\qquad = N^2(B^*B^* + A_+A_- + B^*B^* + A_-A_+) \neq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&{}^1u_4^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^1u_4^{\boldsymbol{k}} + {}^2u_4^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^2u_4^{\boldsymbol{k}} + {}^1v_4^{-\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^1v_4^{-\boldsymbol{k}} + {}^2v_4^{-\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^2v_4^{-\boldsymbol{k}} \;= \\
&\qquad = N^2(B^*B + A_+A_+ + B^*B + A_-A_-) = 2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}} \\
&{}^1u_4^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^2u_4^{\boldsymbol{k}} + {}^2u_4^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^1u_4^{\boldsymbol{k}} + {}^1v_4^{-\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^2v_4^{-\boldsymbol{k}} + {}^2v_4^{-\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^1v_4^{-\boldsymbol{k}} \;= \\
&\qquad = N^2(-B^*A_+ - A_+B + B^*A_- + A_-B) \neq 0
\end{aligned}
\tag{A.60}
$$

Offenbar ist das allgemeine Resultat

$$
\begin{aligned}
&\sum_{r=1}^{2}\sum_{s=1}^{2}\left({}^ru_a^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^su_b^{\boldsymbol{k}} + {}^rv_a^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^sv_b^{\boldsymbol{k}} + {}^ru_a^{-\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^su_b^{-\boldsymbol{k}} + {}^rv_a^{-\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^sv_b^{-\boldsymbol{k}}\right)\delta_{rs} \;= \\
&\qquad = 2\cdot\delta_{ab}\,2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}
\end{aligned}
\tag{A.61a}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{r=1}^{2}\sum_{s=1}^{2}\left({}^ru_a^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^su_b^{\boldsymbol{k}} + {}^rv_a^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^sv_b^{\boldsymbol{k}} + {}^ru_a^{-\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^su_b^{-\boldsymbol{k}} + {}^rv_a^{-\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^sv_b^{-\boldsymbol{k}}\right) \;= \\
&\qquad = \text{irgendwas.}
\end{aligned}
\tag{A.61b}
$$

Insbesondere ist die Summe

$$
\begin{aligned}
&\sum_{r=1}^{2}\left({}^ru_a^{\boldsymbol{k}}\,{}^ru_b^{\boldsymbol{k}\,\dagger} + {}^rv_a^{-\boldsymbol{k}}\,{}^rv_b^{-\boldsymbol{k}\,\dagger}\right) \;= \\
&= N^2(A_+A_+ + A_-A_- + B^*B + B^*B)\,\delta_{ab} = \\
&= \frac{2(E+mc^2)^2 + 2c^2p_3^2 + 2c^2p_1^2 + 2c^2p_2^2}{2(E+mc^2)}\,\delta_{ab} = \\
&= \frac{4E(E+mc^2)}{2(E+mc^2)}\,\delta_{ab} = 2E\,\delta_{ab}\;.
\end{aligned}
\tag{A.61c}
$$

Außerdem erhält man die Spinorprodukte

$$
\begin{aligned}
{}^1u^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^1u^{\boldsymbol{k}} &= N^2\begin{pmatrix}A_+ & B^* & A_- & -B^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_+\\ B\\ A_-\\ -B\end{pmatrix} \\
&= N^2(A_+^2 + B^*B + A_-^2 + B^*B) = 2E
\end{aligned}
\tag{A.62a}
$$

$$
{}^2u^{\boldsymbol{k}\dagger}\,{}^2u^{\boldsymbol{k}} = N^2(BB^* + A_-^2 + BB^* + A_+^2) = 2E
\tag{A.62b}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^1v^{\boldsymbol{k}\dagger 1}v^{\boldsymbol{k}} &= N^2(A_+^2 + B^*B + A_-^2 + B^*B) = 2E && \text{(A.62c)}\\
{}^2v^{\boldsymbol{k}\dagger 2}v^{\boldsymbol{k}} &= N^2(BB^* + A_-^2 + BB^* + A_+^2) = 2E && \text{(A.62d)}\\
{}^1u^{\boldsymbol{k}\dagger 2}u^{\boldsymbol{k}} &= N^2(A_+B^* + B^*A_- - A_-B^* - B^*A_+) = 0 && \text{(A.62e)}\\
{}^2u^{\boldsymbol{k}\dagger 1}u^{\boldsymbol{k}} &= N^2(BA_+ + A_-B - BA_- - A_+B) = 0 && \text{(A.62f)}\\
{}^1v^{\boldsymbol{k}\dagger 2}v^{\boldsymbol{k}} &= N^2(A_+B^* + B^*A_- - A_-B^* - B^*A_+) = 0 && \text{(A.62g)}\\
{}^2v^{\boldsymbol{k}\dagger 1}v^{\boldsymbol{k}} &= N^2(BA_+ + A_-B - BA_- - A_+B) = 0 && \text{(A.62h)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^1u^{\boldsymbol{k}\dagger 1}v^{\boldsymbol{k}} &= N^2(A_+^2 + B^*B - A_-^2 - B^*B) = \\
&= 2(E+mc^2)cp_3 && \text{(A.63a)}\\
{}^1v^{\boldsymbol{k}\dagger 1}u^{\boldsymbol{k}} &= N^2(A_+^2 + B^*B - A_-^2 - B^*B) = {}^1u^{\boldsymbol{k}\dagger 1}v^{\boldsymbol{k}} && \text{(A.63b)}\\
{}^2u^{\boldsymbol{k}\dagger 2}v^{\boldsymbol{k}} &= N^2(BB^* + A_-^2 - BB^* - A_+^2) = -{}^1u^{\boldsymbol{k}\dagger 1}v^{\boldsymbol{k}} && \text{(A.63c)}\\
{}^2v^{\boldsymbol{k}\dagger 2}u^{\boldsymbol{k}} &= N^2(BB^* + A_-^2 - BB^* - A_+^2) = -{}^1u^{\boldsymbol{k}\dagger 1}v^{\boldsymbol{k}} && \text{(A.63d)}\\
{}^1u^{\boldsymbol{k}\dagger 2}v^{\boldsymbol{k}} &= N^2(A_+B^* + B^*A_- + A_-B^* + BA_+) = 2cp_1 && \text{(A.63e)}\\
{}^2v^{\boldsymbol{k}\dagger 1}u^{\boldsymbol{k}} &= N^2(BA_+ + A_-B + BA_- + A_+B) = cp_1 + icp_2 && \text{(A.63f)}\\
{}^2u^{\boldsymbol{k}\dagger 1}v^{\boldsymbol{k}} &= N^2(BA_+ + A_-B - BA_- + A_+B) = \\
&= \frac{(E+mc^2+cp_3)(cp_1+icp_2)}{(E+mc^2)} && \text{(A.63g)}\\
{}^1v^{\boldsymbol{k}\dagger 2}u^{\boldsymbol{k}} &= N^2(A_+B^* + B^*A_- - A_-B^* + B^*A_+) = \\
&= ({}^2u^{\boldsymbol{k}\dagger 1}v^{\boldsymbol{k}})^* && \text{(A.63h)}\\
{}^1u^{\dagger\text{-}\boldsymbol{k}1}v^{\boldsymbol{k}} &= N^2(A_-A_+ - B^*B - A_+A_- + B^*B) = 0 && \text{(A.63i)}\\
{}^1u^{\dagger\text{-}\boldsymbol{k}2}v^{\boldsymbol{k}} &= N^2(A_-B^* - B^*A_- + A_+B^* - B^*A_+) = 0 && \text{(A.63j)}\\
{}^2u^{\dagger\text{-}\boldsymbol{k}1}v^{\boldsymbol{k}} &= N^2(-BA_+ + A_+B - BA_- + A_-B) = 0 && \text{(A.63k)}\\
{}^2u^{\dagger\text{-}\boldsymbol{k}2}v^{\boldsymbol{k}} &= N^2(-BB^* + A_+A_- + BB^* - A_-A_+) = 0 && \text{(A.63l)}\\
{}^1v^{\dagger\text{-}\boldsymbol{k}1}u^{\boldsymbol{k}} &= N^2(A_-A_+ - B^*B - A_+A_- + B^*B) = 0 && \text{(A.63m)}\\
{}^1v^{\dagger\text{-}\boldsymbol{k}2}u^{\boldsymbol{k}} &= N^2(A_-B^* - B^*A_- + A_+B^* - B^*A_+) = 0 && \text{(A.63n)}\\
{}^2v^{\dagger\text{-}\boldsymbol{k}1}u^{\boldsymbol{k}} &= N^2(-BA_+ + A_+B - BA_- + A_-B) = 0 && \text{(A.63o)}
\end{aligned}
$$

$$ {}^{2}v^{\dagger}\text{-}\boldsymbol{k}\,{}^{2}u^{\boldsymbol{k}} = N^2(-BB^* + A_+A_- + BB^* - A_-A_+) = 0 \tag{A.63p} $$

$$ {}^{1}u^{\boldsymbol{k}}\,{}^{1}u^{\boldsymbol{k}\dagger} = N^2 \begin{pmatrix} A_+A_+ & A_+B^* & A_+A_- & -A_+B^* \\ BA_+ & BB^* & BA_- & -BB^* \\ A_-A_+ & A_-B^* & A_-A_- & -A_-B^* \\ -BA_+ & -BB^* & -BA_- & BB^* \end{pmatrix} \tag{A.63q} $$

$$ {}^{1}u^{\boldsymbol{k}}\,{}^{2}u^{\boldsymbol{k}\dagger} = N^2 \begin{pmatrix} A_+B & A_+A_- & -A_+B & A_+A_+ \\ BB & BA_- & -BB & BA_+ \\ A_-B & A_-A_- & -A_-B & A_-A_+ \\ -BB & -BA_- & BB & -BA_+ \end{pmatrix} \tag{A.63r} $$

$$ {}^{2}u^{\boldsymbol{k}}\,{}^{1}u^{\boldsymbol{k}\dagger} = N^2 \begin{pmatrix} B^*A_+ & B^*B^* & B^*A_- & -B^*B^* \\ A_-A_+ & A_-B^* & A_-A_- & -A_-B^* \\ -B^*A_+ & -B^*B^* & -B^*A_- & B^*B^* \\ A_+A_+ & A_+B^* & A_+A_- & -A_+B^* \end{pmatrix} \tag{A.63s} $$

$$ {}^{2}u^{\boldsymbol{k}}\,{}^{2}u^{\boldsymbol{k}\dagger} = N^2 \begin{pmatrix} B^*B & B^*A_- & -B^*B & B^*A_+ \\ A_-B & A_-A_- & -A_-B & A_-A_+ \\ -B^*B & -B^*A_- & B^*B & -B^*A_+ \\ A_+B & A_+A_- & -A_+B & A_+A_+ \end{pmatrix} \tag{A.63t} $$

A.11 Herleitung von Gleichung (8.77)

Es ist

$$ {}^{r}\bar{u}^{\boldsymbol{k}} = {}^{r}u^{\boldsymbol{k}\dagger}\,\gamma^0 \ . \tag{A.64} $$

Die Matrix $\gamma^0 =$ (8.15a) vertauscht die erste Komponente von ${}^{r}u^{\boldsymbol{k}\dagger}$ mit der dritten, und die zweite mit der vierten. Deshalb gilt mit den Definitionen (A.58) und den Gleichungen (A.59) aus Anhang A.10:

$$ {}^{1}u^{\boldsymbol{k}} = N \begin{pmatrix} A_+ \\ B \\ A_- \\ -B \end{pmatrix} \ , \ {}^{2}u^{\boldsymbol{k}} = N \begin{pmatrix} B^* \\ A_- \\ -B^* \\ A_+ \end{pmatrix} \ , \ {}^{1}v^{\boldsymbol{k}} = N \begin{pmatrix} A_+ \\ B \\ -A_- \\ B \end{pmatrix} $$

$$
{}^{2}v^{\boldsymbol{k}} = N \begin{pmatrix} B^* \\ A_- \\ B^* \\ -A_+ \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} {}^{1}\bar{u}^{\boldsymbol{k}} &= N \begin{pmatrix} A_- & -B^* & A_+ & B^* \end{pmatrix} \\ {}^{2}\bar{u}^{\boldsymbol{k}} &= N \begin{pmatrix} -B & A_+ & B & A_- \end{pmatrix} \\ {}^{1}\bar{v}^{\boldsymbol{k}} &= N \begin{pmatrix} -A_- & B^* & A_+ & B^* \end{pmatrix} \\ {}^{2}\bar{v}^{\boldsymbol{k}} &= N \begin{pmatrix} B & -A_+ & B & A_- \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{A.65}
$$

Damit, sowie mit

$$
\begin{aligned}
X_1 &\equiv N^2(A_+A_- - B^*B) = mc^2 \\
X_2 &\equiv N^2(A_+A_+ + B^*B) = \frac{E + cp_3}{mc^2} \\
X_3 &\equiv N^2(A_+B^* + B^*A_-) = \frac{cp_1 - icp_2}{mc^2} \\
X_4 &\equiv N^2(BA_+ + A_-B) = \frac{cp_1 + icp_2}{mc^2} \\
X_5 &\equiv N^2(BB^* + A_-A_-) = \frac{E - cp_3}{mc^2} \ ,
\end{aligned}
$$

erhält man die Matrixsumme

$$
\begin{aligned}
\sum_{r=1}^{2} {}^{r}u^{\boldsymbol{k}}\, {}^{r}\bar{u}^{\boldsymbol{k}} &= \begin{pmatrix} X_1 & 0 & X_2 & X_3 \\ 0 & X_1 & X_4 & X_5 \\ X_5 & -X_3 & X_1 & 0 \\ -X_4 & X_2 & 0 & X_1 \end{pmatrix} \qquad \text{(A.66a)} \\
&= \begin{pmatrix} mc^2 & 0 & E + cp_3 & cp_1 - icp_2 \\ 0 & mc^2 & cp_1 + icp_2 & E - cp_3 \\ E - cp_3 & -cp_1 + icp_2 & mc^2 & 0 \\ -cp_1 - icp_2 & E + cp_3 & 0 & mc^2 \end{pmatrix} .
\end{aligned}
$$

Die Matrixsumme

$$
\sum_{r=1}^{2} {}^{r}v^{\boldsymbol{k}}\, {}^{r}\bar{v}^{\boldsymbol{k}} = \begin{pmatrix} -X_1 & 0 & X_2 & X_3 \\ 0 & -X_1 & X_4 & X_5 \\ X_5 & -X_3 & -X_1 & 0 \\ -X_4 & X_2 & 0 & -X_1 \end{pmatrix} \tag{A.66b}
$$

unterscheidet sich von (A.66a) nur durch das Vorzeichen der Diagonalelemente. Jetzt berechnen wir

$$c\gamma^\mu p_\mu \pm \mathbb{1}mc^2 \overset{(8.15)}{=} \\ = \begin{pmatrix} \pm mc^2 & 0 & E+cp_3 & cp_1-icp_2 \\ 0 & \pm mc^2 & cp_1+icp_2 & E-cp_3 \\ E-cp_3 & -cp_1+icp_2 & \pm mc^2 & 0 \\ -cp_1-icp_2 & E+cp_3 & 0 & \pm mc^2 \end{pmatrix},$$

und finden

$$\sum_{r=1}^{2} {}^r u^{\boldsymbol{k}}\, {}^r\bar{u}^{\boldsymbol{k}} = c\gamma^\mu p_\mu + mc^2 \tag{A.67a}$$

$$\sum_{r=1}^{2} {}^r v^{\boldsymbol{k}}\, {}^r\bar{v}^{\boldsymbol{k}} = c\gamma^\mu p_\mu - mc^2 \ . \tag{A.67b}$$

A.12 Symmetrische ES-Tensoren

Wenn der Energiedichte-Spannungs-Tensor symmetrisch ist, wenn also $\mathcal{T}^{\rho\sigma} = \mathcal{T}^{\sigma\rho}$ gilt, dann nimmt die Kontinuitätsgleichung

$$\mathrm{d}_\nu \mathcal{M}^{\nu\rho\sigma} \overset{(4.73)}{=} 0 \quad \text{mit } \rho\sigma = 10, 20, 30, 23, 31, 12 \ , \tag{A.68}$$

welche die Erhaltung der sechs Drehimpulsdichten beschreibt, (bei Multiplikation mit c) die einfache Form

$$\begin{aligned} c\mathrm{d}_\nu \mathcal{M}^{\nu\rho\sigma} &= \mathrm{d}_\nu(x^\rho \mathcal{T}^{\nu\sigma} - x^\sigma \mathcal{T}^{\nu\rho}) \\ &= g_\nu{}^\rho \mathcal{T}^{\nu\sigma} + x^\rho \mathrm{d}_\nu \mathcal{T}^{\nu\sigma} - g_\nu{}^\sigma \mathcal{T}^{\nu\rho} - x^\sigma \mathrm{d}_\nu \mathcal{T}^{\nu\rho} \\ &= \underbrace{\mathcal{T}^{\rho\sigma} - \mathcal{T}^{\sigma\rho}}_{0} + x^\rho \underbrace{\mathrm{d}_\nu \mathcal{T}^{\nu\sigma}}_{0} - x^\sigma \underbrace{\mathrm{d}_\nu \mathcal{T}^{\nu\rho}}_{0} = 0 \end{aligned} \tag{A.69}$$

an. (A.68) gilt auch für nicht wechselwirkende Vektor- oder Spinor-Felder. Bei Ihnen muss aber in der Drehimpulsdichte

$$\mathcal{M}^{\nu\rho\sigma} \overset{(5.100),(6.101)}{=} x^\rho \mathcal{T}^{\nu\sigma}/c - x^\sigma \mathcal{T}^{\nu\rho}/c + \mathcal{S}^{\nu\rho\sigma} \tag{A.70}$$

zusätzlich eine von Null verschiedene Spindichte $\mathcal{S}$ auftreten, die durch

$$c\mathrm{d}_\nu \mathcal{M}^{\nu\rho\sigma} = \underbrace{\mathcal{T}^{\rho\sigma} - \mathcal{T}^{\sigma\rho} + c\mathrm{d}_\nu \mathcal{S}^{\nu\rho\sigma}}_{0} + x^\rho \underbrace{\mathrm{d}_\nu \mathcal{T}^{\nu\sigma}}_{0} - x^\sigma \underbrace{\mathrm{d}_\nu \mathcal{T}^{\nu\rho}}_{0} = 0 \tag{A.71}$$

die Asymmetrie der Energiedichte-Spannungs-Tensoren $\mathcal{T}$ kompensiert.

Wir wollen jetzt auch für Vektor- und Spinor-Felder Energie-Spannungs-Tensoren

$$\widetilde{\mathcal{T}}^{\rho\sigma} \equiv \mathcal{T}^{\rho\sigma} + \mathrm{d}_\nu X^{\nu\rho\sigma} \quad \text{mit } \widetilde{\mathcal{T}}^{\sigma\rho} = \widetilde{\mathcal{T}}^{\rho\sigma} \tag{A.72}$$

konstruieren, die im Gegensatz zu $\mathcal{T}$ symmetrisch sein sollen, zugleich aber zu den selben Erhaltungsgrößen führen sollen wie $\mathcal{T}$. Aus dieser Bedingung folgt für den gesuchten Tensor X:

$$\begin{aligned} & \mathrm{d}_\rho \mathcal{T}^{\rho\sigma} = \mathrm{d}_\rho \widetilde{\mathcal{T}}^{\rho\sigma} = \mathrm{d}_\rho \mathcal{T}^{\rho\sigma} + \mathrm{d}_\rho \mathrm{d}_\nu X^{\nu\rho\sigma} = 0 \\ \Longrightarrow \quad & \mathrm{d}_\rho \mathrm{d}_\nu X^{\nu\rho\sigma} = 0 = \mathrm{d}_\nu \mathrm{d}_\rho X^{\rho\nu\sigma} = \mathrm{d}_\rho \mathrm{d}_\nu X^{\rho\nu\sigma} \\ \Longrightarrow \quad & \mathrm{d}_\rho \mathrm{d}_\nu \left(X^{\nu\rho\sigma} - X^{\rho\nu\sigma} \right) = 0 \\ \Longrightarrow \quad & X^{\rho\nu\sigma} = -X^{\nu\rho\sigma} \end{aligned} \tag{A.73a}$$

Aus $\mathcal{T}$ und $\widetilde{\mathcal{T}}$ ergeben sich die gleichen Energie- und Impulsdichten, wenn der Tensor X in seinen beiden ersten Indizes ρ und ν schiefsymmetrisch ist, und wenn X analytisch ist, sodass $\mathrm{d}_\nu \mathrm{d}_\rho X^{\nu\rho\sigma} = \mathrm{d}_\rho \mathrm{d}_\nu X^{\nu\rho\sigma}$ gilt.

Eine zweite Gleichung zur Bestimmung von X findet man, indem man (A.72) in die Kontinuitätsgleichung (A.69) für Felder mit symmetrischem Energie-Spannungs-Tensor einsetzt, und das Ergebnis mit (A.71) vergleicht:

$$\mathrm{d}_\nu X^{\nu\rho\sigma} - \mathrm{d}_\nu X^{\nu\sigma\rho} = c\mathrm{d}_\nu \mathcal{S}^{\nu\rho\sigma} \tag{A.73b}$$

Dieser Ausdruck wechselt bei Vertauschung von ρ und σ das Vorzeichen, d.h. S ist in seinen beiden letzten Indizes antisymmetrisch. Es folgt aber aus (A.73b) nicht, dass auch X in seinen beiden letzten Indizes antisymmetrisch wäre. Man kann lediglich ausschließen, dass X in den beiden letzten Indizes

symmetrisch ist, denn dann wäre $\mathrm{d}_\nu \mathcal{S}^{\nu\rho\sigma} = 0$.

Weil es für 3 Indizes 6 mögliche Permutationen gibt, ist

$$\begin{aligned}\frac{X^{\nu\rho\sigma}}{c} &= a\mathcal{S}^{\nu\rho\sigma} + b\mathcal{S}^{\sigma\nu\rho} + c\mathcal{S}^{\rho\sigma\nu} + d\mathcal{S}^{\rho\nu\sigma} + e\mathcal{S}^{\sigma\rho\nu} + f\mathcal{S}^{\nu\sigma\rho} \\ &= g\mathcal{S}^{\nu\rho\sigma} + h\mathcal{S}^{\sigma\nu\rho} + i\mathcal{S}^{\rho\sigma\nu} \\ &\text{mit} \quad g \equiv a - f \quad h \equiv b - e \quad i \equiv c - d\end{aligned} \tag{A.74}$$

der allgemeinste Ansatz. Hier wurde genutzt, dass $\mathcal{S}$ in seinen beiden letzten Indizes antisymmetrisch ist. Wegen (A.73a) ist

$$\begin{aligned}(\text{A.74}) &= -g\mathcal{S}^{\rho\nu\sigma} - h\mathcal{S}^{\sigma\rho\nu} - i\mathcal{S}^{\nu\sigma\rho} \\ &= +g\mathcal{S}^{\rho\sigma\nu} + h\mathcal{S}^{\sigma\nu\rho} + i\mathcal{S}^{\nu\rho\sigma} \qquad \Longrightarrow \quad g = i \ .\end{aligned}$$

Wieder wurde in der zweiten Zeile die Schiefsymmetrie von $\mathcal{S}$ in seinen beiden letzten Indizes genutzt. Aus Bedingung (A.73b) folgt nun

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}_\nu\Big(g\mathcal{S}^{\nu\rho\sigma} + h\mathcal{S}^{\sigma\nu\rho} + g\mathcal{S}^{\rho\sigma\nu} - g\mathcal{S}^{\nu\sigma\rho} - h\mathcal{S}^{\rho\nu\sigma} - g\mathcal{S}^{\sigma\rho\nu}\Big) = \\ &= \mathrm{d}_\nu\Big(2g\mathcal{S}^{\nu\rho\sigma} + (h+g)\mathcal{S}^{\sigma\nu\rho} + (g+h)\mathcal{S}^{\rho\sigma\nu}\Big) = \mathrm{d}_\nu\mathcal{S}^{\nu\rho\sigma} \\ &\Longrightarrow \quad g = \frac{1}{2} \qquad h = -g \ .\end{aligned}$$

Also erfüllt

$$X^{\nu\rho\sigma} = \frac{c}{2}\Big(\mathcal{S}^{\rho\sigma\nu} - \mathcal{S}^{\sigma\nu\rho} + \mathcal{S}^{\nu\rho\sigma}\Big) \tag{A.75}$$

beide Bedingungen (A.73), und

$$\widetilde{\mathcal{T}}^{\rho\sigma} \equiv \mathcal{T}^{\rho\sigma} + \frac{c}{2}\,\mathrm{d}_\nu\Big(\mathcal{S}^{\rho\sigma\nu} - \mathcal{S}^{\sigma\nu\rho} + \mathcal{S}^{\nu\rho\sigma}\Big) \tag{A.76}$$

ist für beliebige Felder, ob mit oder ohne Spin, ein symmetrischer Energie-Impuls-Tensor, aus dem sich die folgenden 10 Kontinuitätsgleichungen (1 für die Energiedichte, 3 für die Impulsdichte, und 6 für die Drehimpulsdichte) ergeben:

$$\mathrm{d}_\rho \widetilde{\mathcal{T}}^{\rho\sigma} = \mathrm{d}_\rho \mathcal{T}^{\rho\sigma} = 0 \tag{A.77a}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}_\nu \mathcal{M}^{\nu\rho\sigma} &= \mathrm{d}_\nu \Big(x^\rho \widetilde{\mathcal{T}}^{\nu\sigma}/c - x^\sigma \widetilde{\mathcal{T}}^{\nu\rho}/c \Big) = \\ &= \mathrm{d}_\nu \Big(x^\rho \mathcal{T}^{\nu\sigma}/c - x^\sigma \mathcal{T}^{\nu\rho}/c + \mathcal{S}^{\nu\rho\sigma} \Big) = 0\end{aligned} \tag{A.77b}$$

Wir berechnen jetzt den symmetrisierten Tensor $\widetilde{\mathcal{T}}^{\rho\sigma}$ des elektromagnetischen Feldes. Die Spindichte des elektromagnetischen Feldes ist

$$\mathcal{S}^{\nu\rho\sigma} \overset{(5.98)}{=} \frac{1}{i\hbar c} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\nu A^\alpha)} B^{\rho\sigma\alpha}{}_\beta A^\beta \ . \tag{A.78a}$$

$$B^{\rho\sigma\alpha}{}_\beta \overset{(5.33)}{=} i\hbar (g^{\rho\alpha} g^\sigma{}_\beta - g^{\sigma\alpha} g^\rho{}_\beta) \tag{A.78b}$$

sind die Komponenten des Generators der Lorentztransformationen (5.35). Durch Einsetzen von

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\rho A_\alpha)} \overset{(4.123)}{=} -\frac{1}{\mu_0} F^{\rho\alpha} \tag{A.79}$$

folgt

$$\mathcal{S}^{\nu\rho\sigma} = \frac{-1}{c\mu_0} \Big(F^{\nu\rho} A^\sigma - F^{\nu\sigma} A^\rho \Big) \ . \tag{A.80}$$

Damit ergibt sich der Tensor

$$\begin{aligned}X^{\nu\rho\sigma} \overset{(A.75)}{=} \frac{-1}{2\mu_0} \Big(&(F^{\rho\sigma} A^\nu - F^{\rho\nu} A^\sigma) - (F^{\sigma\nu} A^\rho - F^{\sigma\rho} A^\nu) + \\ &+ (F^{\nu\rho} A^\sigma - F^{\nu\sigma} A^\rho) \Big) = -\frac{1}{\mu_0} F^{\nu\rho} A^\sigma \ .\end{aligned} \tag{A.81}$$

Wie es sein muss, ist dieser Tensor schiefsymmetrisch in den Indizes ν und ρ. Mithilfe der Feldgleichung

$$\mathrm{d}_\nu F^{\nu\rho} \overset{(4.125)}{=} 0 \tag{A.82}$$

des quellenfreien Feldes findet man den Tensor

$$\widetilde{\mathcal{T}}^{\rho\sigma} = \mathcal{T}^{\rho\sigma} + \mathrm{d}_\nu X^{\nu\rho\sigma} = \frac{1}{\mu_0} F^{\nu\rho}\mathrm{d}^\sigma A_\nu - g^{\rho\sigma}\mathcal{L} - \frac{1}{\mu_0} F^{\nu\rho}\mathrm{d}_\nu A^\sigma$$
$$= -\frac{1}{\mu_0} F^{\rho\nu}F^\sigma{}_\nu - g^{\rho\sigma}\mathcal{L}\ , \tag{A.83}$$

der bei Vertauschung von ρ und σ symmetrisch ist.

Jetzt berechnen wir den symmetrisierten ES-Tensor des Dirac-Feldes. Die Spindichte des Dirac-Feldes ist

$$\mathcal{S}^{\nu\rho\sigma} \overset{(6.99)}{=} \frac{1}{i\hbar c}\Big(\overline{\psi}\, S^{\rho\sigma}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\nu\overline{\psi})} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\nu\psi)} S^{\rho\sigma}\psi\Big) \overset{(8.24)}{=} \overline{\psi}\gamma^\nu S^{\rho\sigma}\psi\ . \tag{A.84a}$$

$$S^{\rho\sigma} \overset{(8.43)}{=} \frac{i\hbar}{4}[\gamma^\rho,\gamma^\sigma] \tag{A.84b}$$

sind die Komponenten des Generators der Spinortransformationen $D =$ (8.45). Damit ergibt sich der Tensor

$$X^{\nu\rho\sigma} \overset{(A.75)}{=} \frac{i\hbar c}{8}\,\overline{\psi}K^{\nu\rho\sigma}\psi$$
$$K^{\nu\rho\sigma} \equiv \gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\nu - \gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\sigma - \gamma^\sigma\gamma^\nu\gamma^\rho + \\ + \gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma - \gamma^\nu\gamma^\sigma\gamma^\rho\ .$$

Wie es sein muss ist K – und demzufolge auch X – antisymmetrisch in den beiden ersten Indizes ν und ρ. Die Divergenz von $X^{\nu\rho\sigma}$ wird damit

$$\mathrm{d}_\nu X^{\nu\rho\sigma} = \frac{i\hbar c}{8}\Big((\mathrm{d}_\nu\overline{\psi})K^{\nu\rho\sigma}\psi + \overline{\psi}K^{\nu\rho\sigma}\mathrm{d}_\nu\psi\Big)\ .$$

Dieser Ausdruck lässt sich mit den Dirac-Gleichungen

$$i\hbar c\mathrm{d}_\nu\overline{\psi}\gamma^\nu \overset{(8.26b)}{=} -mc^2\,\overline{\psi}$$
$$i\hbar c\gamma^\nu\mathrm{d}_\nu\psi \overset{(8.26a)}{=} +mc^2\,\psi$$

vereinfachen. Dazu berechnen wir zwei Versionen von $K^{\nu\rho\sigma}$, in denen mithilfe der Vertauschungsrelationen

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu \overset{(8.9)}{=} 2g^{\mu\nu}$$

die γ^ν in allen Produkten dreier γ-Matrizen entweder ganz nach links oder ganz nach rechts geschoben werden.

$$\begin{aligned}
K^{\nu\rho\sigma} &= 2g^{\sigma\nu}\gamma^\rho - 2g^{\rho\nu}\gamma^\sigma + \gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma - 2g^{\rho\nu}\gamma^\sigma + \gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma - \\
&\quad - 2g^{\sigma\nu}\gamma^\rho + \gamma^\nu\gamma^\sigma\gamma^\rho + 2g^{\rho\nu}\gamma^\sigma - 2g^{\sigma\nu}\gamma^\rho + \gamma^\nu\gamma^\sigma\gamma^\rho + \\
&\quad + \gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma - \gamma^\nu\gamma^\sigma\gamma^\rho = \\
&= +2\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma - 2g^{\rho\nu}\gamma^\sigma - 2g^{\sigma\nu}\gamma^\rho + 2g^{\sigma\rho}\gamma^\nu = \qquad \text{(A.85a)} \\
&= \gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\nu - 2g^{\nu\sigma}\gamma^\rho + \gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\nu - 2g^{\nu\rho}\gamma^\sigma + \gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\nu + \\
&\quad + \gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\nu + 2g^{\nu\rho}\gamma^\sigma - 2g^{\nu\sigma}\gamma^\rho + \gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\nu - 2g^{\nu\sigma}\gamma^\rho + \\
&\quad + 2g^{\nu\rho}\gamma^\sigma - \gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\nu = \\
&= 2\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\nu - 6g^{\nu\sigma}\gamma^\rho + 2g^{\nu\rho}\gamma^\sigma + 2g^{\sigma\rho}\gamma^\nu \qquad \text{(A.85b)}
\end{aligned}$$

Die Antisymmetrie in den Indizes ν und ρ ist jetzt nicht mehr offensichtlich. Sie muss aber nach wie vor bestehen, falls sich kein Rechenfehler eingeschlichen hat. Mit den Dirac-Gleichungen kompensieren sich die grün markierten Terme in der Divergenz von X:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_\nu X^{\nu\rho\sigma} = \frac{i\hbar c}{4}\Big(&(\mathrm{d}_\nu\overline{\psi})(\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma - g^{\rho\nu}\gamma^\sigma - g^{\sigma\nu}\gamma^\rho + g^{\sigma\rho}\gamma^\nu)\psi + \\
&+ \overline{\psi}(\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\nu - 3g^{\nu\sigma}\gamma^\rho + g^{\nu\rho}\gamma^\sigma + g^{\sigma\rho}\gamma^\nu)\mathrm{d}_\nu\psi\Big)
\end{aligned}$$

Daraus folgt der Energiedichte-Spannungs-Tensor

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{T}}^{\rho\sigma} &= i\hbar c\,\overline{\psi}\gamma^\rho\mathrm{d}^\sigma\psi - g^{\rho\sigma}\,\overline{\psi}(i\hbar c\gamma^\nu\mathrm{d}_\nu - mc^2)\psi + \\
&\quad + \frac{i\hbar c}{4}\Big(- (\mathrm{d}^\rho\overline{\psi})\gamma^\sigma\psi - (\mathrm{d}^\sigma\overline{\psi})\gamma^\rho\psi - 3\overline{\psi}\gamma^\rho\mathrm{d}^\sigma\psi + \overline{\psi}\gamma^\sigma\mathrm{d}^\rho\psi\Big) = \\
&= \frac{i\hbar c}{4}\Big(- (\mathrm{d}^\rho\overline{\psi})\gamma^\sigma\psi - (\mathrm{d}^\sigma\overline{\psi})\gamma^\rho\psi + \overline{\psi}\gamma^\rho\mathrm{d}^\sigma\psi + \overline{\psi}\gamma^\sigma\mathrm{d}^\rho\psi\Big) - \\
&\quad - g^{\rho\sigma}\underbrace{\overline{\psi}(i\hbar c\gamma^\nu\mathrm{d}_\nu - mc^2)\psi}_{\mathcal{L}}\,, \qquad \text{(A.86)}
\end{aligned}$$

der offensichtlich bei Vertauschung von ρ und σ symmetrisch ist.

A.13 Die Ladung des Klein-Gordon-Feldes

Die erhaltene Ladung des klassischen Klein-Gordon-Feldes ist

$$Q \overset{(10.32)}{=} \int\limits_{\Omega} \mathrm{d}^3x \, \frac{iq}{\hbar}\Big(\pi\phi - \phi^*\pi^*\Big) \; . \tag{A.87}$$

Indem man die klassischen Feldfunktionen durch die quantisierten Feldoperatoren ersetzt, erhält man den Ladungsoperator

$$Q \equiv \int\limits_{\Omega} \mathrm{d}^3x \, \underbrace{\frac{iq}{\hbar}(\pi\phi - \phi^\dagger\pi^\dagger)}_{\mathcal{Q}} \; . \tag{A.88}$$

Mit den Feldoperatoren (15.2) wird daraus

$$\begin{aligned}\mathcal{Q} = \frac{iq}{\hbar}\sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{f}} \frac{i\hbar}{2\Omega}\sqrt{\frac{\omega_{\boldsymbol{f}}}{\omega_{\boldsymbol{k}}}}\Big(&(a^\dagger_{\boldsymbol{f}} - b_{\text{-}\boldsymbol{f}})(a_{\boldsymbol{k}} + b^\dagger_{\text{-}\boldsymbol{k}})\exp\{+i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{f})\boldsymbol{x}\} + \\ &+ (a^\dagger_{\boldsymbol{k}} + b_{\text{-}\boldsymbol{k}})(a_{\boldsymbol{f}} - b^\dagger_{\text{-}\boldsymbol{f}})\exp\{+i(\boldsymbol{f}-\boldsymbol{k})\boldsymbol{x}\}\Big) \; .\end{aligned} \tag{A.89}$$

Integration über das Normierungsvolumen Ω ergibt mit (7.12)

$$\begin{aligned}Q = \int\limits_{\Omega}\mathrm{d}^3x\,\mathcal{Q} = \frac{iq}{\hbar}\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{i\hbar}{2}\Big(&a^\dagger_{\boldsymbol{k}}a_{\boldsymbol{k}} + a^\dagger_{\boldsymbol{k}}b^\dagger_{\text{-}\boldsymbol{k}} - b_{\text{-}\boldsymbol{k}}a_{\boldsymbol{k}} - b_{\text{-}\boldsymbol{k}}b^\dagger_{\text{-}\boldsymbol{k}} + \\ &+ a^\dagger_{\boldsymbol{k}}a_{\boldsymbol{k}} - a^\dagger_{\boldsymbol{k}}b^\dagger_{\text{-}\boldsymbol{k}} + b_{\text{-}\boldsymbol{k}}a_{\boldsymbol{k}} - b_{\text{-}\boldsymbol{k}}b^\dagger_{\text{-}\boldsymbol{k}}\Big) \; .\end{aligned} \tag{A.90}$$

Weil symmetrisch über sämtliche positiven und negativen Wellenzahlen $\boldsymbol{k}$ summiert wird, darf man in zwei Summanden $-\boldsymbol{k}$ durch $\boldsymbol{k}$ ersetzen:

$$\begin{aligned}Q &= -q\sum_{\boldsymbol{k}}(a^\dagger_{\boldsymbol{k}}a_{\boldsymbol{k}} - b_{\boldsymbol{k}}b^\dagger_{\boldsymbol{k}}) \\ &= -q\sum_{\boldsymbol{k}}(a^\dagger_{\boldsymbol{k}}a_{\boldsymbol{k}} - b^\dagger_{\boldsymbol{k}}b_{\boldsymbol{k}} - \underbrace{[b_{\boldsymbol{k}}, b^\dagger_{\boldsymbol{k}}]}_{1})\end{aligned} \tag{A.91}$$

A.14 Die Ladung des Dirac-Feldes

Mit $\gamma^0\gamma^0 = \mathbb{1}$ und $\psi(x) = (16.1a)$ und $\psi^\dagger(x) = (16.7)$ ist der Operator der erhaltenen Ladung des Diracfeldes

$$
\begin{aligned}
Q &\overset{(4.89)}{=} \int\limits_\Omega \mathrm{d}^3x\, q\, \psi^\dagger\psi = \int\limits_\Omega \mathrm{d}^3x \sum_{\boldsymbol{f},s,\boldsymbol{k},r} \frac{q}{\Omega 2\hbar\sqrt{\omega_{\boldsymbol{f}}\omega_{\boldsymbol{k}}}} \\
&\quad \Big({}^s a^\dagger_{\boldsymbol{f}}\, {}^s u^{\dagger \boldsymbol{f}} \exp\{+if x\} + {}^s b_{\boldsymbol{f}}\, {}^s v^{\dagger \boldsymbol{f}} \exp\{-if x\} \Big) \cdot \\
&\qquad \cdot \Big({}^r a_{\boldsymbol{k}}\, {}^r u^{\boldsymbol{k}} \exp\{-ikx\} + {}^r b^\dagger_{\boldsymbol{k}}\, {}^r v^{\boldsymbol{k}} \exp\{+ikx\} \Big) \\
&= \int\limits_\Omega \mathrm{d}^3x \sum_{\boldsymbol{f},s,\boldsymbol{k},r} \frac{q}{\Omega 2\hbar\sqrt{\omega_{\boldsymbol{f}}\omega_{\boldsymbol{k}}}} \Big({}^s a^\dagger_{\boldsymbol{f}}\, {}^s u^{\dagger \boldsymbol{f}}\, {}^r a_{\boldsymbol{k}}\, {}^r u^{\boldsymbol{k}} \exp\{+i(f-k)x\} \\
&\quad + {}^s a^\dagger_{\boldsymbol{f}}\, {}^s u^{\dagger \boldsymbol{f}}\, {}^r b^\dagger_{\boldsymbol{k}}\, {}^r v^{\boldsymbol{k}} \exp\{+i(f+k)x\} \\
&\quad + {}^s b_{\boldsymbol{f}}\, {}^s v^{\dagger \boldsymbol{f}}\, {}^r a_{\boldsymbol{k}}\, {}^r u^{\boldsymbol{k}} \exp\{-i(f+k)x\} \\
&\quad + {}^s b_{\boldsymbol{f}}\, {}^s v^{\dagger \boldsymbol{f}}\, {}^r b^\dagger_{\boldsymbol{k}}\, {}^r v^{\boldsymbol{k}} \exp\{-i(f-k)x\} \Big) \\
&\overset{(16.3)}{=} \sum_{s,\boldsymbol{k},r} \frac{q}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}} \Big({}^s a^\dagger_{\boldsymbol{k}}\, {}^r a_{\boldsymbol{k}}\, {}^s u^{\dagger \boldsymbol{k}}\, {}^r u^{\boldsymbol{k}} + {}^s a^\dagger_{\text{-}\boldsymbol{k}}\, {}^r b^\dagger_{\boldsymbol{k}}\, {}^s u^{\dagger \text{-}\boldsymbol{k}}\, {}^r v^{\boldsymbol{k}} \exp\{i2k^0x^0\} \\
&\qquad + {}^s b_{\text{-}\boldsymbol{k}}\, {}^r a_{\boldsymbol{k}}\, {}^s v^{\dagger \text{-}\boldsymbol{k}}\, {}^r u^{\boldsymbol{k}} \exp\{-i2k^0x^0\} + {}^s b_{\boldsymbol{k}}\, {}^r b^\dagger_{\boldsymbol{k}}\, {}^s v^{\dagger \boldsymbol{k}}\, {}^r v^{\boldsymbol{k}} \Big) \\
&\overset{(8.76)}{=} \sum_{\boldsymbol{k},r} q \Big({}^r a^\dagger_{\boldsymbol{k}}\, {}^r a_{\boldsymbol{k}} + {}^r b_{\boldsymbol{k}}\, {}^r b^\dagger_{\boldsymbol{k}} \Big) \\
&\overset{(16.5)}{=} \sum_{\boldsymbol{k},r} q \Big({}^r a^\dagger_{\boldsymbol{k}}\, {}^r a_{\boldsymbol{k}} - {}^r b^\dagger_{\boldsymbol{k}}\, {}^r b_{\boldsymbol{k}} + \underbrace{\{ {}^r b^\dagger_{\boldsymbol{k}}, {}^r b_{\boldsymbol{k}} \}}_{1} \Big) \,. \qquad \text{(A.92)}
\end{aligned}
$$

A.15 Beweis der Vertauschungsrelationen (17.67)

Es ist

$$
\begin{aligned}
[\tilde{A}_\mu(t,\boldsymbol{x}),\tilde{\pi}^\tau(t,\boldsymbol{y})] = \sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{f}}\sum_{\alpha,\beta=0}^{3}\sum_{\kappa=0}^{3}(e^{(\mu)}\cdot e^{(\alpha)}_{\boldsymbol{k}})(e^{(\kappa)}\cdot e^{(\beta)}_{\boldsymbol{f}})\cdot \\
\cdot\frac{c\,i\hbar}{2\Omega}\sqrt{\frac{1}{\omega_{\boldsymbol{k}}\omega_{\boldsymbol{f}}}}\Big(-f^0 g^{\tau\kappa}+f^\tau g^{0\kappa}-g^{0\tau}f^\kappa\Big)\Big(\\
-[c^{(\alpha)}_{\boldsymbol{k}},c^{(\beta)}_{\boldsymbol{f}}]\exp\{-i(kx+fy)\} \\
+[c^{(\alpha)}_{\boldsymbol{k}},c^{(\beta)\dagger}_{\boldsymbol{f}}]\exp\{-i(kx-fy)\} \\
-[c^{(\alpha)\dagger}_{\boldsymbol{k}},c^{(\beta)}_{\boldsymbol{f}}]\exp\{+i(kx-fy)\} \\
+[c^{(\alpha)\dagger}_{\boldsymbol{k}},c^{(\beta)\dagger}_{\boldsymbol{f}}]\exp\{+i(kx+fy)\}\Big)\,.
\end{aligned}
\tag{A.93}
$$

Um zu überprüfen, ob die Vertauschungsrelationen (17.67) wirklich aus (17.66) folgen, setzen wir sie in (A.93) ein:

$$
\begin{aligned}
[\tilde{A}_\mu(t,\boldsymbol{x}),\tilde{\pi}^\tau(t,\boldsymbol{y})] = \sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{\alpha,\beta=0}^{3}\sum_{\kappa=0}^{3}(e^{(\mu)}\cdot e^{(\alpha)}_{\boldsymbol{k}})(e^{(\kappa)}\cdot e^{(\beta)}_{\boldsymbol{k}})\cdot \\
\cdot\frac{c\,i\hbar}{2\Omega\omega_{\boldsymbol{k}}}\Big(-k^0 g^{\tau\kappa}+k^\tau g^{0\kappa}-g^{0\tau}k^\kappa\Big)\cdot \\
\cdot(-g_{\alpha\beta})\Big(\exp\{+i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\}+\exp\{-i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\}\Big)
\end{aligned}
\tag{A.94}
$$

Weil der Kommutator zur gleichen Zeit $x^0 = y^0$ genommen werden muss, ist die Zeitkomponente in den Exponenten verschwunden. Man kann die Reihenfolge der Summation über $\boldsymbol{k}$ in der zweiten Exponentialfunktion umdrehen, wobei

$$
\begin{aligned}
e^{(\alpha)}_{-\boldsymbol{k}} &= +e^{(\alpha)}_{\boldsymbol{k}} \quad \text{für } \alpha = 0 \\
e^{(\alpha)}_{-\boldsymbol{k}} &= -e^{(\alpha)}_{\boldsymbol{k}} \quad \text{für } \alpha = 1,2,3 \\
\omega_{-\boldsymbol{k}} &= \omega_{\boldsymbol{k}}
\end{aligned}
\tag{A.95}
$$

benutzt wird. Weil der Vorzeichenwechsel der Faktoren $e^{(\alpha)}_{\boldsymbol{k}}$ und $e^{(\beta)}_{\boldsymbol{k}}$ wegen $(-g_{\alpha\beta})$ gleichzeitig auftritt und sich deshalb kompensiert, erhält man

$$[\tilde{A}_\mu(t,\boldsymbol{x}),\tilde{\pi}^\tau(t,\boldsymbol{y})] = \sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{\alpha,\beta=0}^{3}\sum_{\kappa=0}^{3}(e^{(\mu)}\cdot e_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)})(e^{(\kappa)}\cdot e_{\boldsymbol{k}}^{(\beta)})\cdot$$
$$\cdot\frac{c\,i\hbar}{2\Omega\omega_{\boldsymbol{k}}}\Big(\underbrace{-k^0 g^{\tau\kappa}+k^\tau g^{0\kappa}-g^{0\tau}k^\kappa}_{Y_a}$$
$$\underbrace{-k^0 g^{\tau\kappa}+(2g^\tau{}_0 k^0-k^\tau)g^{0\kappa}-g^{0\tau}(2g^\kappa{}_0 k^0-k^\kappa)}_{Y_b}\Big)\cdot$$
$$\cdot(-g_{\alpha\beta})\exp\{+i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\}. \tag{A.96}$$

Es ist

$$\begin{aligned}Y_a+Y_b &= 2k^0(-g^{\tau\kappa}+g^\tau{}_0 g^\kappa{}_0-g^{0\tau}g^{0\kappa})\\ &= 2k^0\cdot\begin{cases}-1 & \text{für } \tau=0 \quad , \quad \kappa=\tau=0\\ 0 & \text{für } \tau=0 \quad , \quad \kappa\neq\tau=0\\ +1 & \text{für } \tau\neq 0 \quad , \quad \kappa=\tau\neq 0\\ 0 & \text{für } \tau\neq 0 \quad , \quad \kappa\neq\tau\neq 0\end{cases}\\ &= -2k^0 g_{\tau\kappa}\end{aligned} \tag{A.97}$$

Daraus folgt mit $k^0=\omega_{\boldsymbol{k}}/c$

$$[\tilde{A}_\mu(t,\boldsymbol{x}),\tilde{\pi}^\tau(t,\boldsymbol{y})] = i\hbar\underbrace{\frac{1}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{k}}\exp\{+i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\}}_{\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\cdot$$
$$\cdot\underbrace{\sum_{\kappa=0}^{3}(-g_{\tau\kappa})\sum_{\alpha,\beta=0}^{3}(-g_{\alpha\beta})(e^{(\mu)}\cdot e_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)})(e^{(\tau)}\cdot e_{\boldsymbol{k}}^{(\beta)})}_{Y_c}\ . \tag{A.98}$$

Um Y_c zu untersuchen, entwickeln wir die beiden Vektoren $e^{(\mu)}$ und $e^{(\tau)}$ nach den Einheitsvektoren $e_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)}$:

$$e^{(\mu)} \overset{(K.10d)}{=} \sum_{\gamma=0}^{3} \sum_{\alpha=0}^{3} g^{\gamma\alpha} (e_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)} \cdot e^{(\mu)}) e_{\boldsymbol{k}}^{(\gamma)} \tag{A.99a}$$

$$e^{(\tau)} \overset{(K.10d)}{=} \sum_{\delta=0}^{3} \sum_{\beta=0}^{3} g^{\delta\beta} (e_{\boldsymbol{k}}^{(\beta)} \cdot e^{(\tau)}) e_{\boldsymbol{k}}^{(\delta)} \tag{A.99b}$$

Das seitenweise Produkt dieser beiden Gleichungen ist

$$\underbrace{e^{(\mu)} \cdot e^{(\tau)}}_{\overset{(K.10e)}{=} g_{\mu\tau}} = \sum_{\gamma,\alpha,\delta,\beta=0}^{3} g^{\gamma\alpha} g^{\delta\beta} (e_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)} \cdot e^{(\mu)}) (e_{\boldsymbol{k}}^{(\beta)} \cdot e^{(\tau)}) \underbrace{(e_{\boldsymbol{k}}^{(\gamma)} \cdot e_{\boldsymbol{k}}^{(\delta)})}_{\overset{(K.10e)}{=} g_{\gamma\delta}}$$

$$g_{\mu\tau} = \sum_{\alpha\beta=0}^{3} g^{\alpha\beta} (e_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)} \cdot e^{(\mu)}) (e_{\boldsymbol{k}}^{(\beta)} \cdot e^{(\tau)}) \; . \tag{A.100}$$

Man beachte, dass die Indizes in $g_{\mu\tau}$ aus den Namen von $e^{(\mu)}$ und $e^{(\tau)}$ stammen, über die nicht automatisch nach der Summenkonvention summiert wird. Deshalb wird auch in

$$Y_c \overset{(A.98),(A.100)}{=} + \sum_{\kappa=0}^{3} g_{\tau\kappa} \, g_{\mu\tau} = g_{\mu}{}^{\tau} \tag{A.101}$$

ausnahmsweise nicht über τ summiert. Also stimmt (A.98) mit (17.66) überein, womit (17.67) bestätigt ist.

A.16 Berechnung der Operatoren (16.16)

Wir gehen aus von der Hamilton-Dichte

$$\mathcal{H}' \overset{(8.104)}{=} - \frac{i\hbar c}{2} (\mathrm{d}_0 \overline{\psi}) \gamma^0 \psi + \frac{i\hbar c}{2} \overline{\psi} \gamma^0 \mathrm{d}_0 \psi \tag{A.102a}$$

und der physikalischen Impulsdichte

$$\mathcal{P}'^j \overset{(8.105)}{=} \frac{i\hbar}{2} \, \overline{\psi} \gamma^0 \mathrm{d}^j \psi - (\mathrm{d}^j \, \overline{\psi}) \frac{i\hbar}{2} \gamma^0 \psi \tag{A.102b}$$

des klassischen (nicht quantisierten) Dirac-Feldes. Diese Größen wurden in Abschnitt 8.6 hergeleitet aus der alternativen Lagrangedichte $\mathcal{L}' = (8.99)$, die in den Feldern ψ und $\overline{\psi}$ symmetrischer ist als die sonst verwendete Lagrangedichte $\mathcal{L} = (8.24)$.

Bei der Quantisierung des Feldes werden die klassischen Amplituden ψ und $\overline{\psi}$ ersetzt durch die Feldoperatoren

$$\psi(x) = \sum_{\boldsymbol{k},r} \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}\Omega}} \Big({}^{r}a_{\boldsymbol{k}}\, {}^{r}u^{\boldsymbol{k}} \exp\{-ikx\} + {}^{r}b^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}\, {}^{r}v^{\boldsymbol{k}} \exp\{+ikx\} \Big) \tag{A.103a}$$

$$\overline{\psi}(x) = \sum_{\boldsymbol{k},r} \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}\Omega}} \Big({}^{r}a^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}\, {}^{r}\overline{u}^{\boldsymbol{k}} \exp\{+ikx\} + {}^{r}b_{\boldsymbol{k}}\, {}^{r}\overline{v}^{\boldsymbol{k}} \exp\{-ikx\} \Big) \,. \tag{A.103b}$$

Daraus folgt als Operator der Energiedichte

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} \overset{(8.104)}{=} -\frac{i\hbar c}{2} \sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{f},r,s} \frac{1}{\Omega 2\hbar \sqrt{\omega_{\boldsymbol{k}}\omega_{\boldsymbol{f}}}} \Big(& \\
& \Big(if^0\, {}^{s}a^{\dagger}_{\boldsymbol{f}}\, {}^{s}\overline{u}^{\boldsymbol{f}} \exp\{+ifx\} - if^0\, {}^{s}b_{\boldsymbol{f}}\, {}^{s}\overline{v}^{\boldsymbol{f}} \exp\{-ifx\} \Big) \gamma^0 \\
& \Big({}^{r}a_{\boldsymbol{k}}\, {}^{r}u^{\boldsymbol{k}} \exp\{-ikx\} + {}^{r}b^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}\, {}^{r}v^{\boldsymbol{k}} \exp\{+ikx\} \Big) \\
& - \Big({}^{s}a^{\dagger}_{\boldsymbol{f}}\, {}^{s}\overline{u}^{\boldsymbol{f}} \exp\{+ifx\} + {}^{s}b_{\boldsymbol{f}}\, {}^{s}\overline{v}^{\boldsymbol{f}} \exp\{-ifx\} \Big) \gamma^0 \\
& \Big(- ik^0\, {}^{r}a_{\boldsymbol{k}}\, {}^{r}u^{\boldsymbol{k}} \exp\{-ikx\} + ik^0\, {}^{r}b^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}\, {}^{r}v^{\boldsymbol{k}} \exp\{+ikx\} \Big) \Big) =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H} = +\frac{\hbar}{2} \sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{f},r,s} \frac{1}{\Omega 2\hbar\sqrt{\omega_{\boldsymbol{k}}\omega_{\boldsymbol{f}}}} \Big(& \\
& \omega_{\boldsymbol{f}}\, {}^{s}a^{\dagger}_{\boldsymbol{f}}\, {}^{r}a_{\boldsymbol{k}}\, {}^{s}u^{\boldsymbol{f}\,\dagger}\, {}^{r}u^{\boldsymbol{k}} \exp\{+i(f-k)x\} \\
& + \omega_{\boldsymbol{f}}\, {}^{s}a^{\dagger}_{\boldsymbol{f}}\, {}^{r}b^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}\, {}^{s}u^{\boldsymbol{f}\,\dagger}\, {}^{r}v^{\boldsymbol{k}} \exp\{+i(f+k)x\} \\
& - \omega_{\boldsymbol{f}}\, {}^{s}b_{\boldsymbol{f}}\, {}^{r}a_{\boldsymbol{k}}\, {}^{s}v^{\boldsymbol{f}\,\dagger}\, {}^{r}u^{\boldsymbol{k}} \exp\{-i(f+k)x\} \\
& - \omega_{\boldsymbol{f}}\, {}^{s}b_{\boldsymbol{f}}\, {}^{r}b^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}\, {}^{s}v^{\boldsymbol{f}\,\dagger}\, {}^{r}v^{\boldsymbol{k}} \exp\{-i(f-k)x\} \\
& + \omega_{\boldsymbol{k}}\, {}^{s}a^{\dagger}_{\boldsymbol{f}}\, {}^{r}a_{\boldsymbol{k}}\, {}^{s}u^{\boldsymbol{f}\,\dagger}\, {}^{r}u^{\boldsymbol{k}} \exp\{+i(f-k)x\} \\
& - \omega_{\boldsymbol{k}}\, {}^{s}a^{\dagger}_{\boldsymbol{f}}\, {}^{r}b^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}\, {}^{s}u^{\boldsymbol{f}\,\dagger}\, {}^{r}v^{\boldsymbol{k}} \exp\{+i(f+k)x\} \\
& + \omega_{\boldsymbol{k}}\, {}^{s}b_{\boldsymbol{f}}\, {}^{r}a_{\boldsymbol{k}}\, {}^{s}v^{\boldsymbol{f}\,\dagger}\, {}^{r}u^{\boldsymbol{k}} \exp\{-i(f+k)x\} \\
& - \omega_{\boldsymbol{k}}\, {}^{s}b_{\boldsymbol{f}}\, {}^{r}b^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}\, {}^{s}v^{\boldsymbol{f}\,\dagger}\, {}^{r}v^{\boldsymbol{k}} \exp\{-i(f-k)x\} \Big)
\end{aligned}
\tag{A.104}
$$

Wir integrieren über das gesamte Normierungsvolumen Ω, und nutzen die Darstellung (16.3) des Kronecker-Symbols. Damit, und mit $\omega_{-\boldsymbol{k}} = \omega_{\boldsymbol{k}}$, findet man den Hamiltonoperator

$$
\begin{aligned}
H = \int_{\Omega} \mathrm{d}^3x\, \mathcal{H}(x) = \frac{1}{4} \sum_{\boldsymbol{k},r,s} \Big(& {}^{s}a^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}\, {}^{r}a_{\boldsymbol{k}}\, {}^{s}u^{\boldsymbol{k}\,\dagger}\, {}^{r}u^{\boldsymbol{k}} \\
& + {}^{s}a^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}}\, {}^{r}b^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}\, {}^{s}u^{-\boldsymbol{k}\,\dagger}\, {}^{r}v^{\boldsymbol{k}} \exp\{i2k^0x^0\} \\
& - {}^{s}b_{-\boldsymbol{k}}\, {}^{r}a_{\boldsymbol{k}}\, {}^{s}v^{-\boldsymbol{k}\,\dagger}\, {}^{r}u^{\boldsymbol{k}} \exp\{-i2k^0x^0\} \\
& - {}^{s}b_{\boldsymbol{k}}\, {}^{r}b^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}\, {}^{s}v^{\boldsymbol{k}\,\dagger}\, {}^{r}v^{\boldsymbol{k}} + {}^{s}a^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}\, {}^{r}a_{\boldsymbol{k}}\, {}^{s}u^{\boldsymbol{k}\,\dagger}\, {}^{r}u^{\boldsymbol{k}} \\
& - {}^{s}a^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}}\, {}^{r}b^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}\, {}^{s}u^{-\boldsymbol{k}\,\dagger}\, {}^{r}v^{\boldsymbol{k}} \exp\{i2k^0x^0\} \\
& + {}^{s}b_{-\boldsymbol{k}}\, {}^{r}a_{\boldsymbol{k}}\, {}^{s}v^{-\boldsymbol{k}\,\dagger}\, {}^{r}u^{\boldsymbol{k}} \exp\{-i2k^0x^0\} - {}^{s}b_{\boldsymbol{k}}\, {}^{r}b^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}\, {}^{s}v^{\boldsymbol{k}\,\dagger}\, {}^{r}v^{\boldsymbol{k}} \Big) \\
= \frac{1}{2} \sum_{\boldsymbol{k},r,s} \Big(& {}^{s}a^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}\, {}^{r}a_{\boldsymbol{k}}\, {}^{s}u^{\boldsymbol{k}\,\dagger}\, {}^{r}u^{\boldsymbol{k}} - {}^{s}b_{\boldsymbol{k}}\, {}^{r}b^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}\, {}^{s}v^{\boldsymbol{k}\,\dagger}\, {}^{r}v^{\boldsymbol{k}} \Big)
\end{aligned}
\tag{A.105}
$$

Schließlich ergibt sich mit

$$
{}^{r}u^{\boldsymbol{k}\dagger}\, {}^{s}u^{\boldsymbol{k}} \overset{(A.62)}{=} {}^{r}v^{\boldsymbol{k}\dagger}\, {}^{s}v^{\boldsymbol{k}} \overset{(A.62)}{=} 2E\,\delta_{rs} = 2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}\,\delta_{rs} \tag{A.106}
$$

der Hamiltonoperator

$$\begin{aligned} H &= \sum_{\boldsymbol{k},r} \hbar\omega_{\boldsymbol{k}} \Big({}^{r}a^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}\, {}^{r}a_{\boldsymbol{k}} - {}^{r}b_{\boldsymbol{k}}\, {}^{r}b^{\dagger}_{\boldsymbol{k}} \Big) \\ &= \sum_{\boldsymbol{k},r} \hbar\omega_{\boldsymbol{k}} \Big({}^{r}a^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}\, {}^{r}a_{\boldsymbol{k}} + {}^{r}b^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}\, {}^{r}b_{\boldsymbol{k}} - \{ {}^{r}b_{\boldsymbol{k}} \,,\, {}^{r}b^{\dagger}_{\boldsymbol{k}} \} \Big) \,, \end{aligned} \tag{A.107}$$

der im Fall diskreter Felder mit (16.13) identisch ist.

Als Operator der physikalischen Impulsdichte erhält man

$$\begin{aligned} \mathcal{P}'^{j} = -\frac{\hbar}{2} \sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{f},r,s} \frac{1}{2\hbar\Omega\,\sqrt{\omega_{\boldsymbol{k}}\omega_{\boldsymbol{f}}}} \Big(\\ - {}^{s}a^{\dagger}_{\boldsymbol{f}}\, {}^{s}u^{\boldsymbol{f}\dagger} k^{j}\, {}^{r}a_{\boldsymbol{k}}\, {}^{r}u^{\boldsymbol{k}} \exp\{+i(f-k)x\} \\ + {}^{s}a^{\dagger}_{\boldsymbol{f}}\, {}^{s}u^{\boldsymbol{f}\dagger} k^{j}\, {}^{r}b^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}\, {}^{r}v^{\boldsymbol{k}} \exp\{+i(f+k)x\} \\ - {}^{s}b_{\boldsymbol{f}}\, {}^{s}v^{\boldsymbol{f}\dagger} k^{j}\, {}^{r}a_{\boldsymbol{k}}\, {}^{r}u^{\boldsymbol{k}} \exp\{-i(f+k)x\} \\ + {}^{s}b_{\boldsymbol{f}}\, {}^{s}v^{\boldsymbol{f}\dagger} k^{j}\, {}^{r}b^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}\, {}^{r}v^{\boldsymbol{k}} \exp\{-i(f-k)x\} \\ - f^{j}\, {}^{s}a^{\dagger}_{\boldsymbol{f}}\, {}^{s}u^{\boldsymbol{f}\dagger}\, {}^{r}a_{\boldsymbol{k}}\, {}^{r}u^{\boldsymbol{k}} \exp\{+i(f-k)x\} \\ - f^{j}\, {}^{s}a^{\dagger}_{\boldsymbol{f}}\, {}^{s}u^{\boldsymbol{f}\dagger}\, {}^{r}b^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}\, {}^{r}v^{\boldsymbol{k}} \exp\{+i(f+k)x\} \\ + f^{j}\, {}^{s}b_{\boldsymbol{f}}\, {}^{s}v^{\boldsymbol{f}\dagger}\, {}^{r}a_{\boldsymbol{k}}\, {}^{r}u^{\boldsymbol{k}} \exp\{-i(f+k)x\} \\ + f^{j}\, {}^{s}b_{\boldsymbol{f}}\, {}^{s}v^{\boldsymbol{f}\dagger}\, {}^{r}b^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}\, {}^{r}v^{\boldsymbol{k}} \exp\{-i(f-k)x\} \Big) \,. \end{aligned} \tag{A.108}$$

Integration über das gesamte Normierungsvolumen Ω, Nutzung der Darstellung (16.3) des Kronecker-Symbols und der Relation $\omega_{-\boldsymbol{k}} = \omega_{\boldsymbol{k}}$ ergibt den Impulsoperator

$$\begin{aligned} P^{j} = \int\limits_{\Omega} \mathrm{d}^{3}x\, \mathcal{P}^{j}(x) = -\sum_{\boldsymbol{k},r,s} \frac{\hbar k^{j}}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}} \Big(\\ - {}^{s}a^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}\, {}^{s}u^{\boldsymbol{k}+}\, {}^{r}a_{\boldsymbol{k}}\, {}^{r}u^{\boldsymbol{k}} + {}^{s}b_{\boldsymbol{k}}\, {}^{s}v^{\boldsymbol{k}+}\, {}^{r}b^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}\, {}^{r}v^{\boldsymbol{k}} \Big) \,, \end{aligned}$$

der schließlich mithilfe von (A.106) die Form

$$P^j = \sum_{\boldsymbol{k},r} \hbar k^j ({}^r a_{\boldsymbol{k}}^\dagger \, {}^r a_{\boldsymbol{k}} - {}^r b_{\boldsymbol{k}} \, {}^r b_{\boldsymbol{k}}^\dagger) \tag{A.109}$$

erhält, die im Fall diskreter Felder mit (16.14) identisch ist.

A.17 Berechnung des Hamiltonoperators (17.69)

Wir wollen zeigen, dass aus der Hamiltondichte (17.68) des quantisierten Feldes $\tilde{A}(x)$ der Hamiltonoperator (17.69) folgt.

Die Lagrangedichte (17.59) kann durch Umbenennung kontrahierter Indizes etwas kompakter geschrieben werden:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{L}} &\overset{(17.59)}{=} -\frac{1}{2\mu_0}\Big((\mathrm{d}_\tau \tilde{A}_\sigma)\mathrm{d}^\tau \tilde{A}^\sigma - (\mathrm{d}_\sigma \tilde{A}_\tau)\mathrm{d}^\tau \tilde{A}^\sigma + (\mathrm{d}_\tau \tilde{A}^\tau)\mathrm{d}_\sigma \tilde{A}^\sigma\Big) \\
&= +\frac{1}{2\mu_0}(\mathrm{d}_\tau \tilde{A}_\sigma)\Big(- \mathrm{d}^\tau \tilde{A}^\sigma + \mathrm{d}^\sigma \tilde{A}^\tau - g^{\tau\sigma}\mathrm{d}_\lambda \tilde{A}^\lambda\Big) \\
&= \frac{1}{2\mu_0}(\mathrm{d}_\tau \tilde{A}_\sigma)\mathrm{d}_\mu \tilde{A}_\nu\Big(- g^{\tau\mu}g^{\sigma\nu} + g^{\sigma\mu}g^{\tau\nu} - g^{\tau\sigma}g^{\mu\nu}\Big)
\end{aligned} \tag{A.110}$$

Mit $\tilde{A} =$ (17.61), $\tilde{A}_\sigma \overset{(K.10c)}{=} e^{(\sigma)} \cdot \tilde{A}$, und $\tilde{\pi}^\sigma =$ (17.64) erhält man den Hamilton-Dichte-Operator

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{H}} = \sum_{\sigma=0}^{3}\sum_{\boldsymbol{f}}\sum_{\beta=0}^{3}\sum_{\kappa=0}^{3} &\sqrt{\frac{\hbar}{\mu_0 2\omega_{\boldsymbol{f}}\Omega}}(e^{(\kappa)} \cdot e_{\boldsymbol{f}}^{(\beta)}) \cdot \\
&\cdot i\Big(- f^0 g^{\sigma\kappa} + f^\sigma g^{0\kappa} - g^{0\sigma} f^\kappa\Big) \cdot \\
&\cdot \Big(- c_{\boldsymbol{f}}^{(\beta)} \exp\{-ifx\} + c_{\boldsymbol{f}}^{(\beta)\dagger} \exp\{+ifx\}\Big) \cdot \\
&\cdot \sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{\alpha=0}^{3} i\sqrt{\frac{\mu_0 c^2 \hbar\omega_{\boldsymbol{k}}}{2\Omega}}(e^{(\sigma)} \cdot e_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)}) \cdot \\
&\cdot \Big(- c_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)} \exp\{-ikx\} + c_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)\dagger} \exp\{+ikx\}\Big) -
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \frac{1}{2\mu_0} \sum_{\sigma=0}^{3} \sum_{\boldsymbol{f}} \sum_{\beta=0}^{3} i f^{\tau} \sqrt{\frac{\mu_0 c^2 \hbar}{2\omega_{\boldsymbol{f}} \Omega}} (e^{(\sigma)} \cdot e_{\boldsymbol{f}}^{(\beta)}) \cdot \\
&\cdot \Big(- c_{\boldsymbol{f}}^{(\beta)} \exp\{-ifx\} + c_{\boldsymbol{f}}^{(\beta)\dagger} \exp\{+ifx\} \Big) \cdot \\
&\cdot \sum_{\kappa=0}^{3} \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{\alpha=0}^{3} i k^{\mu} \sqrt{\frac{\mu_0 c^2 \hbar}{2\omega_{\boldsymbol{k}} \Omega}} (e^{(\kappa)} \cdot e_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)}) \cdot \\
&\cdot \Big(- c_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)} \exp\{-ikx\} + c_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)\dagger} \exp\{+ikx\} \Big) \\
&\cdot \Big(- g^{\tau\mu} g^{\sigma\kappa} + g^{\sigma\mu} g^{\tau\kappa} - g^{\tau\sigma} g^{\mu\kappa} \Big)
\end{aligned}
\tag{A.111}
$$

Weil nach der Summenkonvention nur über Raum-Zeit-Indizes (und Spinorindizes), aber nicht über die durch Klammern gekennzeichneten Namen (σ) der Einheitsvektoren automatisch summiert wird, tauchen hier mehr Summationszeichen auf, als sonst üblich.

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{H}} = \sum_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{k}} \sum_{\sigma,\beta,\kappa,\alpha=0}^{3} \frac{c\hbar}{2\Omega} \Big(&- \sqrt{\frac{\omega_{\boldsymbol{k}}}{\omega_{\boldsymbol{f}}}} (e^{(\kappa)} \cdot e_{\boldsymbol{f}}^{(\beta)}) (e^{(\sigma)} \cdot e_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)}) \\
&(-f^0 g^{\sigma\kappa} + f^{\sigma} g^{0\kappa} - g^{0\sigma} f^{\kappa}) + \\
&+ \frac{c}{2} \sqrt{\frac{1}{\omega_{\boldsymbol{f}} \omega_{\boldsymbol{k}}}} (e^{(\sigma)} \cdot e_{\boldsymbol{f}}^{(\beta)}) (e^{(\kappa)} \cdot e_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)}) \cdot \\
&(-f^{\tau} k_{\tau} g^{\sigma\kappa} + f_{\kappa} k_{\sigma} - f_{\sigma} k_{\kappa}) \Big) \cdot \\
\cdot \Big(& c_{\boldsymbol{f}}^{(\beta)} c_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)} \exp\{-i(f+k)x\} - c_{\boldsymbol{f}}^{(\beta)} c_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)\dagger} \exp\{-i(f-k)x\} \\
&- c_{\boldsymbol{f}}^{(\beta)\dagger} c_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)} \exp\{+i(f-k)x\} + c_{\boldsymbol{f}}^{(\beta)\dagger} c_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)\dagger} \exp\{+i(f+k)x\} \Big)
\end{aligned}
$$

Durch Integration über das gesamte Normierungsvolumen Ω findet man den Hamilton-Operator

$$
\tilde{H} = \int_{\Omega} \mathrm{d}^3 x \, \tilde{\mathcal{H}} \; . \tag{A.112}
$$

Um bei dieser Integration entsprechend (16.3) das Kronecker-Symbol zu erhalten, drehen wir vor der Integration in zwei Summanden die Reihenfolge der Summation über $\boldsymbol{k}$ um. Mit $\omega_{\text{-}\boldsymbol{k}} = \omega_{\boldsymbol{k}}$ erhält man

$$\begin{aligned}
\tilde{H} = \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{\sigma,\beta,\kappa,\alpha=0}^{3} \frac{c\hbar}{2} \Big(& -(e^{(\kappa)} \cdot e_{\boldsymbol{k}}^{(\beta)})(e^{(\sigma)} \cdot e_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)}) \\
& (-k^0 g^{\sigma\kappa} + k^\sigma g^{0\kappa} - g^{0\sigma} k^\kappa) + \\
& + \frac{c}{2} \frac{1}{\omega_{\boldsymbol{k}}} (e^{(\sigma)} \cdot e_{\boldsymbol{k}}^{(\beta)})(e^{(\kappa)} \cdot e_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)}) (-\underbrace{k^\tau k_\tau}_{0} g^{\sigma\kappa} + \underbrace{k_\kappa k_\sigma - k_\sigma k_\kappa}_{0}) \Big) \\
& (-c_{\boldsymbol{k}}^{(\beta)} c_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)\dagger} - c_{\boldsymbol{k}}^{(\beta)\dagger} c_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)}) \\
+ \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{\sigma,\beta,\kappa,\alpha=0}^{3} \frac{c\hbar}{2} \Big(& -(e^{(\kappa)} \cdot e_{\boldsymbol{k}}^{(\beta)})(e^{(\sigma)} \cdot e_{\text{-}\boldsymbol{k}}^{(\alpha)}) \\
& (-k^0 g^{\sigma\kappa} + k^\sigma g^{0\kappa} - g^{0\sigma} k^\kappa) + \\
& + \frac{c}{2} \frac{1}{\omega_{\boldsymbol{k}}} (e^{(\sigma)} \cdot e_{\boldsymbol{k}}^{(\beta)})(e^{(\kappa)} \cdot e_{\text{-}\boldsymbol{k}}^{(\alpha)}) \Big(\underbrace{-k^\tau (2g_\tau{}^0 k_0 - k_\tau)}_{-2k^0 k_0} g^{\sigma\kappa} + \\
& + \underbrace{k_\kappa (2g_\sigma{}^0 k_0 - k_\sigma) - k_\sigma (2g_\kappa{}^0 k_0 - k_\kappa)}_{2k_0 (k_\kappa g_\sigma{}^0 - k_\sigma g_\kappa{}^0)} \Big) \Big) \\
& (c_{\boldsymbol{k}}^{(\beta)} c_{\text{-}\boldsymbol{k}}^{(\alpha)} \exp\{-i2k^0 x^0\} + c_{\boldsymbol{k}}^{(\beta)\dagger} c_{\text{-}\boldsymbol{k}}^{(\alpha)\dagger} \exp\{+i2k^0 x^0\})
\end{aligned} \tag{A.113}$$

Wir nutzen

$$\begin{aligned}
e_{\text{-}\boldsymbol{k}}^{(\alpha)} &= +e_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)} \quad \text{falls } \alpha = 0 \\
e_{\text{-}\boldsymbol{k}}^{(\alpha)} &= -e_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)} \quad \text{falls } \alpha \neq 0
\end{aligned} \tag{A.114}$$

und $k^0 = \omega_{\boldsymbol{k}}/c$. Außerdem drehen wir das Koordinatensystem so, dass es sich mit dem an $\boldsymbol{k}$ orientierten System deckt, d.h. wir wählen

$$e^{(\alpha)} \equiv e_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)} \qquad \Longrightarrow \qquad (e^{(\sigma)} \cdot e_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)}) \overset{(K.10e)}{=} g^{\sigma\alpha} \,. \tag{A.115}$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{H} = &\sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{\sigma,\beta,\kappa,\alpha=0}^{3} \frac{c\hbar}{2}\Big(- g^{\kappa\beta} g^{\sigma\alpha}(-k^0 g^{\sigma\kappa} + k^\sigma g^{0\kappa} - g^{0\sigma} k^\kappa)\Big) \\
&(-c_{\boldsymbol{k}}^{(\beta)} c_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)+} - c_{\boldsymbol{k}}^{(\beta)+} c_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)}) \\
&+ \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{\sigma,\beta,\kappa,\alpha=0}^{3} \frac{c\hbar}{2}\Big(- g^{\kappa\beta} g^{\sigma\alpha}(2g_\alpha{}^0 - 1) \\
&\quad (-k^0 g^{\sigma\kappa} + k^\sigma g^{0\kappa} - g^{0\sigma} k^\kappa) + \\
&\quad + g^{\sigma\beta} g^{\kappa\alpha}(2g_\alpha{}^0 - 1)(-k^0 g^{\sigma\kappa} + k_\kappa g_\sigma{}^0 - k_\sigma g_\kappa{}^0)\Big) \\
&(c_{\boldsymbol{k}}^{(\beta)} c_{\text{-}\boldsymbol{k}}^{(\alpha)} \exp\{-i2k^0 x^0\} + c_{\boldsymbol{k}}^{(\beta)\dagger} c_{\text{-}\boldsymbol{k}}^{(\alpha)\dagger} \exp\{+i2k^0 x^0\}) \\
= &\sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{\beta,\alpha=0}^{3} \frac{c\hbar}{2}(-k^0 g^{\beta\alpha} + k_\alpha g^0{}_\beta - k_\beta g^0{}_\alpha) \\
&(+c_{\boldsymbol{k}}^{(\beta)} c_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)\dagger} + c_{\boldsymbol{k}}^{(\beta)\dagger} c_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)}) \\
&+ \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{\beta,\alpha=0}^{3} \frac{c\hbar}{2}(2g_\alpha{}^0 - 1) \\
&(k^0 g^{\beta\alpha} - k_\alpha g^0{}_\beta + k_\beta g^0{}_\alpha - k^0 g^{\alpha\beta} + k^\alpha g^{0\beta} - k^\beta g^{0\alpha}) \\
&(c_{\boldsymbol{k}}^{(\beta)} c_{\text{-}\boldsymbol{k}}^{(\alpha)} \exp\{-i2k^0 x^0\} + c_{\boldsymbol{k}}^{(\beta)\dagger} c_{\text{-}\boldsymbol{k}}^{(\alpha)\dagger} \exp\{+i2k^0 x^0\})
\end{aligned}
\tag{A.116}
$$

Wir zerlegen die Summen über α und β:

$$
\tilde{H} = \tilde{H}_{\alpha=\beta} + \tilde{H}_{\alpha=0\neq\beta} + \tilde{H}_{\alpha\neq 0=\beta} + \tilde{H}_{0\neq\alpha\neq\beta\neq 0} \tag{A.117}
$$

Es ist

$$\begin{aligned}
\tilde{H}_{\alpha=\beta} \overset{(A.116)}{=} & \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{\alpha=0}^{3} \frac{c\hbar}{2} \Big(- k^0 (2{g_0}^{\alpha} - 1) + k_\alpha g^0{}_\alpha - k_\alpha g^0{}_\alpha \Big) \\
& (c_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)} c_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)\dagger} + c_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)\dagger} c_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)}) \\
& + \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{\alpha=0}^{3} \frac{c\hbar}{2} (2{g_\alpha}^0 - 1) \Big(k^0 (2{g_\alpha}^0 - 1) - k_\alpha g^0{}_\alpha + k_\alpha g^0{}_\alpha \\
& \quad - k^0 (2{g_\alpha}^0 - 1) + k^\alpha g^{0\alpha} - k^\alpha g^{0\alpha} \Big) \\
& (c_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)} c_{\text{-}\boldsymbol{k}}^{(\alpha)} \exp\{-i2k^0 x^0\} + c_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)\dagger} c_{\text{-}\boldsymbol{k}}^{(\alpha)\dagger} \exp\{+i2k^0 x^0\}) \\
= & \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{\alpha=0}^{3} \frac{\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}}{2} (1 - 2{g_0}^{\alpha}) (c_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)} c_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)\dagger} + c_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)\dagger} c_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)}) \ . \qquad \text{(A.118)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{H}_{\alpha=0\neq\beta} = & \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{j=1}^{3} \frac{c\hbar}{2} (-k^0 g^{j0} + k_0 g^0{}_j - k_j g^0{}_0) \\
& (+c_{\boldsymbol{k}}^{(j)} c_{\boldsymbol{k}}^{(0)\dagger} + c_{\boldsymbol{k}}^{(j)\dagger} c_{\boldsymbol{k}}^{(0)}) \\
& + \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{j=1}^{3} \frac{c\hbar}{2} (2{g_0}^0 - 1) \\
& (k^0 g^{j0} - k_0 g^0{}_j + k_j g^0{}_0 - k^0 g^{0j} + k^0 g^{0j} - k^j g^{00}) \\
& (c_{\boldsymbol{k}}^{(j)} c_{\text{-}\boldsymbol{k}}^{(0)} \exp\{-i2k^0 x^0\} + c_{\boldsymbol{k}}^{(j)\dagger} c_{\text{-}\boldsymbol{k}}^{(0)\dagger} \exp\{+i2k^0 x^0\}) \\
= & - \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{j=1}^{3} \frac{c\hbar k_j}{2} (+c_{\boldsymbol{k}}^{(j)} c_{\boldsymbol{k}}^{(0)\dagger} + c_{\boldsymbol{k}}^{(j)\dagger} c_{\boldsymbol{k}}^{(0)}) \\
& + \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{j=1}^{3} \frac{c\hbar}{2} (k_j - k^j) \Big(c_{\boldsymbol{k}}^{(j)} c_{\text{-}\boldsymbol{k}}^{(0)} \exp\{-i2k^0 x^0\} + \\
& + c_{\boldsymbol{k}}^{(j)\dagger} c_{\text{-}\boldsymbol{k}}^{(0)\dagger} \exp\{+i2k^0 x^0\}) \qquad \text{(A.119)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{H}_{\alpha\neq 0=\beta} &= \sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{j=1}^{3}\frac{c\hbar}{2}(-k^0 g^{0j} + k_j g^0{}_0 - k_0 g^0{}_j) \\
&\quad (+c^{(0)}_{\boldsymbol{k}} c^{(j)\dagger}_{\boldsymbol{k}} + c^{(0)\dagger}_{\boldsymbol{k}} c^{(j)}_{\boldsymbol{k}}) \\
&\quad + \sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{j=1}^{3}\frac{c\hbar}{2}(2g_j{}^0 - 1) \\
&\quad (k^0 g^{0j} - k_j g^0{}_0 + k_0 g^0{}_j - k^0 g^{j0} + k^j g^{00} - k^0 g^{0j}) \\
&\quad (c^{(0)}_{\boldsymbol{k}} c^{(j)}_{\text{-}\boldsymbol{k}} \exp\{-i2k^0x^0\} + c^{(0)\dagger}_{\boldsymbol{k}} c^{(j)\dagger}_{\text{-}\boldsymbol{k}} \exp\{+i2k^0x^0\}) \\
&= \sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{j=1}^{3}\frac{c\hbar k_j}{2}(c^{(0)}_{\boldsymbol{k}} c^{(j)\dagger}_{\boldsymbol{k}} + c^{(0)\dagger}_{\boldsymbol{k}} c^{(j)}_{\boldsymbol{k}}) \\
&\quad - \sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{j=1}^{3}\frac{c\hbar}{2}(+k_j - k^j)\Big(c^{(0)}_{\text{-}\boldsymbol{k}} c^{(j)}_{\boldsymbol{k}} \exp\{-i2k^0x^0\} + \\
&\quad + c^{(0)\dagger}_{\text{-}\boldsymbol{k}} c^{(j)\dagger}_{\boldsymbol{k}} \exp\{+i2k^0x^0\}\Big)
\end{aligned}
\tag{A.120}
$$

Weil symmetrisch über sämtliche positiven und negativen $\boldsymbol{k}$ summiert wird, durften wir in der letzten Zeile $-\boldsymbol{k}$ und $\boldsymbol{k}$ vertauschen. Weil außerdem die Fourier-Operatoren laut (17.67) wegen $(j) \neq (0)$ vertauschen, ist

$$
\tilde{H}_{\alpha=0\neq\beta} + \tilde{H}_{\alpha\neq 0=\beta} = 0 \; . \tag{A.121}
$$

Schließlich ist

$$
\begin{aligned}
\tilde{H}_{0\neq\alpha\neq\beta\neq 0} &= \sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{j,l=1}^{3}(1+g^{jl})\frac{c\hbar}{2}(-k^0 g^{jl} + k_l g^0{}_j - k_j g^0{}_l) \\
&\quad (+c^{(j)}_{\boldsymbol{k}} c^{(l)\dagger}_{\boldsymbol{k}} + c^{(j)\dagger}_{\boldsymbol{k}} c^{(l)}_{\boldsymbol{k}}) \\
&\quad + \sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{j,l=1}^{3}(1+g^{jl})\frac{c\hbar}{2}(2g_l{}^0 - 1) \\
&\quad (k^0 g^{jl} - k_l g^0{}_j + k_j g^0{}_l - k^0 g^{lj} + k^l g^{0j} - k^j g^{0l}) \\
&\quad (c^{(j)}_{\boldsymbol{k}} c^{(l)}_{\text{-}\boldsymbol{k}} \exp\{-i2k^0x^0\} + c^{(j)\dagger}_{\boldsymbol{k}} c^{(l)\dagger}_{\text{-}\boldsymbol{k}} \exp\{+i2k^0x^0\}) = 0 \; .
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich der Hamiltonoperator

$$\begin{aligned}\tilde{H} &= \underbrace{\tilde{H}_{\alpha=\beta}}_{\text{(A.118)}} + \underbrace{\tilde{H}_{\alpha=0\neq\beta} + \tilde{H}_{\alpha\neq 0=\beta}}_{0} + \underbrace{\tilde{H}_{0\neq\alpha\neq\beta\neq 0}}_{0} = \\ &= \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{\alpha=0}^{3} \frac{\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}}{2}(1-2{g_0}^{\alpha})(c_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)} c_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)\dagger} + c_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)\dagger} c_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)}) \\ &= -\sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{\alpha=0}^{3} \sum_{\beta=0}^{3} g^{\alpha\beta} \frac{\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}}{2} (\underbrace{c_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)} c_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)\dagger} - c_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)\dagger} c_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)}}_{1} + c_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)\dagger} c_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)} + c_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)\dagger} c_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)})\end{aligned}$$

Wie im Fall aller elementaren (d. h. kontinuierlichen) Quantenfelder, postulieren wir als ein Naturgesetz, dass der unphysikalische Term, der nicht vom Teilchenzahl-Operator $c_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)\dagger} c_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)}$ gestrichen werden muss, damit man das korrekte Resultat erhält:

$$\tilde{H} = -\sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{\alpha=0}^{3} \sum_{\beta=0}^{3} g^{\alpha\beta} \hbar\omega_{\boldsymbol{k}} c_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)\dagger} c_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)} \tag{A.122}$$

A.18 Berechnung des Impulsoperators (17.71)

Wir wollen zeigen, dass aus der Impulsdichte (17.68) des quantisierten Feldes $\tilde{A}(x)$ der Impulsoperator (17.71) folgt.

Mit $\tilde{\pi}^{\tau}(x) =$ (17.64), $\tilde{A}(x) =$ (17.61), und $\tilde{A}_{\tau}(x) =$ (17.65) erhält man

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{P}}^{j} &= \tilde{\pi}^{\tau}(x)\, \mathrm{d}^{j} \tilde{A}_{\tau}(x) \\ &= -\sum_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{k}} \sum_{\beta,\alpha=0}^{3} \sum_{\kappa,\tau=0}^{3} \frac{c\hbar(-f^0 g^{\tau\kappa} + f^{\tau} g^{0\kappa} - g^{0\tau} f^{\kappa}) k^{j}}{2\Omega\sqrt{\omega_{\boldsymbol{f}}\omega_{\boldsymbol{k}}}} \\ &\quad (e^{(\kappa)} \cdot e_{\boldsymbol{f}}^{(\beta)})(e^{(\tau)} \cdot e_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)}) \\ &\quad \Big(c_{\boldsymbol{f}}^{(\beta)} c_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)} \exp\{-i(f+k)x\} - c_{\boldsymbol{f}}^{(\beta)} c_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)\dagger} \exp\{-i(f-k)x\} \\ &\quad - c_{\boldsymbol{f}}^{(\beta)\dagger} c_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)} \exp\{i(f-k)x\} + c_{\boldsymbol{f}}^{(\beta)\dagger} c_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)\dagger} \exp\{i(f+k)x\} \Big) \,.\end{aligned} \tag{A.123}$$

Weil über die Namen (κ) der Einheitsvektoren nicht automatisch summiert wird, wurden die Summationszeichen explizit ausgeschrieben. Der Impulsoperator

$$\tilde{P}^j = \int\limits_{\Omega} \mathrm{d}^3x\, \tilde{\mathcal{P}}^j \tag{A.124}$$

ist das Integral von $\tilde{\mathcal{P}}^j$ über das gesamte Normierungsvolumen Ω. Um bei dieser Integration entsprechend (16.3) das Kronecker-Symbol zu erhalten, drehen wir vor der Integration in zwei Summanden die Reihenfolge der Summation über $\boldsymbol{k}$ um. Mit $\omega_{-\boldsymbol{k}} = \omega_{\boldsymbol{k}}$ und $e^{(\alpha)}_{-\boldsymbol{k}} = e^{(\alpha)}_{\boldsymbol{k}}(2g^{\alpha}{}_0 - 1)$ erhält man

$$\begin{aligned}
\tilde{P}^j = &-\sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{\beta,\alpha=0}^{3} \sum_{\kappa,\tau=0}^{3} \frac{c\hbar(-k^0 g^{\tau\kappa} + k^\tau g^{0\kappa} - g^{0\tau}k^\kappa)k^j}{2\omega_{\boldsymbol{k}}} \\
&(e^{(\kappa)} \cdot e^{(\beta)}_{\boldsymbol{k}})(e^{(\tau)} \cdot e^{(\alpha)}_{\boldsymbol{k}})\Big(- c^{(\beta)}_{\boldsymbol{k}} c^{(\alpha)\dagger}_{\boldsymbol{k}} - c^{(\beta)\dagger}_{\boldsymbol{k}} c^{(\alpha)}_{\boldsymbol{k}}\Big) \\
&+\sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{\beta,\alpha=0}^{3} \sum_{\kappa,\tau=0}^{3} \frac{c\hbar(-k^0 g^{\tau\kappa} + k^\tau g^{0\kappa} - g^{0\tau}k^\kappa)k^j}{2\omega_{\boldsymbol{k}}} \\
&(e^{(\kappa)} \cdot e^{(\beta)}_{\boldsymbol{k}})(e^{(\tau)} \cdot e^{(\alpha)}_{\boldsymbol{k}})(2g^{\alpha}{}_0 - 1) \\
&\Big(c^{(\beta)}_{\boldsymbol{k}} c^{(\alpha)}_{-\boldsymbol{k}} \exp\{-i2k^0x^0\} + c^{(\beta)\dagger}_{\boldsymbol{k}} c^{(\alpha)\dagger}_{-\boldsymbol{k}} \exp\{i2k^0x^0\}\Big)
\end{aligned} \tag{A.125}$$

Wir zerlegen $\tilde{P}^j$ in die fünf Summanden

$$\tilde{P}^j = \tilde{P}^j_{\alpha=\beta=0} + \tilde{P}^j_{\alpha=\beta\neq 0} + \tilde{P}^j_{\alpha=0\neq\beta} + \tilde{P}^j_{\alpha\neq 0=\beta} + \tilde{P}^j_{0\neq\alpha\neq\beta\neq 0}\ .$$

In der Summe $\tilde{P}^j_{\alpha=\beta=0}$ müssen wegen der Faktoren $(e^{(\kappa)} \cdot e^{(0)}_{\boldsymbol{k}}) = g^{\kappa 0}$ auch $\tau = \kappa = 0$ sein:

$$\tilde{P}^j_{\alpha=\beta=0} = \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{c\hbar(-k^0+k^0-k^0)k^j}{2\omega_{\boldsymbol{k}}} \Big(c^{(0)}_{\boldsymbol{k}} c^{(0)\dagger}_{\boldsymbol{k}} + c^{(0)\dagger}_{\boldsymbol{k}} c^{(0)}_{\boldsymbol{k}} \Big) + \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{c\hbar(-k^0+k^0-k^0)k^j}{2\omega_{\boldsymbol{k}}} \Big(c^{(0)}_{\boldsymbol{k}} c^{(0)}_{\text{-}\boldsymbol{k}} \exp\{-i2k^0x^0\} + c^{(0)\dagger}_{\boldsymbol{k}} c^{(0)\dagger}_{\text{-}\boldsymbol{k}} \exp\{i2k^0x^0\} \Big)$$

Die zweite Summe über $\boldsymbol{k}$ ist Null. Denn es gibt zu jedem Summanden mit $+\boldsymbol{k}$ einen Summanden mit $-\boldsymbol{k}$, und diese beiden Summanden unterscheiden sich durch nichts als das Vorzeichen von k^j. Also gilt mit $k^0 = \omega_{\boldsymbol{k}}/c$

$$\tilde{P}^j_{\alpha=\beta=0} = -\sum_{\boldsymbol{k}} \frac{\hbar k^j}{2} \Big(c^{(0)}_{\boldsymbol{k}} c^{(0)\dagger}_{\boldsymbol{k}} + c^{(0)\dagger}_{\boldsymbol{k}} c^{(0)}_{\boldsymbol{k}} \Big) \,. \tag{A.126}$$

In der Summe $\tilde{P}^j_{\alpha=\beta\neq 0}$ müssen wegen der Faktoren $(e^{(\kappa)} \cdot e^{(\beta)}_{\boldsymbol{k}})$ auch $\tau \neq 0$ und $\kappa \neq 0$ sein:

$$\tilde{P}^j_{\alpha=\beta\neq 0} = +\sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{\alpha=1}^{3} \sum_{\kappa,\tau=1}^{3} \frac{c\hbar k^0 g^{\tau\kappa} k^j}{2\omega_{\boldsymbol{k}}} (e^{(\kappa)} \cdot e^{(\alpha)}_{\boldsymbol{k}})(e^{(\tau)} \cdot e^{(\alpha)}_{\boldsymbol{k}}) \Big(- c^{(\alpha)}_{\boldsymbol{k}} c^{(\alpha)\dagger}_{\boldsymbol{k}} - c^{(\alpha)\dagger}_{\boldsymbol{k}} c^{(\alpha)}_{\boldsymbol{k}} \Big) + \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{\alpha=0}^{3} \sum_{\kappa,\tau=0}^{3} \frac{c\hbar k^0 g^{\tau\kappa} k^j}{2\omega_{\boldsymbol{k}}} (e^{(\kappa)} \cdot e^{(\alpha)}_{\boldsymbol{k}})(e^{(\tau)} \cdot e^{(\alpha)}_{\boldsymbol{k}}) \Big(c^{(\alpha)}_{\boldsymbol{k}} c^{(\alpha)}_{\text{-}\boldsymbol{k}} \exp\{-i2k^0x^0\} + c^{(\alpha)\dagger}_{\boldsymbol{k}} c^{(\alpha)\dagger}_{\text{-}\boldsymbol{k}} \exp\{i2k^0x^0\} \Big)$$

In der zweiten Summe über $\boldsymbol{k}$ unterscheidet sich der Summand mit $-\boldsymbol{k}$ nur durch das Vorzeichen von k^j vom Summanden mit $+\boldsymbol{k}$, so dass die Summe insgesamt Null ergibt. Wir entwickeln $e^{(\alpha)}_{\boldsymbol{k}}$ nach $e^{(\kappa)}$ und nach $e^{(\tau)}$, und bilden das Produkt beider Entwicklungen. Wegen $\alpha \neq 0$ ist es

$$e^{(\alpha)}_{\boldsymbol{k}} \cdot e^{(\alpha)}_{\boldsymbol{k}} \overset{\text{(K.10e)}}{=} -1 = \sum_{\kappa,\tau=1}^{3} (e^{(\kappa)} \cdot e^{(\alpha)}_{\boldsymbol{k}})(e^{(\tau)} \cdot e^{(\alpha)}_{\boldsymbol{k}}) \underbrace{e^{(\kappa)} \cdot e^{(\tau)}}_{g^{\kappa\tau}} \,.$$

Also ist mit $k^0 = \omega_{\boldsymbol{k}}/c$

$$\tilde{P}^j_{\alpha=\beta\neq 0} = +\sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\hbar k^j}{2} \left(c^{(\alpha)}_{\boldsymbol{k}} c^{(\alpha)\dagger}_{\boldsymbol{k}} + c^{(\alpha)\dagger}_{\boldsymbol{k}} c^{(\alpha)}_{\boldsymbol{k}} \right) . \tag{A.127}$$

In der Summe $\tilde{P}^j_{\alpha=0\neq\beta}$ muss wegen der Faktoren $(e^{(\kappa)} \cdot e^{(\beta)}_{\boldsymbol{k}})$ auch $\tau = 0$ und $\kappa \neq 0$ sein:

$$\begin{aligned}
\tilde{P}^j_{\alpha=0\neq\beta} = &+\sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{\beta=1}^{3} \sum_{\kappa=1}^{3} \frac{c\hbar k^\kappa k^j}{2\omega_{\boldsymbol{k}}} \\
&(e^{(\kappa)} \cdot e^{(\beta)}_{\boldsymbol{k}}) \Big(- c^{(\beta)}_{\boldsymbol{k}} c^{(0)\dagger}_{\boldsymbol{k}} - c^{(\beta)\dagger}_{\boldsymbol{k}} c^{(0)}_{\boldsymbol{k}} \Big) \\
&- \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{\beta=1}^{3} \sum_{\kappa=1}^{3} \frac{c\hbar k^\kappa k^j}{2\omega_{\boldsymbol{k}}} (e^{(\kappa)} \cdot e^{(\beta)}_{\boldsymbol{k}}) \\
&\Big(c^{(\beta)}_{\boldsymbol{k}} c^{(0)}_{-\boldsymbol{k}} \exp\{-i2k^0x^0\} + c^{(\beta)\dagger}_{\boldsymbol{k}} c^{(0)\dagger}_{-\boldsymbol{k}} \exp\{i2k^0x^0\} \Big)
\end{aligned}$$

In der Summe $\tilde{P}^j_{\alpha\neq 0=\beta}$ muss wegen der Faktoren $(e^{(\kappa)} \cdot e^{(\beta)}_{\boldsymbol{k}})$ auch $\tau \neq 0$ und $\kappa = 0$ sein:

$$\begin{aligned}
\tilde{P}^j_{\alpha\neq 0=\beta} = &-\sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{\alpha=1}^{3} \sum_{\tau=1}^{3} \frac{c\hbar k^\tau k^j}{2\omega_{\boldsymbol{k}}} \\
&(e^{(\tau)} \cdot e^{(\alpha)}_{\boldsymbol{k}}) \Big(- c^{(0)}_{\boldsymbol{k}} c^{(\alpha)\dagger}_{\boldsymbol{k}} - c^{(0)\dagger}_{\boldsymbol{k}} c^{(\alpha)}_{\boldsymbol{k}} \Big) \\
&- \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{\alpha=1}^{3} \sum_{\tau=1}^{3} \frac{c\hbar k^\tau k^j}{2\omega_{\boldsymbol{k}}} (e^{(\tau)} \cdot e^{(\alpha)}_{\boldsymbol{k}}) \\
&\Big(c^{(0)}_{\boldsymbol{k}} c^{(\alpha)}_{-\boldsymbol{k}} \exp\{-i2k^0x^0\} + c^{(0)\dagger}_{\boldsymbol{k}} c^{(\alpha)\dagger}_{-\boldsymbol{k}} \exp\{i2k^0x^0\} \Big)
\end{aligned}$$

Wegen (17.67) kommutieren in dieser Gleichung die Fourier-Operatoren. Außerdem darf man, weil symmetrisch über sämtliche positiven und negativen $\boldsymbol{k}$ summiert wird, in der zweiten Summe $\boldsymbol{k}$ gegen $-\boldsymbol{k}$ tauschen. Dabei gibt es wegen $e^{(\alpha)}_{-\boldsymbol{k}} = -e^{(\alpha)}_{\boldsymbol{k}}$ einen Vorzeichenwechsel:

$$\begin{aligned}\tilde{P}^j_{\alpha\neq 0=\beta} = &-\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\tau=1}^{3}\frac{c\hbar k^\tau k^j}{2\omega_{\boldsymbol{k}}}\\ &(e^{(\tau)}\cdot e^{(\alpha)}_{\boldsymbol{k}})\Big(-c^{(\alpha)}_{\boldsymbol{k}}c^{(0)\dagger}_{\boldsymbol{k}}-c^{(\alpha)\dagger}_{\boldsymbol{k}}c^{(0)}_{\boldsymbol{k}}\Big)\\ &+\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\tau=1}^{3}\frac{c\hbar k^\tau k^j}{2\omega_{\boldsymbol{k}}}(e^{(\tau)}\cdot e^{(\alpha)}_{\boldsymbol{k}})\\ &\Big(c^{(\alpha)}_{\boldsymbol{k}}c^{(0)}_{\text{-}\boldsymbol{k}}\exp\{-i2k^0x^0\}+c^{(\alpha)\dagger}_{\boldsymbol{k}}c^{(0)\dagger}_{\text{-}\boldsymbol{k}}\exp\{i2k^0x^0\}\Big)\end{aligned}$$

Jetzt sieht man, dass

$$\tilde{P}^j_{\alpha=0\neq\beta}+\tilde{P}^j_{\alpha\neq 0=\beta}=0 \tag{A.128}$$

ist. Schließlich berechnen wir noch $\tilde{P}^j_{0\neq\alpha\neq\beta\neq 0}$. In diesem Term müssen wegen der Faktoren $(e^{(\kappa)}\cdot e^{(\beta)}_{\boldsymbol{k}})$ auch $\tau\neq 0$ und $\kappa\neq 0$ sein:

$$\begin{aligned}\tilde{P}^j_{0\neq\alpha\neq\beta\neq 0} = &-\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{\beta,\alpha=1}^{3}\sum_{\kappa,\tau=1}^{3}(1-g^\alpha{}_\beta)\frac{c\hbar(-k^0g^{\tau\kappa})k^j}{2\omega_{\boldsymbol{k}}}\\ &(e^{(\kappa)}\cdot e^{(\beta)}_{\boldsymbol{k}})(e^{(\tau)}\cdot e^{(\alpha)}_{\boldsymbol{k}})\Big(-c^{(\beta)}_{\boldsymbol{k}}c^{(\alpha)\dagger}_{\boldsymbol{k}}-c^{(\beta)\dagger}_{\boldsymbol{k}}c^{(\alpha)}_{\boldsymbol{k}}\Big)\\ &-\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{\beta,\alpha=1}^{3}\sum_{\kappa,\tau=1}^{3}(1-g^\alpha{}_\beta)\frac{c\hbar(-k^0g^{\tau\kappa})k^j}{2\omega_{\boldsymbol{k}}}\\ &(e^{(\kappa)}\cdot e^{(\beta)}_{\boldsymbol{k}})(e^{(\tau)}\cdot e^{(\alpha)}_{\boldsymbol{k}})\\ &\Big(c^{(\beta)}_{\boldsymbol{k}}c^{(\alpha)}_{\text{-}\boldsymbol{k}}\exp\{-i2k^0x^0\}+c^{(\beta)\dagger}_{\boldsymbol{k}}c^{(\alpha)\dagger}_{\text{-}\boldsymbol{k}}\exp\{i2k^0x^0\}\Big)\\ =&\ 0\end{aligned} \tag{A.129}$$

Dass dieser Term Null ist erkennt man, wenn man das von den Einheitsvektoren $e^{(\kappa)}$ aufgespannte Koordinatensystem so dreht, dass für die Einheitsvektoren $e^{(\kappa)}=e^{(\kappa)}_{\boldsymbol{k}}$ gilt. Von Null verschiedene Summanden gibt es dann nur im Fall $\kappa=\beta$, $\tau=\alpha$. Alle Summanden enthalten den Faktor $g^{\tau\kappa}$, so dass auch $\beta=\alpha$ sein muss, damit ein Summand verschieden von Null ist. Es wird aber nur über $\beta\neq\alpha$ summiert, was durch den Faktor

$(1 - g^{\alpha}{}_{\beta})$ sichergestellt wird. Also enthält $\tilde{P}^j_{0\neq\alpha\neq\beta\neq 0}$ keinen einzigen von Null verschiedenen Summanden.

Insgesamt haben wir gefunden:

$$\begin{aligned}\tilde{P}^j &= \underbrace{\tilde{P}^j_{\alpha=\beta=0}}_{(\text{A.126})} + \underbrace{\tilde{P}^j_{\alpha=\beta\neq 0}}_{(\text{A.127})} + \underbrace{\tilde{P}^j_{\alpha=0\neq\beta} + \tilde{P}^j_{\alpha\neq 0=\beta}}_{0} + \underbrace{\tilde{P}^j_{0\neq\alpha\neq\beta\neq 0}}_{0} \\ &= \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{\alpha=0}^{3} \frac{\hbar k^j}{2} \Big(c^{(\alpha)}_{\boldsymbol{k}} c^{(\alpha)\dagger}_{\boldsymbol{k}} + c^{(\alpha)\dagger}_{\boldsymbol{k}} c^{(\alpha)}_{\boldsymbol{k}} \Big) (1 - 2g^{\alpha}{}_{0}) \\ &= \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{\alpha=0}^{3} \hbar k^j \Big(c^{(\alpha)\dagger}_{\boldsymbol{k}} c^{(\alpha)}_{\boldsymbol{k}} + \tfrac{1}{2}[c^{(\alpha)}_{\boldsymbol{k}}, c^{(\alpha)\dagger}_{\boldsymbol{k}}] \Big) (1 - 2g^{\alpha}{}_{0}) \\ &= -\sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{\alpha=0}^{3} \sum_{\beta=0}^{3} g^{\alpha\beta} \hbar k^j \left(c^{(\alpha)\dagger}_{\boldsymbol{k}} c^{(\alpha)}_{\boldsymbol{k}} + \tfrac{1}{2}[c^{(\alpha)}_{\boldsymbol{k}}, c^{(\alpha)\dagger}_{\boldsymbol{k}}] \right) \end{aligned} \tag{A.130}$$

Wie im Fall aller elementaren (d. h. kontinuierlichen) Quantenfelder, postulieren wir als ein Naturgesetz, dass der Kommutator, weil er nicht vom Teilchenzahl-Operator $c^{(\alpha)\dagger}_{\boldsymbol{k}} c^{(\alpha)}_{\boldsymbol{k}}$ abhängt, gestrichen werden muss damit man das korrekte Resultat erhält:

$$\tilde{P}^j = -\sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{\alpha=0}^{3} \sum_{\beta=0}^{3} g^{\alpha\beta} \hbar k^j c^{(\alpha)\dagger}_{\boldsymbol{k}} c^{(\alpha)}_{\boldsymbol{k}} \tag{A.131}$$

A.19 Nebenrechnung zu (14.22)

Wir wollen zeigen, dass

$$\langle \phi | S | \psi \rangle \overset{(14.22)}{=} \int_{\Omega} \mathrm{d}^3 x \, \phi^*(\boldsymbol{x}) S \psi(\boldsymbol{x}) \tag{A.132}$$

für beliebige Operatoren S gilt. S kann im allgemeinsten Fall ein Polynom von Zahlen und Differentialoperatoren sein. Wenn S nur Zahlen, aber keine Differentialoperatoren enthält, ist

$$\langle\phi|S|\psi\rangle = \int\limits_\Omega \mathrm{d}^3y \int\limits_\Omega \mathrm{d}^3x \underbrace{\langle\phi|\boldsymbol{y}\rangle}_{\phi^*(\boldsymbol{y})} \underbrace{\langle\boldsymbol{y}|S|\boldsymbol{x}\rangle}_{S\delta^{(3)}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})} \underbrace{\langle\boldsymbol{x}|\psi\rangle}_{\psi(\boldsymbol{x})} = \int\limits_\Omega \mathrm{d}^3x\, \phi^*(\boldsymbol{x})\, S\, \psi(\boldsymbol{x}) \ . \tag{A.133}$$

Um das Matrixelement von Differentialoperatoren in der Ortsdarstellung zu finden machen wir uns zunutze, dass wir den Kommutator eines Differentialoperators, nämlich der k-Komponente des Impulsoperators

$$p_k = \frac{\hbar}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_k} \tag{A.134}$$

mit der j-Komponente des Ortsoperators x_j bereits kennen:

$$x_j p_k - p_k x_j \overset{(14.9)}{=} i\hbar\delta_{jk} \tag{A.135}$$

Das entsprechende Matrixelement in der Ortsdarstellung ist leicht zu erraten, wenn wir uns zunächst auf eine eindimensionale Betrachtung beschränken:

$$\langle y|xp - px|z\rangle = i\hbar\langle y|z\rangle = i\hbar\delta(y-z) \tag{A.136}$$

x, y, z und p liegen alle in der gleichen Raumdimension, es wurden nur verschiedene Buchstaben gewählt, um den Ortsoperator x und seine Eigenwerte y und z voneinander unterscheiden zu können.

Das Matrixelement (A.136) kann in der Form

$$\langle y|xp - px)|z\rangle = \frac{\hbar}{i}\,(y-z)\,\frac{\mathrm{d}\,\delta(y-z)}{\mathrm{d}y} \tag{A.137}$$

geschrieben werden. Um uns davon zu überzeugen, berücksichtigen wir, dass $\delta(y-z)$ nur bei $y=z$ von Null verschieden ist, aber nicht an den Grenzen des Normierungsbereichs Ω, und erhalten mit partieller Integration

$$\int\limits_{\Omega^{1/3}} \mathrm{d}y\,(y-z)\,\frac{\mathrm{d}\,\delta(y-z)}{\mathrm{d}\,y} = \tag{A.138}$$

$$= \underbrace{\Big[(y-z)\delta(y-z)\Big]_{\Omega^{1/3}}}_{0} - \int\limits_{\Omega^{1/3}} \mathrm{d}y\,\underbrace{\frac{\mathrm{d}(y-z)}{\mathrm{d}\,y}}_{1}\,\delta(y-z)\ .$$

Andererseits können wir das Matrixelement (A.136) auch auf folgende Weise berechnen:

$$\begin{aligned}\langle y|xp-px)|z\rangle &= \int\limits_{\Omega^{1/3}} \mathrm{d}w\Big(\langle y|x|w\rangle\langle w|p|z\rangle - \langle y|p|w\rangle\langle w|x|z\rangle\Big)\\ &= \int\limits_{\Omega^{1/3}} \mathrm{d}w\Big(w\delta(y-w)\langle w|p|z\rangle - \langle y|p|w\rangle z\delta(w-z)\Big)\\ &= (y-z)\langle y|p|z\rangle \end{aligned}\tag{A.139}$$

Der Vergleich von (A.137), (A.139) und (A.134) ergibt

$$\langle y|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}|z\rangle = \frac{\mathrm{d}\,\delta(y-z)}{\mathrm{d}\,y}\ . \tag{A.140}$$

Für die $(m+1)$-te Potenz des Differentialoperators folgt daraus mit partieller Integration

$$\begin{aligned}\langle y|\frac{\mathrm{d}^{m+1}}{\mathrm{d}\,x^{m+1}}|z\rangle &= \int\limits_{\Omega^{1/3}} \mathrm{d}w\,\langle y|\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\,x^m}|w\rangle\langle w|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}|z\rangle =\\ &= \int\limits_{\Omega^{1/3}} \mathrm{d}w\,\langle y|\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\,x^m}|w\rangle\,\frac{\mathrm{d}\,\delta(w-z)}{\mathrm{d}\,w} =\\ &= \underbrace{\Big[\langle y|\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\,x^m}|w\rangle\,\delta(w-z)\Big]_{\Omega^{1/3}}}_{0} -\\ &\quad - \int\limits_{\Omega^{1/3}} \mathrm{d}w\,\delta(w-z)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,w}\Big(\langle y|\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\,x^m}|w\rangle\Big) = \end{aligned}$$

$$= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\langle y|\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}|z\rangle\right) . \tag{A.141}$$

Weil wir das Matrixelement mit $m = 1$ schon aus (A.140) kennen, lassen sich aus folgender Rekursionsformel die Matrixelemente sämtlicher Potenzen des Differentialoperators erschließen:

$$\begin{aligned}
\langle y|\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}|z\rangle &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{\mathrm{d}\,\delta(y-z)}{\mathrm{d}y}\right) = +\frac{\mathrm{d}^2\,\delta(y-z)}{\mathrm{d}y^2} \\
\langle y|\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}|z\rangle &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{\mathrm{d}^2\,\delta(y-z)}{\mathrm{d}y^2}\right) = +\frac{\mathrm{d}^3\,\delta(y-z)}{\mathrm{d}y^3} \\
\langle y|\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}|z\rangle &= +\frac{\mathrm{d}^m\,\delta(y-z)}{\mathrm{d}y^m}
\end{aligned} \tag{A.142}$$

Diese Formeln gelten für den eindimensionalen Fall. Es ist plausibel, dass die Erweiterung auf den dreidimensionalen Raum durch

$$\langle \boldsymbol{y}|\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}^m}|\boldsymbol{z}\rangle = +\frac{\mathrm{d}^m\,\delta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})}{\mathrm{d}\boldsymbol{y}^m} \tag{A.143}$$

gegeben ist. Also ist im Fall $S \equiv \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}^m}$ das Matrixelement in der Ortsdarstellung

$$\begin{aligned}
\langle\phi|S|\psi\rangle &= \int_\Omega \mathrm{d}^3y \int_\Omega \mathrm{d}^3x\, \underbrace{\langle\phi|\boldsymbol{y}\rangle}_{\phi^*(\boldsymbol{y})} \langle \boldsymbol{y}|\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}^m}|\boldsymbol{x}\rangle \underbrace{\langle\boldsymbol{x}|\psi\rangle}_{\psi(\boldsymbol{x})} \\
&= \int_\Omega \mathrm{d}^3y\, \phi^*(\boldsymbol{y}) \int_\Omega \mathrm{d}^3x\, \frac{\mathrm{d}^m\delta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}\boldsymbol{y}^m}\, \psi(\boldsymbol{x}) \\
&= \int_\Omega \mathrm{d}^3y\, \phi^*(\boldsymbol{y}) \int_\Omega \mathrm{d}^3x\, (-1)^m\, \frac{\mathrm{d}^m\delta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}^m}\, \psi(\boldsymbol{x}) .
\end{aligned} \tag{A.144}$$

Das Integral über $\boldsymbol{x}$ wird jetzt m-mal partiell integriert. Weil die Stammfunktion die Deltafunktion bzw. die n-te Ableitung der Deltafunktion enthält, ist ihr Wert an den Grenzen des Integrationsvolumens Ω gleich Null. Also ist

$$(-1)^m \int\limits_\Omega \mathrm{d}^3x \; \frac{\mathrm{d}^m \delta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}\,\boldsymbol{x}^m}\,\psi(\boldsymbol{x}) \;=$$

$$= (-1)^m(-1)^m \int\limits_\Omega \mathrm{d}^3x \; \delta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\,\frac{\mathrm{d}^m\,\psi(\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}\,\boldsymbol{x}^m} = +\frac{\mathrm{d}^m\,\psi(\boldsymbol{y})}{\mathrm{d}\,\boldsymbol{y}^m} \; .$$

Einsetzen in (A.144) ergibt

$$\langle\phi|S|\psi\rangle = \langle\phi|\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\,\boldsymbol{x}^m}|\psi\rangle = \int\limits_\Omega \mathrm{d}^3y\,\phi^*(\boldsymbol{y})\frac{\mathrm{d}^m\,\psi(\boldsymbol{y})}{\mathrm{d}\,\boldsymbol{y}^m} \;=$$

$$= \int\limits_\Omega \mathrm{d}^3x\,\phi^*(\boldsymbol{x})S\psi(\boldsymbol{x}) \; . \tag{A.145}$$

Diese Formel für das Matrixelement in der Ortsdarstellung gilt also für beliebige Operatoren S, egal welche Potenzen von Zahlen und/oder Differentialoperatoren sie enthalten.

A.20 Der Laplace-Operator

Der Laplaceoperator lautet
a) in kartesischen Koordinaten

$$\Delta = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} \; , \tag{A.146a}$$

b) in Zylinderkoordinaten

$$\Delta = \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\Big(\rho\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\Big) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varphi^2} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} \; , \tag{A.146b}$$

c) in Kugelkoordinaten

$$\Delta = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}\Big(\sin\vartheta\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}\Big) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varphi^2} \; . \tag{A.146c}$$

A.21 Herleitung von Gleichung (23.28)

Mit der Definition

$$\begin{pmatrix} B^{\boldsymbol{k}} \\ A^{\boldsymbol{k}}_{-} \\ A^{\boldsymbol{k}}_{+} \end{pmatrix} \equiv \sqrt{\frac{1}{2(E+mc^2)}} \begin{pmatrix} c\hbar k_1 + ic\hbar k_2 \\ E + mc^2 - c\hbar k_3 \\ E + mc^2 + c\hbar k_3 \end{pmatrix} \tag{A.147}$$

$$\text{mit } E = \hbar\omega_{\boldsymbol{k}} > 0 \ , \ k_j = -k^j$$

sind die Spinoren

$${}_1u^{\boldsymbol{f}} \overset{(8.75a)}{=} \begin{pmatrix} A^{\boldsymbol{f}}_{+} \\ B^{\boldsymbol{f}} \\ A^{\boldsymbol{f}}_{-} \\ -B^{\boldsymbol{f}} \end{pmatrix} \qquad {}_2u^{\boldsymbol{f}} \overset{(8.75b)}{=} \begin{pmatrix} B^{\boldsymbol{f}*} \\ A^{\boldsymbol{f}}_{-} \\ -B^{\boldsymbol{f}*} \\ A^{\boldsymbol{f}}_{+} \end{pmatrix} \tag{A.148a}$$

$${}_1v^{\boldsymbol{f}} \overset{(8.75c)}{=} \begin{pmatrix} A^{\boldsymbol{f}}_{+} \\ B^{\boldsymbol{f}} \\ -A^{\boldsymbol{f}}_{-} \\ B^{\boldsymbol{f}} \end{pmatrix} \qquad {}_2v^{\boldsymbol{f}} \overset{(8.75d)}{=} \begin{pmatrix} B^{\boldsymbol{f}*} \\ A^{\boldsymbol{f}}_{-} \\ B^{\boldsymbol{f}*} \\ -A^{\boldsymbol{f}}_{+} \end{pmatrix} . \tag{A.148b}$$

Wir berechnen das Spinorprodukt

$$\begin{aligned} {}_{r\alpha}\bar{u}^{\boldsymbol{f}}\ {}_{r\beta}u^{\boldsymbol{k}} &= {}_{r\alpha}u^{\boldsymbol{f}+}\ \gamma^0\ {}_{r\beta}u^{\boldsymbol{k}} = \\ &\overset{(8.15a)}{=} \begin{pmatrix} {}_{r\alpha}u_1^{\boldsymbol{f}*} & {}_{r\alpha}u_2^{\boldsymbol{f}*} & {}_{r\alpha}u_3^{\boldsymbol{f}*} & {}_{r\alpha}u_4^{\boldsymbol{f}*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}_{r\beta}u_1^{\boldsymbol{k}} \\ {}_{r\beta}u_2^{\boldsymbol{k}} \\ {}_{r\beta}u_3^{\boldsymbol{k}} \\ {}_{r\beta}u_4^{\boldsymbol{k}} \end{pmatrix} \\ &= {}_{r\alpha}u_3^{\boldsymbol{f}*}\ {}_{r\beta}u_1^{\boldsymbol{k}} + {}_{r\alpha}u_4^{\boldsymbol{f}*}\ {}_{r\beta}u_2^{\boldsymbol{k}} + {}_{r\alpha}u_1^{\boldsymbol{f}*}\ {}_{r\beta}u_3^{\boldsymbol{k}} + {}_{r\alpha}u_2^{\boldsymbol{f}*}\ {}_{r\beta}u_4^{\boldsymbol{k}} \ . \end{aligned} \tag{A.149}$$

Im Einzelnen ist

$${}_1\bar{u}^{\boldsymbol{f}}\ {}_1u^{\boldsymbol{k}} = A^{\boldsymbol{f}}_{-}\ A^{\boldsymbol{k}}_{+} - B^{\boldsymbol{f}*}\ B^{\boldsymbol{k}} + A^{\boldsymbol{f}}_{+}\ A^{\boldsymbol{k}}_{-} - B^{\boldsymbol{f}*}\ B^{\boldsymbol{k}} \tag{A.150a}$$

$${}_1\bar{u}^{\boldsymbol{f}}\ {}_2u^{\boldsymbol{k}} = A^{\boldsymbol{f}}_{-}\ B^{\boldsymbol{k}*} - B^{\boldsymbol{f}*}\ A^{\boldsymbol{k}}_{-} - A^{\boldsymbol{f}}_{+}\ B^{\boldsymbol{k}*} + B^{\boldsymbol{f}*}\ A^{\boldsymbol{k}}_{+} \tag{A.150b}$$

$${}_2\bar{u}^{\boldsymbol{f}}\ {}_1u^{\boldsymbol{k}} = -B^{\boldsymbol{f}}\ A^{\boldsymbol{k}}_{+} + A^{\boldsymbol{f}}_{+}\ B^{\boldsymbol{k}} + B^{\boldsymbol{f}}\ A^{\boldsymbol{k}}_{-} - A^{\boldsymbol{f}}_{-}\ B^{\boldsymbol{k}} \tag{A.150c}$$

$$ {}^{2}\bar{u}^{\boldsymbol{f}}\ {}^{2}u^{\boldsymbol{k}} = -B^{\boldsymbol{f}}\ B^{\boldsymbol{k}*} + A_{+}^{\boldsymbol{f}}\ A_{-}^{\boldsymbol{k}} - B^{\boldsymbol{f}}\ B^{\boldsymbol{k}*} + A_{-}^{\boldsymbol{f}}\ A_{+}^{\boldsymbol{k}} \tag{A.150d} $$

$$ {}^{1}\bar{u}^{\boldsymbol{f}}\ {}^{1}v^{\boldsymbol{k}} = A_{-}^{\boldsymbol{f}}\ A_{+}^{\boldsymbol{k}} - B^{\boldsymbol{f}*}\ B^{\boldsymbol{k}} - A_{+}^{\boldsymbol{f}}\ A_{-}^{\boldsymbol{k}} + B^{\boldsymbol{f}*}\ B^{\boldsymbol{k}} \tag{A.150e} $$

$$ {}^{1}\bar{u}^{\boldsymbol{f}}\ {}^{2}v^{\boldsymbol{k}} = A_{-}^{\boldsymbol{f}}\ B^{\boldsymbol{k}*} - B^{\boldsymbol{f}*}\ A_{-}^{\boldsymbol{k}} + A_{+}^{\boldsymbol{f}}\ B^{\boldsymbol{k}*} - B^{\boldsymbol{f}*}\ A_{+}^{\boldsymbol{k}} \tag{A.150f} $$

$$ {}^{2}\bar{u}^{\boldsymbol{f}}\ {}^{1}v^{\boldsymbol{k}} = -B^{\boldsymbol{f}}\ A_{+}^{\boldsymbol{k}} + A_{+}^{\boldsymbol{f}}\ B^{\boldsymbol{k}} - B^{\boldsymbol{f}}\ A_{-}^{\boldsymbol{k}} + A_{-}^{\boldsymbol{f}}\ B^{\boldsymbol{k}} \tag{A.150g} $$

$$ {}^{2}\bar{u}^{\boldsymbol{f}}\ {}^{2}v^{\boldsymbol{k}} = -B^{\boldsymbol{f}}\ B^{\boldsymbol{k}*} + A_{+}^{\boldsymbol{f}}\ A_{-}^{\boldsymbol{k}} + B^{\boldsymbol{f}}\ B^{\boldsymbol{k}*} - A_{-}^{\boldsymbol{f}}\ A_{+}^{\boldsymbol{k}} \tag{A.150h} $$

$$ {}^{1}\bar{v}^{\boldsymbol{f}}\ {}^{1}u^{\boldsymbol{k}} = -A_{-}^{\boldsymbol{f}}\ A_{+}^{\boldsymbol{k}} + B^{\boldsymbol{f}*}\ B^{\boldsymbol{k}} + A_{+}^{\boldsymbol{f}}\ A_{-}^{\boldsymbol{k}} - B^{\boldsymbol{f}*}\ B^{\boldsymbol{k}} \tag{A.150i} $$

$$ {}^{1}\bar{v}^{\boldsymbol{f}}\ {}^{2}u^{\boldsymbol{k}} = -A_{-}^{\boldsymbol{f}}\ B^{\boldsymbol{k}*} + B^{\boldsymbol{f}*}\ A_{-}^{\boldsymbol{k}} - A_{+}^{\boldsymbol{f}}\ B^{\boldsymbol{k}*} + B^{\boldsymbol{f}*}\ A_{+}^{\boldsymbol{k}} \tag{A.150j} $$

$$ {}^{2}\bar{v}^{\boldsymbol{f}}\ {}^{1}u^{\boldsymbol{k}} = B^{\boldsymbol{f}}\ A_{+}^{\boldsymbol{k}} - A_{+}^{\boldsymbol{f}}\ B^{\boldsymbol{k}} + B^{\boldsymbol{f}}\ A_{-}^{\boldsymbol{k}} - A_{-}^{\boldsymbol{f}}\ B^{\boldsymbol{k}} \tag{A.150k} $$

$$ {}^{2}\bar{v}^{\boldsymbol{f}}\ {}^{2}u^{\boldsymbol{k}} = B^{\boldsymbol{f}}\ B^{\boldsymbol{k}*} - A_{+}^{\boldsymbol{f}}\ A_{-}^{\boldsymbol{k}} - B^{\boldsymbol{f}}\ B^{\boldsymbol{k}*} + A_{-}^{\boldsymbol{f}}\ A_{+}^{\boldsymbol{k}} \tag{A.150l} $$

$$ {}^{1}\bar{v}^{\boldsymbol{f}}\ {}^{1}v^{\boldsymbol{k}} = -A_{-}^{\boldsymbol{f}}\ A_{+}^{\boldsymbol{k}} + B^{\boldsymbol{f}*}\ B^{\boldsymbol{k}} - A_{+}^{\boldsymbol{f}}\ A_{-}^{\boldsymbol{k}} + B^{\boldsymbol{f}*}\ B^{\boldsymbol{k}} \tag{A.150m} $$

$$ {}^{1}\bar{v}^{\boldsymbol{f}}\ {}^{2}v^{\boldsymbol{k}} = -A_{-}^{\boldsymbol{f}}\ B^{\boldsymbol{k}*} + B^{\boldsymbol{f}*}\ A_{-}^{\boldsymbol{k}} + A_{+}^{\boldsymbol{f}}\ B^{\boldsymbol{k}*} - B^{\boldsymbol{f}*}\ A_{+}^{\boldsymbol{k}} \tag{A.150n} $$

$$ {}^{2}\bar{v}^{\boldsymbol{f}}\ {}^{1}v^{\boldsymbol{k}} = B^{\boldsymbol{f}}\ A_{+}^{\boldsymbol{k}} - A_{+}^{\boldsymbol{f}}\ B^{\boldsymbol{k}} - B^{\boldsymbol{f}}\ A_{-}^{\boldsymbol{k}} + A_{-}^{\boldsymbol{f}}\ B^{\boldsymbol{k}} \tag{A.150o} $$

$$ {}^{2}\bar{v}^{\boldsymbol{f}}\ {}^{2}v^{\boldsymbol{k}} = B^{\boldsymbol{f}}\ B^{\boldsymbol{k}*} - A_{+}^{\boldsymbol{f}}\ A_{-}^{\boldsymbol{k}} + B^{\boldsymbol{f}}\ B^{\boldsymbol{k}*} - A_{-}^{\boldsymbol{f}}\ A_{+}^{\boldsymbol{k}}\ . \tag{A.150p} $$

Im nichtrelativistischen Grenzfall gelten wegen

$$ \begin{pmatrix} B^{\boldsymbol{k}} \\ A_{-}^{\boldsymbol{k}} \\ A_{+}^{\boldsymbol{k}} \end{pmatrix} \equiv \sqrt{\frac{1}{2(E+mc^2)}} \begin{pmatrix} c\hbar k_1 + ic\hbar k_2 \\ E + mc^2 - c\hbar k_3 \\ E + mc^2 + c\hbar k_3 \end{pmatrix} \overset{|c\hbar\boldsymbol{k}| \ll mc^2}{\approx} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{mc^2} \\ \sqrt{mc^2} \end{pmatrix} \tag{A.151} $$

für die Spinoren die einfachen Ausdrücke

$$ {}^{1}u^{\boldsymbol{f}} \approx \begin{pmatrix} \sqrt{mc^2} \\ 0 \\ \sqrt{mc^2} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad {}^{2}u^{\boldsymbol{f}} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{mc^2} \\ 0 \\ \sqrt{mc^2} \end{pmatrix} \tag{A.152a} $$

$$ {}^{1}v^{\boldsymbol{f}} \approx \begin{pmatrix} \sqrt{mc^2} \\ 0 \\ -\sqrt{mc^2} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad {}^{2}v^{\boldsymbol{f}} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{mc^2} \\ 0 \\ -\sqrt{mc^2} \end{pmatrix} \tag{A.152b} $$

$$ \text{falls } |c\hbar\boldsymbol{f}| \ll mc^2 \ , $$

mit denen man die Näherungen

$$ {}^{r}\bar{u}^{\boldsymbol{f}}\ {}^{s}u^{\boldsymbol{k}} \approx 2mc^2\,\delta_{rs} \tag{A.153a} $$
$$ {}^{r}\bar{u}^{\boldsymbol{f}}\ {}^{s}v^{\boldsymbol{k}} \approx 0 \tag{A.153b} $$
$$ {}^{r}\bar{v}^{\boldsymbol{f}}\ {}^{s}u^{\boldsymbol{k}} \approx 0 \tag{A.153c} $$
$$ {}^{r}\bar{v}^{\boldsymbol{f}}\ {}^{s}v^{\boldsymbol{k}} \approx -2mc^2\,\delta_{rs} \tag{A.153d} $$
$$ {}^{r}\bar{u}^{\boldsymbol{f}}\,\gamma^0\ {}^{s}u^{\boldsymbol{k}} \approx 2mc^2\,\delta_{rs} \tag{A.153e} $$
$$ {}^{r}\bar{u}^{\boldsymbol{f}}\gamma^0\ {}^{s}v^{\boldsymbol{k}} \approx 0 \tag{A.153f} $$
$$ {}^{r}\bar{v}^{\boldsymbol{f}}\,\gamma^0\ {}^{s}u^{\boldsymbol{k}} \approx 0 \tag{A.153g} $$
$$ {}^{r}\bar{v}^{\boldsymbol{f}}\,\gamma^0\ {}^{s}v^{\boldsymbol{k}} \approx 2mc^2\,\delta_{rs} \tag{A.153h} $$
$$ {}^{r}\bar{u}^{\boldsymbol{f}}\,\gamma^1\ {}^{s}u^{\boldsymbol{k}} \approx 0 \tag{A.153i} $$
$$ {}^{r}\bar{u}^{\boldsymbol{f}}\,\gamma^1\ {}^{s}v^{\boldsymbol{k}} \approx -2mc^2(1-\delta_{rs}) \tag{A.153j} $$
$$ {}^{r}\bar{v}^{\boldsymbol{f}}\,\gamma^1\ {}^{s}u^{\boldsymbol{k}} \approx -2mc^2(1-\delta_{rs}) \tag{A.153k} $$
$$ {}^{r}\bar{v}^{\boldsymbol{f}}\,\gamma^1\ {}^{s}v^{\boldsymbol{k}} \approx 0 \tag{A.153l} $$
$$ {}^{r}\bar{u}^{\boldsymbol{f}}\,\gamma^2\ {}^{s}u^{\boldsymbol{k}} \approx 0 \tag{A.153m} $$
$$ {}^{r}\bar{u}^{\boldsymbol{f}}\,\gamma^2\ {}^{s}v^{\boldsymbol{k}} \approx i2mc^2(1-\delta_{rs})(\delta_{r1}-\delta_{r2}) \tag{A.153n} $$
$$ {}^{r}\bar{v}^{\boldsymbol{f}}\,\gamma^2\ {}^{s}u^{\boldsymbol{k}} \approx i2mc^2(1-\delta_{rs})(\delta_{r1}-\delta_{r2}) \tag{A.153o} $$
$$ {}^{r}\bar{v}^{\boldsymbol{f}}\,\gamma^2\ {}^{s}v^{\boldsymbol{k}} \approx 0 \tag{A.153p} $$
$$ {}^{r}\bar{u}^{\boldsymbol{f}}\,\gamma^3\ {}^{s}u^{\boldsymbol{k}} \approx 0 \tag{A.153q} $$
$$ {}^{r}\bar{u}^{\boldsymbol{f}}\,\gamma^3\ {}^{s}v^{\boldsymbol{k}} \approx 2mc^2\delta_{rs}(\delta_{r2}-\delta_{r1}) \tag{A.153r} $$
$$ {}^{r}\bar{v}^{\boldsymbol{f}}\,\gamma^3\ {}^{s}u^{\boldsymbol{k}} \approx 2mc^2\delta_{rs}(\delta_{r2}-\delta_{r1}) \tag{A.153s} $$

$$ {}^{r}\bar{v}^{\boldsymbol{f}}\,\gamma^{3}\,{}^{s}v^{\boldsymbol{k}} \;\approx\; 0 \qquad \text{(A.153t)} $$

$$ \text{falls } |c\hbar\boldsymbol{f}| \ll mc^2 \text{ und } |c\hbar\boldsymbol{k}| \ll mc^2 $$

im nichtrelativistischen Grenzfall erhält, die durch Einsetzen von (A.152) und (8.15) leicht nachgeprüft werden können.

A.22 Herleitung von Gleichung (24.33)

Im Schwerpunktsystem ($\boldsymbol{k}_4 = -\boldsymbol{k}_3$) gilt

$$ \begin{aligned} E_{\mathrm{CM}}^2 &= \Big(\sqrt{\hbar^2c^2\boldsymbol{k}_3^2 + m_3^2c^4} + \sqrt{\hbar^2c^2\boldsymbol{k}_3^2 + m_4^2c^4} \Big)^2 \\ E_{\mathrm{CM}}^2 - 2\hbar^2c^2\boldsymbol{k}_3^2 - (m_3^2+m_4^2)c^4 \;&= \\ = 2\sqrt{\hbar^4c^4\boldsymbol{k}_3^4 + \hbar^2c^6\boldsymbol{k}_3^2(m_3^2+m_4^2) + m_3^2m_4^2c^8}\;&. \end{aligned} $$

Nochmal werden beide Seiten quadriert:

$$ \begin{aligned} 4\hbar^4c^4\boldsymbol{k}_3^4 + \Big(-4E_{\mathrm{CM}}^2\hbar^2c^2 + 4\hbar^2c^6(m_3^2+m_4^2)\Big)\boldsymbol{k}_3^2 + \\ + E_{\mathrm{CM}}^4 - 2E_{\mathrm{CM}}^2(m_3^2+m_4^2)c^4 + (m_3^2+m_4^2)^2c^8 \;&= \\ = 4\hbar^4c^4\boldsymbol{k}_3^4 + 4\hbar^2c^6(m_3^2+m_4^2)\boldsymbol{k}_3^2 + 4m_3^2m_4^2c^8& \\ \boldsymbol{k}_3^2 = \frac{4m_3^2m_4^2c^8 - E_{\mathrm{CM}}^4 + 2E_{\mathrm{CM}}^2(m_3^2+m_4^2)c^4 - (m_3^2+m_4^2)^2c^8}{-4E_{\mathrm{CM}}^2\hbar^2c^2}& \\ = \frac{E_{\mathrm{CM}}^4 - 2E_{\mathrm{CM}}^2(m_3^2+m_4^2)c^4 + (m_3^2-m_4^2)^2c^8}{4E_{\mathrm{CM}}^2\hbar^2c^2}&, \end{aligned} $$

woraus schließlich folgt:

$$ |\boldsymbol{k}_3| = \frac{S_{34}}{2E_{\mathrm{CM}}\hbar c} \qquad \text{mit} \qquad \text{(A.154)} $$

$$ S_{34} \equiv \sqrt{(E_{\mathrm{CM}}^2 - (m_3+m_4)^2c^4)\,(E_{\mathrm{CM}}^2 - (m_3-m_4)^2c^4)} $$

A.23 Die Gauß'sche Integralformel

Wir geben die Formel für das Gauß'sche Integral mit reellem Exponenten und mit n-dimensionalen Vektoren ohne Beweis an:

$$x \equiv \{x^1, \ldots, x^n\} \ , \ b \equiv \{b^1, \ldots, b^n\} \ , \ a > 0 \ , \ x^j, b^j, a \in \mathbb{R}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}^n x \, \exp\Big\{ - ax^2 + bx\Big\} = \Big(\frac{\pi}{a}\Big)^{n/2} \exp\Big\{\frac{b^2}{4a}\Big\} \tag{A.155a}$$

Die Bedingung $a > 0$ garantiert die Konvergenz des Integrals. Ebenfalls ohne Beweis stellen wir fest, dass die Formel auch gilt„ wenn sowohl x^j als auch a imaginär sind:

$$x^j \to ix^j \ , \ bx \to ibx \ , \ a \to ia \ , \ x^j, b^j, a \in \mathbb{R}$$

Mit diesen Substitutionen lautet die Integralformel

$$x \equiv \{x^1, \ldots, x^n\} \ , \ b \equiv \{b^1, \ldots, b^n\} \ , \ x^j, b^j, a \in \mathbb{R}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} i\mathrm{d}^n x \, \exp\Big\{iax^2 + ibx\Big\} = \Big(\frac{\pi}{ia}\Big)^{n/2} \exp\Big\{\frac{b^2}{4ia}\Big\}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}^n x \, \exp\Big\{iax^2 + ibx\Big\} = (-i)^{1+n/2}\Big(\frac{\pi}{a}\Big)^{n/2} \exp\Big\{\frac{-ib^2}{4a}\Big\} \ . \tag{A.155b}$$

Die Einschränkung $a > 0$ wäre beim rein imaginären Argument der Exponentialfunktion sinnlos. Sie kann entfallen, weil die Konvergenz des Integrals durch die mit immer größerem $|x|$ immer schneller oszillierende Exponentialfunktion sichergestellt wird.

A.24 Herleitung von (26.12)

Zur Berechnung von $F_{\mathrm{P}}^{\alpha\beta} = (26.5)$ werden eine Reihe trickreicher Umformungen[1] durchgeführt. Weil die $N+1$ Summanden alle die gleiche Form haben, schreiben wir die Umformungen nur für einen Summanden aus. Es versteht sich aber, dass die gleichen Umformungen auf alle $N+1$ Summanden angewendet werden.

Weil die Faktoren unter der Spur zyklisch vertauscht werden dürfen, liest man aus dem Vergleich der Spur in (26.5) mit der Spur in (24.61) ab:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Sp}\Big\{\Big(\gamma^\sigma(k_\gamma+k)_\sigma + m\tfrac{c}{\hbar}\Big)\gamma^\beta\Big(\gamma^\tau k_\tau + m\tfrac{c}{\hbar}\Big)\gamma^\alpha\Big\} = \\
&= 4\Big((k_\gamma+k)^\beta k^\alpha - (k_\gamma+k)k g^{\beta\alpha} + (k_\gamma+k)^\alpha k^\beta + (m\tfrac{c}{\hbar})^2 g^{\beta\alpha}\Big) \\
&= -4\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_{1\beta}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_{2\alpha}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_2}g^{\beta\alpha} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_{1\alpha}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_{2\beta}} - (m\tfrac{c}{\hbar})^2 g^{\beta\alpha}\Big) \\
&\qquad \exp\{ir_1(k_\gamma+k) + ir_2 k\}\Big|_{r_1=r_2=0}
\end{aligned} \tag{A.156}$$

Die Nenner der Integranden in (26.5) werden mit

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \mathrm{d}s\, \exp\{is(K+i\epsilon)\} = \frac{\exp\{isK - s\epsilon\}}{i(K+i\epsilon)}\Big|_0^\infty = \\
&= \frac{0-1}{i(K+i\epsilon)} = \frac{i}{K+i\epsilon} \quad \text{mit } K,\epsilon\in\mathbb{R} \text{ und } \epsilon>0
\end{aligned}$$

umgeformt:

$$\begin{aligned}
&\frac{i}{\Big((k_\gamma+k)^2 - m^2\tfrac{c^2}{\hbar^2} + i\epsilon'\Big)\Big(k^2 - m^2\tfrac{c^2}{\hbar^2} + i\epsilon'\Big)} = \int_0^\infty \mathrm{d}s_1 \int_0^\infty \mathrm{d}s_2 \\
&\quad\cdot \exp\Big\{is_1\Big((k_\gamma+k)^2 - m^2\tfrac{c^2}{\hbar^2}\Big) + is_2\Big(k^2 - m^2\tfrac{c^2}{\hbar^2}\Big)\Big\}
\end{aligned} \tag{A.157}$$

[1] Dies im Folgenden geschilderte originelle Verfahren zur Berechnung der Vakuumpolarisation findet sich im Buch von Greiner und Reinhardt [6, Abschnitt 5.2].

Die kleinen Summanden $i\epsilon'$ wurden bisher eingeschoben, um die Pole bei $(k_\gamma + k)^2 = m^2c^2/\hbar^2$ und bei $k^2 = m^2c^2/\hbar^2$ zu vermeiden. In der Exponentialfunktion sind sie nicht mehr erforderlich. Die vier neu eingeführten Parameter haben die Dimensionen

$$[r_j] = \text{Länge} \qquad [s_j] = \text{Länge}^2 \ . \tag{A.158}$$

Nach diesen Manipulationen sieht der erste Summand in (26.5) folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned}
&- i\,\frac{4q^2}{\hbar^2} \int_0^\infty \mathrm{d}s_1 \int_0^\infty \mathrm{d}s_2\, \frac{1}{\Omega} \sum_{\boldsymbol{k}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}k^0}{2\pi} \\
&\cdot \Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_{1\beta}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_{2\alpha}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_2} g^{\beta\alpha} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_{1\alpha}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_{2\beta}} - (m\tfrac{c}{\hbar})^2 g^{\beta\alpha} \Big) \\
&\cdot \exp\Big\{ i(s_1+s_2)k^2 + i(r_1+r_2+s_1 2k_\gamma)k \Big\}\Big|_{r_1=r_2=0} \\
&\cdot \exp\Big\{ i(r_1 k_\gamma + s_1 k_\gamma^2) \Big\}\Big|_{r_1=r_2=0}
\end{aligned} \tag{A.159}$$

Nur die erste Exponentialfunktion hängt von k ab. Man kann die Summe und das Integral über k unter Beachtung von (7.5) mithilfe der in Anhang A.23 angegebenen Formel für das Gauß'sche Integral mit imaginärem Exponenten und 4-dimensionalen Vektoren ausführen:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Omega} \sum_{\boldsymbol{k}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}k^0}{2\pi} \exp\Big\{ i(s_1+s_2)k^2 + i(r_1+r_2+s_1 2k_\gamma)k \Big\} \\
&\overset{(A.155b)}{=} \frac{-i}{16\pi^2 (s_1+s_2)^2} \exp\Big\{ \frac{-i(r_1+r_2+s_1 2k_\gamma)^2}{4(s_1+s_2)} \Big\} \ .
\end{aligned} \tag{A.160}$$

Das wird in (A.159) eingesetzt:

$$
\begin{aligned}
(\text{A.159}) = &\int_0^\infty \mathrm{d}s_1 \int_0^\infty \mathrm{d}s_2 \, \frac{-q^2}{4\pi^2\hbar^2(s_1+s_2)^2} \\
&\cdot \Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_{1\beta}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_{2\alpha}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_2} g^{\beta\alpha} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_{1\alpha}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_{2\beta}} - (m\tfrac{c}{\hbar})^2 g^{\beta\alpha} \Big) \\
&\cdot \exp\Big\{ \frac{-i(r_1^2 + r_2^2 + 4s_1^2 k_\gamma^2 + 2r_1 r_2 + 4r_1 s_1 k_\gamma + 4r_2 s_1 k_\gamma)}{4(s_1+s_2)} + \\
&\quad + i(r_1 k_\gamma + s_1 k_\gamma^2) - i(s_1+s_2) m^2 \tfrac{c^2}{\hbar^2} \Big\} \Big|_{r_1=r_2=0}
\end{aligned}
\tag{A.161}
$$

Jetzt müssen die Ableitungen der Exponentialfunktion ausgeführt werden.

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_{1\beta}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_{2\alpha}} \exp\Big\{\dots\Big\}\Big|_{r_1=r_2=0} = \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_{1\beta}} \frac{-i(2r_2^\alpha + 2r_1^\alpha + 4s_1 k_\gamma^\alpha)}{4(s_1+s_2)} \exp\Big\{\dots\Big\}\Big|_{r_1=r_2=0} \\
&= \Big(\frac{-i2g^{\alpha\beta}}{4(s_1+s_2)} - \frac{i(2r_2^\alpha + 2r_1^\alpha + 4s_1 k_\gamma^\alpha)}{4(s_1+s_2)} \cdot \\
&\quad \cdot \Big(\frac{-i(2r_1^\beta + 2r_2^\beta + 4s_1 k_\gamma^\beta}{4(s_1+s_2)} + i k_\gamma^\beta \Big) \Big) \exp\Big\{\dots\Big\}\Big|_{r_1=r_2=0} \\
&= \Big(\frac{-ig^{\alpha\beta}}{2(s_1+s_2)} + \frac{s_1 s_2 k_\gamma^\alpha k_\gamma^\beta}{(s_1+s_2)^2} \Big) \exp\Big\{ \frac{is_1 s_2 k_\gamma^2}{s_1+s_2} - i(s_1+s_2) m^2 \tfrac{c^2}{\hbar^2} \Big\}
\end{aligned}
\tag{A.162}
$$

Beim dritten Ableitungs-Summanden in (A.159) sind lediglich, die Indizes α und β vertauscht, was auf den Wert der Ableitung keinen Einfluss hat. Den zweiten Ableitungs-Summanden in (A.159) erhält man durch Multiplikation von (A.162) mit $\sum_\alpha \sum_\beta g_{\alpha\beta}$:

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_2} \exp\Big\{\dots\Big\}\Big|_{r_1=r_2=0} = \Big(\frac{-2i}{s_1+s_2} + \frac{s_1 s_2 k_\gamma^2}{(s_1+s_2)^2} \Big) \exp\Big\{\dots\Big\}
$$

Also ist

$$(\text{A.159}) = \int_0^\infty \mathrm{d}s_1 \int_0^\infty \mathrm{d}s_2 \, \frac{-q^2}{4\pi^2\hbar^2(s_1+s_2)^2} \Big(\frac{2s_1s_2(k_\gamma^\alpha k_\gamma^\beta - k_\gamma^2 g^{\alpha\beta})}{(s_1+s_2)^2} + \\ + \frac{ig^{\alpha\beta}}{s_1+s_2} - \frac{s_1s_2(1-2)k_\gamma^2 g^{\alpha\beta}}{(s_1+s_2)^2} - (m\tfrac{c}{\hbar})^2 g^{\alpha\beta} \Big) \\ \cdot \exp\Big\{ \frac{is_1s_2k_\gamma^2}{s_1+s_2} - i(s_1+s_2)m^2\tfrac{c^2}{\hbar^2} \Big\} \, . \qquad (\text{A.163})$$

Die beiden grün gefärbten Summanden, die zusammen Null ergeben, wurden zusätzlich eingefügt. Man beachte, dass die Divergenz, die im ursprünglichen Integral (26.5) bei $k \to \pm\infty$ auftrat, durch die Umformungen nach $s_1, s_2 \to 0$ transformiert wurde. Bei $s_1, s_2 \to \infty$ gibt es keine Divergenz, weil das Argument der Exponentialfunktion imaginär ist.

Wir haben die Umformung am Beispiel des ersten Summanden von (26.5) vorgeführt. Wir haben aber auch betont, dass die gleiche Umformung für alle $N+1$ Summanden erfolgt. Zum Zweck einer kompakten Schreibweise definieren wir

$$C_0 \equiv 1 \qquad M_0 \equiv m \qquad s \equiv s_1 + s_2 \, , \qquad (\text{A.164})$$

woraus mit (26.6)

$$\sum_{j=0}^{N} C_j = 0 \qquad (\text{A.165})$$

folgt, und schreiben (26.5) in der Form

$$F_{\mathrm{P}}^{\alpha\beta} \overset{(26.5)}{=} \lim_{M_j \to \infty} \int_0^\infty \mathrm{d}s_1 \int_0^\infty \mathrm{d}s_2 \, \frac{-q^2}{4\pi^2\hbar^2 s^2} \sum_{j=0}^{N} C_j \Big(\\ \frac{2s_1s_2(k_\gamma^\alpha k_\gamma^\beta - k_\gamma^2 g^{\alpha\beta})}{s^2} + g^{\alpha\beta}\Big(\frac{i}{s} + \frac{s_1s_2k_\gamma^2}{s^2} - (M_j\tfrac{c}{\hbar})^2 \Big) \Big) \\ \cdot \exp\Big\{ \frac{is_1s_2k_\gamma^2}{s} - isM_j^2\tfrac{c^2}{\hbar^2} \Big\} \, . \qquad (\text{A.166})$$

Wir merken an, dass $\lim_{M_j\to\infty}$ sich nur auf $j \geq 1$ bezieht, nicht auf $M_0 = m$. Wir wollen jetzt zeigen, dass nur der erste Summand in der grünen Klammer überlebt, und das Integral über den Rest Null ergibt. Wir behaupten also

$$\int_0^\infty \mathrm{d}s_1 \int_0^\infty \mathrm{d}s_2 \, \frac{1}{s^2} \sum_{j=0}^{N} C_j \left(\frac{i}{s} + \frac{s_1 s_2 k_\gamma^2}{s^2} - (M_j \tfrac{c}{\hbar})^2 \right) \cdot \exp\left\{ \frac{i s_1 s_2 k_\gamma^2}{s} - i s M_j^2 \tfrac{c^2}{\hbar^2} \right\} \stackrel{?}{=} 0 \, . \tag{A.167}$$

Zum Beweis der Behauptung schreiben wir diesen Ausdruck ein weiteres mal mit einem Ableitungsparameter r:

$$\begin{aligned}
(\text{A.167}) &= \int_0^\infty \mathrm{d}s_1 \int_0^\infty \mathrm{d}s_2 \, \frac{(-i)}{s^3} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \frac{1}{r} \sum_{j=0}^{N} C_j \\
&\quad \cdot \exp\left\{ ir \Big(\frac{s_1 s_2 k_\gamma^2}{s} - s M_j^2 \tfrac{c^2}{\hbar^2} \Big) \right\} \Big|_{r=1} \\
&= \int_0^\infty \mathrm{d}s_1 \int_0^\infty \mathrm{d}s_2 \, \frac{(-i)}{s^3} \sum_{j=0}^{N} C_j \Big(i \, \frac{s_1 s_2 k_\gamma^2}{s} - i s M_j^2 \tfrac{c^2}{\hbar^2} - 1 \Big) \\
&\quad \cdot \exp\left\{ i \Big(\frac{s_1 s_2 k_\gamma^2}{s} - s M_j^2 \tfrac{c^2}{\hbar^2} \Big) \right\}
\end{aligned}$$

Für den folgenden Beweisschritt ist es wichtig, dass die Ableitung nach r vor die Integrale über s_1 und s_2 gezogen werden darf. Das ist nur korrekt wenn die Integrale konvergieren, was auf den ersten Blick für $s_1, s_2 \to 0$ nicht offensichtlich ist. Eine Divergenz könnte nur auftreten, wenn *beide* Integrationsvariablen gleichzeitig gegen Null gehen. Dann wird der Integrand

$$\lim_{s_1,s_2\to 0} \sum_{j=0}^{N} C_j \Big(i \, \frac{s_1 s_2 k_\gamma^2}{(s_1+s_2)^4} - \frac{i}{(s_1+s_2)^2 M_j^2 \frac{c^2}{\hbar^2}} - \frac{1}{(s_1+s_2)^3} \Big) \cdot \exp\left\{ i \Big(\frac{s_1 s_2 k_\gamma^2}{s_1+s_2} - (s_1+s_2) M_j^2 \tfrac{c^2}{\hbar^2} \Big) \right\} =$$

$$= \lim_{s_1,s_2\to 0} \sum_{j=0}^{N} C_j \, \frac{1}{(s_1+s_2)^3} \, \exp\{0\} \tag{A.168}$$

von M_j unabhängig, weil die Exponentialfunktion gegen $\exp\{0\} = 1$ konvergiert und der Term $(s_1+s_2)^{-3}$ schneller wächst als die beiden anderen in der gleichen Klammer. Dadurch ergibt die Summe über j wegen (A.165) für $s_1, s_2 \to 0$ Null, und das Integral konvergiert.

Deshalb kann man den Ausdruck mit der Substitution $s_i \to \widetilde{s}_i \equiv r s_i$ folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned}(\text{A.167}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,r} \int_0^\infty \mathrm{d}\widetilde{s}_1 \int_0^\infty \mathrm{d}\widetilde{s}_2 \, \frac{(-i)}{\widetilde{s}^3} \sum_{j=0}^{N} C_j \\ \cdot \exp\left\{ i\Big(\frac{\widetilde{s}_1 \widetilde{s}_2 k_\gamma^2}{\widetilde{s}} - \widetilde{s} M_j^2 \tfrac{c^2}{\hbar^2} - \frac{\widetilde{s}}{i}\,\epsilon' \Big) \right\} \Big|_{r=1} = 0\end{aligned} \tag{A.169}$$

Das Integral hängt nicht von r ab, so dass die Ableitung Null ist. Damit ist (A.167) bewiesen, und es gilt

$$F_{\mathrm{P}}^{\alpha\beta} \overset{(26.5)}{=} \lim_{M_j\to\infty} (k_\gamma^\alpha k_\gamma^\beta - k_\gamma^2 g^{\alpha\beta})\, \Pi(k_\gamma) \tag{A.170a}$$

$$\Pi(k_\gamma) \equiv \int_0^\infty \mathrm{d}s_1 \int_0^\infty \mathrm{d}s_2 \, \frac{-q^2 s_1 s_2}{2\pi^2 \hbar^2 s^4} \sum_{j=0}^{N} C_j \exp\left\{ \frac{i s_1 s_2 k_\gamma^2}{s} - i s M_j^2 \tfrac{c^2}{\hbar^2} \right\} . \tag{A.170b}$$

$\Pi(k_\gamma)$ wird als Polarisationsfunktion bezeichnet, $F_{\mathrm{P}}^{\alpha\beta}$ als Polarisationstensor. Nun fügt man in die Gleichung der Polarisationsfunktion einen Faktor

$$1 = \int_0^\infty \mathrm{d}s \, \delta(s - s_1 - s_2)$$

ein. Dieser Faktor bewirkt, dass s ab sofort als unabhängige Variable zu betrachten ist und die Definition $s \equiv s_1 + s_2$ von (A.164) nicht mehr gilt. Anschließend substituiert man $s_i \to s_i s$. Die Variable s wird – weil sie von den s_i unabhängig ist – von der Substitution nicht berührt:

$$\Pi(k_\gamma) = \int_0^\infty \mathrm{d}s_1 \int_0^\infty \mathrm{d}s_2 \int_0^\infty \mathrm{d}s\, \delta(s - s_1 s - s_2 s)\, \frac{-q^2 s_1 s_2}{2\pi^2\hbar^2} \sum_{j=0}^{N} C_j \cdot \exp\left\{ i s_1 s_2 s k_\gamma^2 - i s M_j^2 \tfrac{c^2}{\hbar^2} \right\} \tag{A.171}$$

Man beachte, dass die s_j durch diese Substitution dimensionslos geworden sind. Dagegen behält s die Dimension $[s] = \text{Länge}^2$. Schließlich zieht man den Faktor s aus der Deltafunktion heraus:

$$\Pi(k_\gamma) = \int_0^1 \mathrm{d}s_1 \int_0^1 \mathrm{d}s_2\, \delta(1 - s_1 - s_2)\, \frac{-q^2 s_1 s_2}{2\pi^2\hbar^2} \cdot B \cdot V \tag{A.172a}$$

$$V \equiv \begin{cases} 1 & \text{falls } s_1 s_2 k_\gamma^2 < m^2c^2/\hbar^2 \\ 0 & \text{falls } s_1 s_2 k_\gamma^2 \geq m^2c^2/\hbar^2 \end{cases} \tag{A.172b}$$

$$B \equiv \sum_{j=0}^{N} C_j \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}s}{s} \exp\left\{ i s_1 s_2 s k_\gamma^2 - i s M_j^2 \tfrac{c^2}{\hbar^2} \right\}. \tag{A.172c}$$

Für $s_1 + s_2 > 1$ ist der Ausdruck wegen der Deltafunktion Null, deshalb durfte die obere Grenze der Integrale über s_1 und s_2 auf 1 geändert werden. Nur das Integral über s läuft noch bis $+\infty$. Man erkennt jetzt, dass $\Pi(k_\gamma)$ und damit auch $F_{\mathrm{P}}^{\alpha\beta}$ = (A.170) ohne Regularisierung durch die Gegenterme bei $s \to 0$ „nur“ logarithmisch, jedoch entgegen dem Anschein von (26.4) nicht quadratisch divergieren würde.

Die Funktion V wurde aus folgendem Grund eingefügt: Unsere Berechnung gilt sowohl für die Modifikation des freien Photonenpropagators ($k_\gamma^2 = 0$), als auch für die Modifikation raumartiger virtueller Photonen bei t- oder u-Kanal-Streuung ($k_\gamma^2 < 0$), als auch für die Modifikation zeitartiger virtueller Photonen bei s-Kanal-Streuung ($k_\gamma^2 > m^2c^2/\hbar^2$). Bei $k_\gamma^2 \geq 4m^2c^2/\hbar^2$ reicht die Energie des Photons zur Erzeugung von zwei realen Teilchen aus. Dadurch wird ein konkurrierender Kanal eröffnet, der Wahrscheinlichkeitsamplitude aus dem Selbstenergie-Graphen des Photons absaugt. Formal macht sich dieser Effekt dadurch bemerkbar, dass bestimmte Terme in den Formeln imaginär werden, die bei $k_\gamma^2 < 4m^2c^2/\hbar^2$ reell sind.

Weil diese imaginären Terme (die manchmal auch zu negativen Argumen-

ten von Logarithmen mutieren) keinen Beitrag leisten zu der Wahrscheinlichkeitsamplitude, die wir eigentlich berechnen wollen, werden sie durch die Funktion V ausgeblendet. Das Produkt $s_1 s_2$ kann wegen der Deltafunktion maximal den Wert 1/4 haben. Wegen dieses Faktors wurde die Grenze in (A.172b) auf $m^2c^2/\hbar^2$ und nicht auf $4m^2c^2/\hbar^2$ gelegt.

Wir definieren zwei dimensionslose reelle Parameter

$$0 < \epsilon \in \mathbb{R}\ ,\ \epsilon \neq \epsilon'\ ,\ [\epsilon] = [A_j] = 1$$
$$A_j \equiv \left(s_1 s_2 \frac{k_\gamma^2 \hbar^2}{m^2 c^2} - \frac{M_j^2}{m^2} \right)\ , \tag{A.173}$$

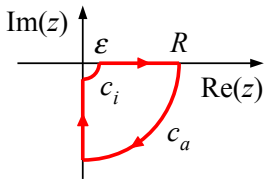
und substituieren s durch dimensionslose Parameter r_j:

$$s \to r_j = -s A_j \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}$$

Damit kann $B =$ (A.172c) folgendermaßen geschrieben werden:

$$B = \lim_{\epsilon\to 0} \sum_{j=0}^{N} C_j \int_{\epsilon\hbar^2/(mc)^2}^{\infty} \frac{\mathrm{d}s}{s} \exp\Big\{ \underbrace{is_1 s_2 s k_\gamma^2 - isM_j^2 \tfrac{c^2}{\hbar^2}}_{isA_j m^2 c^2/\hbar^2} \Big\} =$$
$$= \lim_{R\to\infty} \lim_{\epsilon\to 0} \sum_{j=0}^{N} C_j \int_{-\epsilon A_j}^{R} \frac{\mathrm{d}r_j}{r_j} \exp\{-ir_j\} \tag{A.174}$$

Die Funktion V bewirkt, dass es nur dann einen Beitrag zu $\Pi(k_\gamma)$ gibt, wenn die untere Integrationsgrenze >0 ist. Zur Berechnung von B untersuchen wir das Wegintegral



$$I \equiv \lim_{R\to\infty} \lim_{\epsilon\to 0} \oint_{\circlearrowleft} \frac{\mathrm{d}z}{z} \exp\{-iz\} = 0\ , \tag{A.175}$$

das auf dem skizzierten Weg in der komplexen Ebene zu durchlaufen ist. Das

Teilstück des Integrals auf der reellen Achse entspricht $B =$ (A.174). Nach dem Cauchy'schen Integralsatz[2] ist das geschlossene Wegintegral Null, weil der Integrand innerhalb der rot gezeichneten Kontur frei von Singularitäten ist. In Polarkoordinaten (ρ, φ) ist die Integrationsvariable

$$z = \rho \exp\{i\varphi\} = \rho(\cos\varphi + i \sin\varphi)$$
$$\frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{\mathrm{d}\,(\rho \exp\{i\varphi\})}{\rho \exp\{i\varphi\}} = \mathrm{d}\,\ln(\exp\{i\varphi\}) = i\mathrm{d}\varphi\ .$$

Im Grenzfall $R \to \infty$ trägt der äußere Viertelkreis c_a nichts zum Wert von I bei:

$$I_{c_a} = \lim_{R\to\infty} i \int_{2\pi}^{3\pi/4} \mathrm{d}\varphi\ \exp\{-iR\cos\varphi\}\ \exp\{R\sin\varphi\} = 0 \qquad \text{(A.176)}$$

Denn außer am Punkt $\varphi = 2\pi$, der das Maß Null hat, ist das Argument der zweiten Exponentialfunktion negativ reell. Dieser Faktor geht mit R exponentiell gegen Null, während die erste Exponentialfunktion mit wachsendem R zwischen -1 und 1 oszilliert. Jetzt betrachten wir das Wegintegral über den inneren Viertelkreis:

$$I_{c_i} = \lim_{\eta\to 0} i \int_{3\pi/4}^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\ \exp\{-i\eta(\cos\varphi + i\sin\varphi)\} = i\varphi\Big|_{3\pi/4}^{2\pi} = i\,\frac{\pi}{4}$$

Denn die Exponentialfunktion ist für $\eta \to 0$ stets Eins. Also ist wegen (A.175)

$$B \overset{\text{(A.174)}}{=} \lim_{R\to\infty} \lim_{\epsilon\to 0} \sum_{j=0}^{N} C_j \Big(-i\,\frac{\pi}{4} - \int_{-iR}^{+i\epsilon A_j} \frac{\mathrm{d}(ir_j)}{ir_j}\ \exp\{-ir_j\} \Big)$$

[2] In [37] findet man eine auf den Bedarf von Physikern zugeschnittene, kurz gefasste Erklärung dieses wichtigen mathematischen Werkzeugs.

$$B = \lim_{R\to\infty} \lim_{\epsilon\to 0} \sum_{j=0}^{N} C_j \Big(- i\,\frac{\pi}{4} - \int_{+R}^{-\epsilon A_j} \frac{\mathrm{d}r}{r}\, \exp\{-r\} \Big) \,. \tag{A.177}$$

Im letzten Schritt wurde $ir_j \to r$ substituiert. Der Integrationsparameter r ist eine reelle Zahl, die nicht von M_j abhängt. Weil der erste Summand nicht von M_j abhängt, verschwindet er wegen (A.165). Beim zweiten Summanden werden die Integrationsgrenzen vertauscht, der Grenzübergang $R \to \infty$ durchgeführt, und partiell integriert:

$$\begin{aligned} B &= \lim_{\epsilon\to 0} \sum_{j=0}^{N} C_j \Big(\ln(r)\, \exp\{-r\} \Big|_{-\epsilon A_j}^{\infty} - \int_{-\epsilon A_j}^{\infty} \mathrm{d}\ln(r)\, \exp\{-r\} \Big) \\ &= V \lim_{\epsilon\to 0} \sum_{j=0}^{N} C_j \left(0 - \Big(\ln(\epsilon) + \ln(-A_j) \Big)\, \exp\{+\epsilon A_j\} \right. \\ &\qquad \left. - \int_{-\epsilon A_j}^{\infty} \mathrm{d}\ln(r)\, \exp\{-r\} \right) . \end{aligned} \tag{A.178}$$

Man kann nicht ausschließen, dass $-A_j \le 0$ ist. Die in (A.172) definierte Funktion V stellt sicher, dass B in diesem Fall keinen Beitrag zu $\Pi(k_\gamma)$ leistet, und die Explosion des Logarithmus keinen Schaden anrichtet. Die Summanden in

$$\sum_{j=0}^{N} C_j \lim_{\epsilon\to 0} \left(- \ln(\epsilon)\, \exp\{+\epsilon A_j\} - \int_{-\epsilon A_j}^{\infty} \mathrm{d}\ln(r)\, \exp\{-r\} \right) = 0$$

sind wegen

$$\lim_{\epsilon\to 0} (-\epsilon A_j) = 0 \quad , \quad \lim_{\epsilon\to 0} \exp\{\epsilon A_j\} = 1$$

nicht von M_j abhängig, so dass die Summe wegen (A.165) ebenfalls Null ergibt. Also bleibt nur ein Term übrig:

$$B = -\sum_{j=0}^{N} C_j \ln(-A_j) \underbrace{\lim_{\epsilon\to 0} \exp\{+\epsilon A_j\}}_{1}$$
$$= -\sum_{j=0}^{N} C_j \ln\left((-s_1 s_2 k_\gamma^2 + M_j^2 \tfrac{c^2}{\hbar^2}) \frac{\hbar^2}{m^2 c^2}\right) . \tag{A.179}$$

Man vergleiche dies mit (A.172c)! Durch die Pauli-Villars-Regularisierung sind wir von einem logarithmisch divergenten Integral zu diesem endlichen Ausdruck gelangt. Auf dem langen Herleitungsweg haben wir mehrfach von

$$\sum_{j=0}^{N} C_j \overset{(A.165)}{=} 0 \tag{A.180a}$$
$$C_0 \overset{(A.164)}{=} 1 \qquad M_0 \overset{(A.164)}{=} m \tag{A.180b}$$

Gebrauch gemacht. An keiner Stelle mussten wir eine bestimmte Zahl N von Gegentermen spezifizieren, und nirgendwo war $N > 1$ erforderlich. Ein einziger Gegenterm ist ausreichend. Also legen wir uns jetzt einfachheitshalber auf

$$N = 1 \qquad C_1 = -1 \qquad M \equiv M_1 \tag{A.180c}$$

fest. Außerdem wählen wir M so groß, dass

$$M^2 \gg -s_1 s_2 k_\gamma^2 \tfrac{\hbar^2}{c^2} \geq 0$$

gilt. Damit erhalten wir

$$B = -\ln\left(1 - \frac{s_1 s_2 k_\gamma^2 \hbar^2}{m^2 c^2}\right) + \ln\left(\frac{M^2}{m^2}\right) . \tag{A.181}$$

Dies wird in die Polarisationsfunktion eingesetzt, und die Variable s_2 durch Integration über die Deltafunktion eliminiert:

$$F_{\mathrm{P}}^{\alpha\beta} \overset{(A.170)}{=} (k_\gamma^\alpha k_\gamma^\beta - k_\gamma^2 g^{\alpha\beta})\, \Pi(k_\gamma) \tag{A.182a}$$

$$\Pi(k_\gamma) \overset{(A.172)}{=} \lim_{M\to\infty} \int_0^1 \mathrm{d}s_1 \, \frac{-q^2 s_1(1-s_1)}{2\pi^2\hbar^2} \cdot V \cdot$$
$$\cdot \left(-\ln\left(1 - \frac{s_1(1-s_1)k_\gamma^2\hbar^2}{m^2c^2}\right) + \ln\left(\frac{M^2}{m^2}\right)\right) \tag{A.182b}$$
$$V = \begin{cases} 1 & \text{falls } s_1(1-s_1)k_\gamma^2 < m^2c^2/\hbar^2 \\ 0 & \text{falls } s_1(1-s_1)k_\gamma^2 \geq m^2c^2/\hbar^2 \end{cases} \tag{A.182c}$$

A.25 Beweis von (27.33) bzw. (28.19)

$$\begin{aligned}
\tilde{F}'_{\sigma\tau} &\overset{(27.31b)}{=} \mathrm{D}'_\sigma \tilde{W}'_\tau - \mathrm{D}'_\tau \tilde{W}'_\sigma \\
&\overset{(27.29b)}{=} \mathrm{D}'_\sigma \left(U\tilde{W}_\tau U^\dagger + \frac{i\hbar}{g}(\mathrm{d}_\tau U)U^\dagger \right) - \\
&\qquad - \mathrm{D}'_\tau \left(U\tilde{W}_\sigma U^\dagger + \frac{i\hbar}{g}(\mathrm{d}_\sigma U)U^\dagger \right) \\
\tilde{F}'_{\sigma\tau} &\overset{(27.23)}{=} U\,\mathrm{D}_\sigma \tilde{W}_\tau U^\dagger - U\,\mathrm{D}_\tau \tilde{W}_\sigma U^\dagger + \\
&\quad + \left(\mathrm{d}_\sigma + \frac{i}{\hbar}\, g\Big[U\tilde{W}_\sigma U^\dagger + \frac{i\hbar}{g}(\mathrm{d}_\sigma U)U^\dagger\Big]\right)\frac{i\hbar}{g}(\mathrm{d}_\tau U)U^\dagger + \\
&\quad - \left(\mathrm{d}_\tau + \frac{i}{\hbar}\, g\Big[U\tilde{W}_\tau U^\dagger + \frac{i\hbar}{g}(\mathrm{d}_\tau U)U^\dagger\Big]\right)\frac{i\hbar}{g}(\mathrm{d}_\sigma U)U^\dagger
\end{aligned}$$

Mit $\mathrm{d}_\sigma \mathrm{d}_\tau U = \mathrm{d}_\tau \mathrm{d}_\sigma U$ gilt

$$\begin{aligned}
\tilde{F}'_{\sigma\tau} &\overset{(27.31b)}{=} U\tilde{F}_{\sigma\tau}U^\dagger + U\tilde{W}_\tau \mathrm{d}_\sigma U^\dagger - U\tilde{W}_\sigma \mathrm{d}_\tau U^\dagger + \\
&+ \frac{i\hbar}{g}(\mathrm{d}_\tau U)\mathrm{d}_\sigma U^\dagger - U\tilde{W}_\sigma \underbrace{U^\dagger(\mathrm{d}_\tau U)U^\dagger}_{-\mathrm{d}_\tau U^\dagger} - \frac{i\hbar}{g}(\mathrm{d}_\sigma U)\underbrace{U^\dagger(\mathrm{d}_\tau U)U^\dagger}_{-\mathrm{d}_\tau U^\dagger} - \\
&- \frac{i\hbar}{g}(\mathrm{d}_\sigma U)\mathrm{d}_\tau U^\dagger + U\tilde{W}_\tau \underbrace{U^\dagger(\mathrm{d}_\sigma U)U^\dagger}_{-\mathrm{d}_\sigma U^\dagger} + \frac{i\hbar}{g}(\mathrm{d}_\tau U)\underbrace{U^\dagger(\mathrm{d}_\sigma U)U^\dagger}_{-\mathrm{d}_\sigma U^\dagger} \\
&= U\tilde{F}_{\sigma\tau}U^\dagger \,.
\end{aligned} \tag{A.183}$$

Hier wurde die Relation

$$\begin{aligned} & \mathrm{d}_\sigma U U^\dagger = 0 = (\mathrm{d}_\sigma U) U^\dagger + U \mathrm{d}_\sigma U^\dagger \quad \Longrightarrow \\ \Longrightarrow \quad & U^\dagger (\mathrm{d}_\sigma U) U^\dagger = -\mathrm{d}_\sigma U^\dagger \end{aligned} \tag{A.184}$$

genutzt, und die kompensierenden Terme wurden farblich gekennzeichnet.

A.26 Herleitung von (19.45)

Wir schreiben die S-Matrix in der Form

$$\begin{aligned} S_{\boldsymbol{f}_1 \ldots \boldsymbol{f}_n \boldsymbol{k}_1 \ldots \boldsymbol{k}_m} &\overset{(19.43a)}{=} \langle t_a \boldsymbol{f}_1 \ldots \boldsymbol{f}_n \,|\, t_e \boldsymbol{k}_1 \ldots \boldsymbol{k}_m \rangle \\ &= \langle 0 |\, a_{\boldsymbol{f}_1 a} \ldots a_{\boldsymbol{f}_n a} a^\dagger_{\boldsymbol{k}_1 e} \ldots a^\dagger_{\boldsymbol{k}_m e} \,| 0 \rangle \end{aligned} \tag{A.185}$$

mit Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren, die auf die Zeiten t_e und t_a bezogen sind. Dass die Fourier-Operatoren, die zeitunabhängig sind und bleiben, jetzt einen Zeitbezug erhalten, hat folgenden Grund: Unser Ziel ist es, eine Formulierung der S-Matrix zu finden, die nicht auf den Fourier-Operatoren, sondern auf den Feldoperatoren $\psi_{(W)}$ der wechselwirkenden Teilchen beruht[3]. Diese Feldoperatoren sind Lösungen von Gleichung (19.4). Wir kennen diese Lösungen nicht. Sie sind auch nicht nach den Fourier-Operatoren entwickelbar. Diese Entwicklung ist aber möglich mit den Feldoperatoren im Wechselwirkungsbild, siehe (19.11). Wir versuchen deshalb, eine Verknüpfung zwischen den Fourier-Operatoren und den Feldoperatoren $\psi_{(W)}$ auf dem Umweg über die Feldoperatoren

$$\psi(x) \overset{(19.11)}{=} \sum_{\boldsymbol{k}} \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}\Omega}} \Big(a_{\boldsymbol{k}} \exp\{-ikx\} + a^\dagger_{\boldsymbol{k}} \exp\{+ikx\} \Big) \tag{A.186}$$

ψ im Wechselwirkungsbild herzustellen. Wir behaupten, dass diese Feldoperatoren in der Form

[3] Man beachte die in (19.21) festgelegte Umbenennung der Indizes!

$$a_{\boldsymbol{k}} = ic\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{\boldsymbol{k}}\Omega}}\int\limits_{\Omega} \mathrm{d}^3x\,\exp\{ikx\}\overset{\leftrightarrow}{\mathrm{d}_0}\psi(x) \tag{A.187a}$$

$$a^\dagger_{\boldsymbol{k}} = -ic\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{\boldsymbol{k}}\Omega}}\int\limits_{\Omega} \mathrm{d}^3x\,\exp\{-ikx\}\overset{\leftrightarrow}{\mathrm{d}_0}\psi(x) \tag{A.187b}$$

mit

$$F\overset{\leftrightarrow}{\mathrm{d}_\mu}G \equiv F\mathrm{d}_\mu G - (\mathrm{d}_\mu F)G \tag{A.188}$$

nach den Fourier-Operatoren aufgelöst werden können. Weil für das ungeladene Klein-Gordon-Feld $\psi^\dagger = \psi$ gilt, ist (A.187b) die adjungierte Gleichung von (A.187a), und deshalb korrekt, falls (A.187a) korrekt ist. (A.187a) wird überprüft durch Einsetzen von (A.186):

$$\begin{aligned}
a_{\boldsymbol{k}} &= ic\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{\boldsymbol{k}}\Omega}}\int\limits_{\Omega}\mathrm{d}^3x\exp\{ikx\}\sum_{\boldsymbol{f}}\sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{f}}\Omega}}\cdot\\
&\quad\cdot\Big(-if^0a_{\boldsymbol{f}}\exp\{-ifx\} + if^0a^\dagger_{\boldsymbol{f}}\exp\{+ifx\}\\
&\qquad - ik^0(a_{\boldsymbol{f}}\exp\{-ifx\} + a^\dagger_{\boldsymbol{f}}\exp\{+ifx\})\Big)\\
&= -\frac{c}{2\Omega}\int\limits_{\Omega}\mathrm{d}^3x\sum_{\boldsymbol{f}}\sqrt{\frac{1}{\omega_{\boldsymbol{k}}\,\omega_{\boldsymbol{f}}}}\Big(-(f^0+k^0)a_{\boldsymbol{f}}\exp\{i(k-f)x\} +\\
&\qquad + (f^0-k^0)a^\dagger_{\boldsymbol{f}}\exp\{+i(k+f)x\}\Big)
\end{aligned} \tag{A.189}$$

Wegen

$$\frac{1}{\Omega}\int\limits_{\Omega}\mathrm{d}^3x\,\exp\{-i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{f})\boldsymbol{x}\} \overset{(7.12)}{=} \delta_{\boldsymbol{kf}} \tag{A.190}$$

ist

$$a_{\boldsymbol{k}} = \frac{c}{2}\sum_{\boldsymbol{f}} \sqrt{\frac{1}{\omega_{\boldsymbol{k}}\,\omega_{\boldsymbol{f}}}}\Big((f^0+k^0)a_{\boldsymbol{f}}\exp\{i(k^0-f^0)x_0\}\delta_{\boldsymbol{kf}} - (f^0-k^0)a^\dagger_{\boldsymbol{f}}\exp\{+i(k^0+f^0)x_0\}\delta_{\boldsymbol{k},\text{-}\boldsymbol{f}}\Big)\ . \tag{A.191}$$

Der zweite Summand ist wegen (7.18) Null, während der erste Summand wegen $k^0 = \omega_{\boldsymbol{k}}/c$ mit der linken Seite der Gleichung identisch ist. Damit ist (A.187a) bewiesen.

Mit der Abkürzung

$$N_{\boldsymbol{k}} \equiv \sqrt{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}\Omega} \tag{A.192}$$

sind die Erzeugungsoperatoren von einlaufenden und auslaufenden Teilchen

$$a^\dagger_{\boldsymbol{k}e} = -\frac{i\hbar c}{N_{\boldsymbol{k}}}\int_\Omega \mathrm{d}^3x \exp\{-ikx\}\overleftrightarrow{\mathrm{d}_0}\psi(t_e,\boldsymbol{x}) \tag{A.193a}$$

$$a^\dagger_{\boldsymbol{k}a} = -\frac{i\hbar c}{N_{\boldsymbol{k}}}\int_\Omega \mathrm{d}^3x \exp\{-ikx\}\overleftrightarrow{\mathrm{d}_0}\psi(t_a,\boldsymbol{x})\ . \tag{A.193b}$$

Die Adjungierten dieser Operatoren sind die Vernichtungsoperatoren $a_{\boldsymbol{k}e}$ eines einlaufenden und $a_{\boldsymbol{k}a}$ eines auslaufenden Teilchens. Diese Gleichungen gelten zur Zeit t_e bzw. t_a, jedoch nicht im Zeitraum $t_e < t < t_a$ der Wechselwirkung. Denn nur zur Zeit $t \le t_e$ und $t \ge t_a$ sind die Feldoperatoren $\psi_{(W)}$ der Teilchen identisch mit den Feldoperatoren ψ im Wechselwirkungsbild, und können gemäß (A.186) nach den Fourier-Operatoren entwickelt werden.

Mithilfe des in (15.44) definierten Zeitordnungsoperators versuchen wir, die S-Matrix folgendermaßen zu schreiben:

$$S_{\boldsymbol{fk}} = \langle 0|\, a_{\boldsymbol{f}a}\, a^\dagger_{\boldsymbol{k}e}\,|0\rangle \stackrel{??}{=} \langle 0|\, T(a_{\boldsymbol{f}a}-a_{\boldsymbol{f}e})(a^\dagger_{\boldsymbol{k}e}-a^\dagger_{\boldsymbol{k}a})\,|0\rangle \tag{A.194}$$

Um zu prüfen, ob diese Gleichung korrekt ist, berechnen wir

$$\begin{aligned}&\langle 0|\, T(a_{\boldsymbol{f}a}-a_{\boldsymbol{f}e})(a^\dagger_{\boldsymbol{k}e}-a^\dagger_{\boldsymbol{k}a})\,|0\rangle = \\ &= \langle 0|\, T(a_{\boldsymbol{f}a}a^\dagger_{\boldsymbol{k}e} - a_{\boldsymbol{f}a}a^\dagger_{\boldsymbol{k}a} - a_{\boldsymbol{f}e}a^\dagger_{\boldsymbol{k}e} + a_{\boldsymbol{f}e}a^\dagger_{\boldsymbol{k}a})\,|0\rangle = \end{aligned}$$

$$= \langle 0|\, a_{\boldsymbol{f}a} a^\dagger_{\boldsymbol{k}e}\, |0\rangle - \langle 0|\, a_{\boldsymbol{f}a} a^\dagger_{\boldsymbol{k}a}\, |0\rangle - \langle 0|\, a_{\boldsymbol{f}e} a^\dagger_{\boldsymbol{k}e}\, |0\rangle + \langle 0|\, a^\dagger_{\boldsymbol{k}a} a_{\boldsymbol{f}e}\, |0\rangle \ .$$

Die drei letzten Terme sollten Null sein, wie der Vergleich mit der linken Seite von (A.194) zeigt. Im Fall $\boldsymbol{f}_i \neq \boldsymbol{k}_j$ für alle $i = 1 \ldots n$ und alle $j = 1 \ldots m$ sind diese Summanden wegen $a|0\rangle = \langle 0|a^\dagger = 0$ tatsächlich Null. Falls es aber ein oder mehrere $\boldsymbol{f}_i = \boldsymbol{k}_j$ gibt (was zu erwarten ist, wenn nur Selbstwechselwirkung stattfindet), ist nur der letzte Summand Null. Der zweite Summand ist dann die Wahrscheinlichkeitsamplitude dafür, dass ein oder mehrere auslaufende Teilchen mit Wellenzahl $\boldsymbol{k}_j$ erzeugt und wieder vernichtet werden. Der dritte Summand ist dann die Wahrscheinlichkeitsamplitude dafür, dass ein oder mehrere einlaufende Teilchen erzeugt und wieder vernichtet werden. Diese beiden Wahrscheinlichkeitsamplituden sind verschieden von Null, obwohl sie gleich Null sein sollten. Also ist (A.194) in dieser Form nicht korrekt und muss modifiziert werden.

Das Defizit von (A.194) lässt sich dadurch beheben, dass man ein zeitabhängiges Vakuum definiert, auf das die verschiedenen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren in unterschiedlicher Weise wirken:

$$\begin{aligned} |0_e\rangle &\equiv |0\rangle\Big|_{t\leq t_e} & \langle 0_a| &\equiv \langle 0|\Big|_{t\geq t_a} \\ a^\dagger_{\boldsymbol{k}e}|0_e\rangle &\equiv |\boldsymbol{k}\rangle & \langle 0_a|a_{\boldsymbol{k}e} &\equiv 0 \\ a^\dagger_{\boldsymbol{k}a}|0_e\rangle &\equiv 0 & \langle 0_a|a_{\boldsymbol{k}a} &\equiv \langle \boldsymbol{k}| \end{aligned} \qquad \text{(A.195)}$$

Mit dieser Definition ist

$$\begin{aligned} S_{\boldsymbol{f}\boldsymbol{k}} &= \langle 0_a|\, a_{\boldsymbol{f}a}\, a^\dagger_{\boldsymbol{k}e}\, |0_e\rangle = \langle 0_a|\, T(a_{\boldsymbol{f}a} - a_{\boldsymbol{f}e})(a^\dagger_{\boldsymbol{k}e} - a^\dagger_{\boldsymbol{k}a})\, |0_e\rangle = \\ &= \langle 0_a|\, a_{\boldsymbol{f}_1 a} \ldots a_{\boldsymbol{f}_n a}\, a^\dagger_{\boldsymbol{k}_1 e} \ldots a^\dagger_{\boldsymbol{k}_m e}\, |0_e\rangle \ = \\ &= \langle 0_a|\, T(a_{\boldsymbol{f}_1 a} \ldots a_{\boldsymbol{f}_n a} - a_{\boldsymbol{f}_1 e} \ldots a_{\boldsymbol{f}_m e}) \cdot \\ &\qquad \cdot (a^\dagger_{\boldsymbol{f}_1 e} \ldots a^\dagger_{\boldsymbol{f}_m e} - a^\dagger_{\boldsymbol{f}_1 a} \ldots a^\dagger_{\boldsymbol{f}_n a})\, |0_e\rangle \end{aligned} \qquad \text{(A.196)}$$

eine korrekte Gleichung.

Man setzt in die S-Matrix deshalb die Differenzen der Fourier-Operatoren ein, weil man diesen Ausdruck als Funktion von $\psi_{(W)}(x)$ schreiben kann:

$$a^\dagger_{\boldsymbol{k}e} - a^\dagger_{\boldsymbol{k}a} = + \int\limits_{t_e}^{t_a} \mathrm{d}x^0\, \mathrm{d}_0\, \frac{i\hbar c}{N_{\boldsymbol{k}}} \int\limits_\Omega \mathrm{d}^3x \exp\{-ikx\} \overleftrightarrow{\mathrm{d}_0} \psi_{(W)}(x)$$

Nur für $t \le t_e$ und $t \ge t_a$ ist uns $\psi_{(W)}(t, \boldsymbol{x}) = \psi(t, \boldsymbol{x})$ bekannt. Aber diese Kenntnis reicht aus, um dies raffinierte Integral über $\psi_{(W)}(x)$ im Zeitraum $t_e \le t \le t_a$ zu formulieren. Wir formen es weiter um:

$$\begin{aligned} a^\dagger_{\boldsymbol{k}e} - a^\dagger_{\boldsymbol{k}a} &= \frac{i\hbar c}{N_{\boldsymbol{k}}} \int\limits_{t_e}^{t_a} \int\limits_\Omega \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}_0 \Big(\exp\{-ikx\} \mathrm{d}_0 \psi_{(W)}(x) + \\ &\qquad + ik^0 \exp\{-ikx\} \psi_{(W)}(x) \Big) \\ &= \frac{i\hbar c}{N_{\boldsymbol{k}}} \int\limits_{t_e}^{t_a} \int\limits_\Omega \mathrm{d}^4x \Big(\\ &\quad - ik^0 \exp\{-ikx\} \mathrm{d}_0 \psi_{(W)}(x) + \exp\{-ikx\} \mathrm{d}_0 \mathrm{d}_0 \psi_{(W)}(x) + \\ &\quad + (k^0)^2 \exp\{-ikx\} \psi_{(W)}(x) + ik^0 \exp\{-ikx\} \mathrm{d}_0 \psi_{(W)}(x) \Big) \end{aligned} \tag{A.197}$$

Zwei Summanden kompensieren sich. Außerdem ist

$$\begin{aligned} k^0 k_0 &= k^j k_j + \frac{m^2c^2}{\hbar^2} \\ \Longrightarrow \quad (k^0)^2 \exp\{-ikx\} &= \Big(\frac{m^2c^2}{\hbar^2} - \boldsymbol{\nabla}^2 \Big) \exp\{-ikx\} \,. \end{aligned} \tag{A.198}$$

Während des Integrationszeitraums $t_e \le t \le t_a$ hat $\psi_{(W)}(x)$ am Rand des Normierungsvolumens Ω mit Sicherheit die Amplitude Null. Deshalb kann man einen Term im dritten Summanden von (A.197) durch zweimalige partielle Integration in folgender Weise umformen:

$$- \int\limits_\Omega \mathrm{d}^3x\, \psi_{(W)}(x) \boldsymbol{\nabla}^2 \exp\{-ikx\} =$$

$$= \underbrace{-\psi_{(W)}(x)\boldsymbol{\nabla}\exp\{-ikx\}\Big|_{\Omega}}_{0} + \int\limits_{\Omega} \mathrm{d}^3x\Big(\boldsymbol{\nabla}\psi_{(W)}(x)\Big)\boldsymbol{\nabla}\exp\{-ikx\} =$$

$$= \underbrace{\Big(\boldsymbol{\nabla}\psi_{(W)}(x)\Big)\exp\{-ikx\}\Big|_{\Omega}}_{0} - \int\limits_{\Omega} \mathrm{d}^3x\Big(\boldsymbol{\nabla}^2\psi_{(W)}(x)\Big)\exp\{-ikx\}$$

Das Zeichen $\Big|_{\Omega}$ bedeutet, dass der Wert am Rand des Normierungsvolumens einzusetzen ist. Damit folgt

$$\begin{aligned} a^{\dagger}_{\boldsymbol{k}e} - a^{\dagger}_{\boldsymbol{k}a} &= \frac{i\hbar c}{N_{\boldsymbol{k}}} \int\limits_{t_e}^{t_a}\int\limits_{\Omega} \mathrm{d}^4x\Big(\exp\{-ikx\}\mathrm{d}_0\mathrm{d}_0\psi_{(W)}(x) \\ &\qquad - \exp\{-ikx\}\boldsymbol{\nabla}^2\psi_{(W)}(x) + \exp\{-ikx\}\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi_{(W)}(x)\Big) \\ &= \frac{-i\hbar c}{N_{\boldsymbol{k}}} \int\limits_{t_e}^{t_a}\int\limits_{\Omega} \mathrm{d}^4x\,\exp\{-ikx\}\Big(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^{\mu}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_{\mu}} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\Big)\psi_{(W)}(x)\ . \end{aligned}$$

Wegen $-(a^{\dagger}_{\boldsymbol{k}e} - a^{\dagger}_{\boldsymbol{k}a})^{\dagger} \overset{\boldsymbol{k}\to\boldsymbol{f}}{=} a_{\boldsymbol{f}a} - a_{\boldsymbol{f}e}$ erhält man die Differenz $a_{\boldsymbol{f}a} - a_{\boldsymbol{f}e}$, wenn man das negative adjungierte von $a^{\dagger}_{\boldsymbol{k}e} - a^{\dagger}_{\boldsymbol{k}a}$ nimmt und überall $\boldsymbol{k}$ durch $\boldsymbol{f}$ ersetzt:

$$\begin{aligned} a_{\boldsymbol{f}a} - a_{\boldsymbol{f}e} = \frac{-i\hbar c}{N_{\boldsymbol{f}}} \int\limits_{t_e}^{t_a}\int\limits_{\Omega} \mathrm{d}^4y\,\exp\{+ify\}\cdot \\ \cdot\Big(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y^{\mu}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y_{\mu}} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\Big)\psi_{(W)}(y) \end{aligned} \tag{A.199}$$

Damit lautet das Matrixelement

$$
\begin{aligned}
S_{\boldsymbol{f}\boldsymbol{k}} &= \langle \boldsymbol{f}|\, S\, |\boldsymbol{k}\rangle \overset{(A.196)}{=} \\
&= \frac{(-i\hbar c)}{N_{\boldsymbol{k}}} \frac{(-i\hbar c)}{N_{\boldsymbol{f}}} \int\limits_{t_e}^{t_a}\int\limits_{\Omega} \mathrm{d}^4 y\, \exp\{+ify\} \int\limits_{t_e}^{t_a}\int\limits_{\Omega} \mathrm{d}^4 x\, \exp\{-ikx\} \cdot \\
&\quad \cdot \Big(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^\mu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_\mu} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\Big)\Big(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y^\mu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y_\mu} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\Big)\, G(y,x) \\
&\text{mit} \quad G(y,x) \equiv \langle 0|\, T\psi_{(W)}(y)\, \psi_{(W)}(x)\, |0\rangle \ . \qquad \text{(A.200)}
\end{aligned}
$$

Die Funktion $G(y,x) \overset{(A.196)}{=} G(y_1,\ldots,y_n,x_1,\ldots,x_m)$ wird als Multi-Punkt Greensfunktion bezeichnet. Wenn $G(y,x)$ eine Lösung der freien Klein-Gordon-Gleichung wäre, dann wäre diese Gleichung Null. $G(y,x)$ ist aber eine Lösung der inhomogenen Gleichung (12.4). Also ist (A.200) von Null verschieden. Der Trick besteht nun darin, die Differentialoperatoren nicht unmittelbar auf $G(y,x)$ anzuwenden, sondern zunächst eine Fourier-Transformation auszuführen. Damit findet man

$$
\begin{aligned}
&\Big(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^\mu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_\mu} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\Big)\Big(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y^\mu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y_\mu} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\Big)\, G(y,x) \ = \\
&\overset{(7.15)}{=} \Big(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^\mu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_\mu} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\Big)\Big(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y^\mu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y_\mu} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\Big) \\
&\qquad \cdot \frac{1}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{k}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}k^0}{2\pi}\, \frac{1}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{f}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}f^0}{2\pi}\, \widetilde{G}(k,f)\exp\{-i(kx+fy)\} \ = \\
&= \Big(+k^2 - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\Big)\Big(+f^2 - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\Big)\, G(y,x) \\
&\overset{(12.7)}{=} \frac{i}{\hbar c}\,\widetilde{G}^{-1}(k)\,\frac{i}{\hbar c}\,\widetilde{G}^{-1}(f)\, G(y,x) \ \neq \ 0 \ . \qquad \text{(A.201)}
\end{aligned}
$$

Schließlich schreiben wir wieder explizit aus, dass es sich bei $\boldsymbol{k}$ und $\boldsymbol{f}$ um Produkte handelt, und fügen $N_{\boldsymbol{k}} =$ (A.192) ein:

$$
S_{\boldsymbol{f}_1\ldots\boldsymbol{f}_n\boldsymbol{k}_1\ldots\boldsymbol{k}_m} = \langle \boldsymbol{f}_1\ldots\boldsymbol{f}_n|\, S\, |\boldsymbol{k}_1\ldots\boldsymbol{k}_m\rangle =
$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \frac{\widetilde{G}^{-1}(f_j)}{\sqrt{2\hbar\omega_{\boldsymbol{f}_j}\Omega}} \int_{t_e}^{t_a} \int_{\Omega} \mathrm{d}^4 y_j \, \exp\{+i f_j y_j\} \cdot$$

$$\cdot \prod_{l=1}^{m} \frac{\widetilde{G}^{-1}(k_l)}{\sqrt{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}_l}\Omega}} \int_{t_e}^{t_a} \int_{\Omega} \mathrm{d}^4 x_l \, \exp\{-i k_l x_l\} \cdot$$

$$\cdot \langle 0| \, T\psi_{(W)}(y_1) \ldots \psi_{(W)}(y_n) \, \psi_{(W)}(x_1) \ldots \psi_{(W)}(x_m) \, |0\rangle \qquad \text{(A.202)}$$

Man beachte, dass die Integrale über x und y sich auch auf das Matrixelement in der letzten Zeile erstrecken. Der Zeitordnungsoperator T bewirkt, dass im Fall $y^0 > x^0$ die in $\psi_{(W)}(x_j)$ enthaltenen Operatoren nach rechts wirken. Die Erzeugungsoperatoren $a^\dagger_{\boldsymbol{k}_j}$ erzeugen Teilchen $|\,\rangle$, die Vernichtungsoperatoren $a_{\boldsymbol{k}_j}$ ergeben Summanden mit Wert Null. Die in $\psi_{(W)}(y_i)$ enthaltenen Operatoren $a_{\boldsymbol{f}_i}$ wirken nach links als Erzeugungsoperatoren und erzeugen Teilchen $\langle\,|$. Die Operatoren $a^\dagger_{\boldsymbol{f}_i}$ wirken nach links als Vernichtungsoperatoren und ergeben Summanden mit Wert Null. Bei $x^0 < y^0$ wechseln die Feldoperatoren die Plätze. In diesem Fall erzeugen die $a^\dagger_{\boldsymbol{f}_i}$ einlaufende Teilchen $|\,\rangle$, und die $a_{\boldsymbol{k}_j}$ erzeugen auslaufende Teilchen $\langle\,|$. In jedem Fall werden einlaufende Teilchen im Zustand $|\,\rangle$ und auslaufende Teilchen im Zustand $\langle\,|$ erzeugt. Eine Unterscheidung zwischen $|0_e\rangle$ und $|0_a\rangle$ ist nicht mehr erforderlich.

A.27 Einige Spinor-Produkte

Wir wollen Produkte der Spinoren

$${}^1u^{\boldsymbol{k}} = N \begin{pmatrix} A_+ \\ B \\ A_- \\ -B \end{pmatrix} \;,\; {}^2u^{\boldsymbol{k}} = N \begin{pmatrix} B^* \\ A_- \\ -B^* \\ A_+ \end{pmatrix} \;,\; {}^1v^{\boldsymbol{k}} = N \begin{pmatrix} A_+ \\ B \\ -A_- \\ B \end{pmatrix}$$

$$
{}^2v^{\boldsymbol{k}} = N \begin{pmatrix} B^* \\ A_- \\ B^* \\ -A_+ \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{aligned} {}^1\bar{u}^{\boldsymbol{k}} &= N \begin{pmatrix} A_- & -B^* & A_+ & B^* \end{pmatrix} \\ {}^2\bar{u}^{\boldsymbol{k}} &= N \begin{pmatrix} -B & A_+ & B & A_- \end{pmatrix} \\ {}^1\bar{v}^{\boldsymbol{k}} &= N \begin{pmatrix} -A_- & B^* & A_+ & B^* \end{pmatrix} \\ {}^2\bar{v}^{\boldsymbol{k}} &= N \begin{pmatrix} B & -A_+ & B & A_- \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{A.203a}
$$

berechnen. Ihre Komponenten sind gemäß (A.65)

$$N \equiv \sqrt{\frac{1}{2(\hbar\omega_{\boldsymbol{k}} + mc^2)}} \tag{A.203b}$$

$$A_+ \equiv \hbar\omega_{\boldsymbol{k}} + mc^2 + c\hbar k_3 \tag{A.203c}$$

$$B \equiv c\hbar k_1 + ic\hbar k_2 \tag{A.203d}$$

$$A_- \equiv \hbar\omega_{\boldsymbol{k}} + mc^2 - c\hbar k_3 \ . \tag{A.203e}$$

Zunächst berechnen wir die Produkte $X\gamma^\rho Y$ mit

$$X \equiv \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \end{pmatrix} \ , \ Y \equiv \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{pmatrix} \ , \ \gamma^\rho = (8.15) \ . \tag{A.204a}$$

$$X\gamma^0 Y = X_3Y_1 + X_4Y_2 + X_1Y_3 + X_2Y_4 \tag{A.204b}$$

$$X\gamma^1 Y = -X_4Y_1 - X_3Y_2 + X_2Y_3 + X_1Y_4 \tag{A.204c}$$

$$X\gamma^2 Y = i(-X_4Y_1 + X_3Y_2 + X_2Y_3 - X_1Y_4) \tag{A.204d}$$

$$X\gamma^3 Y = -X_3Y_1 + X_4Y_2 + X_1Y_3 - X_2Y_4 \tag{A.204e}$$

Durch Kombination von (A.203) und (A.204) erhält man

$$\begin{aligned}
{}^1\bar{u}^{\boldsymbol{k}}\gamma^0 {}^1u^{\boldsymbol{k}} &= N^2(A_+^2 + |B|^2 + A_-^2 + |B|^2) = 2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}} = 2c\hbar k^0 \\
{}^1\bar{u}^{\boldsymbol{k}}\gamma^1 {}^1u^{\boldsymbol{k}} &= N^2(-B^*A_+ - A_+B - B^*A_- - A_-B) = 2c\hbar k^1 \\
{}^1\bar{u}^{\boldsymbol{k}}\gamma^2 {}^1u^{\boldsymbol{k}} &= iN^2(-B^*A_+ + A_+B - B^*A_- + A_-B) = 2c\hbar k^2 \\
{}^1\bar{u}^{\boldsymbol{k}}\gamma^3 {}^1u^{\boldsymbol{k}} &= N^2(-A_+^2 + |B|^2 + A_-^2 - |B|^2) = 2c\hbar k^3
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
{}^1\bar{u}^{\boldsymbol{k}}\gamma^0\,{}^2u^{\boldsymbol{k}} &= N^2(A_+B^* + B^*A_- - A_-B^* - B^*A_+) = 0\\
{}^1\bar{u}^{\boldsymbol{k}}\gamma^1\,{}^2u^{\boldsymbol{k}} &= N^2(-B^*B^* - A_+A_- + B^*B^* + A_-A_+) = 0\\
{}^1\bar{u}^{\boldsymbol{k}}\gamma^2\,{}^2u^{\boldsymbol{k}} &= iN^2(-B^*B^* + A_+A_- + B^*B^* - A_-A_+) = 0\\
{}^1\bar{u}^{\boldsymbol{k}}\gamma^3\,{}^2u^{\boldsymbol{k}} &= N^2(-A_+B^* + B^*A_- - A_-B^* + B^*A_+) = 0\\
{}^1\bar{u}^{\boldsymbol{k}}\gamma^0\,{}^1v^{\boldsymbol{k}} &= N^2(A_+A_+ + B^*B - A_-A_- - B^*B)\\
{}^1\bar{u}^{\boldsymbol{k}}\gamma^1\,{}^1v^{\boldsymbol{k}} &= N^2(-B^*A_+ - A_+B + B^*A_- + A_-B)\\
{}^1\bar{u}^{\boldsymbol{k}}\gamma^2\,{}^1v^{\boldsymbol{k}} &= iN^2(-B^*A_+ + A_+B + B^*A_- - A_-B)\\
{}^1\bar{u}^{\boldsymbol{k}}\gamma^3\,{}^1v^{\boldsymbol{k}} &= N^2(-A_+A_+ + B^*B - A_-A_- + B^*B)\\
{}^1\bar{u}^{\boldsymbol{k}}\gamma^0\,{}^2v^{\boldsymbol{k}} &= N^2(A_+B^* + B^*A_- + A_-B^* + B^*A_+)\\
{}^1\bar{u}^{\boldsymbol{k}}\gamma^1\,{}^2v^{\boldsymbol{k}} &= N^2(-B^*B^* - A_+A_- - B^*B^* - A_-A_+)\\
{}^1\bar{u}^{\boldsymbol{k}}\gamma^2\,{}^2v^{\boldsymbol{k}} &= iN^2(-B^*B^* + A_+A_- - B^*B^* + A_-A_+)\\
{}^1\bar{u}^{\boldsymbol{k}}\gamma^3\,{}^2v^{\boldsymbol{k}} &= N^2(-A_+B^* + B^*A_- + A_-B^* - B^*A_+)\\
{}^2\bar{u}^{\boldsymbol{k}}\gamma^0\,{}^1u^{\boldsymbol{k}} &= N^2(BA_+ + A_-B - BA_- - A_+B) = 0\\
{}^2\bar{u}^{\boldsymbol{k}}\gamma^1\,{}^1u^{\boldsymbol{k}} &= N^2(-A_-A_+ - BB + A_+A_- + BB) = 0\\
{}^2\bar{u}^{\boldsymbol{k}}\gamma^2\,{}^1u^{\boldsymbol{k}} &= iN^2(-A_-A_+ + BB + A_+A_- - BB) = 0\\
{}^2\bar{u}^{\boldsymbol{k}}\gamma^3\,{}^1u^{\boldsymbol{k}} &= N^2(-BA_+ + A_-B - BA_- + A_+B) = 0\\
{}^2\bar{u}^{\boldsymbol{k}}\gamma^0\,{}^2u^{\boldsymbol{k}} &= N^2(|B|^2 + A_-^2 + |B|^2 + A_+^2) = 2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}} = 2c\hbar k^0\\
{}^2\bar{u}^{\boldsymbol{k}}\gamma^1\,{}^2u^{\boldsymbol{k}} &= N^2(-A_-B^* - BA_- - A_+B^* - BA_+) = 2c\hbar k^1\\
{}^2\bar{u}^{\boldsymbol{k}}\gamma^2\,{}^2u^{\boldsymbol{k}} &= iN^2(-A_-B^* + BA_- - A_+B^* + BA_+) = 2c\hbar k^2\\
{}^2\bar{u}^{\boldsymbol{k}}\gamma^3\,{}^2u^{\boldsymbol{k}} &= N^2(-|B|^2 + A_-^2 + |B|^2 - A_+^2) = 2c\hbar k^3\\
{}^2\bar{u}^{\boldsymbol{k}}\gamma^0\,{}^1v^{\boldsymbol{k}} &= N^2(BA_+ + A_-B + BA_- + A_+B)\\
{}^2\bar{u}^{\boldsymbol{k}}\gamma^1\,{}^1v^{\boldsymbol{k}} &= N^2(-A_-A_+ - BB - A_+A_- - BB)\\
{}^2\bar{u}^{\boldsymbol{k}}\gamma^2\,{}^1v^{\boldsymbol{k}} &= iN^2(-A_-A_+ + BB - A_+A_- + BB)\\
{}^2\bar{u}^{\boldsymbol{k}}\gamma^3\,{}^1v^{\boldsymbol{k}} &= N^2(-BA_+ + A_-B + BA_- - A_+B)\\
{}^2\bar{u}^{\boldsymbol{k}}\gamma^0\,{}^2v^{\boldsymbol{k}} &= N^2(BB^* + A_-A_- - BB^* - A_+A_+)\\
{}^2\bar{u}^{\boldsymbol{k}}\gamma^1\,{}^2v^{\boldsymbol{k}} &= N^2(-A_-B^* - BA_- + A_-B^* - BA_+)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{2}\bar{u}^{\boldsymbol{k}}\gamma^{2}\,{}^{2}v^{\boldsymbol{k}} &= iN^2(-A_-B^* + BA_- + A_+B^* - BA_+)\\
{}^{2}\bar{u}^{\boldsymbol{k}}\gamma^{3}\,{}^{2}v^{\boldsymbol{k}} &= N^2(-BB^* + A_-A_- - BB^* + A_+A_+)\\
{}^{1}\bar{v}^{\boldsymbol{k}}\gamma^{0}\,{}^{1}u^{\boldsymbol{k}} &= N^2(A_+A_+ + B^*B - A_-A_- - B^*B)\\
{}^{1}\bar{v}^{\boldsymbol{k}}\gamma^{1}\,{}^{1}u^{\boldsymbol{k}} &= N^2(-B^*A_+ - A_+B + B^*A_- + A_-B)\\
{}^{1}\bar{v}^{\boldsymbol{k}}\gamma^{2}\,{}^{1}u^{\boldsymbol{k}} &= iN^2(-B^*A_+ + A_+B + B^*A_- - A_-B)\\
{}^{1}\bar{v}^{\boldsymbol{k}}\gamma^{3}\,{}^{1}u^{\boldsymbol{k}} &= N^2(-A_+A_+ + B^*B - A_-A_- + B^*B)\\
{}^{1}\bar{v}^{\boldsymbol{k}}\gamma^{0}\,{}^{2}u^{\boldsymbol{k}} &= N^2(A_+B^* + B^*A_- + A_-B^* + B^*A_+)\\
{}^{1}\bar{v}^{\boldsymbol{k}}\gamma^{1}\,{}^{2}u^{\boldsymbol{k}} &= N^2(-B^*B^* - A_+A_- - B^*B^* - A_-A_+)\\
{}^{1}\bar{v}^{\boldsymbol{k}}\gamma^{2}\,{}^{2}u^{\boldsymbol{k}} &= iN^2(-B^*B^* + A_+A_- - B^*B^* + A_-A_+)\\
{}^{1}\bar{v}^{\boldsymbol{k}}\gamma^{3}\,{}^{2}u^{\boldsymbol{k}} &= N^2(-A_+B^* + B^*A_- + A_-B^* - B^*A_+)\\
{}^{1}\bar{v}^{\boldsymbol{k}}\gamma^{0}\,{}^{1}v^{\boldsymbol{k}} &= N^2(A_+^2 + |B|^2 + A_-^2 + |B|^2) = 2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}} = 2c\hbar k^0\\
{}^{1}\bar{v}^{\boldsymbol{k}}\gamma^{1}\,{}^{1}v^{\boldsymbol{k}} &= N^2(-B^*A_+ - A_+B - B^*A_- - A_-B) = 2c\hbar k^1\\
{}^{1}\bar{v}^{\boldsymbol{k}}\gamma^{2}\,{}^{1}v^{\boldsymbol{k}} &= iN^2(-B^*A_+ + A_+B - B^*A_- + A_-B) = 2c\hbar k^2\\
{}^{1}\bar{v}^{\boldsymbol{k}}\gamma^{3}\,{}^{1}v^{\boldsymbol{k}} &= N^2(-A_+^2 + |B|^2 + A_-^2 - |B|^2) = 2c\hbar k^3\\
{}^{1}\bar{v}^{\boldsymbol{k}}\gamma^{0}\,{}^{2}v^{\boldsymbol{k}} &= N^2(A_+B^* + B^*A_- - A_-B^* - B^*A_+) = 0\\
{}^{1}\bar{v}^{\boldsymbol{k}}\gamma^{1}\,{}^{2}v^{\boldsymbol{k}} &= N^2(-B^*B^* - A_+A_- + B^*B^* + A_-A_+) = 0\\
{}^{1}\bar{v}^{\boldsymbol{k}}\gamma^{2}\,{}^{2}v^{\boldsymbol{k}} &= iN^2(-B^*B^* + A_+A_- + B^*B^* - A_-A_+) = 0\\
{}^{1}\bar{v}^{\boldsymbol{k}}\gamma^{3}\,{}^{2}v^{\boldsymbol{k}} &= N^2(-A_+B^* + B^*A_- - A_-B^* + B^*A_+) = 0\\
{}^{2}\bar{v}^{\boldsymbol{k}}\gamma^{0}\,{}^{1}u^{\boldsymbol{k}} &= N^2(BA_+ + A_-B + BA_- + A_+B)\\
{}^{2}\bar{v}^{\boldsymbol{k}}\gamma^{1}\,{}^{1}u^{\boldsymbol{k}} &= N^2(-A_-A_+ - BB - A_+A_- - BB)\\
{}^{2}\bar{v}^{\boldsymbol{k}}\gamma^{2}\,{}^{1}u^{\boldsymbol{k}} &= iN^2(-A_-A_+ + BB - A_+A_- + BB)\\
{}^{2}\bar{v}^{\boldsymbol{k}}\gamma^{3}\,{}^{1}u^{\boldsymbol{k}} &= N^2(-BA_+ + A_-B + BA_- - A_+B)\\
{}^{2}\bar{v}^{\boldsymbol{k}}\gamma^{0}\,{}^{2}u^{\boldsymbol{k}} &= N^2(BB^* + A_-A_- - BB^* - A_+A_+)\\
{}^{2}\bar{v}^{\boldsymbol{k}}\gamma^{1}\,{}^{2}u^{\boldsymbol{k}} &= N^2(-A_-B^* - BA_- + A_+B^* + BA_+)\\
{}^{2}\bar{v}^{\boldsymbol{k}}\gamma^{2}\,{}^{2}u^{\boldsymbol{k}} &= iN^2(-A_-B^* + BA_- + A_+B^* - BA_+)\\
{}^{2}\bar{v}^{\boldsymbol{k}}\gamma^{3}\,{}^{2}u^{\boldsymbol{k}} &= N^2(-BB^* + A_-A_- - BB^* + A_+A_+)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{2}\bar{v}^{\boldsymbol{k}}\gamma^{0}\,{}^{1}v^{\boldsymbol{k}} &= N^2(BA_+ + A_-B - BA_- - A_+B) = 0\\
{}^{2}\bar{v}^{\boldsymbol{k}}\gamma^{1}\,{}^{1}v^{\boldsymbol{k}} &= N^2(-A_-A_+ - BB + A_+A_- + BB) = 0\\
{}^{2}\bar{v}^{\boldsymbol{k}}\gamma^{2}\,{}^{1}v^{\boldsymbol{k}} &= iN^2(-A_-A_+ + BB + A_+A_- - BB) = 0\\
{}^{2}\bar{v}^{\boldsymbol{k}}\gamma^{3}\,{}^{1}v^{\boldsymbol{k}} &= N^2(-BA_+ + A_-B - BA_- + A_+B) = 0\\
{}^{2}\bar{v}^{\boldsymbol{k}}\gamma^{0}\,{}^{2}v^{\boldsymbol{k}} &= N^2(|B|^2 + A_-^2 + |B|^2 + A_+^2) = 2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}} = 2c\hbar k^0\\
{}^{2}\bar{v}^{\boldsymbol{k}}\gamma^{1}\,{}^{2}v^{\boldsymbol{k}} &= N^2(-A_-B^* - BA_- - A_+B^* - BA_+) = 2c\hbar k^1\\
{}^{2}\bar{v}^{\boldsymbol{k}}\gamma^{2}\,{}^{2}v^{\boldsymbol{k}} &= iN^2(-A_-B^* + BA_- - A_+B^* + BA_+) = 2c\hbar k^2\\
{}^{2}\bar{v}^{\boldsymbol{k}}\gamma^{3}\,{}^{2}v^{\boldsymbol{k}} &= N^2(-|B|^2 + A_-^2 + |B|^2 - A_+^2) = 2c\hbar k^3\ .
\end{aligned}
$$

Offenbar ist das allgemeine Resultat:

$$
{}^{r}\bar{u}^{\boldsymbol{k}}\gamma^{\rho}\,{}^{s}u^{\boldsymbol{k}} = {}^{r}\bar{v}^{\boldsymbol{k}}\gamma^{\rho}\,{}^{s}v^{\boldsymbol{k}} = 2c\hbar k^{\rho}\delta_{rs} \tag{A.205a}
$$

$$
{}^{r}\bar{u}^{\boldsymbol{k}}\gamma^{\rho}\,{}^{s}v^{\boldsymbol{k}} \neq 0 \qquad , \qquad {}^{r}\bar{v}^{\boldsymbol{k}}\gamma^{\rho}\,{}^{s}u^{\boldsymbol{k}} \neq 0 \tag{A.205b}
$$

A.28 Einige Integrale

$$
\text{[64, Integral 187]}: \quad \int \mathrm{d}x\, x^2\sqrt{x^2+a^2} = \tag{A.206}
$$

$$
= \frac{x(x^2+a^2)^{3/2}}{4} - \frac{a^2}{8}\Big[x\sqrt{x^2+a^2} + a^2\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}\,)\Big]
$$

[64, Integral 194] :

$$
\int \mathrm{d}x\,\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}} == \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) \tag{A.207}
$$

Literatur

[1] Edward G. Harris : *A pedestrian Approach to Quantum Field Theory* (John Wiley & Sons, New York, 1972)

[2] James D. Bjorken, Sidney D. Drell : *Relativistic Quantum Fields* (Mc-Graw-Hill, New York, 1965)

[3] Michael E. Peskin, Daniel V. Schroeder : *An Introduction to Quantum Field Theory* (Westview Press, Boulder 1995)

[4] Michele Maggiore : *A modern Introduction to Quantum Field Theory* (Oxford University Press, Oxford, UK, 2005)

[5] Franz Mandl, Graham Shaw : *Quantenfeldtheorie* (Aula Verlag, Wiesbaden 1993)

[6] Walter Greiner, Joachim Reinhard : *Quantenelektrodynamik* (Harri Deutsch, Thun, 2.Auflage 1995)

[7] Walter Greiner, Joachim Reinhard : *Feldquantisierung* (Harri Deutsch, Thun, 1993)

[8] Walter Greiner : *Quantentheorie (Spezielle Kapitel)* (Harri Deutsch, Thun, 4.Auflage 1993)

[9] Franz Gross : *Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory* (John Wiley, New York, 1993)

[10] Lewis H. Ryder : *Quantum Field Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2nd ed. 1996)

[11] Ashok Das : *Lectures on Quantum Field Theory* (World Scientific, New Jersey, USA, 2008)

[12] Claude Itzykson, Jean-Bernhard Zuber: *Quantum Field Theory* (McGraw-Hill, New York 1980)

[13] Kerson Huang: *Quantum Field Theory* (John Wiley & Sons, New York 1998)

[14] Taichiro Kugo: *Eichtheorie* (Springer, Berlin 1997)

[15] Ashok Das: *Field Theory – A Path Integral Approach* (World Scientific, Singapore, 2nd ed. 2006)

[16] Morton Hammermesh: *Group Theory and its Application to Physical Problems* (Addison-Wesley, Reading, MA, USA, 1962)

[17] A. W. Joshi: *Elements of Group Theory for Physicists* (Wiley Eastern Private, New Delhi 1973)

[18] Michael Tinkham: *Group Theory and Quantum Mechanics* (McGraw-Hill, New York 1964)

[19] H. Bacry: *Lectures on Group Theory and Particle Theory* (Gordon & Breach, London, 1977)

[20] Y. S. Kim, M. E. Noz: *Theory and Applications of the Poincaré Group* (D.Reidel, Dordrecht, Netherlands, 1986)

[21] Hagen Kleinert: *Pfadintegrale in Quantenmechanik, Statistik und Polymerphysik* (Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1993) http://users.physik.fu-berlin.de/~kleinert/kleiner_reb4/psfiles/

[22] Christoph Berger: *Teilchenphysik* (Springer, Berlin, 1992)

[23] Stephen Weinberg: *The Quantum Theory of Fields, Vol.I* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1995)

[24] J. Zinn-Justin : *Renormalization and Renormalization Group*, (11 pp, Les Houches 1998) http://ipht.cea.fr/Docspht//articles/t98/118/public/publi.pdf much overlap, but some notable differences (17pp): http://fds.oup.com/www.oup.co.uk/pdf/0-19-922719-5.pdf

[25] B. Delamotte : *A hint of renormalization*, Am. J. Phys. **72**, 170–184 (2004) arXiv:0212049 http://arxiv.org/abs/hep-th/0212049v3

[26] Kenneth G. Wilson : *Die Renormierungsgruppe* Spektrum d. Wiss. , S. 66–82 (Heft 10, 1979) http://www.spektrum.de/alias/pdf/sdw-10-79-s066-pdf/964530

[27] J. M. Jauch, F. Rohrlich : *The Theory of Photons and Electrons* (Springer, Berlin, 2nd, 1980)

[28] I. J. R. Aitchison, A. J. G. Hey : *Gauge Theories in Particle Physics* (A. Hilger LTD., Bristol, UK, 2nd 1989)

[29] P. Becher, M. Böhm, H. Joos : *Eichtheorien der starken und elektroschwachen Wechselwirkung* (B. G. Teubner, Stuttgart, 1981)

[30] S. F. Novaes : *Standard Model: An Introduction*, arXiv [hep-ph] 0001283 , 101 pp. (2000), http://arxiv.org/abs/hep-ph/0001283v1

[31] *Die Partielle Ableitung*, APIN Mitteilung sd77211 (2010) http://www.astrophys-neunhof.de/mtlg/sd77211.pdf

[32] *Anmerkungen zur Speziellen Relativitätstheorie* APIN Mitteilung sd05211 (2010) http://www.astrophys-neunhof.de/mtlg/sd05211.pdf

[33] James D. Bjorken, Sidney D. Drell : *Relativistic Quantum Mechanics* (Mc-Graw-Hill, New York, 1964)

[34] E. Schrödinger: *Über die kräftefreie Bewegung in der relativistischen Quantenmechanik*,
Sitz. Ber. Preuß. Ak. Wiss., Phys.-Math. **24**, 418–428 (1930)

[35] P. A. M. Dirac: *The Quantum Theory of the Electron*,
Proc. Roy. Soc. (London) A **117**, 610–624 (1928)
http://rspa.royalsocietypublishing.org/con
tent/117/778/610.short

[36] L. H. Thomas: *The Motion of the Spinning Electron*,
Nature **117**, 514 (1926), http://doi.org/10.1038/117514a0

[37] *Elemente der Funktionentheorie*, APIN Mitteilung sd98027 (2010)
http://www.astrophys-neunhof.de/mtlg/sd98027.pdf

[38] *Quantensprünge*, (APIN, Nürnberg, 2010)
http://www.astrophys-neunhof.de/mtlg/sd67113.pdf

[39] P. A. M. Dirac: *The Principles of Quantum Mechanics* (Clarendon Press, Oxford, 4th ed. 1958)

[40] W. Pauli: *The Connection Between Spin and Statistics*,
Phys. Rev. **58**, 716–22 (1940)
http://doi.org/10.1103/PhysRev.58.716

[41] Carl Friedrich von Weizsäcker: *Aufbau der Physik*
(Carl Hanser Verlag, München 1985)

[42] G. Gründler: *The zero-point energy of elementary quantum fields*,
APIN Circular se86311 (2017)
https://www.astrophys-neunhof.de/mtlg/se86311.pdf
arXiv 1711.03877 (2017), https://arxiv.org/abs/1711.03877

[43] P. A. M. Dirac: *The Lagrangian in Quantum Mechanics*,
Phys. Zeitschr. d. Sowjetunion **3**, 64–72 (1933)
reprinted in *Selected Papers on Quantum Electrodynamics* (ed. by J. Schwinger, Dover Publications, New York, 1958)

[44] R. Feynman: *Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics*, Rev. Mod. Phys. **20**, 367–87 (1948)

[45] A. Houriet, A. Kind: *Classification invariante des termes de la Matrice* $\boldsymbol{S}$, Helv. Phys. Acta **22**, 319–330 (1949) http://dx.doi.org/10.5169/seals-112007

[46] G. C. Wick: *The evaluation of the Collision Matrix*, Phys. Rev. **80**, 268–272 (1950)

[47] W. Heisenberg: *Über die in der Theorie der Elementarteilchen auftretende universelle Länge*, Ann. d. Phys. (5) **32**, 20–33 (1938)

[48] L. D. Landau, E. M. Lifschitz: *Lehrbuch der Theoretischen Physik, Band II* (Harri Deutsch, Thun, 12. Auflage 1997)

[49] B. Rossi, D. B. Hall: *Variation of the Rate of Decay of Mesotrons with Momentum*, Phys. Rev. **59**, 223–228 (1941) http://dx.doi.org/10.1103/PhysRev.59.223

[50] Christian Møller: *Zur Theorie des Durchgangs schneller Elektronen durch Materie*, Ann. d. Phys. **406**, 531–585 (1932)

[51] H. J. Bhabha: *The Scattering of Positrons by Electrons . . .* , Proc. Roy. Soc. Lond. **A 154**, 195–206 (1936) http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/154/881/195.full.pdf+html

[52] Arthur H. Compton: *A Quantum Theory of the Scattering of X-rays by Light Elements*, Phys. Rev. **21**, 483–502 (1923)

[53] D. R. Yennie, S. Frautschi, H. Suura: *The infrared divergence phenomena and high-energy processes*, Annals of Physics (NY) **13**, 379–452 (1961)

[54] Wolfgang Bietenholz, Lilian Prado: *40 Years of Calculus in* $4+\epsilon$ *Dimensions*, arXiv:1211.1741 (2012) http://arxiv.org/pdf/1211.1741.pdf

[55] D. Hanneke, S. Fogwell Hoogerheide, G. Gabrielse: *Cavity Control of a Single-Electron Quantum Cyclotron: Measuring the Electron Magnetic Moment*, Phys. Rev. A **83**, 052122 (2010) http://pra.aps.org/pdf/PRA/v83/i5/e052122

[56] Takahashi Y.: *On the Generalized Ward Identity*, Nuovo Cimento **6**, 371–375 (1957)

[57] J. C. Ward: *An Identity in Quantum Electrodynamics*, Phys. Rev. **78**, 182 (1950)

[58] R. Karplus, M. Neuman: *Non-Linear Interactions between Electromagnetic Fields*, Phys. Rev. **80**, 380–385 (1950)

[59] W. Heisenberg: *Über den Bau der Atomkerne* Zeits. Phys. **77**, 1–11 (1932)

[60] C. N. Yang, R. L. Mills: *Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance*, Phys. Rev. **96**, 191–195 (1954)

[61] Murray Gell-Mann: *Symmetries of Barions and Mesons*, Phys. Rev. **125**, 1067–1084 (1962)

[62] Torsten Fließbach: *Allgemeine Relativitätstheorie* (Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, $^{(4)}$2004)

[63] C. L. Bennet et al.: *Nine-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Final Maps and Results*, Astrophys. J. Suppl. Ser. **208**:20, 54pp (2013) http://dx.doi.org/10.1088/0067-0049/208/2/20

[64] I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew: *Taschenbuch der Mathematik* (Harry Deutsch, Zürich und Frankfurt/Main, 1973)